

BAYERISCHE AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE

SITZUNGSBERICHTE

JAHRGANG

1958

MÜNCHEN 1958

VERLAG DER BAYERISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung München

Lorentzinvariante Wellengleichungen für Mehrbahnsysteme

Von Fritz Bopp, München

Mit einem Anhang

Über Deltafunktionen

Von Detlef Laugwitz, Darmstadt

Mit 9 Figuren

Vorgetragen am 7. November 1958

Übersicht

§ 1. Einführung	168
§ 2. Mehrteilchen-Schrödingergleichung bei Einschluß von Erzeugungs- und Vernichtungsprozessen	173
§ 3. Formal-lorentzinvariante Schreibung der allgemeinen Wellengleichung des Mehrkörperproblems	176
§ 4. Fusionstheorie in Partikeldarstellung	179
§ 5. Erhaltungssätze und Mittelwerte physikalischer Größen	184
§ 6. Zur Integrationstheorie der Wellengleichung	189
§ 7. Zweibahn-Fusion	196
§ 8. Streuungsfreie Zweibahn-Zustände	204
§ 9. Das Problem: Streuprozesse mit endlichem Wirkungs- querschnitt	209
§ 10. Anmerkungen zum Deutungsproblem	212
§ 11. Der unendlich feine Gitterraum	216
§ 12. Anhang: Über δ -Funktionen	220

§ 1. Einführung

Es gibt zwei Wege zu quantentheoretischen Gleichungen:

1. den wohlbekannten korrespondenzmäßigen, der sich auf den kanonischen Formalismus stützt,
2. den auf den Prinzipien der Quantentheorie aufbauenden, im übrigen phänomenologischen, auf dem Pauli bei der Formulierung der Spintheorie vorangegangen ist.¹

Andere Beispiele für das phänomenologische Vorgehen liefern die Fermische Neutrinotheorie² und die Heisenbergsche Theorie der Kernkräfte.³ Der zweite Weg empfiehlt sich mindestens dann, wenn die klassisch korrespondierende Theorie nicht sicher bekannt ist, also z. B. im Falle des relativistischen Mehrkörperproblems. Wir schlagen darum bei der Formulierung der Theorie der Elementarteilchen den zweiten Weg ein.

Unabhängig von der Wahl der Zugangs ist die Wahl des Modells. Zur Beschreibung von Systemen von Teilchen sind zwei Modelle im Gebrauch, nämlich

1. das Teilchenmodell, das bisher nur für nichtrelativistische Teilchensysteme mit bestimmter Teilchenzahl formuliert ist,
2. das Wellenmodell, dessen Brauchbarkeit für die Quantentheorie der Teilchen ebenfalls für nichtrelativistische Teilchensysteme mit bestimmter Teilchenzahl und außerdem für relativistische Teilchen ohne Wechselwirkung bewiesen und in anderen Fällen wahrscheinlich gemacht ist.

Wir werden hier die Partikeldarstellung bevorzugen.

Die dabei zu erwartenden und vielleicht noch nicht völlig überwundenen Schwierigkeiten⁴ brauchen uns schon deshalb

¹ W. Pauli, Z. Phys. 43, 601 (1927), s. auch Fußnoten 2 und 3. – Im allgemeinen schlägt man den zweiten Weg nur bei Systemen mit zwei Einstellmöglichkeiten ein. Aber es ist auch in anderen Fällen vorteilhaft, z. B. kann man so auch zur Schrödingergleichung gelangen.

² E. Fermi, Z. Phys. 88, 161 (1934).

³ W. Heisenberg, Z. Phys. 77, 1 (1933).

⁴ Die Deutung der Wellenfunktionen nichtrelativistischer Schrödingergleichung läßt sich nicht ohne weiteres übertragen, weil einander entsprechende

nicht abzuschrecken, weil sich auch die der Quantentheorie der Felder als kaum überwindlich erwiesen haben.⁵ Es gibt zwei Gründe für die Bevorzugung der Partikeldarstellung.

Der erste Grund: In der Quantentheorie der Felder werden Teilchensysteme durch Besetzungszahlen beschrieben. Zweifellos kann man jedem Teilchensystem einen Satz von Besetzungszahlen zuordnen. Aber es gibt Systeme von Besetzungszahlen, die sicher kein Gegenstück in der Teilchenwelt haben. Man denke z. B. daran, daß alle Punkte in einem bestimmten Volumen einfach besetzt sein können, was zwar kein stationärer Zustand wäre, aber doch ein mathematisch möglicher Anfangszustand sein kann.

Die Besetzungszahlen beschreiben also neben möglichen Konfigurationen auch unmögliche. Überzählige Konfigurationen sind in der Quantentheorie tragbar, wenn es keine Übergänge zwischen möglichen und unmöglichen gibt. Für die Quantentheorie der Wellenfelder als einer Teilchentheorie würde das bedeuten, daß Punktmengen vom Maß Null dieses Maß bewahren müßten. Tatsächlich ist die Brauchbarkeit der Quantenfeldtheorie nur in denjenigen Fällen wirklich bewiesen, in denen diese Selektionsforderung trivialerweise erfüllt ist. In allen anderen Fällen ist es nicht bekannt, wie sie sich auf den Ansatz der Hamiltonoperatoren auswirkt. Es ist möglich, daß die danach allein zulässigen Hamiltonoperatoren sehr kompliziert sind.

Der zweite Grund: Was wir hier unter relativistischen Wellengleichungen des Mehrkörperproblems verstehen werden, ist der Quantenfeldtheorie nicht fremd. Ein Weg von den Quantenfeldgleichungen zu Aussagen über konkrete Probleme führt über eine Entwicklung nach Basisamplituden,⁶ die aus der

Dichten im relativistischen Fall nicht positiv definit sind; s. S. S. Schweber, H. A. Bethe, F. de Hoffmann, „Mesons and Fields“, Band I: „Fields“, Evanston (Ill.) 1955, S. 399.

⁵ Tatsächlich ist die Schwierigkeit in beiden Fällen dieselbe. Es geht auch in der Quantenfeldtheorie um das Problem der Indefinitheit, wie das Lee-Modell gezeigt hat:

Lee, Phys. Rev. 95, 1329 (1954);

W. Pauli, G. Källén, Mat. Fys. Medd. Dan. Vid. Selsk. 30, Nr. 9 (1955).

⁶ V. A. Fock, Z. Phys. 75, 622 (1932).

Vakuumamplitude durch mehr oder weniger häufige Iterationen von Erzeugungsprozessen entstehen. Die Gleichungen für die Entwicklungskoeffizienten sind Mehrkörperwellengleichungen. Gelingt es, die Koeffizientengleichungen direkt anzusetzen, so ersparen wir uns den Weg von den Quantenfeldgleichungen zu den Koeffizientengleichungen, der zu rein mathematischen Komplikationen, also zu solchen nichtphysikalischer Art, führen kann.

Aus diesen Gründen bevorzugen wir die Partikeldarstellung, in der, soweit wir wissen, alle möglichen Konfigurationen vorkommen können und keine unmöglichen vorzukommen brauchen. Die erste Frage, vor die wir damit gestellt sind, lautet: Wie beschreibt man in der Partikeldarstellung Erzeugungs- und Vernichtungsprozesse?

Die Antwort findet sich in § 2. In ihm schreiben wir die Schrödingergleichung für das Mehrkörperproblem so, daß sie noch auf vorrelativistischer Stufe Erzeugungen und Vernichtungen umschließt. Das ist zwar physikalisch inkonsequent, weil diese Prozesse in Wirklichkeit stets relativistisch sind. Doch widerspricht es weder der Logik, noch den Prinzipien der Quantentheorie, nichtrelativistische Erzeugungs- und Vernichtungsprozesse anzunehmen, und für den Ausbau der Theorie ist eine Unterteilung des Weges in übersichtbare Abschnitte zweckmäßig.

Der nächste Schritt besteht darin, die neuen Gleichungen erst mehrzeitig⁷ und dann lorentzinvariant zu schreiben. Das ist ein rein formaler Akt, der in Anlehnung an die Diracgleichung leicht möglich ist. Er führt uns in § 3 zu einer Gleichung, die mit der Bethe-Salpetergleichung⁸ verwandt ist, sich von ihr aber auch in recht bemerkenswerter Weise unterscheidet. Insbesondere ist unsere Gleichung von erster Ordnung, während sich die Ordnung der Bethe-Salpetergleichung nach der Teilchenzahl richtet.

In § 4 schließen wir uns der Heisenbergschen Hypothese an,⁹ daß das Neutrino-feld, charakterisiert durch einfache oder

⁷ Siehe G. Wentzel, Einführung in die Quantentheorie der Wellenfelder, Wien 1943, § 18.

⁸ Siehe Fußnote 4.

⁹ W. Heisenberg, Rev. Mod. Phys. 29, 269 (1957). – W. Heisenberg (ursprünglich mit W. Pauli), „On the isospin group in the theory of elementary particles“ (Vorabdruck).

doppelte Diracspinoren, eine Art Urfeld sei, aus dem alle anderen Felder aufgebaut werden. Für die Partikeldarstellung bedeutet dies, daß alle Teilchen entweder elementare Fermionen sind oder im De Broglieschen Sinne durch Fusion¹⁰ aus solchen entstehen, wobei es übrigens anders als bei De Broglie und seinen Nachfolgern nicht nur auf die „Kinematik“ der Fusion, sondern vor allem auf ihre „Dynamik“ ankommt.

Mit Feynmangraphen¹¹ argumentierend, kann man folgern, daß die Heisenbergsche Hypothese zu Wellengleichungen führen muß, die formal so aussehen, als gäbe es keine Erzeugungs- und Vernichtungsprozesse. Tatsächlich kommen diese in ähnlicher Weise herein, wie die Erzeugung von Elektronenpaaren in einem äußeren Feld¹² bei Anwendung der Diracgleichung, die formal die Struktur einer Gleichung für ein Teilchen hat.

Bekanntlich ist der Feynmangraph in diesem Beispiel ein Polygonzug aus zwei Strahlen, von denen der eine aus der unendlich fernen Zukunft kommend zu endlicher Zeit irgendwo im Felde endet, während der andere von diesem Endpunkt wieder in die unendlich ferne Zukunft führt. Nennen wir einen solchen Linienzug „Bahn“, gleichviel ob es zeitrückwärts laufende Teile gibt oder nicht, so können wir sagen, daß die gewöhnliche Diracgleichung eine „Einbahn“-Gleichung ist und daß die Wellengleichung, zu der wir in § 4 kommen, in Teile zerfällt, die Ein-, Zwei-, Dreibahnwellengleichungen usw. sind.

Wie bei den Quantenfeldgleichungen in Raum-Zeit ergeben sich aus den verschiedenen Symmetrieeigenschaften Kontinuitätsgleichungen, hier allerdings solche im $4n$ -dimensionalen Raum, wenn n die Anzahl der Feynman-Bahnen ist. Aus derartigen Kontinuitätsgleichungen folgen aber nur dann Er-

¹⁰ L. de Broglie, „*Theorie générale des particules à spin (méthode de fusion)*“, Paris, Gauthier-Villars, 1943. – P. Jordan, Z. Phys. 93, 464 (1935), 98, 759 (1936). – H. Hönl, „*Feldmechanik des Elektrons und der Elementarteilchen*“ in Erg. d. ex. Naturw. 26, 291–382 (1952); hier: S. 370ff. – Inzwischen hat es sich herausgestellt, daß es neben der Fusion vom DeBroglieschen Typus noch andere Arten von Fermionenverbänden gibt; sobald drei und mehr Fermionen beteiligt sind.

¹¹ H. P. Feynman, Phys. Rev. 76, 749, 769 (1949).

¹² Vgl. z. B. F. Hund, „*Materie als Feld*“, Springer 1954; s. speziell Ziff. 77.

haltungssätze, wenn die Lösungen der Wellengleichungen bestimmten Bedingungen genügen.¹³

Die Erhaltungssätze liefern Dichtefunktionen in Raum-Zeit und damit Operatoren, und zwar wie in der nichtrelativistischen Quantentheorie zunächst nur für diejenigen physikalischen Größen, für die Erhaltungssätze gelten. Von diesen gelangen wir wie gewöhnlich zu den Operatoren beliebiger Größe.

Die Grundlagen der Integrationstheorie der Zweibahnwellengleichung werden in § 6 entwickelt. Auf sie stützten wir uns bei der Ableitung der Lösungen für fusionierte Teilchen in § 7. Man erhält bei geeigneter Wahl der Wechselwirkungskonstanten im Isosingulettzustand¹⁴ für das Feld eines fusionierten Paares von Fermionen die Maxwell'schen Gleichungen und im Isotriplettzustand Wellengleichungen für Teilchen mit dem Spin 0 und mit endlicher Masse. Wahrscheinlich sind es pseudoskalare Teilchen.

Es gibt Zustände für Neutrinopaare, in denen die beiden Neutrinen ohne Wechselwirkung sind, so daß keine Streuung stattfindet. Diese werden in § 8 angegeben. Im allgemeinen liefern zwei Wellen für freie Teilchen keine Lösung der Zweibahngleichung. In diesen Fällen sollte man Streuung erwarten. Tatsächlich wird aber das Lösungsmanko, wie in § 9 gezeigt wird, ganz und gar von virtuellen fusionierten Paaren gedeckt. Es gibt also keine Streuung von Neutrinen an Neutrinen, obwohl die Wechselwirkung nicht in allen Fällen gleich 0 ist.^{14a}

Man darf erwarten, daß zwischen Neutrinen und fusionierten Teilchen und zwischen solchen untereinander Streuprozesse möglich sind. Daß gegenüber dem Zweineutrinenfall etwas Besonderes passieren kann, zeigt sich darin, daß Austauschprozesse als neue Möglichkeit der Wechselwirkung hinzukommen. Auch ist in § 9, ohne im einzelnen auf das Dreibahnproblem einzugehen, ein mathematisches Argument für die Existenz von Streuungen komplexer Teilchen angegeben.

¹³ Siehe Fußnote 4.

¹⁴ Dieses und das folgende Ergebnis ist im Einklang mit einer Feststellung von Heisenberg; s. Fußnote 9, Vorabdruck.

^{14a} Nach einer dankenswerten mündlichen Mitteilung stimmt auch dieses Ergebnis mit Folgerungen aus der Heisenbergschen Theorie überein.

Es bleibt noch das Deutungsproblem übrig. Dieses untersuchen wir in § 10. Bei den hier angegebenen Lösungen kann kein Zweifel bestehen, was sie bedeuten. Sie legen die Hypothese nahe, Mehrbahnwellenfunktionen dadurch zu deuten, daß man sie aus Einzelteilchenfunktionen, aus denen einfacher Fermionen und denen fusionierter Partikel aufbaut. Im nichtrelativistischen Fall führt diese Zerlegung zu den bekannten Wahrscheinlichkeiten. Im relativistischen Fall ergeben sich Wahrscheinlichkeitsdichten, die von den Dichten in den Kontinuitätsgleichungen verschieden sind. Diese auf den ersten Blick befremdliche Situation wird untersucht. Wenn auch eine abschließende Beurteilung noch nicht möglich ist, so gibt es doch gute Gründe für die Auffassung, daß das Deutungsproblem mit der genannten Hypothese gelöst ist.

Zum Schluß sei bemerkt, daß wir die Analysis von Schmieden und Laugwitz¹⁵ benutzen, in der mit aktuell unendlich kleinen Zahlen gerechnet werden kann. In § 12 findet sich, von Laugwitz verfaßt, eine kurze Einführung in diese Analysis, für die ich ihm herzlich danke. § 11 enthält eine Darstellung dieser Rechenhilfsmittel, die an das aus der Feldtheorie bekannte Verfahren anknüpft, physikalische Systeme in endlichen Volumen zu betrachten.

§ 2. Mehrteilchen-Schrödingergleichung bei Einschluß von Erzeugungs- und Vernichtungsprozessen

Der Einfachheit halber betrachten wir hier nur Teilchen von einer Art. Die Verallgemeinerung auf mehrere Arten ist leicht möglich. Wenn Teilchenerzeugungen und -vernichtungen vorkommen, kann man die Konfiguration des Systems nicht mehr mit einem einzigen Satz von Ortsvektoren beschreiben. Vielmehr hängt die Zahl der Ortsvektoren $\mathbf{r}_1 \dots \mathbf{r}_n$ von der jeweils vorhandenen Anzahl von Teilchen ab. Die Teilchenzahl n muß

¹⁵ C. Schmieden, D. Laugwitz, „Eine Erweiterung der Infinitesimalrechnung“, Math. Z. 69, 1 (1958).

daher in die quantentheoretische Beschreibung als Variable einbezogen werden, so daß die Konfiguration so lautet:

$$(2.1) \quad K \equiv \{n; \mathbf{r}_1 \dots \mathbf{r}_n\}.$$

Der Zustand eines quantenmechanischen Systems wird durch Schrödingeramplituden beschrieben. Das sind Funktionen der Konfiguration K und der Zeit t :

$$(2.2) \quad \psi = \psi(K, t).$$

Setzen wir darin die speziellen Konfigurationen aus (2.1) ein, n als Index schreibend, so erhalten wir die Schrödingeramplituden:

$$(2.3) \quad \psi = \psi_n(\mathbf{r}_1 \dots \mathbf{r}_n, t).$$

Ihre Bedeutung ergibt sich aus folgenden Gleichungen: Für $n \neq 0$ ist

$$(2.4) \quad dW_n = |\psi_n(\mathbf{r}_1 \dots \mathbf{r}_n, t)|^2 dV_1 \dots dV_n$$

die Wahrscheinlichkeit dafür, daß es n Teilchen gibt und daß man sie in den Volumenelementen $dV_1 \dots dV_n$ bei den Punkten $\mathbf{r}_1 \dots \mathbf{r}_n$ findet;

$$(2.5) \quad W_0 = |\psi_0(t)|^2$$

ist die Wahrscheinlichkeit, daß kein Teilchen vorhanden ist. Nach dieser Bedeutung der Amplituden muß die Summe

$$(2.6) \quad |\psi_0(t)|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \int |\psi_n(\mathbf{r}_1 \dots \mathbf{r}_n, t)|^2 dV_1 \dots dV_n = 1$$

sein.

Im Laufe der Zeit transformieren sich die Schrödingeramplituden linear und infolge von (2.6) unitär. Die infinitesimale Transformation lautet:

$$(2.7) \quad i\hbar \frac{\partial \psi_m(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = \sum_{n=0}^{\infty} \int H_{mn}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \psi_n(\mathbf{r}', t) dV'^{(n)}.$$

Darin steht $\mathbf{r}$ für $\mathbf{r}_1 \dots \mathbf{r}_m$, $\mathbf{r}'$ für $\mathbf{r}'_1 \dots \mathbf{r}'_n$, und $dV'^{(n)}$ bezeichnet die Volumenintegration über die n Orte $\mathbf{r}'_1 \dots \mathbf{r}'_n$. Wenn $n =$

$= 0$ ist, entfällt natürlich die Integration. Analog zu (2.5) erhalten wir Terme von der Form:

$$H_{m0}(\mathbf{r}) \psi_0(t).$$

Doch schreiben wir diese Ausnahmeterme nicht mehr besonders an; wir definieren einfach:

$$\int H_{m0}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \psi_0(\mathbf{r}', t) dV'^{(0)} \equiv H_{m0}(\mathbf{r}) \psi_0.$$

Mit dieser Verabredung und unter Verwendung der gerade eingeführten Abkürzungen $\mathbf{r}$ und $\mathbf{r}'$ lautet Gl. (2.6) nunmehr:

$$(2.8) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \int |\psi_n(\mathbf{r}, t)|^2 dV^{(n)} = 1.$$

Wegen des unitären Charakters der Transformation der Schrödingeramplituden muß der Schrödingeroperator $H_{mn}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ hermitesch sein. In unserem Fall lautet die Hermitezitätsbedingung:

$$(2.9) \quad H_{mn}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')^* = H_{nm}(\mathbf{r}', \mathbf{r}).$$

Man beachte, daß sich auf beiden Seiten der Gleichung der erste Index auf das erste Argument und der zweite auf das zweite bezieht.

Gl. (2.7) ist die verallgemeinerte Schrödingergleichung. Sie ist, sobald man die Konfiguration kennt, allein durch die Prinzipien der Quantenmechanik bestimmt. Für konkrete Anwendungen muß man den Operator $H_{mn}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ explizit angeben. Seine Bestimmung ist in erster Linie Sache der Erfahrung. Doch gibt es eine Anzahl von Gesichtspunkten allgemeiner Art, von Basiserfahrungen, die die Willkür im Ansatz von H beträchtlich einschränken. Dazu gehören Symmetrieeigenschaften, naheliegende Hypothesen wie die der Lokalisierbarkeit u. ä., die oft klassischer und quantischer Physik gemeinsam sind und die u. U. den Schrödingeroperator bis auf Naturkonstanten festlegen können.

Wir brauchen in diesem Abschnitt hierauf um so weniger einzugehen, als eine nichtrelativistische Schrödingergleichung

für das Mehrkörperproblem mit Erzeugungs- und Vernichtungsprozessen nur im Hinblick auf die Form der Schrödingergleichung (2.7) und die der Hermitezitätsbedingung (2.9) von Interesse ist.

§ 3. Formal-lorentzinvariante Schreibung der allgemeinen Wellengleichung des Mehrkörperproblems

Die eigentlichen Schwierigkeiten ergeben sich erst beim Übergang zur relativistischen Theorie. Wir beginnen mit dem formalen Schritt, die nichtrelativistische Wellengleichung (2.7) so umzuformen, daß sie lorentzinvariant wird. Dabei kümmern wir uns zunächst nicht um das Deutungsproblem. Ihm versuchen wir erst in den nächsten Paragraphen beizukommen.

Es ist von vornherein klar, daß wir im relativistischen Bereich nicht mehr von einer einzigen Zeit sprechen können. Denn wenn wir in einem bestimmten Koordinatensystem Teilchen zur gleichen Zeit betrachten, so sind sie in einem anderen System im allgemeinen nicht mehr gleichzeitig. An die Stelle von $\psi_n(\mathbf{r}_1 \dots \mathbf{r}_n, t)$ treten also die Funktionen

$$(3.1) \quad \psi_n(x_1 \dots x_n) \text{ mit } x_i = (t_i, \mathbf{r}_i).$$

Die Zuordnung zwischen den mehrzeitigen Wellenfunktionen und den einzeitigen erfolgt wie bei Dirac¹⁶ durch die Gleichungen:

$$(3.2) \quad \psi_n(\mathbf{r}_1 \dots \mathbf{r}_n, t) = \{\psi_n(x_1 \dots x_n)\}_{t_1 = \dots = t_n = t}$$

und

$$(3.3) \quad \frac{\partial \psi_n(\mathbf{r}_1 \dots \mathbf{r}_n, t)}{\partial t} = \left\{ \left(\frac{\partial}{\partial t_1} + \dots + \frac{\partial}{\partial t_n} \right) \psi(x_1 \dots x_n) \right\}_{t_1 = \dots = t_n = t}.$$

Allein durch den Übergang zur Mehrzeitdarstellung erhält man noch keine relativistischen Gleichungen. Diese ergeben

¹⁶ Siehe Fußnote 7.

sich erst, wenn man die Zeitableitungen in (3.3) durch relativistisch invariante Ableitungen ersetzt. Dazu ist es nötig, mehrkomponentige Wellenfunktionen einzuführen.¹⁷ Jeder Teilchenkoordinate entsprechend haben wir einen Spinorindex ν :

$$(3.4) \quad \psi_{n, \nu_1 \dots \nu_n} (x_1 \dots x_n).$$

Zunächst wird man daran denken, daß alle Indizes wie beim Diracspinor von 1 bis 4 laufen und daß sich der 4^n -komponentige Spinor (3.4) bei Lorentztransformation wie das direkte Produkt aus n Diracspinoren transformiert.

Natürlich ist das eine spezielle Annahme, die sich auf die Darstellung $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ der Lorentzgruppe¹⁷ stützt. Jede andere Darstellung ist ebenfalls möglich; sogar reduzible sind zugelassen. Heisenbergs Prozeß der „Verdoppelung“ führt auf eine achtkomponentige Darstellung.

Hier wollen wir zwar voraussetzen, daß die Indizes von 1 bis 8 laufen,¹⁸ nehmen aber an, daß keine Operatoren zugelassen sind, die die ersten und die letzten vier Komponenten ineinander transformieren. Daraus folgt, daß man eine Art Spinfunktion abspalten kann, die des Isospins,¹⁹ wenn man die Verdoppelung auf den Isospin zurückführt, so daß am Ende nur Gleichungen mit vierwertigen Indizes übrigbleiben. Die Bedeutung der Verdoppelung beruht allein darauf, daß die abgespaltene Funktion wie eine Spinfunktion verschiedenen Symmetrieklassen angehören kann, so daß es trotz Pauliprinzip für den übrigbleibenden 4^n -komponentigen Spinor mehrere Möglichkeiten gibt, z. B. im Falle $n = 2$ Isosingulett- und Isotriplettzustände.²⁰

Praktisch haben wir also nicht 8^n , sondern nur 4^n Wellenfunktionen. Wie in der Diracgleichung fassen wir sie zu einer

¹⁷ F. L. Bauer, Bay. Akad. d. Wiss., Math.-naturw. Kl., 1952.

¹⁸ In Anlehnung an Heisenberg, a. a. O. 9 (Vorabdruck).

¹⁹ Natürlich ist die Einführung eines Isospins für das Neutrino mindestens sehr problematisch. Wir setzen uns hier über diese Schwierigkeiten mit der schon eingangs angeführten Bemerkung hinweg, daß wir einstweilen nur ein Modell anstreben, das zu „vernünftigen“, wenn auch noch nicht zu „richtigen“ Ergebnissen führt.

²⁰ Dieses einfache „Ankleben“ des Isospins ist erst recht problematisch.

Spaltenmatrix zusammen. Steht außerdem x für den ganzen Satz der Viererorte $x_1 \dots x_n$, so haben wir

$$(3.5) \quad \psi_n(x) \equiv \{\psi_{n, v_1 \dots v_n}(x_1 \dots x_n)\}.$$

An die Stelle von Gl. (2.7) tritt also der Ausdruck:²¹

(3.6)

$$(\gamma_1^\mu \partial_{1\mu} + \dots + \gamma_m^\mu \partial_{m\mu}) \psi_m(x) = \sum_n \int V_{mn}(x, x') \psi_n(x') d^{4n} x'.$$

Darin ist $\partial_{i\mu}$ der Vierergradient bezüglich x_i und γ_i^μ sind die auf v_i wirkenden Diracmatrizen. Gl. (3.6) stellt eine relativistische Wellengleichung dar, wenn $V_{mn}(x, x')$ translations- und lorentzinvariant ist. Dazu gehört, daß die V_{mn} nur lorentzinvariante Kombinationen der γ_i^μ enthalten. Die V_{mn} sind bei festem m, n Rechteckmatrizen mit 4^m Zeilen und 4^n Spalten. Die γ auf der linken Seite von Gl. (3.6) kann man als m -fache Kroneckerprodukte schreiben; z. B. ist bei einer Gesamtzahl von m Faktoren:

$$(3.7) \quad \gamma_2^\mu = 1 \times \gamma^\mu \times 1 \times \dots \times 1.$$

Wir erhalten also Matrizen, deren Summen in der Fusionstheorie von DeBroglie²² eine Rolle spielen, was nicht zu überraschen braucht, weil das raum-zeitliche Vektormodell beim relativistischen Mehrkörperproblem ebenso unvermeidlich ist wie das räumliche Vektormodell in der nichtrelativistischen Theorie.

Nochmals betonen wir, daß Gl. (3.6) hier rein formal konstruiert worden ist. Darum ist es nicht sicher, daß man die Wellenfunktion wie in der nichtrelativistischen Theorie statistisch deuten kann. Wir werden sogar sehen, daß dies in üblicher Weise nicht möglich ist. Doch wird sich zugleich herausstellen, daß wir den physikalischen Größen Operatoren und diesen Mittelwerte zuordnen können, so daß man einiges über relativistische Mehrteilchen-Wellengleichungen lernen kann, ohne auf das Deutungsproblem eingehen zu müssen.

²¹ Man beachte, daß die Ableitungen nur in erster Ordnung vorkommen. Dadurch unterscheidet sich unsere Gleichung von den Bethe-Salpeterschen.

²² a. a. O. 10.

§ 4. Fusionstheorie in Partikeldarstellung

Je nach dem Ansatz der Wechselwirkung $V_{mn}(x, x')$ in (3.6) erhält man verschiedenartige Modelle für Teilchentheorien in Partikeldarstellung. Es kommt gegenwärtig nicht sehr darauf an, welches Modell wir zur Erprobung des Ansatzes verwenden, wenn sich nur eine in sich konsistente Theorie ergibt. Natürlich ist es zweckmäßig, sich, soweit das vorausschbar ist, nicht zu weit von der die Wirklichkeit beschreibenden Theorie zu entfernen.

Einen willkommenen Anhaltspunkt zur Auswahl des Spezialfalls liefert die Heisenbergsche Theorie.²³ Anlehnung an sie – von einer Ableitung aus ihr können wir nicht sprechen²⁴ – hat zugleich den Vorteil, daß wir zu einer unabhängigen Prüfung ihrer Aussagen gelangen. Bereits bei unserer Beschränkung auf acht- bzw. vierkomponentige Spinoren haben wie die Heisenbergsche Theorie zum Vorbild genommen.

Eine sehr viel weitergehende Einschränkung ergibt sich aus folgender Betrachtung. Bei Heisenberg gibt es vor dem Prozeß der Verdoppelung nur eine Sorte von Feldoperatoren, die auf die Erzeugung und Vernichtung von Neutrinen und Antineutrinen bezogen ist. Daraus folgt, daß andere Teilchen und Quanten, z. B. Lichtquanten, ähnlich wie in der Fusionstheorie von DeBroglie als Verschmelzungen von Fermionen betrachtet werden müssen.

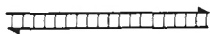


Fig. 1. Lichtquantgraph nach der Fusionstheorie

Verwendet man die Graphenmethode, so ist ein Lichtquant ein Gebilde von obenstehender Form. Ein Fermion und ein

²³ a. a. O. 9.

²⁴ Einen einfachen strengen Zusammenhang zwischen der Heisenbergschen Feldgleichung und den hier angegebenen Gleichungen kann man nicht erwarten, wenn man nicht mindestens das Heisenbergsche l^2 durch ϵ^4/l^2 ersetzt mit einem gemäß (6. 26) definierten ϵ . Es ist nicht ausgeschlossen, daß die genau entsprechende Feldgleichung auch sonst noch von den Heisenbergschen verschieden ist. Vgl. hierzu Fußnote 39.

Antifermion laufen zusammen und bleiben beständig beieinander. Absichtlich vermeiden wir es, von Elektron und Positron oder von Neutrino und Antineutrino zu sprechen. Denn über die Natur der Fermionen in einem fusionierten Teilchen kann man nichts sagen.

Zwischen einem Neutrino und einem Antineutrino kann eine Fermikopplung bestehen, die zu einer Streuung nach Art von Fig. 2 führt. Die Streuung kann aber auch Folge eines Lichtquantenaustausches sein, der, wie Fig. 3 zeigt, durch einen Möller-



Fig. 2. Fermistreuung zweier Neutrinen

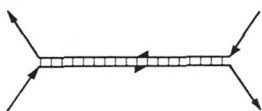


Fig. 3. Möllerstreuung zweier Neutrinen

graphen beschrieben wird, in dem an die Stelle des Lichtquants ein fusioniertes Paar tritt.

Es ist recht interessant zu sehen, wie dieser Graph einerseits den Lichtquantengraphen der Quantenelektrodynamik und andererseits denjenigen mit universeller Fermikopplung gleicht. Hier gibt es also nur noch eine Art von Wechselwirkung, wie die folgenden Bilder von „Ecken“ deutlich erkennen lassen.

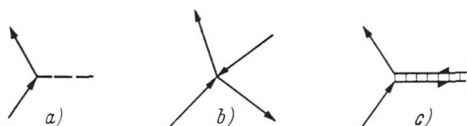


Fig. 4. Ecke a) in der Quantenelektrodynamik, b) bei universeller Fermiwechselwirkung, c) bei Mitwirkung fusionierter Paare

Für uns ist ein anderer Punkt wichtiger. Da Fermionenlinien in einem Feynman-Graph durchlaufende oder geschlossene „Bahnen“ sind, die keine Enden, keine Quellen und Senken haben, besteht unter der Heisenbergschen Annahme jeder Graph aus einer bestimmten Anzahl von Bahnen. Die Diracgleichung

beschreibt Einbahnzustände. Die Graphen in den Fig. 1–3 stellen Zweibahnprozesse dar.²⁵

Aus jedem Graph der Quantenelektrodynamik können wir einen der Fusionstheorie ableiten, indem wir alle Photonenlinien gemäß Fig. 1 durch Linien für Fermionenpaare ersetzen und annehmen, daß Elektronen durch einfache Fermionenlinien dargestellt werden (und nicht etwa durch dreifache, was hier nicht ausgeschlossen ist und zu ähnlichen, wenn auch komplizierteren Bildern führen würde).²⁶ Betrachten wir z. B. die Emission eines Lichtquants bei inelastischer Streuung eines Positrons an einem Elektron, so ergibt sich aus

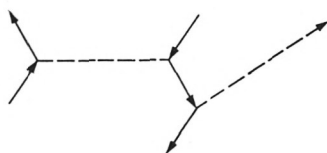


Fig. 5. Elektronenstreuung mit Lichtquantenemission nach der Quantenelektrodynamik

das folgende Bild:

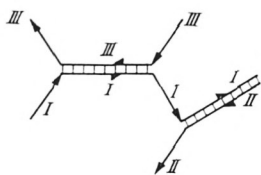


Fig. 6. Dasselbe Problem unter der Annahme fusionierter Fermionenpaare

In diesem Fall erhält man drei zusammenhängende Bahnen, nämlich I, II und III. Allgemein gilt, sobald man annimmt, daß Teilchen durch Fusion von Fermionen entstehen: Die Anzahl der durch eine Ecke hindurchgehenden Bahnen ist konstant.

²⁵ Man beachte, daß die Feldoperatoren $\bar{\psi}$ und ψ Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren längs Feynmanbahnen sind, so daß die biquadratischen Ausdrücke im Heisenbergschen Wechselwirkungsterm nur „Streuungen von Feynmanbahnen“ liefern können.

²⁶ Tatsächlich muß das Elektron wegen des Coulombfeldes mindestens aus drei Fermionen bestehen.

In einer Quantenfeldtheorie vom Heisenbergtyp und auch im Falle der Heisenberggleichung selbst muß man im allgemeinen mit einer Komplikation rechnen, die in obigem Satz noch nicht zum Ausdruck kommt. Zwar folgt die Konstanz der Anzahl der Bahnen aus den Eigenschaften der Fermionenlinien in Graphen. Aber es kann sein, daß reale Prozesse nicht durch einzelne Graphen der angegebenen Art beschrieben werden, sondern durch ihre Mischungen.²⁷

Hier wollen wir von solchen Mischungen absehen. Dann zerfällt nach dem Fundamentalsatz der Fusionstheorie die Wellengleichung (3.6) in Gleichungen für Ein-, Zwei-, Dreibahnssysteme usw., d. h. in Gleichungen für die Funktionen

$$(4.1) \quad \psi_{1;v_1}(x_1), \quad \psi_{2;v_1v_2}(x_1, x_2), \quad \psi_{3;v_1v_2v_3}(x_1, x_2, x_3) \quad \text{usw.}$$

Der Form nach erhalten wir also Gleichungen, die denen des nichtrelativistischen Mehrkörperproblems ohne Erzeugungs- und Vernichtungsprozesse gleichen, die also der gewöhnlichen Schrödingergleichung für das Mehrkörperproblem ähneln. Alle Erzeugungs- und Vernichtungsprozesse sind in einer solchen Theorie letztlich Paarprozesse, wie das Beispiel der Lichtquantenemission in Fig. 5 zeigt.

So wie man in der nichtrelativistischen Theorie von Ein-, Zwei-, Dreikörperproblemen usw. spricht, so hat man nun Ein-, Zwei-, Dreibahnprozesse usw. zu unterscheiden. Als Einbahngleichung folgt aus (3.6) die Diracgleichung für Neutrinen:

$$(4.2) \quad \gamma_1^\mu \partial_{1\mu} \psi_1(x_1) = 0.$$

Die rechte Seite ist gleich 0, wenn man ebenfalls in Anlehnung an die Heisenbergsche Theorie annimmt, daß Masse eine Konsequenz der Wechselwirkung ist. Wir brauchen hier auf diese Gleichung nicht einzugehen.

Nächst dieser ist die Zweibahn-Wellengleichung die einfachste. Sie lautet:

$$(4.3) \quad (\gamma_1^\mu \partial_{1\mu} + \gamma_2^\mu \partial_{2\mu}) \psi_2(x_1, x_2) = V(x_1 - x_2) \psi_2(x_1, x_2).$$

²⁷ Das wird erst anders, wenn man l^2 durch $\frac{\epsilon^4}{l^2}$ ersetzt (s. Fußnote 24), weil der infinitesimale Faktor ϵ höhere Näherungen zu unterdrücken sucht.

Darin ist ψ eine Spaltenmatrix mit 16 Komponenten, und V ist wie γ_1'' und γ_2'' eine quadratische Matrix mit 16 Zeilen und 16 Spalten. Speziell setzen wir

$$(4.4) \quad V = \epsilon^4 W \delta(x_1 - x_2).$$

W ist eine konstante Matrix, die Wechselwirkungsmatrix, und ϵ^4 ist ein konstanter Zahlenfaktor, auf den wir in § 6 zurückkommen.²⁸

Auch den Wechselwirkungsterm haben wir vereinfacht. Ebenfalls nach dem Vorbild der Heisenbergschen Theorie nehmen wir an, daß wir im Konfigurationsraum rein lokale Wechselwirkungen haben, so daß an die Stelle der linearen Integraltransformation in (3.6) eine einfache Matrixmultiplikation tritt. Die δ -Funktion besagt, daß die beiden Teilchen nur bei unmittelbarer Begegnung in Wechselwirkung stehen.²⁹ Selbstverständlich kommt in V wegen der Translationsinvarianz nur die Differenz $x_1 - x_2$ vor. Außerdem sorgt die δ -Funktion für die Lorentzinvarianz.

Ein auffälliger und wichtiger Unterschied zur Heisenbergschen Theorie ist die Linearität von Gl. (4.3). Er ist nur scheinbar. Denn wie in jeder Quantenfeldtheorie, so sind auch bei Heisenberg die Amplitudengleichungen linear. Gleichwohl ist er wichtig, weil man in den gewöhnlichen Feldtheorien kaum zu so einfachen Gleichungen gelangt. Allerdings darf die Einfachheit unserer Gleichungen auch nicht überschätzt werden. Schon die Dreifachfusion, die wir hier nicht mehr behandeln wollen, führt, wie man weiß, zu schwer zu bewältigenden algebraischen Aufgaben. Den Heisenbergschen nichtlinearen Termen entspricht hier das Auftreten mehrfacher Kroneckerprodukte, z. B. ist der Ausdruck möglich:

²⁸ l. c. 15, 24 und 27.

²⁹ Wir haben im doppelten Sinne eine streng lokale Wechselwirkung angenommen:

1. Wie in der Schrödingergleichung ist das Potential ein Multiplikationsoperator.
2. Das Potential ist nur für $x_1 = x_2$ von 0 verschieden. Beides deckt sich mit dem Heisenbergschen Ansatz.

$$\gamma^{5\mu} \times \gamma_{5\mu},$$

dessen Verwandtschaft mit dem Heisenbergschen Ansatz deutlich wird, wenn wir in der Lagrangedichte $\psi_{v_1 v_2}(x_1, x_2)$ durch Produkte $u_{v_1}(x_1) v_{v_2}(x_2)$ der Spinorkomponenten ersetzen. Allerdings wird es im folgenden nicht zweckmäßig sein, die Wechselwirkungsmatrix durch Kroneckerprodukte von γ -Matrizen darzustellen.

§ 5. Erhaltungssätze und Mittelwerte physikalischer Größen

Wir knüpfen an die Gleichungen (4.3-4) an und beschränken uns von nun an auf die Untersuchung von Zweibahnproblemen. Zunächst fragen wir nach der physikalischen Bedeutung der rein formal eingeführten Wellenfunktion $\psi_{v_1 v_2}(x_1, x_2)$ und geben in diesem Paragraphen eine Teilantwort. Es wird gezeigt, daß man bei gegebener Wellenfunktion die Mittelwerte aller physikalischen Größen berechnen kann und daß die Gesamtheit der Mittelwerte die Wellenfunktion bis auf einen konstanten Phasenfaktor bestimmt. Es läßt sich auch eine positiv definitive und lorentzinvariante Norm angeben. Doch ist diese kein Integral der Bewegung, so daß die Wellenfunktionen nicht universell normierbar sind.³⁰ In § 10 kommen wir auf das Deutungsproblem zurück.

Die Wellengleichung (4.3) läßt sich aus dem Variationsprinzip ableiten:

$$(5.1) \quad \delta \int \bar{\psi} [\gamma_1^\mu \partial_{1\mu} + \gamma_2^\mu \partial_{2\mu} - \varepsilon^4 W \delta(x_1 - x_2)] \psi d^4 x_1 d^4 x_2 = 0.$$

Darin ist die adjungierte Funktion durch

$$(5.2) \quad \bar{\psi} = \psi^+ A, \quad A = \gamma_4 \times \gamma_4$$

³⁰ Das hängt offensichtlich mit der Existenz von Erzeugungs- und Vernichtungsprozessen zusammen.

definiert, wenn man die übliche Darstellung der Diracmatrizen³¹ benutzt wie in folgender Tafel:

$$(5.3) \quad \begin{array}{c|cccc} & 1 & \sigma_1 & \sigma_2 & \sigma_3 \\ \hline 1 & 1 & \gamma_5 & \gamma_{45} & \gamma_4 \\ \sigma_1 & \gamma_{23} & \gamma_{14} & \gamma_1 & \gamma_{51} \\ \sigma_2 & \gamma_{31} & \gamma_{24} & \gamma_2 & \gamma_{52} \\ \sigma_3 & \gamma_{12} & \gamma_{34} & \gamma_3 & \gamma_{53} \end{array} \quad \begin{aligned} (\gamma^\mu) &\equiv (\gamma^0, \gamma^1, \gamma^2, \gamma^3) \\ &= (i\gamma_4, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3), \\ (\gamma_\mu) &\equiv (\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) \\ &= (-i\gamma_4, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3), \end{aligned}$$

in der die σ Paulimatrizen sind und die γ wie in dem Beispiel

$$(5.4) \quad \gamma_{52} = \sigma_2 \times \sigma_3 = \left(\begin{array}{c|c} +\sigma_2 & 0 \\ \hline 0 & -\sigma_2 \end{array} \right)$$

durch Kroneckermultiplikation aus den Paulimatrizen entstehen.

Die Existenz des Hamiltonschen Prinzips setzt voraus, daß die Wechselwirkungsmatrix W selbstadjungiert ist, d. h. daß die Gleichung gilt:

$$(5.5) \quad \bar{W} \equiv A^{-1} W^+ A = W.$$

Wie in jeder Feldtheorie erhält man aus den Symmetrieeigenschaften der Lagrangedichte in (5.1) Kontinuitätsgleichungen. Wir betrachten hier explizite diejenigen, die aus der Phasen- und der Translationsinvarianz folgen und die, wie man weiß, mit der Erhaltung der Ladung und mit dem Energie-Impulssatz zusammenhängen. Elementare Rechnungen ergeben wegen der Phaseninvarianz:

$$(5.6) \quad \partial_{1\mu} (\bar{\psi} \gamma_1^\mu \psi) + \partial_{2\mu} (\bar{\psi} \gamma_2^\mu \psi) = 0$$

und wegen der Translationsinvarianz:

$$(5.7) \quad \partial_{1\mu} (\bar{\psi} \gamma_1^\mu (\partial_{1\nu} + \partial_{2\nu}) \psi) + \partial_{2\mu} (\bar{\psi} \gamma_2^\mu (\partial_{1\nu} + \partial_{2\nu}) \psi) = 0.$$

³¹ Nach Tafel (5, 3) ist $\gamma_5 = -\gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \gamma_4$. Die Vorzeichenwahl ist ungewöhnlich, sorgt aber dafür, daß einheitliche Vertauschungsrelationen gelten. Setzen wir $\gamma_\mu = \gamma_{\mu 6} = -\gamma_{6\mu}$, so gilt für $\mu, \nu = 1 \dots 6$

$$[\gamma_{\mu\nu}, \gamma_{\rho\sigma}] = 0, \quad [\gamma_{\mu\rho}, \gamma_{\nu\sigma}] = 2i\gamma_{\mu\nu},$$

wenn verschiedene Buchstaben verschiedene Indizes bedeuten.

Wir erhalten also achtdimensionale (bei n -Bahn-Systemen $4n$ -dimensionale) Kontinuitätsgleichungen. Zu Erhaltungssätzen gelangen wir nur, wenn es gelingt, daraus vierdimensionale Kontinuitätsgleichungen abzuleiten.

Das ist auf mehrere Weisen möglich. Wir lassen uns hier von der Mehrzeittheorie leiten, obwohl wir sie nicht unmittelbar auf lorentzinvariante Mehrbahngleichungen anwenden können. In ihr gibt es Dichtefunktionen $\varrho(\mathbf{r}_1, t_1; \mathbf{r}_2, t_2)$, und Mittelwerte zu bestimmter Zeit haben die Form

$$\bar{G} = \int G(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \varrho(\mathbf{r}_1, t; \mathbf{r}_2, t) dV_1 dV_2.$$

Führen wir gemäß

$$(5.8) \quad x = \frac{x_1 + x_2}{2} = (t, \mathbf{r}), \quad \xi = x_1 - x_2 = (\tau, \mathbf{r})$$

Schwerpunkts- und Relativkoordinaten ein, so können wir dafür auch schreiben:

$$\bar{G} = \int G(\mathbf{r}, \mathbf{r}) \varrho(\mathbf{r}, t, \mathbf{r}, \tau) dV_{\mathbf{r}} dV_{\mathbf{r}} \Big|_{\tau=0}.$$

Ein ähnlicher Integraltyp folgt aus den Kontinuitätsgleichungen (5.6-7). Zusammenfassend schreiben wir dafür:

$$(5.9) \quad \partial_{1\mu} (\bar{\psi} \gamma_1^\mu G \psi) + \partial_{2\mu} (\bar{\psi} \gamma_2^\mu G \psi) = 0.$$

Darin steht G für die Operatoren der jeweiligen Größen. Im Falle der Gleichungen (5.6) und (5.7) ist also

$$(5.10) \quad G = 1 \quad \text{bzw.} \quad G = \partial_{1\nu} + \partial_{2\nu}.$$

Man beachte: Die G haben wohldefinierte Kovarianzeigenschaften.

Zunächst schreiben wir Gl. (5.9) in Schwerpunkts- und Relativkoordinaten. Die neuen Ableitungen

$$(5.11) \quad \partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu}, \quad \delta_\mu = \frac{\partial}{\partial \xi^\mu}$$

sind durch

$$(5.12) \quad \left. \begin{matrix} \partial_{1\mu} \\ \partial_{2\mu} \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2} \partial_\mu \pm \delta_\mu$$

bestimmt. Setzen wir außerdem:

$$(5.13) \quad \Gamma^\mu = \frac{1}{2} (\gamma_1^\mu + \gamma_2^\mu), \quad \bar{\Gamma}^\mu = \gamma_1^\mu - \gamma_2^\mu, \quad \gamma_1^\mu = \gamma^\mu \times 1, \\ \gamma_2^\mu = 1 \times \gamma^\mu$$

(Γ^μ sind die De Broglieschen Fusionsmatrizen), so lautet Gl. (5.9)

$$(5.14) \quad \partial_\mu (\bar{\psi} \Gamma^\mu G \psi) + \delta_\mu (\bar{\psi} \bar{\Gamma}^\mu G \psi) = 0.$$

Hieraus folgt bei Integration über $-i d^3x d^3\xi$ die Gleichung

$$(5.15) \quad \frac{d}{dt} \int \bar{\psi} \Gamma_4 G \psi d^3x d^3\xi + \frac{d}{d\tau} \int \bar{\psi} \bar{\Gamma}_4 G \psi d^3x d^3\xi = 0.$$

Es ergeben sich die gesuchten Erhaltungssätze:³²

$$(5.16) \quad \int \bar{\psi} \Gamma_4 G \psi d^3x d^3\xi \Big|_{\tau=0} = \text{const},$$

wenn folgende τ -Ableitung verschwindet:

$$(5.17) \quad \frac{d}{d\tau} \int \bar{\psi} \bar{\Gamma}_4 G \psi d^3x d^3\xi \Big|_{\tau=0} = 0.$$

Die letzte Gleichung kann auf zweierlei Weise verstanden werden. Entweder gilt sie für alle Lösungen der Wellengleichung, oder sie stellt eine Nebenbedingung dar, die aus der Gesamtheit der Lösungen die physikalisch deutbaren ausliest. Welcher Fall vorliegt, folgt aus der Integrationstheorie unserer Wellengleichungen. Diese entwickeln wir im nächsten Paragraphen. Hier nehmen wir das Ergebnis vorweg.

Tatsächlich gilt Gl. (5.17) für alle Lösungen und in beliebigen Koordinatensystemen. Man erkennt das leichter an der Konstanz von (5.16) als an (5.17). Für ebene Wellen in den Schwerpunktskoordinaten ist die Konstanz offensichtlich, und bei einer Überlagerung von solchen verschwinden in (5.16) die gemischten Terme, die allein zeitabhängig sein könnten, wegen der Orthogonalität.

Für diese ebenen Wellen kann man Gl. (5.16) leicht explizit lorentzinvariant schreiben. Sei K_μ der Wellenvektor für den Schwerpunkt – s. auch Gl. (6.2) –, so erhält man:

³² Am Anfang von § 10 ist bemerkt, daß es noch eine andere Möglichkeit gibt, durch Integration zu Konstanten der Bewegung zu gelangen. Doch scheidet diese, wie dort gezeigt, von vornherein aus.

$$(5.18) \quad + i \int \bar{\psi} (\gamma^\mu \times \gamma^\nu) \frac{K_e \Gamma^e}{\sqrt{-K \cdot K}} G \psi \, d\sigma'_\mu \, d\sigma''_\nu \Big|_{\sigma' = \sigma''} = \text{const},$$

wenn man beachtet, daß die Gleichung gilt:

$$(5.19) \quad (\gamma^4 \times \gamma^4) \Gamma_4 = \Gamma_4.$$

Identifizieren wir die raumartigen Flächen $\sigma' = \sigma''$ mit $t = \text{const}$ und legen wir die t -Achse in die K -Richtung, so folgt wieder, da $K = (\Omega, \vec{0})$, Gl. (5.16).

Das Ergebnis können wir auf beliebige Größen übertragen, und zwar gibt es zwei Stufen der Erweiterung. Wenn man berücksichtigt, daß es für den Begriff „Größe“ auf die Konstanz der Größe nicht ankommt, wird man für einen beliebigen Tensoroperator $G^{\mu\nu\cdots}$ die Gleichung anschreiben können:

$$(5.20) \quad \partial_e (\bar{\psi} \Gamma^e G^{\mu\nu\cdots} \psi) + \delta_e (\bar{\psi} \bar{\Gamma}^e G^{\mu\nu\cdots} \psi) = Q^{\mu\nu\cdots}.$$

Darin bedeutet $Q^{\mu\nu\cdots}$ die zugehörige Quelldichte. Integration über $d^3x \, d^3\xi$ ergibt ähnlich wie vorher, wenn (5.17) gilt:

$$(5.20a) \quad \frac{d}{dt} i \int \bar{\psi} \Gamma_4 G^{\mu\nu\cdots} \psi \, d^3x \, d^3\xi = \int Q^{\mu\nu\cdots} \, d^3x \, d^3\xi.$$

Hiernach ist der Mittelwert von $G^{\mu\nu\cdots}$ durch die mit (5.16) formal übereinstimmende Gleichung

$$(5.21) \quad \overline{G^{\mu\nu\cdots}} = \int \bar{\psi} (\gamma^\alpha \times \gamma^\beta) \left(\frac{i K_e \Gamma^e}{\sqrt{-K \cdot K}} \right) G^{\mu\nu\cdots} \psi \, d\sigma'_\alpha \, d\sigma''_\beta \Big|_{\sigma' \equiv \sigma''}$$

gegeben. Gl. (5.20a) gibt an, wie sich der Mittelwert im Laufe der Zeit ändert.

Die unmittelbare Verbindung zu den Erhaltungssätzen wird gelöst, wenn man den Operator

$$(5.22) \quad \left(\frac{i K_e \Gamma^e}{\sqrt{-K \cdot K}} \right) G^{\mu\nu\cdots} \text{ durch } g^{\mu\nu\cdots}$$

ersetzt und dementsprechend statt (5.21) die Gleichung

$$(5.23) \quad \overline{g^{\mu\nu\cdots}} = \int \bar{\psi} (\gamma^\alpha \times \gamma^\beta) g^{\mu\nu\cdots} \psi \, d\sigma'_\alpha \, d\sigma''_\beta \Big|_{\sigma' \equiv \sigma''}$$

zur Definition des Mittelwerts benutzt.³³ Das ist eine echte Verallgemeinerung, weil der Faktor

$$F = \left(\frac{i K_0 \Gamma^0}{\sqrt{-K \cdot K}} \right)$$

im ersten Ausdruck (5.22) die Determinante 0 hat, was aus der Lorentzinvarianz und daraus folgt, daß Γ_4 diagonal ist und die Elemente

$$(5.24) \quad 2 \cdot (+ + 00 + + 0000 - - 00 - -)$$

hat. Von dem rechten Ausdruck (5.22) kann man im allgemeinen keinen solchen Faktor abspalten.

Hier ordnet sich die Norm ein:

$$(5.25) \quad N = \int \psi^+ \psi d^3x d^3\xi.$$

Denn, kovariant geschrieben, lautet sie:

$$(5.26) \quad N = - \int \bar{\psi} (\gamma^\mu \times \gamma^\nu) \psi d\sigma'_\mu d\sigma''_\nu / \sigma' \equiv \sigma''.$$

Sie ist unabhängig von K definiert. In § 10 werden wir sehen, daß der Übergang von (5.21) zu der allgemeineren Gleichung (5.22) sinnvoll und notwendig ist. Natürlich ist die Norm N kein Integral der Bewegung.³⁴

§ 6. Zur Integrationstheorie der Wellengleichung

Ob Bedingung (5.17) erfüllbar ist, hängt von den Eigenschaften der Integrale der Wellengleichung (4.3) ab. Sie hat folgende Ge-

³³ Der Mittelungsstrich in (5.23) ist etwas anders definiert als der in (5.21), wie (5.22) zeigt.

³⁴ Doch wird es sich zeigen, daß sie für freie Wellen von Einzelteilchen (und damit für in- und outwaves) konstant ist, was zur Definition von Wahrscheinlichkeiten genügt.

stalt, wenn wir die neuen Koordinaten (5.8) benutzen und die Gl. (4.4) und (5.11–13) berücksichtigen:

$$(6.1) \quad (I^\mu \partial_\mu + \bar{I}^\mu \delta_\mu) \psi(x, \xi) = \varepsilon^4 W \delta(\xi) \psi(x, \xi).$$

Die x -Koordinaten kann man abtrennen. Der Ansatz

$$(6.2) \quad \psi(x, \xi) = \psi(\xi) e^{iK \cdot x}$$

führt zu der Gleichung

$$(6.3) \quad (\bar{I}^\mu \delta_\mu + i K_\mu I^\mu) \psi(\xi) = \varepsilon^4 W \delta(\xi) \psi(\xi),$$

aus der für die Fourierkomponenten $\tilde{\psi}$ aus

$$(6.4) \quad \psi(\xi) = \frac{1}{16\pi^4} \int \tilde{\psi}(k) e^{ik \cdot \xi} d^4 k$$

die algebraische Gleichung

$$(6.5) \quad i(K_\mu I^\mu + k_\mu \bar{I}^\mu) \tilde{\psi}(k) = \varepsilon^4 W \psi(0)$$

hervorgeht. Für die linke Seite kann man auch schreiben:

$$\frac{i}{2} [(K_\mu + 2k_\mu) \gamma_1^\mu + (K_\mu - 2k_\mu) \gamma_2^\mu] \tilde{\psi}(k),$$

so daß die Linksmultiplikation mit

$$-2i [(K_\mu + 2k_\mu) \gamma_1^\mu - (K_\mu - 2k_\mu) \gamma_2^\mu] = -2i (K_\mu \bar{I}^\mu + 4k_\mu I^\mu)$$

zu der Gleichung führt:

$$8K \cdot k \tilde{\psi} = -2i \varepsilon^4 (K \cdot \bar{I} + 4k \cdot I) W \psi(0),$$

aus der mit Rücksicht auf (6.4) die Lösung

$$(6.6) \quad \psi(\xi) = -\frac{i\varepsilon^4}{64\pi^4} \int \frac{K \cdot \bar{I} + 4k \cdot I}{K \cdot k} W \psi(0) e^{ik \cdot \xi} d^4 k$$

folgt, falls $K \cdot k \neq 0$ ist, d. h. falls wir, wie es das Zeichen $\oint$ andeutet, den Hauptwert des Integrals in (6.6) berechnen, anders gesagt, die halbe Summe der Integrale über den oberen und unteren Integrationsweg in Fig. 6. Zu diesem Integral können noch

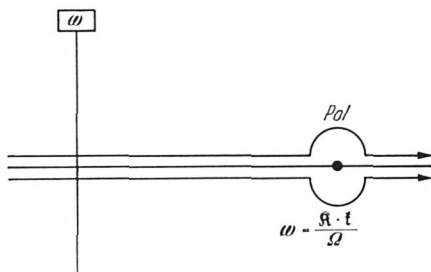


Fig. 7. Integrationsweg in der ω -Ebene

die freien Wellen (6.21) hinzukommen, die Lösungen von (6.22) sind, vorausgesetzt, daß sie der Bedingung (6.23) genügen. Schließlich gibt es ebene Wellen, die nicht (6.23) befriedigen und mit Lösungen vom Typus (6.8) kombiniert sind. Diese untersuchen wir in § 9. Zunächst betrachten wir nur das Hauptwertintegral, das bestimmt ist, wenn wir den Wert $\psi(0)$ von $\psi(\xi)$ in $\xi = 0$ kennen.

Er ist nicht willkürlich wählbar. Vielmehr liefert Gl. (6.6) auch eine Bestimmungsgleichung für $\psi(0)$:

$$(6.7) \quad \psi(0) = - \frac{i \varepsilon^4}{64 \pi^4} \oint \frac{K \cdot \bar{\Gamma} + 4 k \cdot \Gamma}{K \cdot k} W \psi(0) d^4 k.$$

Zur Berechnung des Hauptwerts zerlegen wir den Vierervektor k im Zähler in einen zu K senkrechten und einen parallelen Anteil:

$$k = k' + \frac{K \cdot k}{K \cdot K} K, \quad k' = k - \frac{K \cdot k}{K \cdot K} K.$$

Da

$$\oint_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x-a} = 0$$

ist, verschwindet das Integral mit dem Zähler

$$K \cdot \bar{\Gamma} + 4 k' \cdot \Gamma;$$

es bleibt nur der Term stehen, in dem der Nenner herausfällt:

$$(6.8) \quad \psi(0) = -i \cdot \frac{K \cdot \Gamma}{K \cdot K} W \psi(0) \cdot \frac{\varepsilon^4}{16 \pi^4} \int d^4 k.$$

Den noch unbestimmten konstanten Faktor ε^4 definieren wir so, daß

$$(6.9) \quad \frac{\varepsilon^4}{16 \pi^4} \int d^4 k = 1$$

ist. Danach ist ε eine unendlich kleine Länge. Sie ist zulässig, wenn wir die physikalischen Problemen so sehr angemessene Analysis von Schmieden und Laugwitz³⁵ benutzen, auf die wir noch zurückkommen.³⁶ Hier folgt, wenn wir (6.9) in (6.8) einsetzen:

$$(6.10) \quad \psi(0) = -i \frac{K \cdot \Gamma}{K \cdot K} W \psi(0).$$

Darin ist M in

$$(6.11) \quad K \cdot K = -M^2$$

die noch zu berechnende Masse der fusionierten Teilchen. In dem späteren Ansatz (7.10) für W existiert W^{-1} , solange alle $\kappa_i \neq 0$ sind. In diesem Fall nimmt Gl. (6.10) eine wohlbekannte Form an. Setzen wir

$$(6.12) \quad \psi(0) = W^{-1} \Phi,$$

so folgt aus (6.10)

$$(6.13) \quad (M^2 W^{-1} - i K \cdot \Gamma) \Phi = 0$$

oder, wenn wir in Φ den Faktor $e^{iK \cdot x}$ aufgenommen denken:

$$(6.14) \quad (\Gamma^\mu \partial_\mu - M^2 W^{-1}) \Phi = 0.$$

Sie stimmt bis auf den Massenoperator

$$(6.15) \quad \underline{M} = M^2 W^{-1}$$

³⁵ l. c. 15.

³⁶ Es scheint, daß die Annahme infinitesimaler Kopplungskonstanten mit der Methode der Renormierung von L. D. Landau, A. A. Abrikosov, L. M. Khalatnikov, Dokl. AK. Nauk. 95 (3) 497, (4) 773, (6) 1177 (1954), 96 (2) 261 (1954) verwandt ist; s. auch L. D. Landau, On the quantum-theory of fields, Niels Bohr-Festschrift, London 1955.

mit De Broglies Wellengleichung für fusionierte Teilchen überein.¹⁰ Der Massenoperator in Hönl's¹⁰ Gl. (14.23) ist von speziellerer Natur

$$(6.16) \quad \underline{M}_{Hönl} \sim 1 \times 1 + \gamma_5 \times \gamma_5.$$

Tatsächlich brauchen wir zur Integration die Transformation (6.12) nicht wirklich durchzuführen, wie in § 7 gezeigt wird. Das ist wichtig, weil in dem hier interessierenden Fall W^{-1} nicht existiert.

Auf dieselbe Weise wie (6.10) erhalten wir aus (6.6), wenn wir in $\xi = (\tau, \mathfrak{x})$ die Zeitdifferenz $\tau = 0$ setzen und Vektoren $\mathfrak{x} \neq 0$ zulassen:

$$(6.17) \quad \begin{aligned} \psi(0, \mathfrak{x}) &= -i \varepsilon^3 \frac{K \cdot \Gamma}{K \cdot K} W \psi(0) \delta(\mathfrak{x}) = \\ &= \varepsilon^3 \psi(0) \delta(\mathfrak{x}). \end{aligned}$$

Wenn dagegen $\tau \neq 0$ ist, müssen wir die beiden Fälle $\tau \geq 0$ unterscheiden. Je nachdem, welcher von beiden vorliegt, können wir die beiden Integrationswege in Fig. 6 unten- oder obenherum schließen, so daß das untere oder obere Integral verschwindet, während jeweils das andere das negative oder positive Umlaufintegral um den Pol liefert. Der Hauptwert ist also gleich dem halben Umlaufintegral. Wir erhalten bzw. für $\tau \geq 0$:

$$(6.18) \quad \psi(\tau, \mathfrak{x}) = \mp \frac{\varepsilon^4}{8\Omega} \left\{ -K \cdot \bar{\Gamma} + 4i \left(\vec{\Gamma} - \frac{\mathfrak{R}}{\Omega} \Gamma^0 \right) \partial_{\mathfrak{x}} \right\} W \psi(0) \delta \left(\mathfrak{x} - \frac{\mathfrak{R}\tau}{\Omega} \right).$$

Nehmen wir an, K sei ein zeitartiger Vektor, so können wir die Zeitachse in die K -Richtung legen; in diesem Fall ist

$$(6.19) \quad K = (\Omega, 0, 0, 0),$$

und Gl. (6.17) lautet einfach:

$$(6.20) \quad \begin{aligned} \psi(0, \mathfrak{x}) &= \frac{\varepsilon^3}{\Omega} \Gamma_4 W \psi(0) \delta(\mathfrak{x}) = \\ &= \varepsilon^3 \psi(0) \delta(\mathfrak{x}). \end{aligned}$$

Man beachte: $\lim_{\mathfrak{x} \rightarrow 0} \psi(0, \mathfrak{x}) = \psi(0)$, aber $\lim_{\tau \rightarrow 0} \psi(\tau, \mathfrak{x}) \neq \psi(0, \mathfrak{x})$. Bei Substitution in (5.17) erhält man, da beim Ausdifferenzieren

unter dem Integral stets ein Faktor ψ undifferenziert bleibt, bereits für den Integranden den Wert 0, da in beiden bei der Differentiation entstehenden Summanden eines der beiden verschwindenden Matrixprodukte $\bar{I}_4 I_4 = I_4 \bar{I}_4 = 0$ vorkommt. Für die Hauptwertlösung gilt, wie behauptet, Bedingung (5.17), und es ergeben sich die in § 5 untersuchten Folgerungen.

Etwas anders müssen wir bei freien Wellen vorgehen. Sei

$$(6.21) \quad \psi = u \cdot e^{i k \cdot x}$$

eine Lösung der Gleichung

$$(6.22) \quad (\bar{I}^\mu \delta_\mu + i K_\mu I^\mu) \psi = 0$$

für freie Wellen, so ist sie zugleich eine der Zweibahngleichungen mit Wechselwirkung, wenn für die Amplitude u die Bedingung gilt:

$$(6.23) \quad W u = 0.$$

Im übernächsten Paragraphen werden wir sehen, daß es solche Lösungen wirklich gibt. Für sie folgt aus der Gleichung vor (6.6), daß die Vektoren K und k aufeinander senkrecht stehen, daß also im Schwerpunktsystem $\omega = 0$ ist, d. h. es ist ψ unabhängig von τ :

$$(6.24) \quad \dot{\psi}(0, x) = 0,$$

so daß nun die abgeleiteten ψ im Integral (5.17) für dessen Verschwinden sorgen.

Bei ähnlichem Vorgehen wäre die Lage schwieriger, wenn ψ in Gl. (6.21) zwar (6.22), aber nicht (6.23) befriedigt. Denn dann tritt, wie gesagt, zu der ebenen Welle noch eine Hauptwertlösung hinzu; ψ besteht also aus zwei Summanden und in $\dot{\psi}(0, x)$ und $\bar{I}_4 \psi(0, x)$ verschwindet nur je einer derselben, so daß das Integral (5.17) in sehr spezifischer Weise von der Gestalt der Lösungen abhängt. Hier ist, wie schon in § 5 erwähnt und wie in den §§ 7 bis 8 zu sehen, die Orthogonalität zu berücksichtigen.

Die Beschränkung auf zeitartige Vektoren K ist nicht wesentlich. Im Falle von Nullvektoren gelten unsere Betrachtungen

auch, wie man sieht, wenn man die Nullvektoren durch infinitesimal benachbarte zeitartige Vektoren ersetzt und statt von $K \cdot K = 0$ von der Gleichung

$$(6.25) \quad K \cdot K = -\frac{\varepsilon^2}{l^4}$$

ausgeht, in der ε unsere unendlich kleine Länge und l eine beliebige endliche Länge ist. Denn in den Gl. (6.20) und (6.24) kommt die Konstante $\kappa^2 = -K \cdot K$ gar nicht vor.

Hier müssen wir uns noch der Definitionsgleichung (6.9) der unendlich kleinen Länge ε zuwenden. Wir können sie folgendermaßen umformen:

$$\frac{\varepsilon^4}{16\pi^4} \int d^4 k = \left\{ \frac{\varepsilon^4}{16\pi^4} \int e^{i k \cdot \xi} d^4 k \right\}_{\xi=0} = \{ \varepsilon^4 \delta(\xi) \}_{\xi=0} = \varepsilon^4 \delta(0) = 1,$$

so daß wir, wenn δ nun die eindimensionale δ -Funktion bezeichnet, zu der einfachen Gleichung

$$(6.26) \quad \varepsilon \delta(0) = 1$$

gelangen. Alle Rechnungen mit ε und $\delta(0)$ sind wohlbestimmt, soweit man sie auf Gl. (6.26) zurückführen kann, z. B. ist die Wellenfunktion

$$(6.27) \quad \psi(x) = \sqrt{\varepsilon} \delta(x)$$

normiert, denn es ist

$$\int \psi(x)^2 dx = \int \varepsilon \delta(x) \delta(x) dx = \varepsilon \delta(0) \int \delta(x) dx = 1.$$

Dasselbe gilt für die ebene Welle

$$(6.28) \quad \psi_k(x) = \sqrt{\frac{\varepsilon}{2\pi}} e^{i k \cdot x},$$

da

$$\int \psi_{k'}^*(x) \psi_k(x) dx = \frac{\varepsilon}{2\pi} \int e^{i(k-k') \cdot x} dx = \varepsilon \delta(k-k') = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases}$$

für $k' = k$ bzw. $k' \neq k$. Ein anderes Beispiel lautet:

$$(6.29) \quad \varepsilon \delta(x) \delta'(x) = \frac{1}{2} \frac{d}{dx} (\varepsilon \delta(x) \delta(x)) = \frac{1}{2} \frac{d}{dx} (\varepsilon \delta(0) \delta(x)) = \frac{1}{2} \delta'(x).$$

Diese Beispiele zeigen, wie man mit $\varepsilon \delta(x)$ rechnen kann.³⁷

$\varepsilon \delta(x)$ verhält sich hiernach wie eine nach Laurent Schwartz zulässige Testfunktion. Sie ist das unmittelbare Analogon des Kroneckersymbols $\delta_{nn'}$; denn es gilt zugleich:

$$(6.30) \quad \begin{aligned} \delta_{nn'} \cdot \delta_{nn'} &= \delta_{nn'}, \\ \varepsilon \delta(x - x') \cdot \varepsilon \delta(x - x') &= \varepsilon^2 \delta(0) \delta(x - x') = \varepsilon \delta(x - x'). \end{aligned}$$

Nach König gilt für Distributionen:

$$\delta(x) \cdot \delta(x) = c \delta(x),$$

wobei c nach seiner Definition eine beliebige endliche Konstante ist. Hier ist

$$c = \delta(0)$$

gesetzt. In der gewöhnlichen Analysis gibt es keine solchen c , auch nicht bei König, wohl aber in der Analysis von Schmieden und Laugwitz, in der die Diracschen δ echte Funktionen sind. Wir kommen darauf in den §§ 11 und 12 zurück.

§ 7. Zweibahn-Fusion

Ob es Fusion gibt und wie groß die Wirkungsquerschnitte für die Streuung von Neutrinen an Neutrinen sind, hängt von der Wahl der Wechselwirkungsmatrix W ab. Sie muß lorentzinvariant sein und läßt sich daher als Linearkombination der folgenden Matrizen schreiben:

$$(7.1) \quad 1 \times 1, \gamma^\mu \times \gamma_\mu, \gamma^{\mu\nu} \times \gamma_{\mu\nu}, \gamma^{5\mu} \times \gamma_{5\mu}, \gamma^5 \times \gamma_5.$$

Für die weiteren Rechnungen ist zunächst jedoch eine andere Darstellung mehr geeignet.

Ist v_0 ein skalarer Spinor zweiter Stufe, so können wir durch Multiplikation mit Γ^μ und $\bar{\Gamma}^\mu$ Spinoren zweiter Stufe ableiten,

³⁷ Beweise vom Standpunkt der Schmieden-Laugwitz-Analysis finden sich in § 12, finite Approximationen in § 11.

die sich bei Transformation mit S^{-1} wie die Komponenten von Vektoren und Tensoren verhalten.^{37a} Tatsächlich erhalten wir aus

$$\begin{aligned}
 (7.2) \quad & \text{dem Skalar} & v_0 \\
 & \text{den Vektor} & v_1^\mu = \Gamma^\mu v_0, \\
 & \text{den Schieftensor} & v_2^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \bar{I}^\mu v_1^\nu, \\
 & \text{den Pseudovektor} & v_{3\varrho} = \frac{1}{6} \varepsilon_{\varrho\sigma\mu\nu} \Gamma^\sigma v_2^{\mu\nu}, \\
 & \text{den Pseudoskalar} & v_4 = \frac{1}{8} \bar{I}^\mu v_{3\mu}.
 \end{aligned}$$

Die Komponenten des skalaren Spinors stimmen mit den Elementen der Matrix γ_{31} aus (5.3) überein. Wir schreiben daher:

$$(7.3) \quad v_0 = \gamma_{31}.$$

In der Tat geht dieser Spinor bei infinitesimaler Lorentztransformation $S = 1 + i\eta$,

$$\eta = \frac{1}{2} \omega_{\mu\nu} I^{\mu\nu}, \quad I^{\mu\nu} = \frac{1}{2} (\gamma^{\mu\nu} \times 1 + 1 \times \gamma^{\mu\nu})$$

in $v_0 + \delta v_0$ über und

$$\delta v_0 = \frac{1}{4} \omega_{\mu\nu} (\gamma^{\mu\nu} \gamma_{31} + \gamma_{31} \gamma^{\mu\nu T}) = 0;$$

denn γ_{31} ist mit $\gamma^{\mu\nu}$ vertauschbar oder schiefvertauschbar, je nachdem ob $\gamma^{\mu\nu}$ eine schiefsymmetrische oder symmetrische Matrix ist. Ebenso ist v_0 bei räumlicher Inversion invariant:

$$v'_0 = \gamma_4 v_0 \gamma_4 = \gamma_4 \gamma_{31} \gamma_4 = \gamma_{31}.$$

Während der Rechnung ist es oft, so wie hier, zweckmäßig, die Spinoren γ als Matrizen γ zu schreiben.

Setzt man den Spinor (7.3) für v_0 in die Definitionsgleichungen (7.2) für v_1 , v_2 , v_3 und v_4 ein, so ergeben sich 16 linear unabhängige und wechselseitig orthogonale Spinoren:

^{37a} S ist eine Transformation aus der zweistufigen Spinordarstellung der Lorentzgruppe, und zwar diejenige, die $\psi \rightarrow S\psi$ überführt und bei der sich $\psi I^\mu \psi$ wie ein kontravarianter Vektor transformiert.

$$(7.7) \quad \begin{array}{c} \mu \qquad = \qquad 0 \qquad \qquad 1 \qquad \qquad 2 \qquad \qquad 3 \\ \hline \begin{array}{c} v^0 \\ v_1^\mu \\ v_2^{0\nu} \\ v_2^{1\nu} \\ v_2^{2\nu} \\ v_2^{3\nu} \\ v_{3\varrho} \\ v_4 \end{array} \end{array} \quad \begin{array}{c} = \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \quad \begin{array}{c} 0 \\ + \gamma_{31} \\ 0 \\ - i \gamma_{34} \\ - \gamma_5 \\ + i \gamma_{14} \\ + i \gamma_2 \\ + i \gamma_{24} \end{array} \quad \begin{array}{c} 1 \\ + i \gamma_3 \\ + i \gamma_{34} \\ 0 \\ - \gamma_{23} \\ + i \\ + i \gamma_{53} \end{array} \quad \begin{array}{c} 2 \\ + \gamma_{45} \\ + \gamma_5 \\ + \gamma_{23} \\ 0 \\ + \gamma_{12} \\ + \gamma_4 \end{array} \quad \begin{array}{c} 3 \\ - i \gamma_1 \\ - i \gamma_{14} \\ - i \\ - \gamma_{12} \\ 0 \\ - i \gamma_{51} \end{array}$$

Ebenso wie Tafel (7.7) verifiziert man leicht:

$$(7.8) \quad \begin{array}{c} \\ \\ \frac{1}{2} \bar{\Gamma}^\varrho v \end{array} \quad \begin{array}{c} v_0 \\ v_1^\varrho \\ 0 \end{array} \quad \begin{array}{c} v_1^\mu \\ v_0 g^{\varrho\mu} \\ v_2^{\varrho\mu} \end{array} \quad \begin{array}{c} v_2^{\mu\nu} \\ - \varepsilon^{\mu\nu\varrho\sigma} \cdot v_{3\sigma} \\ g^{\varrho\mu} v_1^\nu \\ - g^{\varrho\nu} v_1^\mu \end{array} \quad \begin{array}{c} v_3^\mu \\ \tilde{v}_2^{\varrho\mu} \\ v_4 g^{\varrho\mu} \end{array} \quad \begin{array}{c} v_4 \\ 0 \\ 4 v_3^\varrho \end{array}$$

Darin bedeutet $\sim$: Übergang zum dualen Tensor gemäß

$$(7.9) \quad \tilde{f}^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu\varrho\sigma} f_{\varrho\sigma}, \quad f_{\mu\nu} = -\frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu\varrho\sigma} \tilde{f}^{\varrho\sigma}.$$

Seien a und b zwei Spinoren, die wir uns als Spaltenmatrix geschrieben denken, so sind a^+ bzw. b^+ dazu hermitesch konjugiert, also Zeilenmatrizen, und ab^+ ist eine quadratische Matrix. Auf diese Weise können wir mit v_0 bis v_4 fünf lorentzinvariante Operatoren bilden, und der allgemeine Ausdruck für eine lorentzinvariante Wechselwirkungsmatrix hat die Form:

$$(7.10) \quad 4 W = \kappa_0 v_0 v_0^+ + \kappa_1 v_1^\mu v_{1\mu}^+ + \frac{1}{2} \kappa_2 v_2^{\mu\nu} v_{2\mu\nu}^+ + \kappa_3 v_3^\mu v_{3\mu}^+ + \kappa_4 v_4 v_4^+.$$

Er ist offensichtlich hermitesch, aber auch im Sinne von Gl. (5.4) selbstadjungiert, da das Vorzeichen von

$$A v = \gamma_4 v \gamma_4 = \pm v$$

in jedem Summanden von (7.10) zweimal auftritt.

Für die Integration von Gl. (6.10) machen wir nicht von der Transformation (6.12) und der transformierten Gl. (6.13) von De Broglie-Typ Gebrauch. Wir entwickeln vielmehr $\psi(0)$ nach den 16 Größen in (7.2):

$$(7.11) \quad \psi(0) = a_0 v_0 + a_{1\mu} v_1^\mu + \frac{1}{2} a_{2\mu\nu} v_2^{\mu\nu} + a_{3\mu} v_3^\mu + a_4 v_4.$$

Darin transformieren sich die Koeffizienten a wie kovariante Größen, was unmittelbar aus

$$S \psi(0) \equiv \Sigma a' v = \Sigma a S v$$

folgt, wenn wir auf der rechten Seite (7.11) benutzen und die Bemerkung vor Gl. (7.2) berücksichtigen.

Aus (7.11) folgt mit (7.10)^{37b}

$$(7.12)$$

$$W \psi(0) = \kappa_0 a_0 v_0 + \kappa_1 a_{1\mu} v_1^\mu + \frac{1}{2} \kappa_2 a_{2\mu\nu} v_2^{\mu\nu} + \kappa_3 a_{3\mu} v_3^\mu + \kappa_4 a_4 v_4.$$

Mit (7.8) erhalten wir

$$(7.13)$$

$$iK \cdot \Gamma W \psi(0) = iK_e \{ \kappa_0 a_0 v_1^e + \kappa_1 a_1^e v_0 - \kappa_2 \tilde{a}_2^{\sigma} v_{3\sigma} + \kappa_3 a_{3\mu} \tilde{v}_2^{\mu} \}.$$

Substitution in (6.10) und Koeffizientenvergleichung ergibt, wenn wir $K \cdot K = -M^2$ setzen:

$$(7.14) \quad a_0 = \frac{i\kappa_1}{M^2} K_e a_1^e, \quad a_{1\mu} = \frac{i\kappa_0}{M^2} K_e a_0;$$

$$(7.15) \quad \tilde{a}_{2\mu\nu} = \frac{i\kappa_3}{M^2} (K_\mu a_{3\nu} - K_\nu a_{3\mu}), \quad a_{3\nu} = -\frac{i\kappa_2}{M^2} K^\mu \tilde{a}_{2\mu\nu};$$

$$(7.16) \quad a_4 = 0.$$

^{37b} In der folgenden Rechnung ist es bequem, ψ nicht als Spinor, sondern als Matrix aufzufassen und dementsprechend das Spinorprodukt $\psi^+ \psi$ durch den Matrixausdruck $\text{Spur } \psi^+ \psi$ zu ersetzen.

Die Gleichung zerfällt also in drei unabhängige Systeme. Sie entsprechen den irreduziblen Bestandteilen¹⁷ der I^μ . Speziell (7.16) ist der triviale einkomponentige Anteil. Er besagt nur, daß v_4 in (7.11) nicht vorkommen kann. Die Gl. (5.17) führen zu den Proca-Yukawa-Gleichungen bzw. bei geeigneter Wahl der κ zu den Maxwell'schen Gleichungen. Versehen wir die Feldamplituden wie in (6.14) mit dem Faktor $e^{iK \cdot x}$ und setzen wir

$$(7.17) \quad \tilde{a}_{2\mu\nu} = f_{\mu\nu}, \quad a_{3\mu} = C A_\mu$$

worin C ein noch zu bestimmender konstanter Faktor ist, so lauten die Gl. (7.15)

$$(7.18) \quad f_{\mu\nu} = \frac{C\kappa_3}{M^2} (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu), \quad A^\nu = -\frac{\kappa_2}{CM^2} \partial_\mu f^{\mu\nu}.$$

Mit

$$(7.19) \quad C = \frac{M^2}{\kappa_3}$$

erhält man daraus:

$$(7.20) \quad f_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu, \quad \partial_\mu f^{\mu\nu} = -\frac{M^4}{\kappa_2 \kappa_3} A^\nu.$$

Daraus folgt die Lorentzbedingung

$$(7.21) \quad \partial_\nu A^\nu = 0$$

und die Wellengleichung

$$(7.22) \quad \partial^\mu \partial_\mu A_\nu = \square A_\nu = -\frac{M^4}{\kappa_2 \kappa_3} A_\nu.$$

Die Konstante auf der rechten Seite muß mit M^2 übereinstimmen. Somit ist

$$(7.23) \quad M^2 = -\kappa_2 \kappa_3,$$

- und die Gl. (7.20) und (7.22) lauten schließlich:

$$(7.24) \quad f_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu, \quad \partial_\mu f^{\mu\nu} = M^2 A^\nu, \quad \square A_\mu = M^2 A_\mu.$$

Man erhält speziell die Maxwell'sche Gleichung, wenn

$$(7.25) \quad M^2 = -\kappa_2 \kappa_3 = 0$$

ist. Eine der beiden Konstanten κ_2 oder κ_3 muß verschwinden. Wir werden sehen, daß die Annahme³⁸

$$(7.26) \quad \kappa_2 = 0$$

mit dem Heisenbergschen Ansatz

$$W \sim \gamma^{5\mu} \times \gamma_{5\mu}$$

verträglich ist.^{38a}

In den Gl. (7.14) setzen wir wieder unter Einbeziehung von $e^{iK \cdot x}$:

$$(7.27) \quad a_0 = \Phi, \quad a_1^\mu = U^\mu$$

und erhalten:

$$\Phi = \frac{\kappa_1}{M^2} \partial_e U^e, \quad U_\mu = \frac{\kappa_0}{M^2} \partial_\mu \Phi.$$

Hieraus folgt als Wellengleichung

$$(7.28) \quad \square \Phi = \frac{M^4 \Phi}{\kappa_0 \kappa_1} = M^2 \Phi,$$

so daß

$$(7.29) \quad M = \sqrt{\kappa_0 \kappa_1}$$

ist. Damit lauten die Feldgleichungen selbst:

$$(7.30) \quad \partial_e U^e = \kappa_0 \Phi, \quad \partial_\mu \Phi = \kappa_1 U_\mu.$$

Es sind die bekannten fünfkomponentigen Wellengleichungen für skalare bzw. pseudoskalare Teilchen.¹⁷

Da es pseudoskalare Teilchen mit endlicher Ruhmasse gibt, solche mit der Ruhmasse 0 nach aller Erfahrung aber nicht, werden wir neben κ_3 und κ_4 auch κ_0 und κ_1 von 0 verschieden annehmen. Die Wahl von κ_4 ist unsicher, weil man darüber nach Gl. (7.16) nichts aussagen kann; sie ist aber auch unwichtig.

³⁸ Das hat z. B. zur Folge, daß das Viererpotential A_μ im Maxwellschen Fall nicht in der Energiedichte vorkommt, obwohl es im Yukawafall vorhanden ist.

^{38a} Vgl. (7.31).

Diese Folgerungen sind jedoch nicht ganz zwingend. Denn es geht die Annahme ein, daß γ -Quant und π -Meson durch Zweibahnfusion entstehen. Machen wir jedoch diese Hypothese, so wird sofort verständlich, daß γ -Quanten ungeladen sind, während π -Mesonen die Ladung ± 1 oder 0 haben. Nach Gl. (7.7) ist $\psi(0)$ für γ -Quanten symmetrisch und für π -Mesonen antisymmetrisch. Die zugehörigen Isospinfunktionen müssen also umgekehrt antisymmetrisch bzw. symmetrisch sein, so daß γ -Quanten in einem Isosingulett- und π -Mesonen in einem Isotriplettzustand sind.

Wir müssen noch beweisen, daß γ -Quanten und π -Mesonen entgegengesetzte Parität haben. Wenn der elektromagnetische Vierervektor A_μ ein polarer Vektor ist, dann ist $f_{\mu\nu}$ ein gewöhnlicher Tensor und der duale Tensor $\tilde{f}_{\mu\nu}$ hat Pseudocharakter. Der dritte und vierte Term in Gl. (7.11) ist also pseudoskalar. Der letzte verschwindet nach (7.16). Wenn die beiden ersten Summanden auch pseudoskalar sind, müssen Φ und U_μ ebenfalls Pseudocharakter haben, weil v_0 und $v_{1\mu}$ Skalar und Vektor sind. Wir erhalten danach, wie behauptet, vektorielle und pseudoskalare Teilchen. Auch dieser Schluß ist nicht ganz zwingend. Da hier die beiden Felder noch völlig entkoppelt sind, kann man nicht ohne weiteres fordern, daß alle Summanden in (7.11) den gleichen Transformationscharakter haben. Die Entscheidung kann nur von mehr komplexen Systemen erwartet werden. Es ist jedoch nicht wahrscheinlich, daß die Parität bei Bosonen verletzt ist.

Wir fassen zusammen: Unter Voraussetzung der Wechselwirkungsmatrix mit der Konstanten (7.26) gibt es skalare Teilchen und vektorielle Quanten (Quant: Ruhmasse gleich 0). Beide verhalten sich bei räumlicher Inversion wahrscheinlich entgegengesetzt. Wenn man die vektoriellen Quanten mit den Lichtquanten identifiziert und für diese wie gewöhnlich positive Parität voraussetzt, ist die der skalaren negativ, wie es für die π -Mesonen zu fordern ist. Die Wellenfunktionen sind schon wegen des verschiedenen Isospins, wie in den §§ 5 und 6 gefordert, orthogonal.

Dem Heisenbergschen Ansatz für die Wechselwirkung entspricht hier der Ansatz

(7.31)

$$W = \kappa \gamma^{5\mu} \times \gamma_{5\mu} = \frac{-\kappa}{2} (2 v_0 v_0^+ + v_1 \cdot v_1^+ - v_3 \cdot v_3^+ - 2 v_4 v_4^+),$$

der die Bedingung (7.26) $\kappa_2 = 0$ befriedigt. Er ist durch (7.26) noch nicht eindeutig bestimmt.³⁹

Bisher haben wir nur von $\psi(0)$ gesprochen. Um zu sehen, daß die Gleichungen (7.24 und 30) wirklich fusionierte Teilchen beschreiben und nicht nur irgendwelche Symmetrieeigenschaften von nichtfusionierten Teilchenpaaren, wie es z. B. beim Vektormodell nichtrelativistischer Mehrteilchen-Systeme üblich ist, müssen wir die ganze Funktion $\psi(\xi)$ betrachten. Nach Gl. (6.17) ist sie für $\tau = 0$ und $\xi \neq 0$ proportional $\delta(\xi)$, d. h. es ist ständig

$$\xi = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 = 0,$$

so daß die beiden Neutrinos zusammenbleiben. Auch den Umstand, daß ψ im Falle $\tau \neq 0$ nach Gl. (6.18) durch $\delta\left(\xi - \frac{\mathbf{r}\tau}{\Omega}\right)$ bestimmt ist, kann man unmittelbar anschaulich verstehen. Denn $\tau \neq 0$ bedeutet, daß wir die beiden Fermionen, die das fusionierte

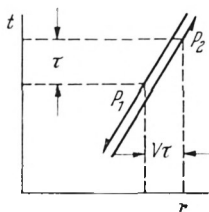


Fig. 8. Zur ξ -Abhängigkeit von ψ bei Fusion.

Paar bilden, zu verschiedenen Zeiten t_1 und $t_2 = t_1 - \tau$ betrachten, so daß es einen von 0 verschiedenen Beitrag zur Wellenfunktion nur geben kann, wie Fig. 7 deutlich macht, wenn der

³⁹ Die Bedingung $\kappa_2 = 0$ wird auch von folgenden Ansätzen befriedigt:

$$W \sim \gamma^{\mu\nu} \times \gamma_{\mu\nu}, 1 \times 1 - \gamma^5 \times \gamma_5, 1 \times 1 + \gamma^5 \times \gamma_5 - \frac{1}{2} \gamma^{\mu\nu} \times \gamma_{\mu\nu},$$

nicht aber von dem Ansatz (6. 16) bei Hönl.

räumliche Abstand der beiden Punkte P_1 und P_2 durch die Zeitdifferenz τ und die Geschwindigkeit $v = \frac{R}{\Omega}$ bestimmt ist, d. h. wenn $r = \frac{R}{\Omega} \tau$ ist.⁴⁰

§ 8. Streuungsfreie Zweibahn-Zustände

Das Problem der streuungsfreien Zustände ist ein Spezialfall des der Streuprozesse. Bei deren Untersuchung gehen wir davon aus, daß die Funktion ψ nach Gl. (6.3) außerhalb $\xi = 0$ der Gleichung für kräftefreie Teilchen genügt:

$$(8.1) \quad (\bar{I}^\mu \delta_\mu + i K_\mu I^\mu) \psi(\xi) = 0.$$

Die Lösungen dieser Gleichung liefern zugleich Lösungen von (6.3), wenn die Nebenbedingung erfüllt ist:

$$(8.2) \quad \psi(\xi) = \psi^0(\xi), \quad W^0(0) = 0.$$

Wenn Gl. (8.2) bereits für eine ebene Welle gilt, dann bewegen sich die beiden Fermionen ohne Wechselwirkung. Im allgemeinen wird die Nebenbedingung nur durch Überlagerung von ebenen Wellen und den Wellen virtuell fusionierter Paare zu befriedigen sein. In jedem Fall können wir von ebenen Wellen ausgehen, die der Wellengleichung (8.1) genügen.

Der Ansatz

$$(8.3) \quad \psi^0 = u e^{i k \cdot \xi}$$

führt zu der Gleichung

$$(8.4) \quad (K \cdot I + k \cdot \bar{I}) u = 0.$$

Multiplikation mit

$$K \cdot \bar{I} + 4 k \cdot I$$

⁴⁰ Der punktmechanische Charakter dieser Lösung ist bemerkenswert.

ergibt, da $u \neq 0$ ist:

$$(8.5) \quad K \cdot k = 0.$$

Die beiden Vektoren K und k sind orthogonal.

Wir nehmen an, daß $K = k_1 + k_2$ ein zeitartiger Vektor sei. Das ist der Fall, wenn die Vorzeichen von k_1^0 und k_2^0 übereinstimmen, also bei zwei Neutrinen oder zwei Antineutrinen. Beim Zusammenstoß von Teilchen und Antiteilchen verläuft die Rechnung etwas anders.

Legen wir die Zeitachse in die Richtung von K , so hängt ψ nach (8.5) nur noch vom räumlichen Anteil von ξ ab, also von $\mathbf{x}$. Wir können außerdem die ξ -Achse mit der k -Richtung zusammenfallen lassen, setzen also

$$(8.6) \quad \psi(\xi) = u \cdot e^{ik\xi}.$$

Danach geht Gl. (8.4) in

$$(8.7) \quad (\Omega \Gamma_4 + ik\bar{\Gamma}_3)u = 0$$

über. Schreiben wir den Spinor u als quadratische Matrix, so nimmt diese Gleichung folgende Form an

$$(8.8) \quad (\Omega \gamma_4 + 2ik\gamma_3)u + u(\Omega \gamma_4 + 2ik\gamma_3) = 0.$$

Für die Auflösung ist es bequem, u gemäß

$$(8.9) \quad u = v\gamma_{45}, \quad v = u\gamma_{45}$$

zu transformieren, so daß

$$(8.10) \quad (\Omega \gamma_4 + 2ik\gamma_3)v - v(\Omega \gamma_4 + 2ik\gamma_3)^T = 0$$

entsteht. Dem physikalischen Problem des Zusammenspiels zweier Neutrinen entspricht ein Produktansatz für u und auch für v :

$$(8.11) \quad v = \chi_a \chi_b^T.$$

Mit der Abkürzung

$$(8.12) \quad (\Omega \gamma_4 + 2ik\gamma_3)\chi = \chi'$$

lautet damit die Gl. (8.10):

$$\chi'_a \chi_b^\top = \chi_a \chi_b'^\top.$$

Sie ist dann und nur dann erfüllt, wenn für a und b

$$(8.13) \quad \chi' = \lambda \chi$$

ist, so daß Gl. (8.12) zu der Hauptachsengleichung führt:

$$(8.14) \quad (\Omega \gamma_4 + 2 i k \gamma_3) \chi = \lambda \chi,$$

deren Matrix nach Gl. (5.3) folgende Gestalt hat:

$$(8.15) \quad \left(\begin{array}{cc|cc} \Omega & 0 & 2k & 0 \\ 0 & \Omega & 0 & -2k \\ \hline -2k & 0 & -\Omega & 0 \\ 0 & 2k & 0 & -\Omega \end{array} \right).$$

Ihre Eigenwerte sind $\lambda = \pm \sqrt{\Omega^2 - 4k^2}$.

In unserm Fall ist $\Omega = \pm 2k$, da χ für sich allein eine Lösung der Neutrinogleichung sein muß. Ω ist für Neutrinen, die wir von nun an allein betrachten, positiv, und k kann ohne Beschränkung der Allgemeinheit positiv angenommen werden. Denn nach dem Pauliprinzip ist nicht die ebene Wellen (8.3) eine Lösung, sondern nur die symmetrische oder antisymmetrische Kombination. Bei Vertauschung beider Teilchen geht e^{+ikz} in e^{-ikz} über, so daß einer der Summanden immer positives k hat. Danach ergeben sich sofort für χ_a und χ_b die beiden folgenden Lösungen:

$$(8.16) \quad \chi_1 = \begin{pmatrix} +1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \chi_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ +1 \\ 0 \\ +1 \end{pmatrix}.$$

Sie gehören zur Spin- ζ -Komponente:

$$(8.17) \quad s_\zeta = +\frac{1}{2} \quad \text{bzw.} \quad s_\zeta = -\frac{1}{2}.$$

Aus den beiden Lösungen erhält man folgende vier Ansätze für v :

$$\begin{aligned}
 \chi_1 \chi_1^\top &= \begin{pmatrix} +1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} (1 + \gamma_{12} - \gamma_5 - \gamma_{34}) \equiv v_1, \\
 \chi_1 \chi_2^\top &= \begin{pmatrix} 0 & +1 & 0 & +1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} (\gamma_{51} + i\gamma_{52} + \gamma_1 - \gamma_2) \equiv v_2, \\
 \chi_2 \chi_1^\top &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ +1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ +1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} (\gamma_{51} - i\gamma_{52} - i\gamma_1 - \gamma_2) \equiv v_3, \\
 \chi_2 \chi_2^\top &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & 0 & +1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & 0 & +1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} (1 - \gamma_{12} + \gamma_5 - \gamma_{34}) \equiv v_4.
 \end{aligned}
 \tag{8.18}$$

Die ebenen Wellen vom Typus (8.6) genügen noch nicht dem Pauliprinzip. Wir erhalten bzw. für den

$$\begin{aligned}
 &\text{Isosingulett-} \\
 (8.19) \quad &\text{Isotriplett-} \quad \text{Zustand: } \psi(\xi) = u e^{ik\xi} \pm u^\top e^{-ik\xi}.
 \end{aligned}$$

Zur Berechnung der Streuung brauchen wir $\psi(o)$. Bezeichnen wir diesen Spinor bzw. mit u_s und u_t , so erhalten wir aus den vier Ausdrücken in Gl. (8.18):

$$\begin{aligned}
 u &= v_1 \gamma_{45} & u_s &= -i(\gamma_4 + \gamma_{53}) & u_t &= \gamma_{45} + \gamma_3 \\
 &v_2 \gamma_{45} & &-i(\gamma_{14} - \gamma_{23}) & &\gamma_{24} - \gamma_{31} \\
 &v_3 \gamma_{45} & &-i(\gamma_{14} + \gamma_{23}) & &-\gamma_{24} - \gamma_{31} \\
 &v_4 \gamma_{45} & &+i(\gamma_4 - \gamma_{53}) & &\gamma_{45} - \gamma_3
 \end{aligned}
 \tag{8.20}$$

Streuungsfrei sind diejenigen Zustände, für die $Wu_{s,t} = 0$ ist, das sind, wie aus (7.7), (7.10) und (7.26) folgt, die Zustände:

$$(8.21) \quad u_s = \gamma_{14} + \gamma_{23}, \quad \gamma_{14} - \gamma_{23}.$$

Die durch I_{12} definierte Spin- ζ -Komponente ist bzw. gleich:

$$(8.22) \quad s_\zeta = 0, \quad 0,$$

und für den Gesamtspin erhalten wir mit dem Operator

$$(I_{23}^2 + I_{31}^2 + I_{12}^2) \equiv \vec{I}_{23}^2 = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \vec{\gamma}_{23} \times \vec{\gamma}_{23}$$

die Eigenwerte

$$(8.23) \quad s(s+1) = +2, \quad +2.$$

Es verschwindet hiernach der Wirkungsquerschnitt für die Streuung zweier Neutrinen, deren Spins im Schwerpunktsystem untereinander parallel und senkrecht zum Vektor k sind. Daß dieser Fall in Wirklichkeit nicht vorkommt, weil entgegengesetzt laufende Neutrinen antiparallelen Spin haben, kann hier nicht herauskommen, weil unser Ansatz spiegelsymmetrisch ist.

Man überzeugt sich leicht, daß die 8 Wellenfunktionen

$$(8.24) \quad \begin{aligned} \psi &= u_s \cos k\zeta + i u_t \sin k\zeta, \\ \psi &= u_t \cos k\zeta + i u_s \sin k\zeta \end{aligned}$$

untereinander und auch zu (6.18) mit den $\psi(0)$ aus (7.11) und (7.17) bzw. (7.27) orthogonal sind. Wir kommen auf diesen Punkt an anderer Stelle zurück. Außer in den in (8.21) genannten Fällen sind die Ausdrücke in (8.24) noch keine Lösungen der vollständigen Wellengleichung, lassen sich aber zu solchen ergänzen. Natürlich dürfen die in § 9 neu hinzukommenden Terme die Orthogonalität nicht stören.^{40a}

Auch die Abzählung der Lösungen macht diese Erwartung wahrscheinlich. Wir haben $10 + 5 + 1 = 16$ Fusionslösungen (darunter 1 nichtssagende) und $1 \cdot 4 + 3 \cdot 4 = 16$ Lösungen für die Streuung von Neutrinen an Neutrinen. Die Faktoren 1 und 3 beziehen sich auf den Isosinglett- und Isotriplettzustand. Hierzu

^{40a} In einer Arbeit von H. Leonhard.

kommen ebensoviel Lösungen für die Streuungen von Antineutrinen und für die von Neutrinen an Antineutrinen, so daß $4 \cdot 16 = 64$ Lösungen zu erwarten sind in Übereinstimmung mit den 64 Elementen unserer Matrizen.

§ 9. Das Problem: Streuprozesse mit endlichem Wirkungsquerschnitt

Man sollte annehmen, daß diejenigen ebenen Wellen aus (8.19–20), die für sich allein noch keine Lösungen sind, zu Streuprozessen führen, d. h. daß sie durch Hinzufügung einer Streuwelle zu Lösungen werden sollten. Dabei ist nach Fig. 3 in § 4 damit zu rechnen, daß es neben der Streuwelle noch virtuelle fusionierte Paare geben kann.

Wir kommen jedoch zu dem ungewöhnlichen Ergebnis, daß die Zweibahnwellengleichung keine Streuwelle liefert. Das Lösungsmanko wird allein durch die virtuellen fusionierten Paare wettgemacht.

Sei $\dot{\psi}$ eine Lösung von Gl. (8.1), die nicht zugleich ein Integral von (6.3) ist, so gilt für die vollständige Lösung

$$(9.1) \quad \psi = \dot{\psi} + \varphi$$

die Gleichung

$$(9.2) \quad (I^\mu \partial_\mu + \bar{I}^\mu \delta_\mu - \varepsilon^4 W \delta(\xi)) \varphi(\xi) = \varepsilon^4 W \dot{\psi}(0) \delta(\xi).$$

Die Integration verläuft wie in § 6. Wir können das Integral aus (6.6) übernehmen, wenn wir $\psi(\xi)$ durch $\varphi(\xi)$ und $\psi(0)$ durch $\dot{\psi}(0) + \varphi(0)$ ersetzen. Gl. (6.13) ist entsprechend abzuändern, sie lautet, wenn wir wie nach Gl. (8.5) $K = (\Omega, \vec{0})$ setzen:

$$(9.3) \quad (MW^{-1} - \Gamma_4) \Phi = \Gamma_4 \dot{\Psi} \text{ mit } \begin{aligned} \Phi &= W\varphi \\ \dot{\Psi} &= W\dot{\psi}. \end{aligned}$$

Das ist kein Eigenwertproblem mehr. Jeder Wert von $K \cdot K = -\Omega^2 = -M^2$ ist zulässig. Darum kann $\varphi(\xi)$ nicht mit

den Wellenfunktionen freier fusionierter Paare übereinstimmen, $\varphi(\xi)$ beschreibt also virtuelle. Für die aus (6.6) hervorgehende Lösung^{40b}

$$(9.4) \quad \varphi(\xi) = -\frac{i \varepsilon^4}{64 \pi^4} \oint \frac{K \cdot \bar{I} + 4 k \cdot I}{K \cdot k} W(\dot{\psi}(0) + \varphi(0)) e^{i k \cdot \xi} d^4 k$$

gilt wie früher: $\varphi(\xi)$ berechnet sich aus $\delta\left(\mathfrak{x} - \frac{\mathfrak{R}}{\Omega} \tau\right)$, was hier wegen $\mathfrak{R} = 0$ in $\delta(\mathfrak{x})$ übergeht. Auch das Feld der virtuellen Paare ist δ -artig. Eine Streuwelle ist nicht vorhanden. Sie ergibt sich auch dann nicht, wenn wir noch ein Umlaufintegral um den Pol hinzunehmen, das eine freie Welle liefert. Es ist klar, daß die Streuwelle fehlt, weil es in Gl. (9.4) keinen Resonanznenner gibt.

Wollte man Streuwellen erzwingen, so müßte man die linke Seite von Gl. (6.5) abändern; z. B. führt ein Massenterm in der linken Klammer von (6.5) bei komplizierterem Zähler zu dem Nenner

$$(9.5) \quad N = -4(4m^2 - \Omega^2) \left\{ \omega^2 - \left[m^2 + \frac{\mathfrak{x}^2}{1 - \frac{\Omega^2}{4m^2}} \right] \right\}.$$

Er hat Resonanzcharakter und liefert dementsprechend gegebenenfalls auch Streuwellen. Doch ist weder die Annahme einer solchen Masse noch die Art des Dispersionsgesetzes plausibel.

Da das Ergebnis in (9.4) der Erfahrung nicht unmittelbar widerspricht, da ein Wirkungsquerschnitt 0 für die Streuung von Neutrinen an Neutrinen auch nicht unplausibel ist und da sich dieser auch nach Rechnungen mit den Gleichungen der Heisenbergschen Theorie ergibt,^{40c} können wir es hinnehmen, vorausgesetzt daß die Wechselwirkung von Neutrinen mit fusionierten Teilchen und von fusionierten Teilchen untereinander zu Streuungen führt. Das ist nicht von vorneherein auszuschließen, weil bei Wechselwirkungen mit komplexen Teilchen Austauschpro-

^{40b} Es kann vorkommen, daß $\varphi(0) = 0$ ist, obwohl $W\dot{\psi} \neq 0$. In diesem Fall ist $\varphi(\xi)$, für $\xi \neq 0$ von 0 verschieden, so daß φ nicht identisch verschwindet. Allerdings ist $\varphi(\xi) \equiv \varphi(\tau, \varepsilon)$ wie in (6.18) unendlich klein, so daß man Lösungen hat, die, abgesehen von α -äquivalenten Gliedern, wie die in § 8 wechselwirkungsfreie Neutrinen darstellen.

^{40c} Für diese Mitteilung danke ich Herrn Heisenberg verbindlich.

zesse möglich sind, über die die vorliegenden Rechnungen noch nichts aussagen.

Eine Entscheidung über die Brauchbarkeit der kinetischen Terme von Gl. (3.6) ist also erst möglich, wenn die Lösungen von Drei- und Mehrbahnproblemen vorliegen. Sollte es auch in diesen Fällen keine Streuung geben, so wäre das sehr einschneidend, weil davon zunächst nicht der Ansatz der Wechselwirkung, sondern der der linken Seite von Gl. (3.6) betroffen wäre. Aber das ist nicht wahrscheinlich, wie folgende Betrachtung zeigt.

Im Dreibahnfall tritt an die Stelle von Gl. (6.5)

$$(9.6) \quad (\tilde{k}_1 + \tilde{k}_2 + \tilde{k}_3) \tilde{\psi} = Q.$$

Darin ist

$$(9.7) \quad \tilde{k}_i = k_{i\mu} \gamma_i^\mu.$$

Auf der linken Seite erhalten wir einen Zahlenfaktor, der den Nenner des zu (6.6) analogen Integranden bestimmt, wenn wir mit drei $\tilde{k}$ -Summen multiplizieren, in denen je ein $\tilde{k}_i$ und in jedem ein anderes negativ gezählt wird. Somit lautet der Nenner:

$$(9.8) \quad N = (-\tilde{k}_1 + \tilde{k}_2 + \tilde{k}_3) (+\tilde{k}_1 - \tilde{k}_2 + \tilde{k}_3) (+\tilde{k}_1 + \tilde{k}_2 - \tilde{k}_3) (\tilde{k}_1 + \tilde{k}_2 + \tilde{k}_3),$$

d. i. umgeformt gleich

$$(9.9) \quad -N = (k_3^2 - k_1^2 - k_2^2)^2 - 4 k_1^2 \cdot k_2^2.$$

Setzen wir hierin $k_3 = K - k_1 - k_2$ und, der Annahme entsprechend, daß zwei Teilchen fusioniert sind, $k_1 = k_2 = k$, so folgt schließlich mit $K = (\Omega, \vec{0})$:

$$(9.10) \quad N = -4(\Omega^2 - 4\Omega\omega) \left(\left(\omega - \frac{\Omega}{2} \right)^2 - k^2 \right).$$

Hierin ist der zweite Faktor der erwartete Resonanznenner und der erste sorgt wie unser bisheriger Nenner für die virtuellen Zwischenzustände. Wir begnügen uns hier mit dieser noch unvollkommenen Anmerkung zum Dreibahnfall.

§ 10. Anmerkungen zum Deutungsproblem

In den Gleichungen (5.16), (5.21) und schließlich (5.23) ist mit zunehmender Allgemeinheit definiert, was wir bei Zweibahnwellenfunktionen unter dem Mittelwert physikalischer Größen verstehen wollen. Bei der Ableitung dieser Mittelwerte sind wir von den Kontinuitätsgleichungen solcher Größen ausgegangen, von denen man weiß, daß sie zu Erhaltungssätzen führen müssen. Doch liefert dieser Gesichtspunkt keine eindeutigen Resultate. Z. B. folgt aus Gl. (5.14), wenn man die Lösungen aus § 6 heranzieht, daß auch das Integral (wenigstens bei geeigneter Wahl der Grenzübergänge zur Berechnung des uneigentlichen Integrals)

$$(10.1) \quad \int \bar{\psi} I^0 G \psi d^4 \xi d^3 x$$

eine Konstante der Bewegung ist. Es handelt sich sogar um ein Integral, das man unabhängig vom Schwerpunktsystem kovariant schreiben kann; denn es ist gleich

$$(10.2) \quad \int \bar{\psi} I^\mu G \psi d^4 \xi d \sigma_\mu.$$

Wir müssen uns also nach weiteren Gründen umsehen, die die Wahl zwischen den verschiedenen mit den Kontinuitätsgleichungen verträglichen Ansätzen ermöglichen.

Nun haben wir einige Lösungen von Zweibahngleichungen in Händen. Ihrer ganzen Ableitung nach kann kein Zweifel darüber bestehen, was sie physikalisch bedeuten. Es muß darum möglich sein, daraus einige Folgerungen zu ziehen, die die Bedeutung der Mehrbahnwellenfunktionen fixieren.

Wir wissen: Es gibt spezielle Lösungen unserer Wellengleichung mit Wechselwirkung, nach denen sich zwei Neutrinen in bestimmten Zuständen als freie Teilchen bewegen. Sehen wir zunächst auch noch von dem Pauliprinzip ab, so hat die Wellenfunktion in diesen Fällen folgende Gestalt:

$$(10.3) \quad \psi_{r_1 r_2}(x_1, x_2) = \psi'_{r_1}(x_1) \psi''_{r_2}(x_2).$$

Hier besteht kein Zweifel: Das Neutrino 1 ist im Zustand ψ' , das Neutrino 2 in ψ'' . Jede physikalische Größe hat in diesem Fall einen bestimmten, von Einbahnproblemen her bekannten Mittelwert. Z. B. ist der Mittelwert des Viererimpulses durch

$$P_\mu = \int \bar{\psi}'(x) \gamma_0 \partial_\mu \psi'(x) d^3x + \int \bar{\psi}''(x) \gamma_0 \partial_\mu \psi''(x) d^3x$$

gegeben. Berücksichtigen wir noch die Normierungsintegrale

$$(10.4) \quad \int \bar{\psi}' \gamma_4 \psi' d^3x = \int \bar{\psi}'' \gamma_4 \psi'' d^3x = 1,$$

so können wir dafür auch schreiben:

$$P_\mu = -i \int \bar{\psi}'(x_1) \gamma_4 \partial_{1\mu} \psi'(x_1) d^3x_1 \int \bar{\psi}''(x_2) \gamma_4 \psi''(x_2) d^3x_2 - \\ - i \int \bar{\psi}'(x_1) \gamma_4 \psi'(x_1) d^3x_1 \int \bar{\psi}''(x_2) \gamma_4 \partial_{2\mu} \psi''(x_2) d^3x_2,$$

d. i. mit Rücksicht auf (10.3) gleich

(10.5)

$$P_\mu = -i \int \bar{\psi}(x_1 x_2) (\gamma_4 \times \gamma_4) (\partial_{1\mu} + \partial_{2\mu}) \psi(x_1 x_2) d^3x_1 d^3x_2.$$

Es ist offensichtlich unmöglich, auf diese Weise zu Gl. (10.1) zu gelangen, so daß dieser Ansatz von vornherein ausscheidet. Leider ist das Ergebnis aber auch nicht mit (5.16) vereinbar. Es fehlt der Faktor I_4 . Der Unterschied ist wesentlich. Tatsächlich zeigt sich in ihm die ganze Problematik des relativistischen Mehrkörperproblems.

Einerseits stellt Gl. (5.16) einen Erhaltungssatz dar, und zwar den aus der Translationsinvarianz folgenden, wenn man für G den zweiten Operator aus (5.10) einsetzt. Sie sollte den Viererimpuls liefern.

Andererseits liefert (10.5) – mindestens wenn die Lösungen unserer Wellengleichung freie Wellen sind – Größen, die „anschaulich“ als Viererimpuls anzusprechen sind. Doch gelten für sie im allgemeinen keine Erhaltungssätze.

Es ist naheliegend, daraus zu schließen: Gl. (10.5) liefere die richtigen Größen, aber die Wellengleichung sei noch falsch. Man müsse versuchen, sie so umzuformen, daß sich (10.5) als

Integral ergäbe. Das scheint nicht möglich zu sein. Alle Versuche, solche Wellengleichungen zu gewinnen, sind gescheitert. Sie scheinen die verbreitete skeptische Auffassung zu bekräftigen, daß es nicht möglich sei, relativistische Mehrbahnwellengleichungen zu formulieren.

Wenn das richtig wäre, so würde es in derselben Weise die Quantentheorie der Wellenfelder treffen. Denn gäbe es brauchbare Quantenfeldgleichungen, so würde der Weg von diesen zu konkreten physikalischen Aussagen über die bekannten Koeffizientengleichungen führen, die mit dem, was wir Wellengleichungen für Mehrbahnsysteme nennen, identisch wären. Argumente, die beweisen sollen, daß es keine relativistischen Wellengleichungen des Mehrkörperproblems geben könne, sprächen zugleich gegen die Möglichkeit einer relativistischen Quantenfeldtheorie. Daher wollen wir uns nach einem Ausweg umsehen.

Wir kehren zu den Gl. (5.16) und (10.5) zurück! Bei aller Diskrepanz besteht doch eine sehr auffällige Verwandtschaft, die den Gedanken nahelegt, die Schwierigkeiten nicht im mathematischen Ansatz, sondern in der Deutung zu suchen. Diese Auffassung wird durch den Umstand unterstützt, daß im Falle freier Teilchen durch Gl. (10.5) und verwandte Integrale Konstante definiert werden. Nimmt man hinzu, daß wir im Sinne der Theorie der in- und outwaves stets nur Einzelteilchen beobachten, elementare Fermionen und auch fusionierte Teilchen, d. h. anders ausgedrückt, freie Wellen, so gelangen wir zu der Annahme, daß Beobachtungen zum Mittelwert (10.5) führen, daß also die Mittelwerte nicht mehr unmittelbar mit den Dichten zusammenhängen, die in den Erhaltungssätzen stehen.

Das ist eine Hypothese. Wir können sie einfacher und zugleich anschaulicher aussprechen, wenn wir zu den Vorstellungen zurückkehren, die uns zu Gl. (10.5) geführt haben. Das Geschehen wird durch die Mehrbahnwellengleichung beschrieben und der Zustand eines physikalischen Systems durch eine Mehrbahnwellenfunktion. Was eine bestimmte Wellenfunktion bedeutet, zu welchen Beobachtungsergebnissen sie führt, ergibt sich, wenn wir sie nach Einzelteilchenfunktionen entwickeln, also im Zweibahnfall nach Produkten aus je zwei NeutrinoFunktionen und nach den Wellenfunktionen fusionierter Paare, die, wie wir

gesehen haben, durch die Lösungen der Maxwellschen und der pseudoskalaren Wellengleichung bestimmt sind.⁴¹

Welche Bedenken stehen einer solchen Hypothese entgegen? Zunächst eines, das man „naturphilosophisch“ nennen könnte, wenn man diesen Begriff wie den englischen „natural philosophy“ versteht. In der klassischen Physik ist der Beobachtungsakt ein Teil des physikalischen Geschehens. Schon in der elementaren Quantenmechanik trifft das nicht mehr zu. Zwischen dem Geschehen, das die zeitlichen Änderungen der Wellenfunktionen bestimmt, und der Beobachtung liegt der Heisenbergsche Schnitt. Das Geschehen wird durch unitäre Transformationen beschrieben

$$\psi \rightarrow U \psi, \quad U^\dagger U = 1,$$

die Beobachtung durch den Vorgang der Ausblendung, also nicht mehr durch unitäre, sondern durch idempotente Transformationen:

$$\psi \rightarrow B \psi, \quad B^2 = B.$$

Hier entfernt sich die Beobachtung noch einen Schritt weiter vom Geschehen. Die Dichtefunktionen in den Erhaltungssätzen geben nicht mehr unmittelbar die Wahrscheinlichkeiten. Der Grund dafür ist, wie das Auftreten des Faktors Γ_4 in Gl. (5.16) zeigt, in dem eigentümlichen Zusammenspiel von Teilchen und Antiteilchen zu suchen. In der nichtrelativistischen Theorie gibt es keine Antiteilchen, $\Gamma_4 = 1$, der Unterschied zwischen Dichten und Wahrscheinlichkeiten entfällt. Natürlich kann man die neue Deutung ebensowenig wie die alte deduktiv beweisen. Doch ist der Zusammenhang mit der in- und outwave-Vorstellung schon jetzt eine starke Stütze.

Das zweite Bedenken ist mathematischer Natur. Ist der neue Deutungsvorschlag mit der Wellengleichung verträglich? Hier sind Deduktionen möglich. Man kann prüfen, ob man alle Lösungen der Wellengleichungen aus den Funktionen von Neutrinos und fusionierten Teilchen zusammensetzen kann, und ob

⁴¹ Wir entwickeln also nach in- und outwaves in einer Theorie mit fusionierten Teilchen, die wie die elementaren Fermionen außerhalb der Wechselwirkungszentren durch freie Wellen beschrieben werden.

diese Zerlegung eindeutig bestimmt ist. Eine systematische Bearbeitung dieser Frage stellen wir zurück, weil noch die Wellenfunktionen für die Streuung von $\bar{\nu}$ an ν und von $\bar{\nu}$ an $\bar{\nu}$ ausstehen. Doch sei an die Abzählung der Lösungen in § 8 erinnert.

Eine sofortige Antwort verbietet sich bei Fragen, zu denen das dritte, ein physikalisches Bedenken führt: Ist die Hypothese physikalisch richtig? Ist sie im Einklang mit der Erfahrung? Hier gibt es keine Beweise, sondern nur mit jeder neuen Bewährungsprobe wachsende Sicherheit.

Dabei ist zu beachten: Diskrepanzen zwischen den Folgerungen aus den Wellengleichungen und der Erfahrung sind zu erwarten. Es ist unwahrscheinlich, daß wir mit unseren Ansätzen gleich das Richtige getroffen haben. Im allgemeinen werden solche Diskrepanzen nicht die Deutungshypothese in Frage stellen, sondern nur das spezielle Modell. Einige der wichtigsten Modellprobleme seien hier aufgezählt:

1. Kommen in der Wechselwirkung keine Ableitungen von δ vor?
2. Ist die Annahme lokaler Wechselwirkungen richtig?
3. Gibt es endliche Wirkungsquerschnitte trotz dem Faktor ε^4 ?
4. Ist die radikale Fusionshypothese haltbar?
5. Welche Rolle spielt der Isospin?
6. Gibt es Mehrkörperwechselwirkungen?

§ 11. Der unendlich feine Gitterraum

In § 12 berichtet Herr Laugwitz über die von Schmieden und ihm entwickelte neue Analysis (SLA),⁴² die wir in dieser Abhandlung vorausgesetzt haben. Insbesondere zeigt er, daß in ihr die Diracschen δ nicht nur Distributionen, sondern echte Funktionen sind.

Hier wollen wir die benutzten Relationen mit einer Methode begründen, die eine leichte Verallgemeinerung der in der Feld-

⁴² l. c. 15.

⁴³ Vgl. z. B. W. Heitler, „The Quantum Theory of Radiation“, Oxford 1936, Chap. I, § 6.

theorie benutzten Kastenmethode ist. Nach dieser wird angenommen, daß sich ein Feld außerhalb eines sehr großen, tatsächlich gegen unendlich strebenden Volumens periodisch wiederhole⁴³, woraus folgt, daß der Impulsraum ein Punktgitter ist, welches mit zunehmender Größe des Basisvolumens beliebig fein wird. Unter Heranziehung der SLA könnte man von vorneherein mit dem unendlich feinen Gitter rechnen. Die wohlbekannte Wurzel aus dem Normierungsvolumen wäre dann eine unendlich kleine Zahl im Sinne der SLA.

Im folgenden wollen wir Raum und Impulsraum nach dem Vorbild der Kastenmethode in gleicher Weise behandeln. Dem entspricht die Annahme eines gitterförmigen Ortsraums mit endlicher Basis. Z sei in einem eindimensionalen zyklischen Gitter (s. Fig. 8) die Anzahl der Gitterpunkte. Anders als in der Figur sei Z eine sehr große, vielleicht unendlich große Zahl.

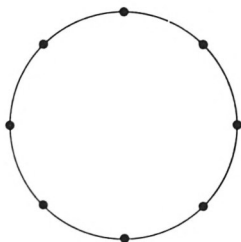


Fig. 9. Zyklischer Gitterraum mit $Z = 8$

Die Ortskoordinate sei n . Es ist eine ganze Zahl aus der Reihe von 0 bis $Z - 1$ (oder eine beliebige modulo Z gemeinte ganze Zahl). Funktionen in diesem Gitterraum kann man aus ebenen Wellen

$$(11.1) \quad \psi = \exp \left(\frac{2\pi i m n}{Z} \right)$$

linear zusammensetzen. Darin ist m ebenfalls ganzzahlig und modulo Z zu verstehen. Es ist ein Maß für den Impuls. Auch der Impulsraum ist ein zyklisches Punktgitter mit Z Punkten.

Man kann die Punkte in einem solchen gitterförmigen Phasenraum durch Abzählen finden. Aber bei großer Punktzahl wird man auch im Finiten lieber messen als zählen. Die Ein-

führung von Maßeinheiten läuft darauf hinaus, daß man dem Abstand der Gitterpunkte ein Maß zuschreibt; es sei

a die Gitterkonstante im Impulsraum,

b die Gitterkonstante im Ortsraum.

Danach sind die gemessenen Koordinaten für Ort und Impuls:

$$(11.2) \quad p = m a, \quad q = n b$$

und die ebene Welle in (11.1) nimmt die vertraute Form an:

$$(11.3) \quad \psi = \exp \left(\frac{i p q}{\hbar} \right),$$

wenn wir

$$(11.4) \quad Z a b = 2 \pi \hbar$$

setzen. Ohne die Relation (11.4) zu verletzen, können wir für a und b die Gleichungen

$$(11.5) \quad a = \frac{2 \pi \hbar}{l \sqrt{Z}}, \quad b = \frac{l}{\sqrt{Z}}$$

ansetzen, in der l eine endliche Länge ist. Damit gehen die Gitterkonstanten a und b in gleicher Weise gegen 0, wenn Z über alle Grenzen wächst und wenn wir $2 \pi \hbar$ und l konstant halten. Die Ausdehnung der beiden Gitter

$$(11.6) \quad A = Z a = \frac{2 \pi \hbar}{l} \sqrt{Z}, \quad B = Z b = l \sqrt{Z}$$

nimmt im umgekehrten Verhältnis zu und wird schließlich unendlich.

Die Art des Grenzübergangs rechtfertigt sich, was das Produkt $Z a b$ angeht, durch die Bedeutung der Planckschen Konstante. Die Konstanz des Quotienten $a/b = 2 \pi \hbar / l^2$ und damit die Existenz einer der Planckschen Konstanten vergleichbaren Länge l wird durch die kanonische Symmetrie zwischen p und q mindestens wahrscheinlich gemacht.

Die δ -Funktion geht jetzt durch Grenzübergang unmittelbar aus dem Kroneckersymbol hervor. Definieren wir, noch im Finiten bleibend, mittels

$$(11.7) \quad \delta_n = \begin{cases} 1 & \text{für } n \equiv 0 \pmod{Z}, \\ 0 & \text{für } n \not\equiv 0 \pmod{Z} \end{cases}$$

die δ -Funktionen im Impuls- und Ortsraum durch

$$(11.8) \quad \delta_1(p) = \delta(ma) = \frac{1}{a} \delta_m$$

bzw.

$$(11.9) \quad \delta_2(q) = \delta(nb) = \frac{1}{b} \delta_n,$$

so gilt

$$(11.10) \quad \sum_p \delta_1(q) a = \sum_q \delta_2(q) b = 1,$$

wofür man im Sinne der SLA nach dem Grenzübergang

$$(11.11) \quad \int \delta_1(q) dp = \int \delta_2(q) dq = 1$$

zu schreiben hat. Benutzen wir nach vollzogenem Grenzübergang die unendlich kleinen Zahlen

$$(11.12) \quad \varepsilon' = \frac{2\pi\hbar}{l\sqrt{Z}}, \quad \varepsilon'' = \frac{l}{\sqrt{Z}},$$

so folgt für die δ -Funktionen δ_1 und δ_2 im Impuls- und Ortsraum bzw.

$$(11.13) \quad \varepsilon' \delta_1(0) = \varepsilon'' \delta_2(0) = 1$$

im Einklang mit Gl. (6.26). Speziell gilt:

$$(11.14) \quad \varepsilon'' \equiv \varepsilon$$

und ε' sind nicht unabhängig. Vielmehr folgt aus (11.5):

$$(11.15) \quad \varepsilon' = \frac{2\pi\hbar}{l^2} \varepsilon.$$

Die Ausdehnung der Gitter ist nach dem Grenzübergang

$$(11.16) \quad A = \frac{2\pi\hbar}{\varepsilon}, \quad B = \frac{l^2}{\varepsilon}.$$

Die erste dieser Gleichungen stimmt mit (6.9) überein.

Es ist nicht ohne Reiz, mit endlichem Z zu rechnen und über die Größe von Z zu spekulieren. Wenn man davon absieht, daß wir mehrere Kopplungskonstanten haben, oder wenn man diese von etwa gleicher Größe annimmt, dann ist dadurch eine Länge definiert, die wir ganz im Sinne des Heisenbergschen Begriffs einer charakteristischen Länge mit unserem l identifizieren können.

Das Verhältnis der Ausdehnung der Welt zur charakteristischen Länge l ist danach einerseits gleich $\frac{B}{l} = \sqrt{Z}$ und andererseits empirisch zu 10^{40} bestimmt. Hieraus folgt, daß $Z = 10^{80}$ sein muß. Und es zeigt sich, daß die kleinste Länge $\varepsilon = \frac{l}{\sqrt{Z}}$ mit dem Gravitationsradius elementarer Partikel übereinstimmt. Es kommt also hier die empirische Relation heraus, auf die H. Weyl schon hingewiesen hat: Weltradius zu Elektronenradius wie Elektronenradius zu Gravitationsradius.⁴⁴

Genug der Spekulation! – Für uns ist es gleichgültig, ob $Z = 10^{80}$ ist oder eine unendlich große Zahl im Sinne der SLA. Es bedarf keines Hinweises, daß diese Spekulation nichts mit dem Inhalt der Abhandlung oder mit dem Ziel dieses Paragraphen zu tun hat. Aber, right or wrong, das Ergebnis ist so hübsch, daß es nicht unerwähnt bleiben soll. Es macht außerdem drastisch klar, daß die „kleinste Länge ε “ nicht mit der „Heisenbergschen charakteristischen Länge“ übereinstimmt, die man gelegentlich auch kleinste Länge genannt hat.

§ 12. Anhang: Über δ -Funktionen

In diesem Abschnitt wird eine Einführung in die Erweiterung der Analysis gegeben, welche an anderer Stelle ausführlich dargestellt wurde. Der erweiterte Zahlbereich enthält außer den reellen Zahlen noch unendlich kleine und unendlich große Zahlen, was einen bequemen Zugang zu den in den vorangehenden Abschnitten verwendeten Rechenmethoden ermöglicht.⁴⁵

⁴⁴ H. Weyl, „Raum – Zeit – Materie“, 5. Auflage, Springer 1923, p. 277.

⁴⁵ A. a. O. 15. – Aus prinzipiellen Erwägungen rein mathematischen Interesses wurden in jener Arbeit die rationalen Zahlen zugrunde gelegt, während

Wir gehen aus von Folgen von reellen Zahlen r_n im gewöhnlichen Sinne ($n = 1, 2, 3 \dots$) und ordnen jeder solchen Folge eine Zahl R des erweiterten Zahlbereichs⁴⁶ zu. Wir schreiben $R = \{r_n\}$. Das Rechnen mit diesen neuen Zahlen wird durch die folgenden Regeln erklärt: Ist $R = \{r_n\}$, $S = \{s_n\}$, so gilt

$R = S$ genau wenn $r_n = s_n$ für alle n .

$R \pm S = \{r_n \pm s_n\}$, $R \cdot S = \{r_n \cdot s_n\}$, $R : S = \{r_n : s_n\}$

$R > S$ genau wenn $r_n > s_n$ für alle hinreichend großen n .

$|R| = \{|r_n|\}$.

Aus diesen Definitionen folgt für die Zahl $\Omega = \{n\}$: $\Omega > m$ für jede natürliche Zahl m . Man nennt eine Zahl, die größer ist als jede natürliche Zahl, unendlich groß, und eine Zahl, deren Absolutbetrag kleiner ist als jede positive reelle Zahl, unendlich klein. Die reellen Zahlen r selbst werden durch die konstanten Folgen $r_n = r$ in den neuen Zahlbereich isomorph eingebettet. Ist die Differenz zweier Zahlen R und S unendlich klein, so schreiben wir $R \cong S$.

Außer den elementaren Rechenoperationen sind hier auch unendliche Summen in folgender Weise definiert. Es seien $G = \{g_n\}$, $H = \{h_n\}$ Zahlen, für die g_n, h_n ganzrational seien und $g_n < h_n$. Dann wird die Summe von G bis H der Zahlen $Q_j = \{q_{j,n}\}$ definiert durch

$$S = \sum_{j=G}^H Q_j = \{s_n\}$$

es für die hier interessierenden Anwendungen zweckmäßiger ist, den Körper der reellen Zahlen zu erweitern. Die Beweise aus der zitierten Arbeit übertragen sich fast wörtlich auf diesen Fall und lassen sich in mancher Hinsicht einfacher formulieren. Vgl. D. Laugwitz: „Eine Einführung der δ -Funktion“, in diesen Berichten 1959; Summar zur Sitzung vom 6. 2. 1959 ebenda (beides im Druck).

⁴⁶ Man denke dabei an eine neue Art von Limesbildung und verbinde mit den Elementen des neuen Bereiches die Vorstellung von Zahlen, ähnlich wie man bei den reellen Zahlen ja auch nicht an der Vorstellung hängt, daß es sich bei jeder reellen Zahl um eine Gesamtheit von definierenden Folgen rationaler Zahlen handelt. – Zur Bezeichnung in § 12: Reelle Zahlen werden durch kleine lateinische Buchstaben bezeichnet, die natürlichen Zahlen insbesondere durch m, n ; die Zahlen des erweiterten Bereichs bezeichnen wir mit griechischen oder mit großen lateinischen Buchstaben.

mit $s_n = \sum_{j=g_n}^{h_n} q_{jn}$. Ganz ähnlich definiert man unendliche Pro-

dukte. Auf diese Weise sind beispielsweise Summen von 1 bis Z (Z unendlich groß) erklärt, wie sie in § 11 auftreten.

Funktionen $f(x)$, die für reelle Zahlen x erklärt sind, lassen sich auf den neuen Bereich erweitern. Man setze

$$F(X) = \{f(x_n)\} \quad \text{für} \quad X = \{x_n\}.$$

Offenbar ist $F(x) = f(x)$ für reelle x . Man zeigt, daß $F(X)$ stetig (differenzierbar) ist, falls $f(x)$ im gewöhnlichen Sinne stetig (differenzierbar) ist. Insbesondere definieren wir

$$e^X = \{e^{x_n}\} \quad \text{und ebenso} \quad \sin X = \{\sin x_n\}.$$

Man verifiziert beispielsweise sofort die Funktionalgleichungen:

$$e^{X+Y} = \{e^{x_n+y_n}\} = \{e^{x_n} \cdot e^{y_n}\} = \{e^{x_n}\} \cdot \{e^{y_n}\} = e^X \cdot e^Y.$$

Außer diesen durch Erweiterung aus den gewöhnlichen reellen Funktionen erhaltenen interessieren hier aber auch noch andere Funktionen, die wir als „normale Funktionen“ bezeichnen. Eine Funktion $F(X)$ heißt normal, wenn $F(X) = \{f_n(x_n)\}$, das heißt, wenn die n -te Komponente f_n des Funktionswertes F nur von n und der n -ten Komponente des Argumentes X abhängt. Die oben eingeführten erweiterten reellen Funktionen sind offenbar nach Definition normal; aber die folgende Funktion ist normal, ohne daß man sie durch Erweiterung einer reellen Funktion erhalten könnte:

$$(12.2) \quad F(X) = \frac{1}{\pi} \frac{N}{1 + N^2 X^2}, \quad N \text{ unendlich groß.}$$

Auf diese normalen Funktionen lassen sich die Regeln und Sätze der reellen Analysis übertragen, wie in der zitierten Arbeit ausgeführt wurde. Insbesondere lassen sich die Differentiations- und Integrationsregeln leicht direkt bestätigen. Die Ableitung einer normalen Funktion kann komponentenweise vorgenommen werden, so daß man für das Beispiel $F(X) = e^X$ erhält:

$$F'(X) = \{(e^{x_n})'\} = \{e^{x_n}\} = e^X = F(X).$$

Die komplexen Zahlen lassen sich wie gewöhnlich durch $X + i Y$ einführen.

Wir betrachten insbesondere Funktionen,⁴⁷ die das charakteristische Verhalten der δ -Funktion haben. Eine Funktion $\delta(X)$ heiße eine δ -Funktion, wenn es eine positive unendlich kleine Zahl β gibt, so daß

$$\int_{-\beta}^{\beta} \delta(X) dX \cong 1 \quad \text{und} \quad \int_A^B \delta(X) dX \cong 0$$

$$\text{für } A < B \leq -\beta \text{ und } \beta \leq A < B.$$

Aus dem Mittelwertsatz der Integralrechnung folgt

$$(12.3) \quad \int_A^B \delta(X) F(X) dX \cong F(0) \quad A \leq -\beta, \quad \beta \leq B$$

für eine Funktion F , die in der Umgebung von 0 im gewöhnlichen Sinne stetig ist, oder allgemeiner, für jede Funktion, die im Intervall $\langle -\beta, +\beta \rangle$ unendlich wenig schwankt und außen nicht zu stark wächst. Es sei bemerkt, daß (12.3) nicht notwendig gilt, wenn F selbst eine δ -Funktion ist; so berechnet man, daß die Funktion (12.2) eine δ -Funktion ist, für die

$$\int F^2(X) dX = \frac{1}{2} F(0).$$

Wir betrachten nun eine spezielle Klasse von δ -Funktionen, die eine zusätzliche Eigenschaft besitzen. Sei ε eine positive unendlich kleine Zahl, die willkürlich, aber für das Folgende fest gewählt sei, so bestehe die Klasse Δ_ε aus denjenigen δ -Funktionen, für die

$$(12.4) \quad \delta(0) = \frac{1}{\varepsilon} \quad \text{und} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta^2(X) dX = f_2 \cdot \delta(0) \quad \text{mit } f_2 \cong 1$$

ist. Um einen konkreten Fall ins Auge zu fassen, sei ε definiert durch die Gleichung (6.9) mit einem unendlich großen N :

⁴⁷ Alle Funktionen werden als normal vorausgesetzt.

$$(12.5) \quad \frac{1}{\varepsilon} = \frac{1}{2\pi} \int_{-N}^{+N} dk = \frac{N}{\pi}.$$

Daß es δ -Funktionen mit (12.4) in großer Auswahl gibt, läßt sich leicht bestätigen. Wir führen zwei Beispiele an:

$$(12.6) \quad \delta(X) = \frac{\sin N \cdot X}{\pi \cdot X}$$

und

$$(12.7) \quad \delta(X) = \frac{K}{1 + (2 K X)^{2M}} \text{ mit } K = \frac{1}{\varepsilon}, \quad M \text{ unendlich groß.}^{48}$$

Mit (12.6) ergibt sich für die ebenen Wellen mit unendlich kleiner Amplitude aus (6.28), $\psi_k(X) = \sqrt{\frac{\varepsilon}{2\pi}} e^{i k X}$, tatsächlich die Orthonormalität

$$\begin{aligned} \int_{-N}^{+N} \psi_{k'}^*(X) \psi_k(X) dX &= \frac{\varepsilon}{2\pi} \int_{-N}^{+N} e^{i(k-k')X} dX = \varepsilon \cdot \delta(k - k') = \\ &= \varepsilon \delta(0) = 1 \text{ für } k = k', \\ &\cong 0 \text{ für } |k - k'| \text{ endlich oder unendlich groß.} \end{aligned}$$

Die Multiplikation von δ -Funktionen bereitet keine Schwierigkeiten, da diese echte Funktionen sind. Insbesondere kann man bilden

$$\bar{\delta}(X) = \delta^2(X) \left/ \int_{-\infty}^{+\infty} \delta^2(X) dX \right.$$

⁴⁸ Die δ -Funktion (12. 7) approximiert die in § 11 eingeführte und im Text benutzte besonders gut, vor allem, wenn $M \gg K \gg 1$ ist, das Zeichen im Sinne von § 12 als „Unendlich groß gegen“ verstanden. Man rechnet leicht nach:

$$\int F(X) \delta(X)^n dX \cong f_n \delta(0)^{n-1} F(0) \cong \delta(0)^{n-1} F(0);$$

denn es ist

$$f_n = \frac{\pi/2M}{\sin(\pi/2M)} \prod_{\nu=1}^{n-1} \left(1 - \frac{1}{2M\nu} \right) \cong 1.$$

Ebenso erhält man:

$$\int F(X) \delta(X)^{n-1} \delta'(X) dX \cong -\frac{1}{n} f_n \delta(0)^{n-1} F'(0) \cong -\frac{1}{n} \delta(0)^{n-1} F'(0).$$

Das ist sofort verständlich, wenn man sich die Gitterpunkte in § 11 durch Zellen ersetzt denkt. (F. B.)

Diese Funktion ist selbst wieder eine δ -Funktion, und wenn δ der Klasse $\mathcal{A}_\varepsilon$ angehört, also (12.4) gilt, hat man

$$(12.8) \quad \delta(X) \cdot \delta(X) = \delta(0) \bar{\delta}(X) = \frac{1}{\varepsilon} \bar{\delta}(X).$$

Daraus folgen unmittelbar die Relationen (6.27), (6.29) und (6.30). Die Funktion $\bar{\delta}$ hat selbst wieder die Eigenschaft, daß $\bar{\delta}(0) = \delta(0) = \frac{1}{\varepsilon}$. Aber die zweite Gl. (12.4) gilt dafür nicht.

Es sei noch bemerkt, daß man Relationen mit δ -Funktionen so zu interpretieren hat, daß in ihnen an verschiedenen Stellen verschiedene δ -Funktionen aus unserer Klasse einzusetzen sind.

Es sei abschließend noch auf weitere Eigenschaften unserer δ -Funktionen hingewiesen. Die Ableitung einer solchen Funktion ist eine Dipolfunktion, ihr Integral eine Funktion, die außerhalb einer unendlich kleinen Umgebung von 0 bis auf unendlich kleine Fehler konstant ist und in dieser Umgebung stetig, aber unendlich steil um die Höhe 1 anwächst. Diese Möglichkeit, Sprünge stetig zu überbrücken, erlaubt es ganz allgemein, Sprungfunktionen bis auf unendlich kleine Fehler genau durch unendlich oft differenzierbare Funktionen zu ersetzen.

Herrn Dr. Meister danken wir für seine Mithilfe bei Ausarbeitung und Korrektur.