BAYERISCHE AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE

SITZUNGSBERICHTE

JAHRGANG

1957

MÜNCHEN 1958

VERLAG DER BAYERISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung München

Über die Fortsetzung positiver Linearformen

Von Heinz Bauer in Erlangen

Vorgelegt von Herrn Otto Haupt am 13. Dezember 1957

Übersicht

Einleitung

Die fundamentale Bedeutung des Satzes von Hahn-Banach für die Funktionalanalysis ist allgemein bekannt. Nach diesem Satz kann jede auf einem linearen Unterraum eines lokalkonvexen Vektorraumes E definierte, stetige Linearform f auf wenigstens eine Weise zu einer auf ganz E definierten, stetigen Linearform $\bar{f}$ fortgesetzt werden. Die Verhältnisse werden wesentlich komplizierter, wenn man an die Fortsetzung $\bar{f}$ die zusätzliche Forderung stellt, positiv zu sein bezüglich einer mit der Vektorraumstruktur von E verträglichen Ordnungsrelation. In der Tat kennt man einfache Beispiele dafür, daß eine auf einem linearen Unterraum eines geordneten Vektorraumes definierte, positive Linearform auf keine Weise zu einer positiven Linearform auf den Gesamtraum fortgesetzt werden kann.[1] Abgesehen von einem Satz von M. G. Krein,[2] der jedoch nur einen Spezialfall behandelt, fehlte unseres Wissens bislang in der Literatur ein allgemeiner Satz über die Fortsetzung positiver Linearformen, welcher etwa die

[1] Vgl. Bourbaki [4], S. 78 (exercice 13).
[2] Vgl. Bourbaki [4], S. 75 (proposition 6).

gleichen Dienste leistet wie der Satz von Hahn-Banach für die Fortsetzung beliebiger Linearformen. In der vorliegenden Arbeit soll ein solcher Satz bewiesen werden; aus ihm folgen die Sätze von Hahn-Banach und Krein als Korollare. Wir wurden zu dieser Untersuchung angeregt durch eine Arbeit von W. Nef [6], in welcher das gleiche Problem ohne Heranziehung topologischer Begriffe und Hilfsmittel, also rein algebraisch behandelt wird. Eine genaue Analyse dieser Arbeit zeigt jedoch, daß Nef implizit mit der feinsten lokalkonvexen Topologie auf dem vorgegebenen Vektorraum arbeitet. Unsere für beliebige lokalkonvexe Räume gültigen Resultate umfassen daher die von Nef und verbessern sie sogar in mancherlei Hinsicht. Ein Teil der Resultate dieses Artikels wurde in einer Note in den Comptes Rendus de l'Académie des Sciences (Paris) [1] angekündigt.

Nach Fertigstellung des Manuskripts zu dieser Arbeit erhielten wir Kenntnis von der Dissertation von I. Namioka [5], in welcher zwei Abschnitte dem gleichen, bei uns behandelten Problem gewidmet sind. Der für unsere Arbeit entscheidende Hauptsatz 2 sowie Satz 2 finden sich dort in der gleichen Form. Die Veröffentlichung unserer Arbeit schien uns aber trotzdem nicht überflüssig zu sein, da eine Reihe von hier behandelten Fragen bei Namioka nicht erörtert werden und sich außerdem unsere Beweistechnik von der von Namioka unterscheidet. Während zum Beispiel der Beweis des Hauptsatzes 2 bei uns so geführt wird, daß sich hinterher der Satz von Hahn-Banach als eine Folgerung hieraus ergibt, benützt Namioka den Satz von Hahn-Banach bereits zum Beweis des Hauptsatzes 2.

§ 1. Verallgemeinerung des Satzes von Hahn-Banach für positive Linearformen

Es sei E ein *Vektorraum* über dem Körper $\boldsymbol{R}$ der reellen Zahlen und P ein *konvexer Kegel*, dessen Spitze der Nullvektor o ist und in P liegt.[3] Ein Kegel mit diesen Eigenschaften ist defini-

[3] Im folgenden werden ausschließlich konvexe Kegel P mit dieser Eigenschaft betrachtet; wir werden daher von nun an nur mehr von konvexen Kegeln sprechen. Zu verstehen sind darunter stets genauer konvexe Kegel P,

tionsgemäß eine nicht leere Teilmenge P von E derart, daß $P + P \subset P$ und $\lambda P \subset P$ ist für alle reellen Zahlen $\lambda \geq 0$. Die Relation $y - x \in P$, welche wir in der Form $x \prec y$ schreiben, ist dann eine mit der Vektorraumstruktur von E verträgliche Präordnung; bezüglich ihr ist also E ein prägeordneter Vektorraum und P die Menge aller Vektoren x mit $0 \prec x$. Gibt man sich umgekehrt eine mit der Vektorraumstruktur verträgliche Präordnungsrelation $\prec$ auf E vor, so ist bekanntlich die Menge P aller Vektoren x mit $0 \prec x$ ein konvexer Kegel (mit der Spitze $0 \in P$); dieser definiert wiederum die Ausgangsrelation $\prec$. Wir setzen im folgenden nicht voraus, daß der Kegel P spitz, d. h. daß $P \cap (-P) = \{0\}$ (oder, was dasselbe bedeutet, daß $\prec$ eine Ordnungsrelation) ist. Es sei aber trotzdem vermerkt, daß man sich stets auf diesen Fall zurückziehen kann durch Übergang zum Quotientenraum $E/P \cap (-P)$.

Eine Linearform $\bar{f}$ auf E heißt *positiv* (bezüglich P oder $\prec$), wenn $\bar{f}(x) \geq 0$ ist für alle $x \in P$.

Wir beweisen nun einen Satz, der, wie sein nachfolgendes Korollar zeigen wird, den Satz von Hahn-Banach verallgemeinert.

Hauptsatz 1. *Es sei E ein Vektorraum über* **R**, *P ein konvexer Kegel in E, p eine Halbnorm auf E und V die Menge aller $x \in E$ mit $p(x) < 1$. Eine auf einem linearen Unterraum M von E definierte Linearform f kann dann und nur dann zu einer positiven Linearform $\bar{f}$ auf E fortgesetzt werden, welche für alle $x \in E$ der Ungleichung $|\bar{f}(x)| \leq p(x)$ genügt, wenn gilt:*

(1) $\qquad f(x) > -1 \qquad$ *für alle $x \in M \cap (V + P)$.*

Beweis. Die Bedingung (1) ist notwendig. Es sei nämlich $\bar{f}$ eine positive, f auf E fortsetzende Linearform mit $|\bar{f}(x)| \leq p(x)$ für alle $x \in E$. Jeder Punkt $x \in M \cap (V + P)$ ist von der

deren Spitze der Nullvektor 0 ist und in P liegt. Im übrigen verwenden wir hier und in allem, was folgt, die Terminologie von Bourbaki; dies gilt insbesondere für die in Bourbaki [4] eingeführten Begriffsbildungen zur Theorie der topologischen Vektorräume. Danach ist also speziell der Begriff „geordnete Menge" gleichbedeutend mit „teilweise geordnete Menge".

Form $x = v + p$ mit $v \in V$ und $p \in P$; folglich gilt $f(x) = \bar{f}(x) = \bar{f}(v) + \bar{f}(p) \geq \bar{f}(v) \geq -p(v) > -1$.

Die Bedingung ist aber auch hinreichend.[4] Hierzu kann ohne Beschränkung der Allgemeinheit $f \neq 0$ angenommen werden. Wir versehen E mit der durch die einzige Halbnorm p definierten lokalkonvexen Topologie. Die Menge $V + P$ ist dann nicht leer, offen und konvex. Die Menge N aller Punkte $x \in M$ mit $f(x) = -1$ ist eine lineare (affine) Mannigfaltigkeit in E und nach (1) zu $V + P$ fremd. Nach dem Satz von S. Mazur (vgl. [4], S. 69) existiert daher eine abgeschlossene Hyperebene H in E, welche N als Teilmenge enthält und zu $V + P$ fremd ist. Es sei nun $\bar{f}$ eine Linearform auf E mit der Eigenschaft, daß $\bar{f}(x) = -1$ ist in jedem Punkt von H. Es ist dann $f(x) = \bar{f}(x)$ für alle $x \in N$ und somit auch für alle $x \in M$, da N in M eine Hyperebene ist. Daher setzt $\bar{f}$ die Linearform f auf ganz E fort. Weiter ist $\bar{f}$ eine positive Linearform. In der Tat: aus $x \in P$ folgt $\lambda x \in P \subset V + P$ für alle $\lambda \geq 0$; es ist also $\lambda \bar{f}(x) > -1$ für alle $\lambda \geq 0$ und deswegen $\bar{f}(x) \geq 0$. Schließlich ist $|\bar{f}(x)| \leq p(x)$ für alle $x \in E$, da aus $\bar{f}(x) = -1$ folgt, daß x nicht in V liegt, also $p(x) \geq 1$ ist. Somit leistet $\bar{f}$ das in unserem Satz Verlangte.

Korollar (Hahn-Banach). *Es sei E ein Vektorraum über $\mathbf{R}$, p eine Halbnorm auf E, M ein linearer Unterraum von E und f eine auf M definierte Linearform derart, daß $|f(x)| \leq p(x)$ ist für alle $x \in M$. Dann existiert eine f auf ganz E fortsetzende Linearform $\bar{f}$ derart, daß $|\bar{f}(x)| \leq p(x)$ ist für alle $x \in E$.*

Beweis. Es genügt, für P den aus dem einzigen Punkt 0 bestehenden Kegel zu wählen und den Hauptsatz 1 anzuwenden.

Satz 1. *Es sei E ein Vektorraum über $\mathbf{R}$, P ein konvexer Kegel in E, p eine Halbnorm auf E und x_0 ein Punkt aus E mit $p(x_0) > 0$. Schließlich sei V_0 die Menge aller $x \in E$ mit $p(x) < p(x_0)$. Es existiert dann und nur dann eine positive Linear-*

[4] Der folgende Teil des Beweises ist dem Beweis des Satzes von Hahn-Banach bei Bourbaki [4], S. 101, nachgezeichnet.

form $\bar{f}$ *auf* E *derart, daß* $\bar{f}(x_0) = p(x_0)$ *und* $|\bar{f}(x)| \leq p(x)$ *in jedem Punkt von* E *ist, wenn gilt:*

$$(2) \qquad (-x_0 + V_0) \cap P = \emptyset.$$

Bemerkung. Für einen Punkt x_0 aus E mit $p(x_0) = 0$ ist die Existenz einer so beschaffenen Linearform $\bar{f}$ evident. Es genügt, $\bar{f} = 0$ zu setzen.

Beweis. Die Bedingung (2) ist notwendig. Ist nämlich $\bar{f}$ eine positive Linearform auf E mit den angegebenen Eigenschaften, so gilt für jedes $x \in V_0$:

$$\bar{f}(-x_0 + x) = -p(x_0) + \bar{f}(x) \leq -p(x_0) + p(x) < 0.$$

Da $\bar{f}$ positiv ist, kann also $-x_0 + x$ kein Element aus P sein.

Nun sei umgekehrt die Bedingung (2) erfüllt. Auf dem von x_0 erzeugten linearen Unterraum M von E betrachten wir die Linearform $f(\lambda x_0) = \lambda p(x_0)$. Ist dann V wie im Hauptsatz 1 definiert, so folgt für jedes $\lambda \in \boldsymbol{R}$ aus $\lambda x_0 \in M \cap (V + P)$ die Ungleichung $\lambda > -\frac{1}{p(x_0)}$. In der Tat: es kann nicht $\lambda \leq -\frac{1}{p(x_0)}$ sein, da hieraus $-x_0 \in -\frac{1}{\lambda} V - \frac{1}{\lambda} P \subset V_0 + P$ folgen würde, was wegen (2) nicht sein kann. Somit ist $f(x) > -1$ für alle $x \in M \cap (V + P)$. Nach dem Hauptsatz 1 kann also f zu einer positiven Linearform $\bar{f}$ auf E fortgesetzt werden, welche die verlangten Eigenschaften besitzt.

Bemerkung. Für den Kegel $P = \{0\}$ besagt Satz 1: Zu jedem Punkt $x_0 \in E$ existiert eine Linearform $\bar{f}$ auf E derart, daß $\bar{f}(x_0) = p(x_0)$ und $|\bar{f}(x)| \leq p(x)$ ist für alle $x \in E$. Dies ist eine bekannte Folgerung aus dem Satz von Hahn-Banach. Vgl. [4], S. 102.

Abschließend sei noch bemerkt, daß sich der Hauptsatz 1 auch leicht wie folgt verallgemeinern läßt. E, M, P und f seien wie dort definiert; über p werde dagegen nur folgendes vorausgesetzt: p ist eine auf E definierte reelle Funktion, stets gilt $p(x) \geq 0$ und $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$, p ist aber nur *positiv homogen*, es gilt also $p(\lambda x) = \lambda p(x)$ für alle $x \in E$ und alle $\lambda \geq 0$ ($\lambda \in \boldsymbol{R}$). Ist dann V wieder die Menge aller

$x \in E$ mit $p(x) < 1$, so gilt: *Es existiert genau dann eine positive, f auf ganz E fortsetzende Linearform $\bar{f}$ mit der Eigenschaft, daß $\bar{f}(x) \leq p(x)$ ist für alle $x \in E$, wenn gilt*

$$(1') \qquad f(x) > -1 \qquad \textit{für alle } x \in M \cap (P - V).$$

Der Beweis verläuft fast genauso wie der von Hauptsatz 1: Zunächst rechnet man leicht nach, daß die Bedingung (1′) notwendig ist. Um zu zeigen, daß sie hinreichend ist, setzt man $q(x) = \sup\ (p(x), p(-x))$ für alle $x \in E$. Dann ist q eine Halbnorm auf E. Man versieht E mit der durch diese einzige Halbnorm definierten lokalkonvexen Topologie. V ist dann offen und konvex, also ist $P - V$ nicht leer, offen und konvex. Der Rest des Beweises bleibt dann beinahe wörtlich derselbe wie der des Hauptsatzes 1. Man hat nur überall $P + V$ durch $P - V$ zu ersetzen. Um am Schluß auf $\bar{f}(x) \leq p(x)$ zu schließen, bemerke man, daß aus $\bar{f}(x) = 1$ folgt $x \notin V$, also $p(x) \geq 1$.

Für $P = \{0\}$ ergibt sich aus diesem allgemeineren Satz eine bekannte Verallgemeinerung des Satzes von Hahn-Banach.

§ 2. Positive stetige Linearformen auf lokalkonvexen Räumen

Wir wenden jetzt die Resultate des § 1 an auf den Fall eines lokalkonvexen Raumes E. Der folgende Satz kann dann als Korollar zum Hauptsatz 1 angesehen werden.

Hauptsatz 2. *Es sei E ein lokalkonvexer Vektorraum (über $\mathbf{R}$) und P ein konvexer Kegel in E. Eine auf einem linearen Unterraum M von E definierte Linearform f kann dann und nur dann zu einer auf E definierten, stetigen, positiven Linearform $\bar{f}$ fortgesetzt werden, wenn für mindestens eine Umgebung V des Punktes* 0 *die Menge $f(M \cap (V + P))$ nach unten beschränkt ist.*

Beweis. Setzen wir die Existenz einer derartigen Fortsetzung $\bar{f}$ von f voraus, so ist die Funktion $x \to |\bar{f}(x)|$ eine stetige Halbnorm p auf E, also die durch $p(x) < 1$ definierte Menge V eine Umgebung von 0. Aus dem Hauptsatz 1 folgt daher, daß $f(M \cap (V + P))$ nach unten beschränkt ist.

Umgekehrt werde nun die Existenz einer Umgebung V von o und einer Zahl $\alpha > 0$ vorausgesetzt mit $f(x) > -\alpha$ für alle $x \in M \cap (V + P)$. Zu V gibt es eine stetige Halbnorm p auf E derart, daß die Menge V' aller $x \in E$ mit $p(x) < 1$ in V enthalten ist. Die Linearform $f' = \frac{1}{\alpha} f$ genügt dann bezüglich p der Bedingung (1) des Hauptsatzes 1: es ist $f(x) > -1$ für alle $x \in M \cap (V' + P)$. Folglich existiert eine positive, f' fortsetzende Linearform $\overline{f'}$ auf E mit $|\overline{f'}(x)| \leq p(x)$ für alle $x \in E$. Die Linearform $\bar{f} = \alpha \overline{f'}$ leistet dann das Verlangte: sie setzt f auf E fort und ist positiv; sie ist stetig auf E wegen $|\bar{f}(x)| \leq \alpha p(x)$.

Es sei schon jetzt bemerkt, daß dieser Hauptsatz 2 den Satz von Krein als Spezialfall enthält. Wir kommen hierauf in § 3 zurück.

Satz 2. *Es sei E ein lokalkonvexer Raum, P ein konvexer Kegel in E und x_0 ein Punkt aus E. Es existiert dann und nur dann eine stetige, positive Linearform $\bar{f}$ auf E mit $\bar{f}(x_0) = 1$, wenn der Punkt $-x_0$ dem Kegel P nicht adhärent ist.*

Beweis. Existiert eine derartige Linearform $\bar{f}$, so ist $x \to |\bar{f}(x)|$ eine stetige Halbnorm p auf E und die durch $p(x) < p(x_0)$ definierte Menge V_0 eine Umgebung von o. Nach dem Satz 1 ist dann die Umgebung $-x_0 + V_0$ von $-x_0$ zu P fremd. Also ist $-x_0$ dem Kegel P nicht adhärent.

Wir nehmen nun umgekehrt an, daß $-x_0$ nicht in der abgeschlossenen Hülle von P liegt. Es existiert dann eine äquilibrierte Umgebung V von o derart, daß $(-x_0 + V) \cap P = \emptyset$ ist. Betrachten wir weiter den von x_0 erzeugten linearen Unterraum M von E und die auf ihm definierte Linearform $f(\lambda x_0) = \lambda$. Wenn dann der Punkt λx_0 in $V + P$ liegt, so muß $\lambda > -1$ sein. Die Annahme $\lambda \leq -1$ führt nämlich folgendermaßen zu einem Widerspruch: Da V äquilibriert ist, folgt aus $\lambda \leq -1$ die Relation $-x_0 \in -\frac{1}{\lambda} V - \frac{1}{\lambda} P \subset V + P$; da V auch symmetrisch bezüglich o ist, folgt hieraus weiter, daß $-x_0 + V$ mit P einen nicht leeren Durchschnitt hat. Dies widerspricht aber unserer Annahme über V. Also gilt $f(x) > -1$ für jedes

$x \in M \frown (V + P)$. Der Hauptsatz 2 sichert dann die Existenz einer stetigen, positiven Linearform $\bar{f}$, welche f auf ganz E fortsetzt. Diese leistet offenbar das Verlangte.

Es ergibt sich nun unmittelbar die Folgerung:

Korollar. *Es sei E ein lokalkonvexer Vektorraum und P ein konvexer Kegel in E. Es existiert dann und nur dann eine auf E definierte, stetige, positive Linearform $\bar{f} \neq 0$, wenn P in E nicht dicht liegt.*

Man kann leicht Beispiele für Vektorräume E und Kegel P angeben derart, daß P in E dicht liegt, und zwar sogar bezüglich der feinsten lokalkonvexen Topologie auf E. Vgl. [6], S. 192.

Es sei nun P ein konvexer *spitzer* Kegel in einem topologischen Vektorraum E (über dem Körper $\boldsymbol{R}$). Nach Bourbaki [3], S. 26, heißt dann die Topologie von E *verträglich* mit der durch P definierten Struktur eines geordneten Vektorraumes, wenn P in E abgeschlossen ist. In diesem Fall genügt dann E offensichtlich dem Hausdorffschen Trennungsaxiom.

Satz 3. *Es sei E ein geordneter Vektorraum; E sei mit einer lokalkonvexen Topologie versehen, welche mit der Struktur des geordneten Vektorraumes verträglich ist. E besitzt dann folgende Eigenschaften:*

1. *zu einem Punkt $x \in E$ existiert dann und nur dann eine stetige, positive Linearform $\bar{f}$ auf E mit $\bar{f}(x) = 1$, wenn nicht $x < 0$ gilt;*

2. *zu jedem Punkt $x \neq 0$ von E existiert eine stetige, positive Linearform $\bar{f}$ auf E mit $\bar{f}(x) \neq 0$;*

3. *der Raum E ist archimedisch geordnet, d. h. sind x und y Punkte aus E und gilt $nx < y$ für alle natürlichen Zahlen n, so ist $x < 0$.*

Beweis. Es sei P der Kegel, der aus allen Punkten x mit $0 < x$ besteht. Wegen der Abgeschlossenheit von P folgt dann die erste Behauptung aus Satz 2. Aus dieser folgt die zweite Behauptung, da für einen Punkt $x \neq 0$ aus E entweder x selbst oder $-x$ nicht in P liegt. Schließlich seien x und y Punkte aus E mit $nx < y$ für alle $n = 1, 2, \ldots$. Für jede positive Linearform $\bar{f}$ auf E ist dann $n\bar{f}(x) \leq \bar{f}(y)$ für alle natürlichen Zahlen n, also $\bar{f}(x) \leq 0$. Nach der ersten Behauptung muß daher $x < 0$ sein.

Bemerkung. Es sei E ein beliebiger Vektorraum über $\boldsymbol{R}$ und P ein konvexer Kegel in E (mit der Spitze $0 \in P$). Versieht man E mit der feinsten lokalkonvexen Topologie $\mathcal{T}_\omega$ auf E, so ist der Hauptsatz 2 anwendbar und liefert das zentrale Resultat von Nef [6], und zwar sogar in einer verschärften Form. Die der Bedingung (2) des Hauptsatzes 2 entsprechende Bedingung lautet nämlich bei Nef: es existiert eine Umgebung V von 0 bezüglich $\mathcal{T}_\omega$ derart, daß $f(M \cap (y + V + P))$ für jedes $y \in E$ nach unten beschränkt ist. Diese kompliziertere Bedingung hat zur Folge, daß Nef bei der in Satz 2 zur Diskussion stehenden Frage zu einem weniger befriedigenden Resultat gelangt als wir (sogar unter unseren allgemeineren Voraussetzungen).

§ 3. Folgerungen aus dem Hauptsatz 2

Wie bereits erwähnt, ist der Satz von Krein eine einfache Folgerung aus dem Hauptsatz 2.

Satz 4. (M. G. Krein). *Es sei E ein lokalkonvexer Vektorraum und P ein konvexer Kegel in E. Ist dann M ein linearer Unterraum von E, der einen inneren Punkt von P als Element enthält, so kann jede auf M definierte, (bezüglich $P \cap M$) positive Linearform f zu einer auf ganz E definierten, stetigen, (bezüglich P) positiven Linearform $\bar{f}$ fortgesetzt werden.*

Beweis. Es sei $x_0 \in M$ ein innerer Punkt von P. Es existiert also eine Umgebung V von 0 mit $x_0 + V \subset P$. Für einen beliebigen Punkt $x \in M \cap (V + P)$ gilt dann

$$x + x_0 \in M \cap (x_0 + V + P) \subset M \cap (P + P) \subset M \cap P.$$

Für jede auf M definierte, positive Linearform f folgt hieraus $f(x) \geq -f(x_0)$. Die Menge $f(M \cap (V + P))$ ist also nach unten beschränkt. Die Behauptung folgt daher aus dem Hauptsatz 2.

Bemerkungen. 1. Der Satz 4, angewandt auf den Unterraum $M = E$, liefert das folgende bekannte Resultat (vgl. [4],

S. 75): Besitzt der Kegel P einen inneren Punkt, so ist jede auf E definierte, positive Linearform stetig.

2. Der Satz von Krein erscheint hier als Anwendung des Hauptsatzes 2 auf eine spezielle Sachlage. Interessant ist daher die Feststellung, daß diese Sachlage in gewissem Sinn bereits die allgemeinste ist und der Hauptsatz 2 auch umgekehrt aus Satz 4 gefolgert werden kann. Hierzu sei $f \neq 0$ eine auf einem linearen Unterraum M eines lokalkonvexen Raumes E definierte Linearform. Sie sei fortsetzbar zu einer auf E stetigen, bezüglich eines konvexen Kegels P positiven Linearform $\bar{f}$. Dann existiert ein konvexer Kegel P^* mit folgenden Eigenschaften: es ist $P \subset P^*$; M enthält einen inneren Punkt von P^*; f ist in M bezüglich $P^* \cap M$ positiv. Es genügt, für P^* das Urbild bezüglich $\bar{f}$ der Menge $\boldsymbol{R}_+$ aller reellen Zahlen $\lambda \geq 0$ zu nehmen. Will man den Hauptsatz 2 (oder auch 1) mit Hilfe des Satzes von Krein beweisen, so konstruiert man zu gegebenem $f \neq 0$ einen Kegel P^* mit den genannten drei Eigenschaften folgendermaßen. Nach Annahme existiert eine Umgebung V von 0 derart, daß die Menge $f(M \cap (V + P))$ nach unten beschränkt ist durch eine reelle Zahl $\alpha < 0$. Es sei x_0 ein Punkt aus M mit $f(x_0) = -\alpha$. Eine einfache Rechnung zeigt dann, daß

$$P^* = \bigcup_{\lambda \geq 0} \lambda(x_0 + V) + P$$

ein konvexer Kegel mit den gewünschten drei Eigenschaften ist.[5] Man findet in [1] eine auf dieser Bemerkung beruhende Skizze eines Beweises von Hauptsatz 1.

Der im Satz von Krein betrachtete lineare Unterraum M besitzt die bemerkenswerte Eigenschaft, daß *jede* auf M positive Linearform zu einer stetigen, positiven Linearform auf E fortgesetzt werden kann. Einem ähnlichen Sachverhalt begegnen wir im nächsten Satz. Zunächst jedoch erinnern wir an eine Definition:

Es sei P ein konvexer Kegel in einem lokalkonvexen Raum. Existiert dann eine lineare affine Mannigfaltigkeit A, welche

---

[5] Einen analog zu P^* konstruierten Kegel benützt Nef [6] zum Beweis des zentralen Satzes seiner Arbeit.

jede Erzeugende von P in einem von der Spitze o verschiedenen Punkt schneidet und für welche $B = A \cap P$ kompakt ist, so sagt man, der Kegel P besitzt eine *kompakte Basis* B.

Satz 5. *In einem lokalkonvexen Raum E sei P ein konvexer Kegel mit kompakter Basis B und M ein abgeschlossener, linearer Unterraum, welcher mit dem Kegel P nur dessen Spitze o gemeinsam hat. Dann kann jede auf M definierte, stetige Linearform f zu einer auf E definierten, stetigen, positiven Linearform $\bar{f}$ fortgesetzt werden.*

Beweis. Da f in M stetig ist, existiert eine stetige Halbnorm p_1 auf E derart, daß $|f(x)| \leq p_1(x)$ ist für alle $x \in M$. Da weiter B kompakt und M abgeschlossen ist und B mit M keinen Punkt gemeinsam hat, existiert eine Umgebung W von o mit $(B + W) \cap (M + W) = \emptyset$.[6] Es gibt daher eine zweite stetige Halbnorm p_2 auf E derart, daß die Menge aller $x \in E$ mit $p_2(x) < 1$ in W enthalten ist. Wir setzen $p = p_1 + p_2$ und $V = \{x : p(x) < 1\}$. Dann ist p ebenfalls eine stetige Halbnorm auf E; es gilt $V \subset W$ und $|f(x)| \leq p(x)$ für jedes $x \in M$. Wir setzen noch:

$$\alpha = \sup_{x \in B} p(x) \quad \text{und} \quad \beta = \inf_{x \in B,\, y \in M} p(x - y).$$

Da B kompakt und p stetig ist, gilt $\alpha < +\infty$. Wäre $\beta < 1$, so würden Punkte $x_0 \in B$ und $y_0 \in M$ mit $p(x_0 - y_0) < 1$, also mit $x_0 \in y_0 + V \subset M + W$ existieren. Da dies der Gleichung $(B + W) \cap (M + W) = \emptyset$ widerspricht, muß somit $\beta \geq 1$ sein. Wir können nunmehr zeigen, daß die Menge $f(M \cap (V + P))$ nach unten beschränkt ist; nach dem Hauptsatz 2 folgt dann hieraus die Behauptung. Es sei hierzu x ein beliebiger Punkt aus $M \cap (V + P)$; x kann in der Form $x = v + \lambda x_0$ dargestellt werden, wobei $v \in V$, $x_0 \in B$ und $\lambda \in \mathbf{R}$ ist. Zeigen wir zunächst, daß $|\lambda| < \frac{1}{\beta}$ ist. Hierzu kann $\lambda \neq 0$ angenommen werden. Wegen der Gültigkeit der Gleichung $\frac{1}{\lambda} x - x_0 = \frac{1}{\lambda} v$ mit $x_0 \in B$ und $\frac{1}{\lambda} x \in M$ gilt

$$\beta \leq p\left(\frac{1}{\lambda} v\right) = \frac{1}{|\lambda|} p(v) < \frac{1}{|\lambda|},$$

[6] Vgl. Bourbaki [2], S. 162 (proposition 1).

woraus $|\lambda| < \frac{1}{\beta}$ folgt. Nachdem dies gezeigt ist, ergibt sich aber:

$$|f(x)| \leq p(x) \leq p(v) + |\lambda| \, p(x_0) < 1 + \frac{\alpha}{\beta}.$$

Die Zahl $-\left(1 + \frac{\alpha}{\beta}\right)$ ist daher eine untere Schranke von $f(M \cap (V + P))$.

§ 4. Fortsetzung positiver Linearformen in normierten Räumen

Für einen normierten Vektorraum E besagt der Satz von Hahn-Banach, daß jede auf einem linearen Unterraum M von E definierte, stetige Linearform f unter Erhaltung ihrer Norm zu einer stetigen Linearform $\bar{f}$ auf ganz E fortgesetzt werden kann. Die Erhaltung der Norm ist jedoch im allgemeinen nicht mehr möglich, wenn man von $\bar{f}$ zusätzlich fordert, positiv zu sein bezüglich eines konvexen Kegels, vorausgesetzt, daß eine solche Fortsetzung $\bar{f}$ überhaupt existiert. Man begegnet diesem Phänomen bereits in der euklidischen Ebene, wie das folgende Beispiel zeigt:

Es sei $E = \boldsymbol{R}^2$ der zwei-dimensionale Vektorraum über $\boldsymbol{R}$, versehen mit der üblichen, euklidischen Norm; P sei der konvexe Kegel aller Punkte (ξ, η) aus E mit $\xi \geq 0$ und $\eta \geq 0$. Auf der Geraden M mit der Gleichung $\xi + \eta = 0$ betrachten wir die durch $(\xi, -\xi) \longrightarrow \xi$ definierte Linearform f; sie hat (auf M) die Norm $\|f\|_M = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Jede f auf E fortsetzende, positive Linearform $\bar{f}$ läßt sich in der Form

$$\bar{f}((\xi + \lambda, -\xi)) = \xi + \lambda \alpha$$

schreiben, wobei $\alpha = \bar{f}((1, 0)) \geq 1$ ist. Für die Norm jeder solchen Fortsetzung gilt daher:

$$\|\bar{f}\| = \sqrt{\alpha^2 + (1 - \alpha)^2} \geq 1 > \|f\|_M.$$

Es kann also f auf keine Weise unter Erhaltung seiner Norm zu einer positiven, stetigen Linearform auf E fortgesetzt werden.

Das Beispiel zeigt weiter, daß unter allen f auf E fortsetzenden, positiven, stetigen Linearformen $\bar{f}$ wenigstens eine existiert, deren Norm *minimal*, nämlich gleich 1 ist. Man erhält sie für $a = 1$.

Die Existenz solcher Fortsetzungen mit minimaler Norm sichert allgemein der folgende Satz.

Satz 6. *Es sei E ein normierter Vektorraum über* $\mathbf{R}$, *P ein konvexer Kegel und M ein linearer Unterraum in E. Weiter sei f eine Linearform auf M, welche zu einer stetigen, positiven Linearform auf E fortgesetzt werden kann. In der Menge $\mathcal{F}$ aller stetigen, positiven Linearformen, welche f auf E fortsetzen, existiert dann stets wenigstens eine Linearform $\bar{f}_0$ mit minimaler Norm d. h. mit*

$$\|\bar{f}_0\| = \inf_{\bar{f} \in \mathcal{F}} \|\bar{f}\|; \tag{3}$$

es ist

$$\|\bar{f}_0\| = -\inf f(M \cap (V + P)), \tag{4}$$

wenn hierbei V die offene Einheitskugel $\|x\| < 1$ in E bezeichnet.

Beweis. Für $f = 0$ ist die Behauptung evident. Wir setzen daher $f \neq 0$ voraus. Die Norm von f in M ist dann gegeben durch

$$\|f\|_M = -\inf f(M \cap V).$$

Da $\mathcal{F}$ nach Voraussetzung nicht leer ist, ist die Funktion f auf der Menge $M \cap (V + P)$ nach unten beschränkt. Setzen wir

$$a = -\inf f(M \cap (V + P)),$$

so ist $0 < \|f\|_M \leq a < +\infty$. Es sei nun $x = v + p$ ein Punkt aus $M \cap (V + P)$ mit $f(x) < 0$ ($v \in V, p \in P$). Da f in M positiv ist, muß $v \neq 0$ und damit $\|v\| \neq 0$ sein. Für jede Zahl λ mit $1 < \lambda < \frac{1}{\|v\|}$ gilt: $\lambda x \in M \cap (V + P)$ und $f(\lambda x) = \lambda f(x) < f(x)$. Hieraus folgt, daß für alle $x \in M \cap (V + P)$ gilt: $f(x) > -a$. Der Hauptsatz 1 sichert daher die Existenz einer positiven Linearform $\bar{g}$ auf E, welche $g = \frac{1}{a} f$ fortsetzt und für alle $x \in E$

der Ungleichung $|\bar{g}(x)| \leq \|x\|$ genügt. Die Linearform $\bar{f}_0 = \alpha \bar{g}$ ist daher ein Element von $\mathcal{F}$ und besitzt eine Norm $\|\bar{f}_0\| \leq \alpha$. Wir wollen zeigen, daß $\bar{f}_0$ die in der Behauptung genannten Eigenschaft besitzt: Für jedes $\bar{f} \in \mathcal{F}$ und jedes $x = v + p$ aus $M \cap (V + P)$, wobei also $v \in V$ und $p \in P$ ist, gilt $f(x) = \bar{f}(x) \geq \bar{f}(v) \geq -\|\bar{f}\|$. Nach der Definition von α folgt hieraus: $\alpha \leq \|\bar{f}\|$. Für $\bar{f} = \bar{f}_0$ zeigt diese Ungleichung, daß $\alpha \leq \|\bar{f}_0\|$ und folglich $\|\bar{f}_0\| = \alpha \leq \|\bar{f}\|$ ist für alle $\bar{f} \in \mathcal{F}$. Damit ist unser Satz bewiesen.

Literatur

[1] H. Bauer, *Sur le prolongement des formes linéaires positives dans un espace vectoriel ordonné.* C. r. Acad. Sci. Paris 244, 289–292 (1957).

[2] N. Bourbaki, *Topologie générale, Chap.* I–II. Actual. scient. et ind. 1142, Paris, Hermann (1951).

[3] N. Bourbaki, *Intégration, Chap.* I–IV. Actual. scient. et ind. 1175, Paris, Hermann (1952).

[4] N. Bourbaki, *Espaces vectoriels topologiques, Chap.* I–II. Actual. scient. et ind. 1189, Paris, Hermann (1953).

[5] I. Namioka, *Partially ordered linear topological spaces.* Memoirs of the Amer. Math. Soc. 24 (1957).

[6] W. Nef, *Monotone Linearformen auf teilgeordneten Vektorräumen.* Monatsh. Math. 60, 190–197 (1956).