BAYERISCHE AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE

SITZUNGSBERICHTE

JAHRGANG

1956

MÜNCHEN 1956

VERLAG DER BAYERISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung München

Ein Satz über Massenmomente n-ter Ordnung

Von **Rudolf Albrecht** in München

Vorgelegt von Herrn Josef Lense am 1. Juni 1956

C. A. Laisant beweist folgenden Satz: Ist M_0M ein Bogen der Bahn, die ein Massenpunkt unter dem Einfluß einer Zentralkraft mit dem Zentrum O beschreibt, X der Schwerpunkt des Bogens M_0M, wenn er umgekehrt proportional der Geschwindigkeit des Massenpunktes mit Masse belegt ist und R der Schwerpunkt der Sektorfläche OM_0M, so liegen die drei Punkte O, R X auf einer Geraden und $OX = \frac{3}{2}\,OR$.

Diese Aussage ist Spezialfall eines allgemeineren und ziemlich trivialen Satzes über Massenmomente n-ter Ordnung: Es sei $\mathfrak{r}(P)$ der Ortsvektor vom Punkte O zum Punkt P eines Bereiches B, $\mathfrak{r}(P)$ stetig differenzierbar bezüglich seiner Parameter, $\varrho(P)$ die stetig veränderliche Massendichte und $d\omega$ ein Linien-, Flächen- bzw. Raumelement von B. Das vektorielle Moment n-ter Ordnung bezüglich des Punktes O der Massenverteilung von B ist

$$\int\limits_B \mathfrak{r}_1\,|\mathfrak{r}|^n\,\varrho\,d\omega,\quad \mathfrak{r}_1 = \mathfrak{r}\,|\mathfrak{r}|^{-1}.$$

Es gibt einen Mittelwert $\mathfrak{R}$, so daß

$$\mathfrak{R}_1\,|\mathfrak{R}|^n \int\limits_B \varrho\,d\omega = \int\limits_B \mathfrak{r}_1\,|\mathfrak{r}|^n\,\varrho\,d\omega,\quad \mathfrak{R}_1 = \mathfrak{R}\,|\mathfrak{R}|^{-1},$$

ist. Wir betrachten folgende zwei Fälle:

a) Der Bereich B sei die ebene oder Kegel-Fläche

$$\mathfrak{r}(s,t) = s\,\mathfrak{x}(t),\quad 0 \leqq s \leqq 1,\quad t_a \leqq t \leqq t_b,$$

wobei durch $\mathfrak{x}(t)$ eine offene oder auch geschlossene Kurve dargestellt werden mag. Dann ist

$$d\omega = |\mathfrak{r}_s \times \mathfrak{r}_t|\,ds\,dt = s\,|\mathfrak{x} \times \mathfrak{x}_t|\,ds\,dt$$

und wir haben für $\varrho(P) = \text{const}$, $n > -2$, $\mathfrak{x}_1 = \mathfrak{x}|\mathfrak{x}|^{-1}$

$$\int_B \mathfrak{r}_1 \, |\mathfrak{r}|^n \, d\omega = \frac{1}{n+2} \int_{t_a}^{t_b} \mathfrak{x}_1 |\mathfrak{x}|^n |\mathfrak{x} \times \mathfrak{x}_t| \, dt,$$

$$\mathfrak{R}_1 \, |\mathfrak{R}|^n \int_{t_a}^{t_b} |\mathfrak{x} \times \mathfrak{x}_t| \, dt = \frac{2}{n+2} \int_{t_a}^{t_b} \mathfrak{x}_1 |\mathfrak{x}|^n |\mathfrak{x} \times \mathfrak{x}_t| \, dt.$$

Das Ergebnis ist für $n = 0$ und $n = 1$ evident. Wird z. B. durch $\mathfrak{x}(t)$ eine geschlossene bezüglich des Punktes O sternige Kurve in der x, y-Ebene dargestellt, so gilt für den Schwerpunkt $\mathfrak{R} = (x_S, y_S)$ des von dieser Kurve begrenzten Bereiches mit der Fläche F

$$2F = \int_{t_a}^{t_b} (x\dot{y} - y\dot{x}) \, dt,$$

$$x_S F = \frac{1}{3} \int_{t_a}^{t_b} x(x\dot{y} - y\dot{x}) \, dt = -\int_{t_a}^{t_b} x y \dot{x} \, dt = \frac{1}{2} \int_{t_a}^{t_b} x^2 \dot{y} \, dt,$$

letzteres durch partielle Integration, und Entsprechendes für y_S.

Nehmen wir an, die Kurve $\mathfrak{x}(t)$ sei mit Masse belegt und

$$\varrho(P) \sim \frac{|\mathfrak{r} \times \mathfrak{r}_t|}{\sqrt{\mathfrak{r}_t^2}} \, |\mathfrak{x}|^{-r} = |\mathfrak{x}|^{-r+1} \, |\sin(\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_t)|.$$

Für das Moment m-ter Ordnung, $m = n + r > -2$, gilt mit dem Mittelwert $\mathfrak{X}$

$$\mathfrak{X}_1 |\mathfrak{X}|^m \int_{t_a}^{t_b} |\mathfrak{x} \times \mathfrak{x}_t| |\mathfrak{x}|^{-r} \, dt = \int_{t_a}^{t_b} \mathfrak{x}_1 |\mathfrak{x}|^n |\mathfrak{x} \times \mathfrak{x}_t| \, dt$$

oder

$$\mathfrak{X}_1 \, |\mathfrak{X}|^m = \frac{n+2}{2} \, \mathfrak{R}_1 \, |\mathfrak{R}|^n \, \frac{\int_{t_a}^{t_b} |\mathfrak{x} \times \mathfrak{x}_t| \, dt}{\int_{t_a}^{t_b} |\mathfrak{x}|^{-r} |\mathfrak{x} \times \mathfrak{x}_t| \, dt}.$$

Deshalb liegt der Mittelwert m-ter Ordnung $\mathfrak{X}$ des in der angegebenen Weise belegten Bogens und der Mittelwert n-ter Ordnung $\mathfrak{N}$ der Fläche auf einer Geraden durch O. Ist speziell $r = 0$, so hat man

$$\mathfrak{X}_1 |\mathfrak{X}|^n = \frac{n+2}{2} \mathfrak{N}_1 |\mathfrak{N}|^n.$$

Für $n = 1$ erhält man hieraus das Ergebnis von Laisant, wobei ein Massenpunkt sich unter dem Einfluß einer Zentralkraft durch O auf der Kurve $\mathfrak{x}(t)$ bewegt, so daß $|\mathfrak{x} \times \mathfrak{x}_t| = \text{const}$ wird und $\varrho \sim \frac{1}{\sqrt{\mathfrak{x}_t^2}}$ zu wählen ist.

b) Wir erhöhen die Dimension um 1 und betrachten den räumlichen Bereich B

$$\mathfrak{r}(s, t, u) = s\mathfrak{x}(t, u); \quad 0 \leqq s \leqq 1; \quad t, u \in G;$$

wobei durch $\mathfrak{x}(t, u)$ eine offene oder auch geschlossene Fläche dargestellt werden mag. Dann ist

$$d\omega = |\mathfrak{r}_s[\mathfrak{r}_t \times \mathfrak{r}_u]| ds\, dt\, du = s^2 |\mathfrak{x}[\mathfrak{x}_t \times \mathfrak{x}_u]| ds\, dt\, du$$

und wir haben für $\varrho(P) = \text{const}$, $n > -3$, $\mathfrak{x}_1 = \mathfrak{x}|\mathfrak{x}|^{-1}$

$$\mathfrak{N}_1 |\mathfrak{N}|^n \int_G |\mathfrak{x}[\mathfrak{x}_t \times \mathfrak{x}_u]| dt\, du = \frac{3}{n+3} \int_G \mathfrak{x}_1 |\mathfrak{x}|^n |\mathfrak{x}[\mathfrak{x}_t \times \mathfrak{x}_u]| dt\, du.$$

Nimmt man wieder an, die Fläche $\mathfrak{x}(t, u)$ sei mit Masse belegt und

$$\varrho(P) \sim \frac{|\mathfrak{x}[\mathfrak{x}_t \times \mathfrak{x}_u]|}{|\mathfrak{x}_t \times \mathfrak{x}_u|} |\mathfrak{x}|^{-r} = |\mathfrak{x}|^{-r+1} |\cos(\mathfrak{x}, \mathfrak{x}_t \times \mathfrak{x}_u)|,$$

dann gilt für das Moment m-ter Ordnung, $m = n + r > -3$, mit dem Mittelwert $\mathfrak{X}$

$$\mathfrak{X}_1 |\mathfrak{X}|^m = \frac{n+3}{3} \mathfrak{N}_1 |\mathfrak{N}|^n \frac{\int_G |\mathfrak{x}[\mathfrak{x}_t \times \mathfrak{x}_u]| dt\, du}{\int_G |\mathfrak{x}|^{-r} |\mathfrak{x}[\mathfrak{x}_t \times \mathfrak{x}_u]| dt\, du}.$$

Die Punkte $\mathfrak{X}$ und $\mathfrak{R}$ liegen auf einer Geraden durch O, für $r = 0$ ist

$$\mathfrak{X}_1 |\mathfrak{X}|^n = \frac{n+3}{3} \mathfrak{R}_1 |\mathfrak{R}|^n.$$

Die Ergebnisse lassen sich natürlich für einen α-dimensionalen Bereich $\mathfrak{r}(s, t_1, t_2, \ldots t_{\alpha-1}) = s\,\mathfrak{x}(t_1, t_2, \ldots, t_{\alpha-1})$ erweitern, wobei aus der Funktionaldeterminante der Faktor $s^{\alpha-1}$ heraustritt.

Setzt man für die vorkommenden Einheitsvektoren 1, so erhält man entsprechende Aussagen über skalare Momente n-ter Ordnung.

Man beachte, daß in der gegebenen Darstellung mehrfach zählende Bereichselemente auftreten, falls der Bereich B nicht sternig bezüglich O ist.

Literatur

C. A. Laisant: Une propriété des orbites fermées correspondant à des forces centrales. Compt. Rend. 136 (1903) S. 880.

C. A. Laisant: Sur une propriété des mouvements dus à une force centrale. Bull. Soc. Math. de France 31 (1903) S. 156.

E. T. Whittaker: Analytische Dynamik der Punkte und starren Körper. Berlin 1925, S. 118.