

BAYERISCHE AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE

SITZUNGSBERICHTE

JAHRGANG

1956

MÜNCHEN 1956

VERLAG DER BAYERISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung München

Quadratische Approximation von Adiabaten realer Gase

Von Johann Münch in München

Mit einer Abbildung

Vorgelegt von Herrn Robert Sauer am 4. Mai 1956

§ 1. Einleitung

Für die Lösungen der Wellengleichung der eindimensionalen, nichtstationären, isentropischen Strömungen idealer Gase mit der Druck-Dichte-Beziehung $p = \text{const} \cdot \rho^\alpha$ hat Riemann¹ bekanntlich eine Integraldarstellung mit hypergeometrischen Funktionen angegeben; die Beschränkung auf den Fall n-atomiger Gase liefert explizite Lösungen. Sauer² hat gezeigt, daß diese Lösungen nicht nur für die idealen Gase gelten, sondern auch für hypothetische Gase mit allgemeineren Druck-Dichte-Beziehungen, und auf die praktische Anwendung dieser Fälle zur Approximation von Strömungen realer Gase mit beliebigen Adiabaten hingewiesen.

Hier wird gezeigt, daß sich für diese und für weitere mittels Molenbroek-Transformation entstehende hypothetische Druck-Dichte-Beziehungen die Riemannsche Funktion zu einer Legendreschen Funktion oder einer Besselfunktion spezialisiert. Ferner

¹ B. Riemann, Gesammelte mathematische Werke; Leipzig 1876, S. 145 bis 164.

^{2a} R. Sauer, Elementare Lösungen der Wellengleichung isentropischer Gasströmungen; ZaMM 11/12, 1951, S. 339-343.

^{2b} R. Sauer, Anfangswertprobleme bei partiellen Differentialgleichungen; Berlin 1952, S. 143-146.

³ W. Müller, Gasströmungen bei quadratisch angenäherter Adiabate; Diss. TH München, 1953.

W. Müller, Hodographenmethode der Gasdynamik bei quadratisch approximierter Adiabate; Sitz.-Ber. Bayer. Akad. Wissensch. Math.-naturw. Kl. 1953, S. 313-330.

werden diese Sauerschen Adiabaten bezüglich ihrer praktischen Anwendung zur quadratischen Approximation von Adiabaten realer Gase diskutiert.

Für den Fall der zweidimensionalen, stationären, isentropischen Gasströmungen hat Müller³ eine Reihe von Sauerschen Adiabaten hergeleitet, die eine quadratische Näherung der realen Adiabaten erlauben.

§ 2. Nichtstationäre eindimensionale Strömungen

Das Geschwindigkeitspotential $\varphi(x, t)$ der eindimensionalen, nichtstationären, isentropischen Gasströmung mit der Druck-Dichte-Beziehung $p = p(\varrho)$ genügt der hyperbolischen Differentialgleichung

$$\varphi_{xx} (a^2 - \varphi_x^2) - 2 \varphi_x \varphi_{xt} - \varphi_{tt} = 0, \quad (1)$$

in der x die Ortskoordinate, t die Zeit, a die Schall- und $\varphi_x = u$ die Gasgeschwindigkeit bedeuten.

Zur Abkürzung führen wir die Größen

$$A = \int_{p_0}^p \frac{dp}{a\varrho}, \quad Q = \frac{1}{2} \varphi_x^2 + \varphi_t, \quad R = \varphi_x^2 + \varphi_t$$

mit $p_0 = \text{const ein}$. Es ist

$$a^2 = \frac{dp}{d\varrho}, \quad dQ = - \frac{dp}{\varrho} = - a dA.$$

Die Schallgeschwindigkeit a ist als vorgegebene Funktion von p , also auch von A oder von Q zu betrachten.

Die Stromfunktion $\psi(x, t)$ läßt sich durch

$$\varrho = \varrho_0 \psi_x, \quad \varrho u = - \varrho_0 \psi_t$$

mit $\varrho_0 = \text{const} \neq 0$ einführen. Diese genügt der hyperbolischen Differentialgleichung

$$(2) \quad \psi_{xx} (a^2 \psi_x^2 - \psi_t^2) + 2 \psi_x \psi_t \psi_{xt} - \psi_x^2 \psi_{tt} = 0,$$

in der a als Funktion von ψ_x zu betrachten ist.

§ 3. Linearisierung mittels Legendre-Transformation

Die Legendre-Transformation

$$u = \varphi_x, q = \varphi_t, f = ux + qt - \varphi; x = f_u, t = f_q$$

bzw.

$$v = \psi_x, w = \psi_t, g = vx + wt - \psi; x = g_v, t = g_w$$

führt die nichtlinearen Gln. (1) und (2) über in die linearen Differentialgleichungen

$$f_{qq}(a^2 - u^2) + 2uf_{uq} - f_{uu} = 0, a = a(u^2 + 2q) \quad (3)$$

und

$$g_{ww}(a^2 v^2 - w^2) - 2vwg_{vw} - v^2g_{vv} = 0, a = a(v). \quad (4)$$

Nach Transformation der Gln. (3) und (4) auf die charakteristischen Variablen

$$\left. \begin{array}{l} 2\lambda \\ 2\mu \end{array} \right\} = \pm u + A; u = \lambda - \mu, A = A(Q) = \lambda + \mu$$

erhält man für $f(\lambda, \mu)$ die von Sauer^{2a, b} behandelte Wellengleichung

$$f_{\lambda\mu} + \frac{1-a'}{2a}(f_\lambda + f_\mu) = 0 \quad (5)$$

und für $g(\lambda, \mu)$ die Wellengleichung

$$g_{\lambda\mu} + \frac{a'-1}{2a}(g_\lambda + g_\mu) = 0. \quad (6)$$

In diesen beiden Gleichungen ist a als Funktion $a(A) = a(\lambda + \mu)$ aufzufassen. Der Strich bedeutet die Ableitung nach dem Argument $A = \lambda + \mu$.

§ 4. Linearisierung mittels Molenbroek-Transformation

Durch Auflösen der aus den Definitionsgleichungen für das Potential φ und die Stromfunktion ψ folgenden Beziehungen

$$d\varphi = u dx + q dt, d\psi = \frac{e}{e_0}(dx - u dt)$$

nach dx , dt erhält man

$$dx = \frac{1}{R} \left(u d\varphi + \frac{\varrho_0}{\varrho} q d\psi \right), \quad dt = \frac{1}{R} \left(d\varphi - \frac{\varrho_0}{\varrho} u d\psi \right). \quad (7)$$

Unter Voraussetzung einer umkehrbar eindeutigen Zuordnung von x , t und u , A kann man x , t und φ , ψ als Funktionen der charakteristischen Variablen λ , μ auffassen. Durch Einsetzen von

$$\begin{aligned} dx &= x_\lambda d\lambda + x_\mu d\mu, & dt &= t_\lambda d\lambda + t_\mu d\mu \\ d\varphi &= \varphi_\lambda d\lambda + \varphi_\mu d\mu, & d\psi &= \psi_\lambda d\lambda + \psi_\mu d\mu \end{aligned}$$

in Gl. (7) ergibt sich

$$\left. \begin{aligned} x_\lambda &= \frac{1}{R} \left(u\varphi_\lambda + \frac{\varrho_0}{\varrho} q\psi_\lambda \right), & x_\mu &= \frac{1}{R} \left(u\varphi_\mu + \frac{\varrho_0}{\varrho} q\psi_\mu \right), \\ t_\lambda &= \frac{1}{R} \left(\varphi_\lambda - \frac{\varrho_0}{\varrho} u\psi_\lambda \right), & t_\mu &= \frac{1}{R} \left(\varphi_\mu - \frac{\varrho_0}{\varrho} u\psi_\mu \right). \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Unter Berücksichtigung der Differentiationsbeziehungen

$$\begin{aligned} a' &= \frac{da}{dA} = \frac{\partial a}{\partial \lambda} = \frac{\partial a}{\partial \mu}, \quad \frac{\partial Q}{\partial \lambda} = \frac{\partial Q}{\partial \mu} = -a, \quad \frac{\partial}{\partial \lambda} \left(\frac{\varrho_0}{\varrho} \right) = \frac{\partial}{\partial \mu} \left(\frac{\varrho_0}{\varrho} \right) = -\frac{\varrho_0}{a\varrho}, \\ \frac{\partial R}{\partial \lambda} &= \frac{\partial q}{\partial \mu} = -a + u, \quad \frac{\partial R}{\partial \mu} = \frac{\partial q}{\partial \lambda} = -a - u \end{aligned}$$

liefern die Integrierbarkeitsbedingungen $x_{\lambda\mu} = x_{\mu\lambda}$, $t_{\lambda\mu} = t_{\mu\lambda}$ der Gln. (8)

$$\left. \begin{aligned} \varphi_\lambda &= \frac{\varrho_0}{a\varrho} (au - R) \psi_\lambda \\ \varphi_\mu &= \frac{\varrho_0}{a\varrho} (au + R) \psi_\mu \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

und die Integrierbarkeitsbedingungen $\varphi_{\lambda\mu} = \varphi_{\mu\lambda}$, $\psi_{\lambda\mu} = \psi_{\mu\lambda}$ der Gln. (9) schließlich für $\varphi(\lambda, \mu)$ und $\psi(\lambda, \mu)$ die Differentialgleichungen

$$\varphi_{\lambda\mu} + \frac{a' + 1}{2a} \left(\frac{R + au}{R - au} \varphi_\lambda + \frac{R - au}{R + au} \varphi_\mu \right) = 0 \quad (10)$$

und

$$\psi_{\lambda\mu} - \frac{a' + 1}{2a} (\psi_\lambda + \psi_\mu) = 0. \quad (11)$$

§ 5. Spezialisierung zur Darboux'schen Differentialgleichung

Ein Spezialfall der Gln. (5), (6) und (11) ist die Darboux'sche Differentialgleichung

$$z_{\lambda\mu} + \frac{n}{\lambda + \mu} (z_\lambda + z_\mu) = 0. \tag{12}$$

Für ihre Lösungen hat Riemann^{1, 2b} bekanntlich eine Integraldarstellung mit der hypergeometrischen Funktion

$$R(\lambda, \mu; \lambda', \mu') = \left(\frac{\lambda + \mu}{\lambda' + \mu'} \right)^n F \left(1 - n, n; 1; - \frac{(\lambda - \lambda')(\mu - \mu')}{(\lambda + \mu)(\lambda' + \mu')} \right)$$

angegeben. Diese Riemann'sche Funktion läßt sich mit Hilfe einer Legendre'schen Funktion 1. Art etwas kürzer in der Form

$$R(\lambda, \mu; \lambda', \mu') = \left(\frac{\lambda + \mu}{\lambda' + \mu'} \right)^n P_{n-1} \left[1 + 2 \frac{(\lambda - \lambda')(\mu - \mu')}{(\lambda + \mu)(\lambda' + \mu')} \right]$$

schreiben. Im Falle ganzzahliger n lassen sich allgemeine Lösungen der Wellengleichung (12) mit den hinreichend oft differenzierbaren, sonst aber weitgehend beliebigen Funktionen $L(\lambda)$ und $M(\mu)$ in der Form

$$z = L(\lambda) + M(\mu) - \frac{\lambda + \mu}{2} [L'(\lambda) + M'(\mu)] \quad \text{für } n = -1$$

$$z = L(\lambda) + M(\mu) \quad \text{für } n = 0$$

$$z = \frac{\partial^{2n-2}}{\partial \lambda^{n-1} \partial \mu^{n-1}} \left[\frac{L(\lambda) + M(\mu)}{\lambda + \mu} \right] \quad \text{für } n = 1, 2, \dots$$

explizit angeben.

Durch die Bedingung

$$\frac{1 - a'}{2a} = \frac{n}{\lambda + \mu} \tag{13}$$

spezialisierte Sauer^{2a, b} die Gl. (5) zur Gl. (12) und leitete daraus die Druck-Dichte-Beziehung

$$\left. \begin{aligned} p &= p_0 + q_0 \left(\frac{2}{\kappa - 1} \right)^{\kappa - 3} \sum_{\nu=0}^2 \binom{2}{\nu} \frac{c^\nu}{\kappa - \nu} \left(\frac{q}{q_0} - c \right)^{\kappa - \nu} \\ \text{mit } \kappa &= \frac{2n + 3}{2n + 1} \neq 0, 1, 2; q_0 \neq 0 \end{aligned} \right\} \tag{14}$$

her. Analog dazu fragen wir nach den allgemeinsten Beziehungen $p = p(\varrho)$, für welche die Wellengleichungen (6) und (11) in die Darboux'sche Differentialgleichung (12) übergehen.

Für Gl. (6) hat man die Bedingung

$$\frac{a' - 1}{2a} = \frac{n}{\lambda + \mu} \quad (15)$$

und man erkennt durch Vergleich der Gln. (13) und (15) sofort, daß sie sich nur durch das Vorzeichen von n unterscheiden. Die zur Gl. (6) gehörige Sauersche Adiabate erhält man also, wenn man in Gl. (14) n durch $-n$ ersetzt.

Die Bedingung für die Spezialisierung von Gl. (11) zur Darboux'schen Differentialgleichung lautet

$$\frac{a' + 1}{2a} = -\frac{n}{\lambda + \mu}, \text{ und daraus folgt } a = -\frac{A}{1 + 2n} + cA^{-2n}.$$

Mit $dA = \frac{dp}{a\varrho} = \frac{ad\varrho}{\varrho}$ erhält man

$$\frac{d\varrho}{\varrho} = \frac{A^{2n} dA}{c - \frac{1}{1+2n} A^{1+2n}} \text{ und daraus } \varrho = \frac{\varrho_0}{c - \frac{1}{1+2n} A^{1+2n}}, \varrho_0 \neq 0.$$

Aus $dp = a\varrho dA = \varrho_0 A^{-2n} dA$ ergibt sich $p = p_0 + \frac{\varrho_0}{1-2n} A^{1-2n}$ und nach Elimination von A aus den Darstellungen von ϱ und p findet man schließlich

$$\left. \begin{aligned} p &= p_0 + \frac{\varrho_0}{\kappa - 2} \left(\frac{2}{\kappa - 1} \right)^{\kappa - 3} \left(c - \frac{\varrho_0}{\varrho} \right)^{\kappa - 2} \\ \text{mit } \kappa &= \frac{2n + 3}{2n + 1} \neq 1, 2; \varrho_0 \neq 0. \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

Wir betrachten nun noch die Sauerschen Adiabaten für die in den Beziehungen (14) und (16) ausgeschlossenen Werte von κ . Den Fall $\kappa = 1$, d. h. $n = \infty$ schließen wir weiterhin aus. Für $\kappa = 2$ und $\kappa = 0$ treten an Stelle von (14) die Druck-Dichte-Beziehungen

$$p = p_0 + \varrho_0 \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\varrho}{\varrho_0} - c \right)^2 + 2c \left(\frac{\varrho}{\varrho_0} - c \right) + c^2 \ln \left(\frac{\varrho}{\varrho_0} - c \right) \right] \quad (17)$$

$$p = p_0 + \varrho_0 \left[\frac{c^2}{2} \left(c - \frac{\varrho}{\varrho_0} \right)^{-2} - 2c \left(c - \frac{\varrho}{\varrho_0} \right)^{-1} - \ln \left(c - \frac{\varrho}{\varrho_0} \right) \right] \quad (18)$$

und an Stelle von (16) tritt für $\kappa = 2$ die hypothetische Adiabate

$$p = p_0 + \varrho_0 \ln \left(c - \frac{\varrho_0}{\varrho} \right). \quad (19)$$

§ 6. Anwendung der Sauerischen Adiabaten zur quadratischen Approximation von Adiabaten realer Gase

Die im vorangehenden Paragraphen angegebenen Sauerischen Adiabaten kann man dazu verwenden, um Strömungen realer Gase mit beliebig vorgegebenen Druck-Dichte-Beziehungen $p = p(\varrho)$ zu approximieren. Falls die vier auftretenden Konstanten $p_0, \varrho_0, c, \kappa$ alle von null verschieden sind (außer den bereits ausgeschlossenen Werten von κ ist also noch $\kappa = 3$ auszuschließen), ermöglichen die Sauerischen Adiabaten eine Approximation zweiter Ordnung, d. h. die drei Parameter p_0, ϱ_0, c einer hypothetischen Adiabate lassen sich so wählen, daß eine Übereinstimmung der Sauerischen und der realen Druckkurve $p = p(\varrho)$ in einem Punkt p_1, ϱ_1 und der Tangente und der Krümmung in diesem Punkt erzielt wird. Ist zum Beispiel

$$p = a \cdot \varrho^\beta \text{ mit } a, \beta = \text{const} \neq 0 \quad (20)$$

eine vorgegebene Druck-Dichte-Beziehung, dann wird ihr Kurvenverlauf in einem beliebigen Punkt p_1, ϱ_1 durch die im folgenden angegebenen Sauerischen Druckkurven quadratisch approximiert. Aus den Gln. (14), (17) und (18) erhält man mit $\beta \neq 3$

$$p = p_1 + p_1 \beta \left(\frac{3-\kappa}{3-\beta} \right)^3 \sum_{\nu=0}^2 \binom{2}{\nu} \frac{1}{\kappa-\nu} \left(\frac{\kappa-\beta}{3-\kappa} \right)^\nu \times \left[\left(\frac{(3-\beta)\varrho - (\kappa-\beta)\varrho_1}{(3-\kappa)\varrho_1} \right)^{\kappa-\nu} - 1 \right] \quad (14')$$

$$p = p_1 + \frac{p_1 \beta}{2(3-\beta)^3} \left[\left(\frac{(3-\beta)\varrho + (2-\beta)\varrho_1}{\varrho_1} \right)^2 + (2-\beta)^2 \ln \left(\frac{(3-\beta)\varrho - (2-\beta)\varrho_1}{\varrho_1} \right)^2 - (5-2\beta)^2 \right] \quad (17')$$

$$p = p_1 + \frac{27 p_1 \beta}{2(\beta-3)^3} \left[\left(\frac{2(\beta-3)\varrho - \beta\varrho_1}{\beta\varrho_1 - (\beta-3)\varrho} \right)^2 + \ln \left(\frac{3\varrho_1}{\beta\varrho_1 - (\beta-3)\varrho} \right)^2 - \left(\frac{6-\beta}{3} \right)^2 \right] \quad (18')$$

und aus den Gln. (16) und (19) mit $\beta \neq -1$

$$p = \frac{p_1(\kappa + \beta - 2)}{(\beta + 1)(\kappa - 2)} \left[\frac{\beta(\kappa - 3)}{\kappa + \beta - 2} \left(\frac{(\kappa + \beta - 2)q - (\beta + 1)e_1}{(\kappa - 3)q} \right)^{\kappa - 2} + 1 \right] \quad (16')$$

$$p = p_1 + \frac{p_1 \beta}{\beta + 1} \ln \frac{q}{(\beta + 1)e_1 - \beta q} \quad (19')$$

als Gleichungen der bezüglich der realen Adiabate (20) normierten Sauerischen Adiabaten.

Mit den hypothetischen Druck-Dichte-Beziehungen (14) und (16) kann man eine Approximation dritter Ordnung erreichen, wenn man außer p_0 , q_0 und c auch noch κ als freien Parameter auffaßt. Gl. (14') geht mit $\kappa = \beta$ und Gl. (16') mit $\kappa = 2 - \beta$ in die vorgegebene Gl. (20) über. Falls Gl. (20) die Druck-Dichte-Beziehung des idealen Gases ($\beta = 1,4$) darstellt, haben wir im ersten Fall $n = 2$ (zweiatomiges Gas) und für die Wellengleichung (12) eine explizite Lösung. Im zweiten Fall wird $n = -3$ und wegen $P_{-\nu-1} = P_\nu$ läßt sich die Riemannsche Funktion mittels eines Legendreschen Polynoms dritten Grades darstellen.

In der Abbildung ist ausgezogen der Kurvenverlauf einer vorgegebenen Druck-Dichte-Beziehung der Form (20) dargestellt; dabei ist $\alpha = 1$ und $\beta = 7/5$ angenommen. Die Adiabaten a und b erhält man mit $\kappa = 5/3$ ($n = 1$) aus den Gln. (16') und (14'), die Adiabate e mit $\kappa = \beta$ ($n = 2$) aus Gl. (16'). Die Gln. (17'), (18') und (19') werden durch die Adiabaten g, i und h veranschaulicht.

Die Sauerischen Adiabaten (17'), (18') und (19') ergaben sich aus $\kappa = 2$ bzw. $\kappa = 0$; diese Fälle führen die Riemannsche Funktion auf vollständige elliptische Integrale¹ zurück. Setzen wir zur Abkürzung

$$\frac{(\lambda - \lambda')(\mu - \mu')}{(\lambda + \mu)(\lambda' + \mu')} = \mathfrak{C} \operatorname{in}^2 \frac{\eta}{2},$$

dann erhält man für $\kappa = 2$

$$\begin{aligned} R(\lambda, \mu; \lambda', \mu') &= \sqrt{\frac{\lambda + \mu}{\lambda' + \mu'}} P_{-1/2}(\mathfrak{C} \operatorname{of} \eta) = \\ &= \frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{\lambda + \mu}{\lambda' + \mu'}} \left(\mathfrak{C} \operatorname{of} \frac{\eta}{2} \right)^{-1} \mathfrak{K} \left(\mathfrak{I} \mathfrak{g} \frac{\eta}{2} \right). \end{aligned}$$

¹ A. Erdélyi, Higher transcendental functions; Vol. 1; New York 1953, S. 173, 7/9.

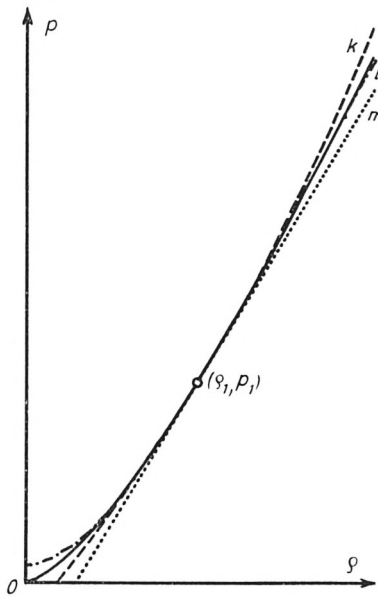
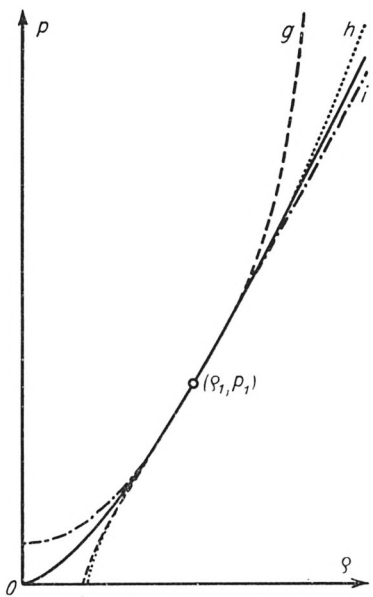
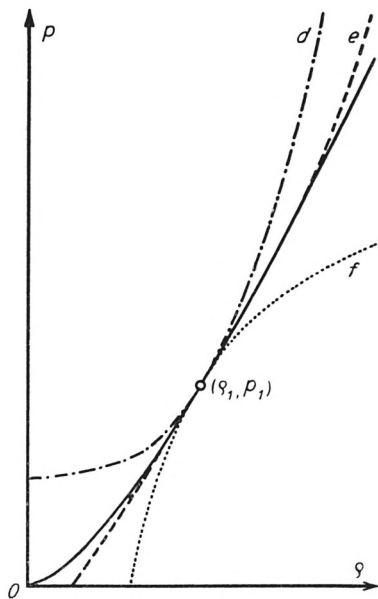
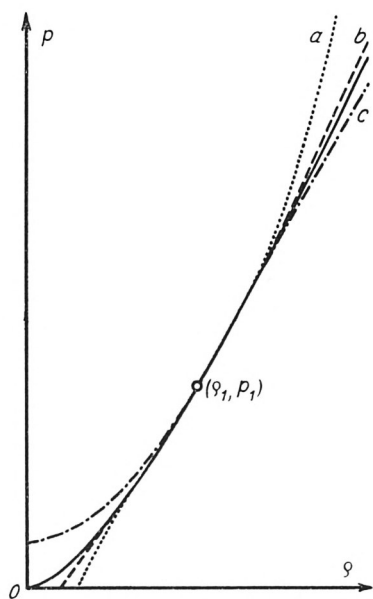


Fig 1

Die bekannte Rekursionsformel

$$(2\nu + 1) z P_\nu(z) = (\nu + 1) P_{\nu+1}(z) + \nu P_{\nu-1}(z)$$

und die Relation

$$P_{\nu/2}(\operatorname{Cof} \eta) = \frac{2}{\pi} e^{\frac{\eta}{2}} \mathbf{E} \left(\sqrt{1 - e^{-2\eta}} \right)$$

liefern nun für alle Kugelfunktionen von halbzahligem Grad, speziell für die Funktion $P_{\nu/2}(\operatorname{Cof} \eta)$, auf die der Fall $\kappa = 0$ führt, und damit für die zugehörigen Riemannschen Funktionen Darstellungen durch vollständige elliptische Integrale.

Von besonderem Interesse sind jedoch die hypothetischen Adiabaten (14') und (16') mit solchen Werten κ , für die sich explizite Lösungen der Darboux'schen Gleichung (12) angeben lassen (die Riemannsche Funktion reduziert sich dann zu einem Legendreschen Polynom). Im Sonderfall $\kappa = n = -1$ spezialisieren sich die Gln. (14') und (16') zur selben Gleichung

$$p = \frac{p_1(3-\beta)}{3(1+\beta)} + \frac{4p_1\beta}{3(1+\beta)} \left(\frac{4q}{(1+\beta)q_1 + (3-\beta)q} \right)^3;$$

sie ist in der Abbildung durch die Adiabate c veranschaulicht.

Im bisher ausgeschlossenen Sonderfall $\kappa = 3$, d. h. $n = 0$ vermindert sich die Anzahl der Parameter auf zwei, und die zugehörigen Sauerschen Adiabaten erlauben deshalb nur eine Approximation erster Ordnung. Man erhält an Stelle der Gl. (14')

$$p = p_1 + \frac{p_1\beta}{3} \left[\left(\frac{q}{q_1} \right)^3 - 1 \right] \quad (21)$$

und an Stelle der Gl. (16')

$$p = p_1 + p_1\beta \left(1 - \frac{q_1}{q} \right) \quad (22)$$

als linear approximierende Druck-Dichte-Beziehungen, die in der Abbildung durch die Adiabaten d und f dargestellt sind. Die in der Literatur¹ schon öfters angegebenen Gln. (21) und (22) folgen aus den Gln. (14) bzw. (16) auch sofort mit $n = c = 0$.

¹ Siehe S. 1 Fußnote 2 a.

§ 7. Zurückführung der Riemannschen Funktion auf eine Besselfunktion

Ein anderer als der bisher behandelte Spezialfall der Gln. (5), (6) und (11) ist die Differentialgleichung

$$z_{\lambda\mu} \pm \frac{\sqrt{\gamma}}{2} (z_{\lambda} + z_{\mu}) = 0 \quad \text{mit } \gamma = \text{const} > 0. \quad (23)$$

Der Fall $\gamma = 0$ ist identisch mit dem bereits im vorangehenden Paragraphen behandelten Spezialfall $n = 0$. Durch die Substitution $z(\lambda, \mu) = z^*(\lambda, \mu) \exp \left[\mp \frac{\sqrt{\gamma}}{2} (\lambda + \mu) \right]$ geht Gl. (23) über in

$$z_{\lambda\mu}^* - \frac{\gamma}{4} z^* = 0$$

mit der Besselfunktion

$$R(\lambda, \mu; \lambda', \mu') = J_0 \left(i \sqrt{\gamma (\lambda - \lambda') (\mu - \mu')} \right) = I_0 \left(\sqrt{\gamma (\lambda - \lambda') (\mu - \mu')} \right)$$

als Riemannsche Funktion^{1, 2}.

Durch Spezialisierung der Gln. (5) bzw. (6) und (11) zur Gl. (23) erhält man im ersten Fall

$$p = p_0 + \frac{\varrho}{\gamma} \cdot \frac{\varrho - 2c}{\varrho - c} + \frac{c}{\gamma} \ln (\varrho - c)^2 \quad (24)$$

und im zweiten Fall

$$p = p_0 + \frac{1}{\gamma} \cdot \frac{\varrho}{1 - c\varrho}. \quad (25)$$

Aus diesen beiden Sauerischen Adiabaten erhält man mit $c = 0$ den in § 5 ausgeschlossenen Sonderfall $n = 1$, d. h. $n = \infty$, was gleichbedeutend ist mit der Einführung der konstanten Schallgeschwindigkeit $a = \frac{1}{\sqrt{\gamma}}$ in die Gln. (5), (6) und (11), die sich dadurch zur Gl. (23) reduzieren. Aus $dp = a^2 d\varrho$ folgt dann sofort

$$p = p_0 + \frac{\varrho}{\gamma}. \quad (26)$$

¹ Siehe S. 1 Fußnote 2 a.

² J. Hadamard, Leçons sur la propagation des ondes; Paris 1903, S. 169 bis 170.

Die drei Konstanten p_0 , c und γ der Gl. (24) und (25) ermöglichen wieder eine quadratische Approximation einer beliebig vorgegebenen realen Adiabate. Legen wir wieder die Gl. (20) als Gleichung der vorgegebenen realen Adiabate zugrunde, dann erhält man mit $\beta \neq 3$

$$p = p_1 + \frac{4p_1\beta}{(\beta-3)^2} \left[\frac{q}{q_1} \cdot \frac{(\beta-3)q - 2(\beta-1)q_1}{(\beta-3)q - (\beta-1)q_1} + \right. \\ \left. + \frac{\beta-1}{\beta-3} \ln \left(\frac{(\beta-1)q_1 - (\beta-3)q}{2q_1} \right)^2 - \frac{\beta+1}{2} \right], \quad (24')$$

ferner

$$p = p_1 - 2p_1\beta \frac{q - q_1}{(\beta-1)q - (\beta+1)q_1} \quad (25')$$

als quadratisch approximierende Adiabaten, die durch die Kurven l und k in der Abbildung dargestellt sind, und aus Gl. (26)

$$p = p_1 + \frac{p_1\beta}{q_1} (q - q_1) \quad (26')$$

als linear approximierende Sauersche Adiabate, die durch die Gerade m veranschaulicht wird.