BAYERISCHE AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE

SITZUNGSBERICHTE

JAHRGANG

1955

MÜNCHEN 1956

VERLAG DER BAYERISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung München

Zur Theorie des Riemann-Integrals in lokal kompakten Räumen

Von Heinz Bauer in Erlangen*

Vorgelegt von Herrn Otto Haupt am 13. Mai 1955

Einleitung

Von L. H. Loomis [12][1] stammt der Begriff des sich aus einem linearen Funktional über einem Funktionen-Vektorverband ableitenden Riemann-Integrals (vgl. § 1). O. Haupt und Chr. Pauc [7], [13], [9; S. 174 ff.] haben für kompakte und in einer demnächst erscheinenden Arbeit auch für lokal kompakte Räume eine Theorie des zu einem an den Raum adaptierten Inhalt (verallgemeinerten Jordan-Inhalt) gehörigen Riemann-Integrals entwickelt. Damit verhalten sich hinsichtlich des Riemannschen Integralbegriffs die Untersuchungen von Loomis zu denen von Haupt und Pauc ähnlich wie hinsichtlich des Lebesgueschen Integralbegriffs die Integrationstheorie von M. H. Stone [14] zur Theorie Radonscher Maße von N. Bourbaki [5]. Gemeinsamer Ausgangspunkt von Loomis und Stone ist ein Vektorverband von auf einer *Menge* definierten, reellen Funktionen und ein positives, lineares Funktional über diesem, welches bei Stone noch zusätzlich als stetig vorausgesetzt wird. Gemeinsamer Ausgangspunkt von Haupt-Pauc und Bourbaki ist dagegen ein lokal kompakter, topologischer *Raum* sowie ein an die Topologie des Raumes adaptierter Inhalt bzw. ein positives Radonsches Maß, d. h. ein positives, lineares Funktional auf der Menge der stetigen, reellen Funktionen mit kompaktem Träger.

Nun läßt sich bekanntlich nach S. Kakutani [11] mittels des Stoneschen Darstellungssatzes für Boole-Verbände die Stonesche Integrationstheorie auf die Bourbakische im folgenden Sinne

* Verf. fühlt sich Herrn Professor Chr. Pauc für eine Reihe von Anregungen sowie für sein in einem regen Briefwechsel bekundetes Interesse am Fortgang dieser Arbeit zu herzlichem Dank verpflichtet.

[1] Zahlen in eckigen Klammern weisen auf das Literaturverzeichnis am Schluß der Note hin.

zurückführen: Jedem stetigen, positiven, linearen Funktional μ auf einem Funktionen-Vektorverband über einer Menge E entspricht ein positives Radonsches Maß $\tilde{\mu}$ auf einem lokal kompakten Raum $\tilde{E}$ derart, daß die sich aus der Stoneschen bzw. Bourbakischen Theorie ergebenden Räume $L^1(E, \mu)$ und $L^1(\tilde{E}, \tilde{\mu})$ isomorph sind. Sofern man also „fast überall gleiche" Funktionen nicht zu unterscheiden braucht, ist das Radonsche Maß $\tilde{\mu}$ ein vollwertiger Ersatz für das Funktional μ.

Schon das Beispiel der klassischen Theorie des Riemann-Integrals auf der Zahlengeraden, wo jede Riemann-integrierbare Funktion einer stetigen „fast überall gleich" ist, zeigt, daß der Äquivalenzbegriff „fast überall gleich" für die Riemannsche Integrationstheorie zu grob ist. Aus diesem Grunde fällt der Versuch, die *abstrakte*, d. h. topologiefreie Loomissche Theorie des Riemann-Integrals auf die *konkrete*, d. h. an lokal kompakte Räume gebundene Theorie von Haupt-Pauc mittels des Darstellungsraumes von Kakutani-Stone zurückzuführen, unbefriedigend aus und führt zu einer unerwünschten Verwischung der Verhältnisse.

Im Teil I dieser Note wird dieses „*Darstellungsproblem*" unter Verwendung anderer Hilfsmittel gelöst: Es sei E eine Menge, $\mathfrak{L}$ ein Vektorverband von auf E definierten, beschränkten, reellen Funktionen, wobei noch – von den Trennbarkeitsforderungen (16) und (17) abgesehen – wie auch bei Loomis die Abgeschlossenheit von $\mathfrak{L}$ gegenüber der Bildung von $\min(1, g)$ für Funktionen $g \in \mathfrak{L}$ vorausgesetzt wird. Dann wird in § 4 die Existenz eines lokal kompakten Raumes $E'_{\mathfrak{L}}$ behauptet, welcher u. a. folgende Eigenschaften besitzt: E liegt in $E'_{\mathfrak{L}}$ dicht; jede Funktion $g \in \mathfrak{L}$ kann zu einer auf $E'_{\mathfrak{L}}$ stetigen, im Unendlichen verschwindenden Funktion g' fortgesetzt werden; zu *jedem* positiven, linearen Funktional $I \mid \mathfrak{L}$ existiert ein an $E'_{\mathfrak{L}}$ adaptierter Inhalt μ' derart, daß die auf E im Sinne von Loomis bezüglich I Riemann-integrierbaren Funktionen genau die Verengerungen der bezüglich μ' im Sinne von Haupt-Pauc auf $E'_{\mathfrak{L}}$ Riemann-integrierbaren Funktionen sind; zwei auf E bzw. $E'_{\mathfrak{L}}$ Riemann-integrierbare Funktionen, von denen die erste Verengerung der zweiten ist, besitzen gleiches Riemann-Integral auf E bzw. $E'_{\mathfrak{L}}$. Der Raum $E'_{\mathfrak{L}}$ ist durch E und $\mathfrak{L}$ im wesentlichen eindeutig bestimmt und, wie bereits aus einer seiner genannten Eigenschaften hervorgeht, vom linearen

Funktional $I \mid \mathfrak{L}$ unabhängig; gerade hierdurch unterscheidet er sich wesentlich vom Darstellungsraum von Kakutani-Stone.

Die Lösung des Darstellungsproblems erfordert als Vorbereitung zwangsläufig die Untersuchung positiver, linearer Funktionale auf Vektorverbänden von stetigen, im Unendlichen verschwindenden Funktionen auf einem lokal kompakten Raum (§ 3). Da bei unserer Darstellung das beliebige, nicht notwendig stetige, positive, lineare Funktional I letzten Endes mit einem Radonschen Maß auf $E'_{\mathfrak{L}}$, also einem *stetigen*, linearen Funktional in Beziehung gesetzt wird, spielt hierbei eine geeignete *Bemessung des Stetigkeitsdefektes* von I eine Rolle. Die hierfür nötigen Hilfsmittel stellt § 2 bereit.

Während im Teil I der Note ein fest vorgegebenes, lineares Funktional im Mittelpunkt der Betrachtung steht, beschäftigt sich Teil II mit *Filtern* positiver, linearer Funktionale und der Frage, die *vage Konvergenz* solcher Filter auf das Konvergenzverhalten von Mengenfunktionen zurückzuführen (§ 5). Hierbei werden die Begriffsbildungen von Teil I herangezogen. Selbst für den Spezialfall der vagen Konvergenz eines Filters positiver Radonscher Maße auf einem lokal kompakten Raum (§ 6) scheinen hierüber bislang nur verstreute Teilresultate, meist unter unnötigen Voraussetzungen über den Raum, vorzuliegen.

Vorliegende Note enthält keine Beweise; diese sollen in größerem Zusammenhang an anderer Stelle (voraussichtlich in der Mathematischen Zeitschrift) erbracht werden.

I. Teil

Riemann-Integrierbarkeit bezüglich eines linearen Funktionals

§ 1. Abstrakter Fall[2]

1. 1. Für das Folgende seien vorgegeben: (a) eine nicht leere Menge E von Elementen $p, q, \ldots$; (b) eine Menge $\mathfrak{L}$ von reellen, endlichen Funktionen $g \mid E$ mit den Eigenschaften

[2] Die in diesem Paragraphen erwähnten Resultate finden sich zum großen Teil bei L. H. Loomis [12]; sie bilden die Grundlage für das Folgende.

(1) $g, h \in \mathfrak{L} \to \alpha g + \beta h \in \mathfrak{L}$ (α, β reelle Zahlen);

(2) $g \in \mathfrak{L} \to |g| \in \mathfrak{L}$;

(3) $g \in \mathfrak{L} \to \min(1, g) \in \mathfrak{L}$;

(c) ein reelles, *positives*, lineares Funktional $I \mid \mathfrak{L}$.

Dann ist $\mathfrak{L}$ ein Vektorverband von reellen Funktionen; insbesondere liegen mit je endlich vielen Funktionen $g_1, \ldots, g_n$ auch die Funktionen $\max(g_1, \ldots, g_n)$ und $\min(g_1, \ldots, g_n)$ in $\mathfrak{L}$. Aus $g \in \mathfrak{L}$ folgt $\min(\alpha, g) \in \mathfrak{L}$ für jede reelle Zahl $\alpha \geq 0$.

Mit $P = \{\alpha, \beta, \ldots\}$ bezeichnen wir den Körper der reellen Zahlen. Für eine Teilmenge A von E sei χ_A die auf E definierte, charakteristische Funktion von A.

1. 2. Unter der (zweiseitigen) *Vervollständigung* $\bar{\mathfrak{L}} = \mathfrak{V}(\mathfrak{L}, I)$ von $\mathfrak{L}$ bezüglich I verstehen wir die Menge aller reellen Funktionen $f \mid E$, zu welchen bei beliebig vorgegebenem $\varepsilon > 0$ Funktionen $g, h \in \mathfrak{L}$ existieren mit

$$g \leq f \leq h \quad \text{und} \quad I(h - g) \leq \varepsilon.$$

$\bar{\mathfrak{L}}$ hat mit $\mathfrak{L}$ die Eigenschaften (1) bis (3) gemein. Das Funktional $I \mid \mathfrak{L}$ kann *auf genau eine Weise* zu einem positiven, linearen Funktional $\bar{I} \mid \bar{\mathfrak{L}}$ fortgesetzt werden. Für jede Funktion $f \in \bar{\mathfrak{L}}$ gilt

$$\begin{aligned} \bar{I}(f) &= \sup\,(I(g);\quad g \leq f,\ g \in \mathfrak{L}) \\ &= \inf\,(I(h);\quad h \geq f,\ h \in \mathfrak{L}). \end{aligned} \tag{4}$$

$\bar{\mathfrak{L}}$ ist vollständig im Sinne der Gleichung $\mathfrak{V}(\bar{\mathfrak{L}}, \bar{I}) = \bar{\mathfrak{L}}$. Wir bezeichnen $\bar{I} \mid \bar{\mathfrak{L}}$ als die Vervollständigung des Funktionals $I \mid \mathfrak{L}$.

1. 3. Mit $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}(\mathfrak{L}, I)$ bezeichnen wir das System aller Mengen $A \subseteq E$ mit $\chi_A \in \bar{\mathfrak{L}}$. Dann ist $\mathfrak{F}$ ein *Boolescher Mengenverband*, welcher nicht notwendig eine Einheit besitzt. Die durch die Gleichung

$$\mu(A) = \bar{I}(\chi_A) \qquad (A \in \mathfrak{F}) \tag{5}$$

definierte Mengenfunktion $\mu \mid \mathfrak{F}$ ist ein *vollständiger Inhalt*, d. h. $\mu \mid \mathfrak{F}$ ist (endlich-)additiv und nicht negativ, es gilt $M \in \mathfrak{F}$

für jede Menge $M \subseteq E$, zu welcher bei beliebig gegebenem $\varepsilon > 0$ Mengen $A, B \in \mathfrak{F}$ mit $A \subseteq M \subseteq B$ und $\mu(B - A) \leq \varepsilon$ existieren.

Mit $\mathfrak{E}$ bezeichnen wir die aus allen „$\mathfrak{F}$-Treppenfunktionen"

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \chi_{A_i} \qquad (A_i \in \mathfrak{F},\ \lambda_i \in P)$$

bestehende Menge. Auch $\mathfrak{E}$ besitzt dann die Eigenschaften (1) bis (3) von $\mathfrak{L}$. Wegen $\mathfrak{E} \subseteq \bar{\mathfrak{L}}$ ist die Verengerung $\bar{I} \mid \mathfrak{E}$ von $\bar{I} \mid \bar{\mathfrak{L}}$ und damit die Vervollständigung $\mathfrak{S} = \mathfrak{V}(\mathfrak{E}, \bar{I})$ definiert. $\mathfrak{S}$ besitzt ebenfalls die Eigenschaften (1) bis (3) von $\mathfrak{L}$ und ist überdies eine Algebra von Funktionen, enthält also mit je zwei Funktionen f und g auch deren Produkt $f \cdot g$. Es gilt $\mathfrak{E} \subseteq \mathfrak{S} \subseteq \bar{\mathfrak{L}}$; die Vervollständigung des Funktionals $\bar{I} \mid \mathfrak{E}$ ist gleich der Verengerung $\bar{I} \mid \mathfrak{S}$ des Funktionals $\bar{I} \mid \bar{\mathfrak{L}}$. Die Funktionen aus $\mathfrak{S}$ heißen *Riemann-integrierbar* bezüglich I oder μ (im eigentlichen Sinne); für eine Funktion $f \in \mathfrak{S}$ heißt $\bar{I}(f)$ das (eigentliche) *Riemann-Integral* von f bezüglich I oder μ, in Zeichen

$$\bar{I}(f) = \int f d\mu.$$

In 1. 5 wird $\int f d\mu$ als Riemann-Stieltjessches Integral gedeutet.

Erwähnt sei noch die folgende *Sättigungseigenschaft* von $\mathfrak{S}$: Aus $|g| \leq |f|$, $f \in \mathfrak{S}$ und $g \in \bar{\mathfrak{L}}$ folgt $g \in \mathfrak{S}$.

1. 4. Eine endliche, nicht negative, reelle Funktion $f \mid E$ heißt *(I-)meßbar*, wenn die Urbildmenge

$$[f > \lambda] = \{p : f(p) > \lambda,\ p \in E\}$$

ein Element von $\mathfrak{F}$ ist für alle reellen Zahlen $\lambda > 0$, abgesehen von höchstens abzählbar unendlich vielen Ausnahmen. Eine beliebige, endliche, reelle Funktion $f \mid E$ heißt meßbar, wenn $f^+ = \max(f, 0)$ und $f^- = (-f)^+$ meßbar sind.

Die Bedeutung der rein verbandsalgebraischen Eigenschaft (3) von $\mathfrak{L}$ liegt u. a. darin, die Meßbarkeit aller Funktionen aus $\bar{\mathfrak{L}}$ zu garantieren.

1. 5. Eine reelle Funktion $f \mid E$ ist *dann und nur dann* Riemann-integrierbar, also ein Element von $\mathfrak{S}$, wenn sie *beschränkt*, *meßbar* und *im Komplement einer Menge $A \in \mathfrak{F}$ gleich Null* ist.

Ist f nicht negativ und Riemann-integrierbar, so läßt sich das Integral $\int f d\mu$ auch als Riemann-Stieltjessches Integral deuten. Es ist

$$\int f d\mu = -\int_0^a \lambda d\alpha(\lambda),$$

wenn a eine obere Schranke von f und $\alpha(\lambda)$ die, abgesehen von höchstens abzählbar vielen Ausnahmen, für alle $\lambda > 0$ definierte, monotone, beschränkte Funktion $\alpha(\lambda) = \mu([f > \lambda])$ bezeichnet.

Notwendig und hinreichend dafür, daß *jede beschränkte* Funktion aus $\mathfrak{L}$ Riemann-integrierbar ist, ist die folgende, vom Funktional I *unabhängige* Bedingung:

(6) *Zu jeder Funktion $g \in \mathfrak{L}$ existiert eine Funktion $h \in \mathfrak{L}$ derart, daß $g(x) = 0$ ist für jedes $x \in E$ mit $h(x) < 1$.*

1. 6. Eine endliche, nicht negative, reelle Funktion $f \mid E$ heißt *uneigentlich Riemann-integrierbar* bezüglich I oder μ, wenn f I-meßbar und

$$\sup\left(\int g d\mu;\ g \leq f,\ g \in \mathfrak{S}\right) < +\infty$$

ist. Man definiert dann das uneigentliche Riemann-Integral ${}^{(u)}\int f d\mu$ von f durch

$$(7) \qquad {}^{(u)}\int f d\mu = \sup\left(\int g d\mu;\ g \leq f,\ g \in \mathfrak{S}\right).$$

Eine beliebige, reelle Funktion $f \mid E$ heißt uneigentlich Riemann-integrierbar, wenn f^+ und f^- uneigentlich Riemann-integrierbar sind. Man setzt

$${}^{(u)}\int f d\mu = {}^{(u)}\int f^+ d\mu - {}^{(u)}\int f^- d\mu.$$

Uneigentlich Riemann-integrierbar bezüglich I sind insbesondere die Funktionen aus $\bar{\mathfrak{L}}$. Das für alle $f \in \mathfrak{S}$ erklärte eigentliche Riemann-Integral $\bar{I}(f) = \int f d\mu$ wird durch das uneigentliche Riemann-Integral zu einem positiven, linearen Funktional auf $\bar{\mathfrak{L}}$ fortgesetzt. Es ist also

$${}^{(u)}\int f d\mu = \bar{I}(f)$$

für alle $f \in \mathfrak{S}$, ferner

$$^{(u)}\int f\,d\mu \leq \bar{I}(f)$$

für alle $f \geq 0$ aus $\bar{\mathfrak{L}}$.

Bemerkung. Da $\mathfrak{S}$ die in 1.3 genannte Sättigungseigenschaft besitzt, sind die Begriffsbildungen von [4] anwendbar. Im Sinne dieser ist das uneigentliche Riemann-Integral $^{(u)}\int f\,d\mu$ die einzig mögliche Fortsetzung des Funktionals $\bar{I}(f) = \int f\,d\mu$, $f \in \mathfrak{S}$, zu einem $\mathfrak{S}$-*singulären*, positiven, linearen Funktional auf $\bar{\mathfrak{L}}$.

§ 2. Zerlegungssätze

2. 1. Nach einem in [2; S. 116] bewiesenen Zerlegungssatz kann jedes positive, lineare Funktional L über einem Vektorverband $\mathfrak{M}$ von Funktionen auf einer Menge E in seinen *stetigen* Teil $L_c \mid \mathfrak{M}$ und seinen *rein-unstetigen Teil* $L_p \mid \mathfrak{M}$ zerlegt werden. Genauer gilt: (A) Es existiert ein *stetiges*, positives, lineares Funktional $L_c \mid \mathfrak{M}$, d. h. für jede Folge von Funktionen $f_n \in \mathfrak{M}$ mit $f_n \uparrow f$, d. h. mit $f_1 \leq f_2 \leq \ldots \leq f_n \leq \ldots \leq f = \sup f_n$, und $f \in \mathfrak{M}$ gilt $\lim L_c(f_n) = L_c(f)$. – (B) Es existiert ferner ein *rein-unstetiges*, positives, lineares Funktional $L_p \mid \mathfrak{M}$, d. h. es ist $K = 0$ das einzige stetige, lineare Funktional auf $\mathfrak{M}$, für welches $0 \leq K(f) \leq L_p(f)$ für jede Funktion $f \geq 0$ aus $\mathfrak{M}$ gilt. – (C) $L = L_c + L_p$. – (D) Die Zerlegungsteile L_c und L_p sind durch die Eigenschaften (A) bis (C) eindeutig bestimmt.

Für eine Funktion $f \geq 0$ aus $\mathfrak{M}$ berechnet sich $L_c(f)$ gemäß der Formel

$$L_c(f) = \inf\left(\sup L(f_n);\ \ f_n \uparrow f,\ \ f_n \in \mathfrak{M}\right). \tag{8}$$

2. 2. Entsprechend kann auch jede nicht negative, additive Mengenfunktion $\varrho \mid \mathfrak{B}$ über einem Booleschen Mengenverband $\mathfrak{B}$ von Teilmengen einer Menge E in ihren σ-*additiven* Teil $\varrho_c \mid \mathfrak{B}$ und ihren *rein-endlich-additiven* Teil $\varrho_p \mid \mathfrak{B}$ zerlegt werden.[3] Den Eigenschaften (A) bis (D) aus 2. 1 entsprechen hier die folgenden Eigenschaften der Zerlegungsteile: (A′) $\varrho_c \mid \mathfrak{B}$ ist

[3] Vgl. K. Yosida und E. Hewitt [16] sowie H. Bauer [2; S. 113].

nicht negativ und σ-additiv, d. h. für jede Folge von Mengen $A_n \in \mathfrak{B}$ mit $A_n \uparrow A$, d. h. mit $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \ldots \subseteq A_n \subseteq \ldots \subseteq A = \cup A_n$, und $A \in \mathfrak{B}$ gilt $\lim \varrho_c(A_n) = \varrho_c(A)$. – (B′) $\varrho_p \mid \mathfrak{B}$ ist nicht negativ und rein-endlich-additiv, d. h. es ist $\tau = 0$ die einzige σ-additive Funktion $\tau \mid \mathfrak{B}$ mit $0 \leq \tau(A) \leq \varrho_p(A)$ für alle $A \in \mathfrak{B}$. – (C′) $\varrho = \varrho_c + \varrho_p$. – (D′) Die Zerlegungsteile ϱ_c und ϱ_p von ϱ sind durch (A′) bis (C′) eindeutig bestimmt.

Für jede Menge $A \in \mathfrak{B}$ berechnet sich $\varrho_c(A)$ gemäß der Formel

$$\varrho_c(A) = \inf\left(\sup \varrho(A_n);\quad A_n \uparrow A,\quad A_n \in \mathfrak{B}\right). \tag{9}$$

2. 3. Nunmehr knüpfen wir wieder an die Betrachtungen in § 1 an. Vorgegeben sei wie dort ein System $\mathfrak{L}$ von auf einer Menge E definierten, reellen Funktionen mit den Eigenschaften (1) bis (3) und ein positives, lineares Funktional $I \mid \mathfrak{L}$.

Ausgehend von den Zerlegungsteilen I_c und I_p von I definieren wir die zweiseitigen Vervollständigungen

$$\bar{\mathfrak{L}}_c = \mathfrak{B}(\mathfrak{L}, I_c) \quad \text{und} \quad \bar{\mathfrak{L}}_p = \mathfrak{B}(\mathfrak{L}, I_p)$$

sowie die Booleschen Mengenverbände

$$\mathfrak{F}_c = \mathfrak{F}(\mathfrak{L}, I_c) \quad \text{und} \quad \mathfrak{F}_p = \mathfrak{F}(\mathfrak{L}, I_p).$$

Mit μ_c bzw. μ_p bezeichnen wir die nach 1. 3 sich aus I_c bzw. I_p ableitenden, auf $\mathfrak{F}_c$ bzw. $\mathfrak{F}_p$ definierten, vollständigen Inhalte. Schließlich sei $\mathfrak{S}_c$ bzw. $\mathfrak{S}_p$ die Menge der bezüglich I_c bzw. I_p Riemann-integrierbaren Funktionen.

2. 4. Zwischen den so definierten Systemen von Mengen bzw. Funktionen bestehen folgende Beziehungen:

$$\bar{\mathfrak{L}} = \bar{\mathfrak{L}}_c \cap \bar{\mathfrak{L}}_p; \tag{10}$$

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_c \cap \mathfrak{F}_p; \tag{11}$$

$$\mathfrak{S} = \mathfrak{S}_c \cap \mathfrak{S}_p. \tag{12}$$

Nach 1. 2 können I_c und I_p zu positiven, linearen Funktionalen $\overline{I_c} \mid \bar{\mathfrak{L}}_c$ und $\overline{I_p} \mid \bar{\mathfrak{L}}_p$ vervollständigt werden. Es erweist sich $\overline{I_c} \mid \bar{\mathfrak{L}}_c$ als *stetig* und $\overline{I_p} \mid \bar{\mathfrak{L}}_p$ als *rein-unstetig*. Entsprechend verhalten sich die Inhalte μ_c und μ_p: Es ist $\mu_c \mid \mathfrak{F}_c$ *σ-additiv* und $\mu_p \mid \mathfrak{F}_p$ *rein-endlich-additiv*.

Wegen (10) können $\overline{I_c}$ und $\overline{I_p}$ auch als lineare Funktionale auf $\bar{\mathfrak{L}}$, wegen (11) μ_c und μ_p als Inhalte auf $\mathfrak{F}$ betrachtet werden.

Satz 1. I. *Es ist* $\overline{I_c} \mid \bar{\mathfrak{L}}$ *der stetige und* $\overline{I_p} \mid \bar{\mathfrak{L}}$ *der rein-unstetige Teil des Funktionals* $\bar{I} \mid \bar{\mathfrak{L}}$, *also*

$$\overline{I_c} = \bar{I}_c \quad \textit{und} \quad \overline{I_p} = \bar{I}_p \qquad (\text{auf } \bar{\mathfrak{L}}). \tag{13}$$

II. *Es ist* $\mu_c \mid \mathfrak{F}$ *der σ-additive und* $\mu_p \mid \mathfrak{F}$ *der rein-endlich-additive Teil des Inhalts* $\mu \mid \mathfrak{F}$.

III. *Auf* $\mathfrak{S}$ *ist* $\bar{I}_c(f) = \int f\, d\mu_c$ *der stetige und* $\bar{I}_p(f) = \int f\, d\mu_p$ *der rein-unstetige Teil des durch das Riemann-Integral* $\bar{I}(f) = \int f\, d\mu$ *definierten Funktionals* $\bar{I} \mid \mathfrak{S}$.

Nach 1.6 sind die Funktionen aus $\mathfrak{L}$ in bezug auf jedes positive, lineare Funktional auf $\mathfrak{L}$ uneigentlich Riemann-integrierbar. Insbesondere existiert ${}^{(u)}\!\int f\, d\mu_c$ für jedes $f \in \mathfrak{L}$. Über dieses auf $\mathfrak{L}$ definierte, lineare Funktional gilt:

Satz 2. I. *Für jede Funktion* $f \in \mathfrak{L}$ *ist*

$$I_c(f) = {}^{(u)}\!\int f\, d\mu_c. \tag{14}$$

II. *Das durch* ${}^{(u)}\!\int f\, d\mu$ *auf* $\mathfrak{L}$ *definierte Funktional hat* ${}^{(u)}\!\int f\, d\mu_c$ *zum stetigen und* ${}^{(u)}\!\int f\, d\mu_p$ *zum rein-unstetigen Teil. Insbesondere gilt*

$${}^{(u)}\!\int f\, d\mu = {}^{(u)}\!\int f\, d\mu_c + {}^{(u)}\!\int f\, d\mu_p \tag{15}$$

für jedes $f \in \mathfrak{L}$.

Schließlich vergleichen wir die auf $\mathfrak{L}$ definierten Funktionale $I(f)$ und ${}^{(u)}\!\int f\, d\mu$ bezüglich der sich aus ihnen ableitenden Riemann-Integrale:

Satz 3. I. *Die auf* $\mathfrak{L}$ *definierten, positiven, linearen Funktionale* $I(f)$ *und* ${}^{(u)}\!\int f\, d\mu$ *führen zur gleichen Menge* $\mathfrak{S}$ *von eigentlich Riemann-integrierbaren Funktionen und zum gleichen Riemann-Integral über* $\mathfrak{S}$.

II. *Das auf* $\mathfrak{L}$ *definierte, positive, lineare Funktional*

$$D(f) = I(f) - {}^{(u)}\!\int f\, d\mu$$

ist rein-unstetig. Bezüglich D sind genau diejenigen Funktionen $f \mid E$ Riemann-integrierbar, welche beschränkt und im Komplement einer Menge $A \in \mathfrak{F}$ gleich Null sind. Für jede derartige Funktion ist das Riemann-Integral bezüglich D gleich Null.

§ 3. Konkreter Fall

3. 1. Nunmehr sei die Menge E speziell ein *lokal kompakter*[4], topologischer Raum. Die Funktionen aus $\mathfrak{L}$ seien *stetige*, reelle Funktionen $g \mid E$, welche *im Unendlichen verschwinden*, d. h. für jede reelle Zahl $\alpha > 0$ ist die Urbildmenge $[\mid g \mid \geq \alpha]$ kompakt. $\mathfrak{L}$ genüge neben (1) bis (3) den folgenden Zusatzforderungen.

(16) *Zu jedem Punkt $p \in E$ existiert eine Funktion $g \in \mathfrak{L}$ mit $g(p) \neq 0$.*

(17) *Zu je zwei verschiedenen Punkten $p, q \in E$ existiert eine Funktion $h \in \mathfrak{L}$ mit $h(p) \neq h(q)$.*

Beispielsweise genügt die Menge $\mathfrak{K}(E)$ aller stetigen, reellen Funktionen $g \mid E$ mit *kompaktem Träger* den Bedingungen (1) bis (3) sowie (16) und (17).

Aus den genannten Eigenschaften von $\mathfrak{L}$ folgt:

Lemma 1. *Jede stetige, reelle Funktion $f \mid E$, welche im Unendlichen verschwindet, kann gleichmäßig durch Funktionen aus $\mathfrak{L}$ approximiert werden.*

3. 2. Neben E und $\mathfrak{L}$ sei wie bisher ein positives, lineares Funktional $I \mid \mathfrak{L}$ vorgegeben. Dann definieren wir gemäß § 1 die Vervollständigung $\bar{I} \mid \bar{\mathfrak{L}}$ von $I \mid \mathfrak{L}$, den Inhalt $\mu \mid \mathfrak{F}$ und die Menge $\mathfrak{S}$ der Riemann-integrierbaren Funktionen.

Der vollständige Inhalt $\mu \mid \mathfrak{F}$ erweist sich als ein an E *adaptierter Inhalt* im Sinne von O. Haupt und Chr. Pauc [8], d. h.: 1. jede Menge aus $\mathfrak{F}$ ist *beschränkt*[5]; in $\mathfrak{F}$ ist eine *offene Basis* von

---

[4] Im folgenden bedeutet „kompakt" stets genauer „bikompakt *und* Hausdorffsch".

[5] Eine Menge $A \subseteq E$ heißt *beschränkt* (oder *relativ kompakt*), wenn ihre abgeschlossene Hülle $\bar{A}$ kompakt ist.

E enthalten; 3. zu jeder Menge $A \in \mathfrak{F}$ und jedem $\varepsilon > 0$ existiert eine offene Menge $U \in \mathfrak{F}$ mit $\bar{A} - \underline{A} \subseteq U$ und $\mu(U) \leq \varepsilon$.

Satz 4. *Der Inhalt $\mu \mid \mathfrak{F}$ ist an die Topologie von E adaptiert.*

Da der Inhalt $\mu \mid \mathfrak{F}$ vollständig ist, gilt nach [8] auch die Umkehrung von 3.: Existiert für eine beschränkte Menge $A \subseteq E$ zu jedem $\varepsilon > 0$ eine offene Menge $U \in \mathfrak{F}$ mit $\bar{A} - \underline{A} \subseteq U$ und $\mu(U) \leq \varepsilon$, so ist $A \in \mathfrak{F}$. Hieraus und aus 3. folgt insbesondere, daß $\mathfrak{F}$ mit jeder Menge A auch deren abgeschlossene Hülle $\bar{A}$ und deren offenen Kern $\underline{A}$, also auch deren Begrenzung $\bar{A} - \underline{A}$ enthält und daß $\mu(A) = \mu(\bar{A}) = \mu(\underline{A})$ ist.

3. 3. Satz 5. *Jede Funktion $f \in \mathfrak{K}(E)$ ist Riemann-integrierbar bezüglich I. Das Integral $\int f\, d\mu$, aufgefaßt als lineares Funktional über $\mathfrak{K}(E)$, ist das einzige positive Radonsche Maß ϱ auf E, in bezug auf welches jede Menge $A \in \mathfrak{F}$ ϱ-integrierbar ist mit $\varrho(A) = \mu(A)$.*[6]

Es gilt somit definitionsgemäß $\int f\, d\mu = \int f\, d\varrho$ für alle $f \in \mathfrak{K}(E)$.

Mit Hilfe des Radonschen Maßes ϱ lassen sich nunmehr die Elemente von $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{S}$ in einfacher Weise kennzeichnen. Hierzu nennen wir eine Teilmenge A von E *ϱ-quadrierbar*, wenn sie *beschränkt* und $\varrho(\bar{A} - \underline{A}) = 0$ ist.

Satz 6. *Es ist $\mathfrak{F}$ das System aller ϱ-quadrierbaren Teilmengen von E.*

Satz 7. *Es ist $\mathfrak{S}$ das System aller beschränkten, ϱ-fast überall stetigen Funktionen $f \mid E$. Ferner ist $\mathfrak{S}$ die zweiseitige Vervollständigung von $\mathfrak{K}(E)$ bezüglich ϱ. Jede Funktion $f \in \mathfrak{S}$ ist ϱ-integrierbar mit*

$$\int f\, d\varrho = \int f\, d\mu.$$

Demnach führen die Funktionale $I \mid \mathfrak{L}$ und $\int f\, d\varrho \mid \mathfrak{K}(E)$ zum *gleichen* adaptierten Inhalt und zum gleichen Riemann-Integral.

---

[6] Bezüglich der hier und im folgenden verwendeten Begriffe aus der Theorie Radonscher Maße vgl. N. Bourbaki [5]. Es sei jedoch erwähnt, daß ein positives Radonsches Maß ϱ *definitionsgemäß* ein positives, lineares Funktional auf $\mathfrak{K}(E)$ ist; für jede Funktion $f \in \mathfrak{K}(E)$ bezeichnet $\int f\, d\varrho$ den Funktionswert von ϱ an der Stelle f. Eine Menge $A \subseteq E$ mit ϱ-integrierbarer, charakteristischer Funktion χ_A heißt ϱ-integrierbar; man setzt $\varrho(A) = \int \chi_A\, d\varrho$.

Bemerkung. Bei O. Haupt und Chr. Pauc [7], [13], [9; S. 174 ff.] wird für kompakte[7] Räume E und in einer demnächst erscheinenden Arbeit auch für lokal kompakte Räume eine Theorie des Riemann-Integrals entwickelt, welche nicht von einem Funktional, sondern einem an E adaptierten Inhalt $\mu \mid \mathfrak{F}$ ausgeht. Diese ordnet sich in unseren Aufbau folgendermaßen ein: Für eine $\mathfrak{F}$-Treppenfunktion $f = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \chi_{A_i}$ werde $I(f) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mu(A_i)$ gesetzt. Dann ist I ein positives, lineares Funktional über der Menge $\mathfrak{E}$ der $\mathfrak{F}$-Treppenfunktionen; die Vervollständigung von $I \mid \mathfrak{E}$ ist gleich dem Riemann-Integral bei Haupt-Pauc.

3. 4. Aus der Adaption des Inhaltes $\mu \mid \mathfrak{F}$ an E folgt [8] insbesondere die σ-Additivität von μ. Also gilt

$$\mu_c = \mu \quad \text{und} \quad \mu_p = 0 \tag{18}$$

für den σ-additiven Teil μ_c und den rein-endlich-additiven Teil μ_p von μ. Vermöge der in 2. 4 aufgezeigten Koppelung der Zerlegung $\mu = \mu_c + \mu_p$ mit der Zerlegung $I = I_c + I_p$ von $I \mid \mathfrak{L}$ lassen sich nunmehr über I_c und I_p genauere Aussagen machen; hierbei benützen wir die Bezeichnungen von § 2.

Satz 8. I. *Jede Funktion $f \in \mathfrak{L}$ ist ϱ-integrierbar und uneigentlich Riemann-integrierbar; es gilt*

$$I_c(f) = \int f\,d\varrho = {}^{(u)}\!\int f\,d\mu \qquad (f \in \mathfrak{L}). \tag{19}$$

II. *Es ist $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_c$ und $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}_c$.*

III. *Es ist $\mathfrak{F}_p$ das System aller beschränkten Teilmengen von E und $\mathfrak{S}_p$ das System aller beschränkten Funktionen $f \mid E$ mit kompaktem Träger.*

Dieser Satz zusammen mit (18) besagt u. a., daß die Funktionale $I \mid \mathfrak{L}$ und $I_c \mid \mathfrak{L}$ zum gleichen adaptierten Inhalt und zum gleichen Riemann-Integral führen.

---

[7] In [9] genauer für bikompakte, vollständig reguläre Räume, in welchen das Axiom T_1 nicht notwendig erfüllt zu sein braucht.

Korollar. *Der sich aus $I \mid \mathfrak{L}$ ableitende Inhalt $\mu \mid \mathfrak{F}$ ist dann und nur dann identisch Null, wenn das Funktional $I \mid \mathfrak{L}$ rein-unstetig ist.*

Satz 9. *Für jede Funktion $f \geq 0$ aus $\mathfrak{L}$ ist*

$$I_p(f) = \lim_{\alpha \to +0} I(\min(\alpha, f)). \tag{20}$$

Es ist $I \mid \mathfrak{L}$ dann und nur dann stetig bzw. rein-unstetig, wenn

$$\lim_{\alpha \to +0} I(\min(\alpha, f)) = 0 \tag{21}$$

bzw.

$$I(\min(1, f)) = I(f) \tag{22}$$

für alle $f \geq 0$ aus $\mathfrak{L}$ gilt.

3. 5. *Beispiel eines rein-unstetigen, positiven, linearen Funktionals*[8]: Es sei E das halboffene Einheitsintervall $(0, 1] = \{\xi: 0 < \xi \leq 1\}$ der Zahlengeraden. E ist lokal kompakt. $\mathfrak{L}$ bestehe aus allen stetigen Funktionen $f \mid [0,1]$, aufgefaßt als nur über E definiert, mit $f(0) = 0$ und in $\xi = 0$ existierender rechtsseitiger Ableitung $f'(0)$. Für jedes $f \in \mathfrak{L}$ werde $I(f) = f'(0)$ gesetzt.

Bemerkung. Alle in diesem Paragraphen auftretenden ϱ-Integrale $\int f d\varrho$ existieren bereits im Sinne eines N-Integrals. D. h.: Erweitert man das Funktional $\int f d\varrho \mid \mathfrak{K}(E)$ gemäß dem ersten Erweiterungsverfahren von M. H. Stone [14], welches nur Folgen (und nicht gerichtete Systeme) von Funktionen aus $\mathfrak{K}(E)$ heranzieht, und ist N die diesem Erweiterungsprozeß zugrunde liegende Quasi-Norm, so sind die in ϱ-Integralen $\int f d\varrho$ dieses Paragraphen auftretenden Integranden bereits N-summierbar.[9]

---

[8] Nach L. H. Loomis [12; S. 172], wo das Beispiel aber nicht in unserem Sinne interpretiert wird.

[9] Vgl. die Darstellung der Stoneschen Theorie bei Haupt-Aumann-Pauc [9; S. 130 ff.].

§ 4. Zurückführung des abstrakten Falles auf den konkreten

4. 1. Es liege wieder der abstrakte Fall des § 1 vor: E sei eine Menge, $\mathfrak{L}$ eine Menge reeller Funktionen auf E mit den Eigenschaften (1) bis (3) und $I \mid \mathfrak{L}$ ein positives, lineares Funktional.

Lemma 2. *Die Teilmenge $\mathfrak{L}^*$ von $\mathfrak{L}$ aller beschränkten Funktionen aus $\mathfrak{L}$ genügt den Bedingungen* (1) *bis* (3). *Die Verengerung $I^* \mid \mathfrak{L}^* = I \mid \mathfrak{L}^*$ von I auf $\mathfrak{L}^*$ ist ein positives, lineares Funktional. Für den zugehörigen Inhalt $\mu^* \mid \mathfrak{F}^*$ und die Menge $\mathfrak{S}^*$ der bezüglich I^* Riemann-integrierbaren Funktionen gilt: $\mathfrak{F}^* = \mathfrak{F}$, $\mu^* = \mu$, $\mathfrak{S}^* = \mathfrak{S}$ und $\int f d\mu^* = \int f d\mu$ für alle $f \in \mathfrak{S}$.*

Es führen also $I^* \mid \mathfrak{L}^*$ und $I \mid \mathfrak{L}$ zum gleichen Riemann-Integral. Daher bedeutet es für das Folgende keine Beschränkung der Allgemeinheit, anzunehmen:

(23) *Die Funktionen aus $\mathfrak{L}$ sind beschränkt.*

Schließlich setzen wir über $\mathfrak{L}$ noch die aus 3. 1 bekannten Trennungsbedingungen voraus:

(16) *Zu jedem $p \in E$ existiert ein $g \in \mathfrak{L}$ mit $g(p) \neq 0$.*

(17) *Zu $p, q \in E$ mit $p \neq q$ existiert ein $h \in \mathfrak{L}$ mit $h(p) \neq h(q)$.*

Im Hinblick auf unser weiteres Vorhaben bedeuten die Zusatzvoraussetzungen über $\mathfrak{L}$ keine wesentliche Beschränkung der Allgemeinheit. Abgesehen von dem Trivialfall, in welchem $\mathfrak{L}$ nur aus der konstanten Funktion $g = 0$ besteht, läßt sich stets eine nicht leere Menge $E_0 \subseteq E$ derart angeben, daß die Menge $\mathfrak{L}_0$ der auf E_0 verengerten Funktionen aus $\mathfrak{L}$ ein zu $\mathfrak{L}$ isomorpher Vektorverband mit den Eigenschaften (16) und (17) ist. Im übrigen läßt sich ein zum folgenden analoger Satz auch ohne Benutzung von (16) und (17) beweisen; aus Gründen der bequemeren Darstellung fordern wir von $\mathfrak{L}$ noch diese beiden Zusatzeigenschaften.

4. 2. Satz 10. *Es existiert ein lokal kompakter Raum $E'_{\mathfrak{L}}$ mit folgenden Eigenschaften: 1. E ist eine dichte Teilmenge von $E'_{\mathfrak{L}}$; 2. jede Funktion $g \in \mathfrak{L}$ kann (auf genau eine Weise) zu einer stetigen Funktion $g' \mid E'_{\mathfrak{L}}$ fortgesetzt werden, welche im Unendlichen* *verschwindet; 3. die Menge* $\mathfrak{L}'$ *der stetigen Fortsetzungen* g' *aller Funktionen* $g \in \mathfrak{L}$ *besitzt auf* $E'_{\mathfrak{L}}$ *die Eigenschaften* (16) *und* (17) *von* $\mathfrak{L}$ *auf* E.

Zusatz. *Der lokal kompakte Raum* $E'_{\mathfrak{L}}$ *ist durch die Eigenschaften 1. bis 3. bis auf Homöomorphien, welche die Punkte von* E *festlassen, eindeutig bestimmt. Das Bestehen der Bedingung* (6) *für* $\mathfrak{L}$ *ist notwendig und hinreichend dafür, daß die stetige Fortsetzung* $g' \mid E'_{\mathfrak{L}}$ *einer jeden Funktion* $g \in \mathfrak{L}$ *einen kompakten Träger besitzt.* $E'_{\mathfrak{L}}$ *ist dann und nur kompakt, wenn die auf* E *konstante Funktion* $f = 1$ *gleichmäßig durch Funktionen aus* $\mathfrak{L}$ *approximiert werden kann.*

Aus dem Zusatz folgt insbesondere, daß $E'_{\mathfrak{L}}$ vom Funktional $I \mid \mathfrak{L}$ *unabhängig* ist.

Bemerkung. Der Beweis dieses Satzes beruht wesentlich auf einem noch unveröffentlichten Approximationssatz von G. Nöbeling und H. Bauer.[9a]

4. 3. Das Funktional $I \mid \mathfrak{L}$ wird auf $\mathfrak{L}'$ übertragen vermöge der Festsetzung

$$I'(g') = I(g); \tag{24}$$

hierbei ist g eine beliebige Funktion aus $\mathfrak{L}$ und g' ihre stetige Fortsetzung auf $E'_{\mathfrak{L}}$. Dann ist $I' \mid \mathfrak{L}'$ ein positives, lineares Funktional.

Da jede Funktion $g \in \mathfrak{L}$ nur auf genau eine Weise zu einer stetigen Funktion $g' \mid E'_{\mathfrak{L}}$ fortgesetzt werden kann, genügt $\mathfrak{L}'$ auch den Bedingungen (1) bis (3), welche für $\mathfrak{L}$ nach Annahme erfüllt sind. Somit hat $\mathfrak{L}'$ bezüglich $E'_{\mathfrak{L}}$ alle Eigenschaften, die in § 3 über $\mathfrak{L}$ bezüglich E vorausgesetzt wurden. Also sind die Entwicklungen des § 3 auf $E'_{\mathfrak{L}}$, $\mathfrak{L}'$ und I' anwendbar.

Es sei $\mu' \mid \mathfrak{F}'$ der sich aus $I' \mid \mathfrak{L}'$ ableitende, an $E'_{\mathfrak{L}}$ adaptierte Inhalt und $\mathfrak{S}'$ die Menge der bezüglich I' Riemann-integrierbaren Funktionen. ϱ' bezeichne das nach Satz 5 eindeutig bestimmte Radonsche Maß, für welches $\varrho'(A') = \mu'(A')$ für alle $A' \in \mathfrak{F}'$ ist.

[9a] Zusatz bei der Korrektur: Erscheint im Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung unter dem Titel „Allgemeine Approximationskriterien mit Anwendungen“.

4. 4. Zwischen der Theorie des Riemann-Integrals bezüglich I in E und der des Riemann-Integrals bezüglich I' in $E'_{\mathfrak{L}}$ besteht der folgende einfache Zusammenhang:

Satz 11. I. *Es ist* $\mathfrak{F}$ *gleich der Spur von* $\mathfrak{F}'$ *in* E. *Für je zwei Mengen* $A \in \mathfrak{F}$ *und* $A' \in \mathfrak{F}'$ *mit* $A = A' \cap E$ *gilt*

$$\mu(A) = \mu'(A') = \varrho'(A'). \tag{25}$$

II. *Es ist* $\mathfrak{S}$ *gleich der Menge der auf* E *verengerten Funktionen aus* $\mathfrak{S}'$. *Für je zwei Funktionen* $f \in \mathfrak{S}$ *und* $f' \in \mathfrak{S}'$ *mit* $f = f' \mid E$ *ist*

$$\int f d\mu = \int f' d\mu' = \int f' d\varrho'. \tag{26}$$

4. 5. Zu beachten ist, daß Gleichung (24) für die Zerlegungsteile I_c und I_p bzw. I'_c und I'_p von $I \mid \mathfrak{L}$ bzw. $I' \mid \mathfrak{L}'$ i. a. nicht gilt. Aus der Stetigkeit des Funktionals $I \mid \mathfrak{L}$ folgt zwar die Stetigkeit von $I' \mid \mathfrak{L}'$, aber nicht notwendig umgekehrt. Wegen der σ-Additivität von μ' ist $\mu'_c = \mu'$ und $\mu'_p = 0$; daher kann ersichtlich die Zerlegung $\mu = \mu_c + \mu_p$ von μ mit der entsprechenden Zerlegung von μ' ebensowenig verglichen werden.

Wohl aber tritt zu der Darstellung (14) des stetigen Teils I_c von I mittels μ jetzt eine weitere hinzu, welche das in $E'_{\mathfrak{L}}$ definierte Radonsche Maß ϱ' heranzieht.

Satz 12. *Es sei* $f \geq 0$ *eine Funktion aus* $\mathfrak{L}$ *und* $\tilde{f} \mid E'_{\mathfrak{L}}$ *diejenige Fortsetzung von* f *auf* $E'_{\mathfrak{L}}$, *welche in allen Punkten von* $E'_{\mathfrak{L}}-E$ *gleich Null ist. Dann gilt*

$$I_c(f) = \overline{\int} \tilde{f} d\varrho'. \tag{27}$$

Hierbei ist $\overline{\int} \tilde{f} d\varrho'$ das „schwache" ϱ'-Oberintegral von $\tilde{f}$, d. h. gleich der Quasi-Norm $N(\tilde{f})$ von $\tilde{f}$ beim ersten Stoneschen Erweiterungsprozeß, angewandt auf $\int f' d\varrho' \mid \mathfrak{K}(E'_{\mathfrak{L}})$ (vgl. die Bemerkung in 3. 5).

Der folgende Satz steht in engem Zusammenhang mit einem in [3] von uns gewonnenen Resultat:

Satz 13. *Für jede Menge $A \in \mathfrak{F}$ gilt*

$$(28) \qquad \mu_c(A) = \overline{\mu'}(A) \quad \text{und} \quad \mu_p(A) = \underline{\mu'}(\overline{A} - A),$$

wenn $\overline{A}$ die abgeschlossene Hülle von A in $E'_{\mathfrak{L}}$ bezeichnet.

Hierbei ist $\overline{\mu'}(A)$ bzw. $\underline{\mu'}(A)$ das „schwache" äußere bzw. innere Maß einer Menge $A \subseteq E'_{\mathfrak{L}}$, welches man im Sinne der klassischen Maßtheorie ausgehend vom σ-additiven Inhalt $\mu' | \mathfrak{F}'$ erhält. Bezeichnet χ'_A die charakteristische Funktion von A bezüglich $E'_{\mathfrak{L}}$, so ist insbesondere $\overline{\mu'}(A) = \overline{\int} \chi'_A \, d\varrho'$.

Bemerkung. Formel (27) verallgemeinert die erste Hälfte von (19). Genügen nämlich E und $\mathfrak{L}$ den in 3. 1 ausgesprochenen Bedingungen, so ist $E'_{\mathfrak{L}} = E$ und $\tilde{f} = f$.

II. Teil

Vage Konvergenz von Filtern linearer Funktionale

§ 5. Abstrakter Fall

5. 1. Im folgenden bezeichne $\mathfrak{L}$ wieder (vgl. 1. 1) ein System von auf einer Menge E definierten, reellen Funktionen mit den Eigenschaften (1) bis (3). Darüber hinaus fordern wir die *Beschränktheit* einer jeden Funktion $g \in \mathfrak{L}$ und die *Gültigkeit der Bedingung* (6). Die Menge aller auf $\mathfrak{L}$ definierten, *positiven*, linearen Funktionale heiße $\mathfrak{I}_+(\mathfrak{L})$.

Wir versehen $\mathfrak{I}_+(\mathfrak{L})$ mit der Topologie der punktweisen Konvergenz und bezeichnen diese als *vage Topologie*[10]. Bezüglich dieser ist $\mathfrak{I}_+(\mathfrak{L})$ ein vollständiger, uniformer Hausdorff-Raum. Die uniforme Struktur ist definiert durch die Familie der Quasi-Metriken

$$(29) \quad \delta_{g_1,\ldots,g_n}(I', I'') = \max_{1 \leq \nu \leq n} |I'(g_\nu) - I''(g_\nu)|, \quad (I', I'' \in \mathfrak{I}_+(\mathfrak{L})).$$

Hierbei ist $g_1, \ldots, g_n$ ein System beliebiger, aber endlich vieler Funktionen aus $\mathfrak{L}$.

---

[10] Die Verwendung dieser aus der Theorie Radonscher Maße stammenden Bezeichnung im vorliegenden abstrakten Fall wird durch die formale Analogie und vor allem durch den folgenden Satz 15 gerechtfertigt.

Ein Filter Φ in $\mathfrak{J}_+(\mathfrak{L})$ ist dann und nur dann vag konvergent gegen ein Funktional $I_0 \in \mathfrak{J}_+(\mathfrak{L})$, d. h. konvergent gegen I_0 im Raum $\mathfrak{J}_+(\mathfrak{L})$, wenn

$$\lim_\Phi I(g) = I_0(g) \tag{30}$$

ist für *jede* Funktion $g \in \mathfrak{L}$.

Beispiel. Ist E ein lokal kompakter Raum und $\mathfrak{L} = \mathfrak{K}(E)$, so ist $\mathfrak{J}_+(\mathfrak{K}(E))$ die Menge $\mathfrak{M}_+(E)$ der positiven Radonschen Maße auf E und die vage Topologie in $\mathfrak{M}_+(E)$ gleich der „topologie vague" von N. Bourbaki [5].

5. 2. Die in § 1 eingeführten Begriffe gestatten es nun, die vage Konvergenz wenigstens einer *Folge* in $\mathfrak{J}_+(\mathfrak{L})$ auf das Konvergenzverhalten einer Folge von Mengenfunktionen zurückzuführen.

Es sei nämlich $I_0, I_1, \ldots, I_n, \ldots$ eine Folge von Funktionalen aus $\mathfrak{J}_+(\mathfrak{L})$. Nach 1. 3 ist jedem I_ν ein vollständiger Inhalt $\mu_\nu | \mathfrak{F}_\nu$, $\nu = 0, 1, \ldots$, zugeordnet. Es gilt

Satz 14. *Notwendig und hinreichend für die vage Konvergenz der Folge $I_1, I_2, \ldots$ gegen I_0 ist die Gültigkeit der Gleichung*

$$\lim_{n\to\infty} \mu_n(Q) = \mu_0(Q)$$

für jede Menge $Q \in \bigcap_{\nu=0}^{\infty} \mathfrak{F}_\nu$.

5. 3. Zur Kennzeichnung der vagen Konvergenz eines Filters Φ in $\mathfrak{J}_+(\mathfrak{L})$ reichen die den Funktionalen $I \in \mathfrak{J}_+(\mathfrak{L})$ zugeordneten Inhalte $\mu | \mathfrak{F}$ im allgemeinen nicht aus. Unter zusätzlichen Voraussetzungen über $\mathfrak{L}$ können aber Kriterien für die vage Konvergenz von Filtern in $\mathfrak{J}_+(\mathfrak{L})$ gewonnen werden, die den Kriterien über vage Konvergenz von Filtern Radonscher Maße im folgenden Paragraphen entsprechen. Die Bereitstellung der hierfür notwendigen Begriffsbildungen, welche zum Teil an A. D. Alexandroff [1] und E. Hewitt [10] anknüpfen, würde den Rahmen der Darstellung überschreiten. Wir begnügen uns hier mit der Zurückführung des Problems auf das im folgenden Paragraphen behandelte.

5. 4. Hierzu *fordern* wir von $\mathfrak{L}$ noch *zusätzlich*, daß die Bedingungen (16) und (17) von 4. 1 erfüllt sind. Dann existiert zu $\mathfrak{L}$

und E der lokal kompakte Raum $E' = E'_{\mathfrak{L}}$ des Satzes 10. Nach § 4 existiert zu jedem Funktional $I \in \mathfrak{I}_+(\mathfrak{L})$ ein (eindeutig bestimmtes) Radonsches Maß $\varrho' \in \mathfrak{M}_+(E')$ mit

$$I(g) = \int g'\,d\varrho' \tag{31}$$

für jede Funktion $g \in \mathfrak{L}$ und deren stetige Fortsetzung $g' \mid E'$. Ordnen wir jedem $I \in \mathfrak{I}_+(\mathfrak{L})$ das so definierte Radonsche Maß $\varrho' \in \mathfrak{M}_+(E')$ als Bild $\tau(I)$ zu, so gilt

Satz 15. *Die Abbildung τ ist eine Homöomorphie des Raumes $\mathfrak{I}_+(\mathfrak{L})$ auf den Raum $\mathfrak{M}_+(E')$.*

Ein Filter Φ in $\mathfrak{I}_+(\mathfrak{L})$ konvergiert hiernach vag gegen $I_0 \in \mathfrak{I}_+(\mathfrak{L})$, *wenn und nur wenn* der Bildfilter $\tau(\Phi)$ in $\mathfrak{M}_+(E')$ vag gegen $\tau(I_0)$ konvergiert.

Bemerkung. Die in Satz 15 behauptete Homöomorphie bezieht sich nur auf die *topologische* Struktur und im allgemeinen *nicht* auf die *uniforme* Struktur der Räume $\mathfrak{I}_+(\mathfrak{L})$ und $\mathfrak{M}_+(E')$.

§ 6. Konkreter Fall

Vage Konvergenz von Filtern Radonscher Maße

6. 1. Es sei nun speziell E ein lokal kompakter Raum, $\mathfrak{L}$ die Menge $\mathfrak{K}(E)$ aller stetigen, reellen Funktionen $f \mid E$ mit kompaktem Träger und $\mathfrak{M}_+(E) = \mathfrak{I}_+(\mathfrak{K}(E))$ die Menge der positiven Radonschen Maße auf E. Vage Konvergenz eines Filters Φ in $\mathfrak{M}_+(E)$ gegen ein Maß $\varrho_0 \in \mathfrak{M}_+(E)$ ist gleichbedeutend mit dem Bestehen der Gleichung

$$\lim_{\Phi} \int f\,d\varrho = \int f\,d\varrho_0 \tag{32}$$

für alle $f \in \mathfrak{K}(E)$.

6. 2. Es sei Φ ein Filter in $\mathfrak{M}_+(E)$ und ϱ_0 ein positives Radonsches Maß auf E. Dann gilt

Satz 16. *Der Filter Φ konvergiert dann und nur dann vag gegen ϱ_0, wenn*

$$\lim_{\Phi} \varrho(Q) = \varrho_0(Q)$$

ist für jede ϱ_0-quadrierbare, kompakte (oder jede ϱ_0-quadrierbare, offene oder jede ϱ_0-quadrierbare Borelsche) Menge Q.[11]

Ohne Heranziehung quadrierbarer Mengen gilt

Satz 17. *Für die vage Konvergenz des Filters Φ gegen ϱ_0 ist jede der beiden folgenden Bedingungen notwendig und hinreichend:*

I. *Für jede kompakte Menge K und jede beschränkte, offene Menge G ist*

$$\overline{\lim}_{\Phi}\, \varrho(K) \leq \varrho_0(K) \quad \text{und} \quad \underline{\lim}_{\Phi}\, \varrho(G) \geq \varrho_0(G).$$

II. *Ist K eine kompakte und G eine beschränkte, offene Menge mit $K \subseteq G$, so existieren zu jedem $\varrho \in \mathfrak{M}_+(E)$ eine kompakte Menge K_ϱ mit $K \subseteq K_\varrho \subseteq G$ und eine offene Menge G_ϱ mit $K \subseteq G_\varrho \subseteq G$ derart, daß*

$$\lim_{\Phi}\, \varrho(K_\varrho) = \varrho_0(K) \quad \text{und} \quad \lim_{\Phi}\, \varrho(G_\varrho) = \varrho_0(G)$$

ist.

Korollar. *Notwendig und hinreichend für die vage Konvergenz einer gerichteten Familie $\{\varrho_\iota\}_{\iota \in J}$ von positiven Radonschen Maßen gegen ein positives Radonsches Maß ϱ_0 ist folgende Bedingung:*

Zu jeder kompakten Menge K und jeder beschränkten, offenen Menge G mit $K \subseteq G$ existieren eine durch J fallend gerichtete Familie $\{K_\iota\}_{\iota \in J}$ von kompakten Mengen mit $K \subseteq K_\iota \subseteq G$ für alle $\iota \in J$ und eine durch J steigend gerichtete Familie $\{G_\iota\}_{\iota \in J}$ von offenen Mengen mit $K \subseteq G_\iota \subseteq G$ für alle $\iota \in J$ derart, daß

$$\lim_{\iota \in J}\, \varrho_\iota(K_\iota) = \varrho_0(K) \quad \text{und} \quad \lim_{\iota \in J}\, \varrho_\iota(G_\iota) = \varrho_0(G)$$

ist.

---

[11] Das aus Satz 16 insbesondere folgende Kriterium über die vage (schwache) Konvergenz einer *Folge* positiver Radonscher Maße in einem *kompakten* Raum E (formuliert mit ϱ_0-quadrierbaren Borelschen Mengen) geht unseres Wissens auf Chr. Pauc zurück und ist in einem Brief vom 21. 2. 1955 an den Verf. enthalten. Vgl. diesbezüglich eine demnächst erscheinende Arbeit von O. Haupt und Chr. Pauc. Für den n-dimensionalen, euklidischen Raum findet sich das Kriterium in der genannten speziellen Form bei C. de la Vallée Poussin [15].

Es sei noch bemerkt, daß im Spezialfall einer *Folge* $\{\varrho_i\}_{i=1,2,\ldots}$ positiver Radonscher Maße die im Korollar auftretenden Mengen K_i und G_i, $i = 1, 2, \ldots$, noch der zusätzlichen Bedingung unterworfen werden können, sämtlich ϱ_0-quadrierbar zu sein.

Ist der Raum E speziell *kompakt*, so ist jede der wie folgt vereinfachten Bedingungen I und II des Satzes 17 notwendig und hinreichend für die vage (schwache) Konvergenz von Φ gegen ϱ_0:

I*. *Für jede abgeschlossene Menge K gilt $\overline{\lim}_{\Phi}\, \varrho(K) \leq \varrho_0(K)$; ferner ist $\lim_{\Phi} \varrho(E) = \varrho_0(E)$.*[12]

II*. *Ist K eine abgeschlossene und G eine offene Menge mit $K \subseteq G$, so existiert zu jedem $\varrho \in \mathfrak{M}_+(E)$ eine abgeschlossene Menge K_ϱ mit $K \subseteq K_\varrho \subseteq G$ derart, daß $\lim_{\Phi} \varrho(K_\varrho) = \varrho_0(K)$ ist.*[13]

6. 3. Schließlich führt der Satz 14 des letzten Paragraphen im jetzt vorliegenden Fall zum folgenden Satz:

Satz 18. *Eine Folge $\varrho_1, \varrho_2, \ldots$ positiver Radonscher Maße auf E konvergiert dann und nur dann vag gegen ein positives Radonsches Maß ϱ_0 auf E, wenn für jede (oder jede kompakte oder jede offene oder jede Borelsche) Menge Q, welche ϱ_ν-quadrierbar für $\nu = 0, 1, \ldots$ ist, gilt*

$$\lim_{n\to\infty} \varrho_n(Q) = \varrho_0(Q).$$

Literaturverzeichnis

[1] A. D. Alexandroff, *Additive set functions in abstract spaces.* Mat. Sbornik n. S. 8, 307–348 (1940); n. S. 9, 563–628 (1941); n. S. 13, 169–238 (1943).

[2] H. Bauer, *Eine Rieszsche Bandzerlegung im Raum der Bewertungen eines Verbandes.* Sitz.-Ber. math.-nat. Kl. Bayer. Akad. Wiss. München 1953, 89–117 (1954).

---

[12] Für die n-Sphäre und eine Folge positiver Radonscher Maße auf dieser findet sich I* bereits bei W. Fenchel und B. Jessen [6].

[13] Zu I* und II* analoge Bedingungen im Falle von Folgen finden sich bei A. D. Alexandroff [1] für „charges" in vollständig normalen, pseudo-topologischen Räumen.

[3] —, *Caractérisation topologique de la partie complètement additive et de la partie purement additive d'une fonction additive d'ensemble.* C. r. Acad. Sci. Paris 238, 1771–1773 (1954).

[4] —, *Reguläre und singuläre Abbildungen eines distributiven Verbandes in einen vollständigen Vektorverband, welche der Funktionalgleichung* $f(x \vee y) + f(x \wedge y) = f(x) + f(y)$ *genügen.* J. reine angew. Math. 194, 141–179 (1955).

[5] N. Bourbaki, *Intégration*, Chap. I–IV. Actual. Scient. et Ind. 1175, Paris (1952).

[6] W. Fenchel und B. Jessen, *Mengenfunktionen und konvexe Körper.* Danske Videnks. Selsk. Math.-fys. Medd. 16, Nr. 3, 31 S. (1938).

[7] O. Haupt et Chr. Pauc, *Mesure et topologie adaptées. Espaces mesurés topologiques.* C. r. Acad. Sci. Paris 230, 711–712 (1950).

[8] —, *Bemerkungen über Inhalte und Maße in lokal bikompakten Räumen.* Akad. Wiss. Lit. Mainz, Abh. math.-nat. Kl. 1955.

[9] Haupt-Aumann-Pauc, *Differential- und Integralrechnung, III.* 2. Aufl., Berlin (1955).

[10] E. Hewitt, *Integral representation of certain linear functionals.* Arkiv för Matematik 2, 269–282 (1951).

[11] S. Kakutani, *Concrete representations of abstract* (L)*-spaces and the mean ergodic theorem.* Ann. of Math. 42, 523–537 (1941).

[12] L. H. Loomis, *Linear functionals and content.* Amer. Journ. of Math. 76, 168–182 (1954).

[13] Chr. Pauc, *Intégrale de partition et intégrale topologique. Familles dérivantes topologiques.* C. r. Acad. Sci. Paris 230, 810–811 (1950).

[14] M. H. Stone, *Notes on integration, I–IV.* Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 34, 336–342, 447–455, 483–490 (1948); 35, 50–58 (1949).

[15] C. de la Vallée Poussin, *Extension de la méthode du balayage de Poincaré et problème de Dirichlet.* Ann. Inst. H. Poincaré 2, 169–232 (1932).

[16] K. Yosida and E. Hewitt, *Finitely additive measures.* Trans. Amer. math. Soc. 72, 46–66 (1952).