BAYERISCHE AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE

SITZUNGSBERICHTE

JAHRGANG

1955

MÜNCHEN 1956

VERLAG DER BAYERISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung München

Über die Konstruierbarkeit der Schnittpunkte dreier Flächen zweiter Ordnung

Von **Hanfried Lenz** in München

Vorgelegt von Herrn Frank Löbell am 4. Februar 1955

Herrn Professor Wilhelm Süss zum 60. Geburtstag am 7. 3. 1955 gewidmet

1. Drei quadratische Gleichungen mit drei Unbekannten aufzulösen, bedeutet geometrisch, die Schnittpunkte dreier Quadriken im Raum zu finden. Wie üblich seien auch Punkte mit komplexen Koordinaten zugelassen. Wir nennen die Schnittpunkte dreier Quadriken *kubisch konstruierbar*, wenn sie sich durch Auflösung einer Kette von Gleichungen höchstens dritten Grades finden lassen und daher – falls sie reell sind – mit dem Einschiebelineal konstruierbar sind. Es empfiehlt sich, zu homogenen Koordinaten überzugehen. Man erhält dann die drei Flächengleichungen

$$A \equiv \sum_{i,k=0}^{3} a_{ik} x_i x_k = 0, \qquad B \equiv \sum_{i,k=0}^{3} b_{ik} x_i x_k = 0, \qquad C \equiv \sum_{i,k=0}^{3} c_{ik} x_i x_k = 0. \tag{1}$$

Die Schnittpunkte der drei Flächen sind bekanntlich i. a. *nicht* kubisch konstruierbar, wie das inhomogen geschriebene spezielle System

$$\begin{aligned} &\text{I.} \quad y = x^2, \\ &\text{II.} \quad z = y^2, \\ &\text{III.} \quad z^2 + ayz + bxz + cz + dxy + ey + fx + g = 0 \end{aligned} \tag{2}$$

zeigt, das auf die allgemeine Gleichung 8. Grades führt. Ersetzt man III durch

$$\text{III}'. \quad yz + axz + bz + cxy + dy + ex + f = 0,$$

so kommt man auf die allgemeine Gleichung 6. Grades, wobei die Gleichung I in projektiver Auffassung einen *Kegel* darstellt, dessen Spitze auf den beiden anderen Flächen liegt.

2. Der Einfachheit halber seien die Koeffizienten der Gleichungspolynome A, B, C als rational vorausgesetzt. Im allgemeinen Fall würden sich die folgenden Betrachtungen nur unwesentlich ändern. Wir beschränken uns auf den Fall, daß die drei Quadriken nur endlich viele Schnittpunkte haben, nach dem Bézoutschen Satz also höchstens acht, was sich in unserem Fall auch wie folgt einsehen läßt: A, B, C sind linear unabhängig, daher sind in dem Bündel $\lambda A + \mu B + \nu C = 0$ zwei Flächen nur dann identisch, wenn sie zu proportionalen Wertetripeln λ, μ, ν gehören. Das Bündel enthält unendlich viele Kegel. Man erhält sie bekanntlich durch die Bedingung

$$\Delta \equiv \left|\lambda a_{ik} + \mu b_{ik} + \nu c_{ik}\right| = 0. \tag{3}$$

Diese Gleichung stellt eine von Hesse eingeführte und seitdem viel behandelte[1] Kurve vierter Ordnung in der projektiven (λ, μ, ν)-Ebene dar. Wir wählen die Basisflächen des Bündels so, daß eine von ihnen, etwa $A = 0$, ein Kegel wird. Das geht auf unendlich viele Arten mit Hilfe kubischer Konstruktionen, etwa indem man die Schnittpunkte der Kurve (3) mit einer willkürlichen Geraden sucht. Nach geeigneter Koordinatentransformation erhält man dann die drei Flächengleichungen in der Form

$$\begin{aligned} &\text{I.} \quad y = x^2, \\ (4) \qquad &\text{II.} \quad az^2 + z(bx + cy + d) = f(x, y), \\ &\text{III.} \quad a'z^2 + z(b'x + c'y + d') = g(x, y). \end{aligned}$$

Aus II und III erhält man durch Linearkombination eine von z^2 freie Gleichung. Ist sie auch von z frei, so hat man zwei quadratische Gleichungen für x und y mit höchstens vier Lösungen und aus II oder III erhält man höchstens acht Lösungen für z. Ist die aus II und III abgeleitete Gleichung aber nicht frei

[1] Vgl. etwa O. Hesse, Werke S. 345 ff.; H. Weber, Lehrbuch der Algebra II; Li-en-po, Math. Ann. 118 S. 94 ff.

von z, so hängen die y- und z-Koordinaten der Schnittpunkte rational von x ab und für x erhält man eine Gleichung achten Grades.

Es gibt sogar eine Gleichung 8. Grades mit *rationalen* Koeffizienten, von deren Lösungen die Koordinaten der Schnittpunkte rational abhängen. Denn jeder Schnittpunkt hat algebraische Koordinaten. Ersetzt man sie durch ihre Konjugierten, so muß wieder ein Schnittpunkt entstehen. Die Koordinatenkörper der Schnittpunkte lassen sich daher in Reihen von je m_i konjugierten Körpern m_i-ten Grades mit $\sum_i m_i = 8$ anordnen; d. h. die Koordinaten aller Schnittpunkte hängen rational von den Wurzeln einer Gleichung höchstens 8. Grades mit rationalen Koeffizienten ab. Die Frage, wie man eine solche Gleichung wirklich aufstellt, soll hier nicht behandelt werden. Jedenfalls gilt

Satz 1: *Notwendig und hinreichend dafür, daß alle Schnittpunkte dreier Quadriken kubisch konstruierbar sind, ist, daß der Grad des Körpers, der von den Koordinaten sämtlicher Schnittpunkte erzeugt wird, weder durch 5 noch durch 7 teilbar ist.*

Denn dieser Körper ist ein Normalkörper, die Ordnung seiner Galoisschen Gruppe hat also keine anderen Primfaktoren als 2 und 3. Daher ist die Gruppe auflösbar,[1] und daraus folgt die Behauptung.

Da dieser Satz höhere Hilfsmittel erfordert und zudem die Aufstellung der Galoisschen Gruppe alles andere als eine einfache Aufgabe ist, begnügen wir uns im folgenden mit bloß *hinreichenden* Kriterien für kubische Auflösbarkeit.

3. Hilfssatz: *Jedem singulären Punkt der Kurve (3) entspricht im Quadrikenbündel $\lambda A + \mu B + \nu C = 0$ entweder eine zerfallende Quadrik oder ein Kegel, dessen Spitze auf allen Bündelquadriken liegt, und umgekehrt.*

Zum Beweis denken wir uns die Basisflächen des Bündels, d. h. das Koordinatensystem in der (λ, μ, ν)-Ebene, so gewählt, daß der gegebene singuläre Punkt der Kurve (3) die Koordinaten $\lambda = 1$, $\mu = \nu = 0$ hat. Dann ist $|a_{ik}| = 0$ und die Gleichung

[1] A. Speiser, Die Theorie der Gruppen von endlicher Ordnung, 3. Aufl., Berlin 1937, S. 193.

$A = 0$ stellt einen Kegel dar. y_i ($i = 0, 1, 2, 3$) seien die Koordinaten der Kegelspitze. Dann ist

$$(5) \qquad \sum_{k=0}^{3} a_{ik} y_k = 0 \qquad \text{für} \quad i = 0, 1, 2, 3,$$

und daraus folgt, wenn die Unterdeterminanten der Matrix (a_{ik}) mit $(-1)^{i+k} A_{ik}$ bezeichnet werden, *entweder*

$$(6\text{a}) \qquad A_{ik} = 0 \qquad \text{für alle} \quad i, k$$

oder

$$(6\text{b}) \qquad y_i y_k = \gamma A_{ik} \quad \text{mit von } i, k \text{ unabhängigem } \gamma \neq 0.$$ [1]

Im ersten Fall zerfällt die Quadrik $A = 0$, im zweiten Fall betrachten wir die Identität

$$(7) \qquad \Delta = \lambda^4 |a_{ik}| + \lambda^3 \mu \sum_{i,k=0}^{3} b_{ik} A_{ik} + \lambda^3 \nu \sum_{i,k=0}^{3} c_{ik} A_{ik} + \cdots,$$

wobei die nicht angeschriebenen Glieder in μ und ν zusammen mindestens quadratisch sind. Für den singulären Punkt $\mu = \nu = 0$ wird

$$\frac{\partial \Delta}{\partial \mu} = \lambda^3 \sum_{i,k=0}^{3} b_{ik} A_{ik} = 0,$$

$$\frac{\partial \Delta}{\partial \nu} = \lambda^3 \sum_{i,k=0}^{3} c_{ik} A_{ik} = 0.$$

Nach (6b) wird also

$$(8) \qquad \sum_{i,k=0}^{3} b_{ik} y_i y_k = 0, \qquad \sum_{i,k=0}^{3} c_{ik} y_i y_k = 0,$$

d. h. die Flächen $B = 0$ und $C = 0$ und damit alle Bündelflächen gehen durch die Kegelspitze, w. z. b. w.

Die Kegelspitze ist in diesem Fall mindestens doppelter Schnittpunkt der drei Quadriken.

Ist umgekehrt die Fläche $A = 0$ ein Ebenenpaar oder ein Kegel, dessen Spitze (mit den Koordinaten y_i) auf allen Bündel-

---

[1] Vgl. O. Hesse, Werke S. 356.

flächen liegt, so ergibt sich aus (7) und (6a) bzw. aus (7), (8) und (6b), daß an der Stelle $\mu = \nu = 0$

$$\Delta = \frac{\partial \Delta}{\partial \mu} = \frac{\partial \Delta}{\partial \nu} = 0$$

wird, d. h., daß die Kurve (3) dort einen singulären Punkt hat, womit der Hilfssatz bewiesen ist.

4. Satz 2: *Wenn von den endlich vielen Schnittpunkten dreier Quadriken vier verschiedene in einer Ebene liegen, so sind alle Schnittpunkte kubisch konstruierbar.*

Beweis: I. Wir wählen zwei beliebige Punkte P, Q aus der Ebene durch vier verschiedene Schnittpunkte A, B, C, D, so daß die sechs Punkte A, B, C, D, P, Q auf keinem Kegelschnitt liegen. Das geht; denn von den vier Schnittpunkten A, B, C, D können nicht einmal drei in einer Geraden liegen, weil sonst alle Punkte dieser Geraden in allen drei Flächen lägen, was oben ausgeschlossen wurde. Die Bündelparameter λ, μ, ν können so gewählt werden, daß die Fläche $\lambda A + \mu B + \nu C = 0$ die Punkte P und Q enthält. Dann enthält sie die Ebene durch A, B, C, D ganz und zerfällt daher, was natürlich wohlbekannt ist.

II. Wir nehmen zunächst an, die Kurve (3) enthalte nur endlich viele singuläre Punkte. *Diese sind dann kubisch konstruierbar.* Wenn die Kurve (3) nicht zerfällt, so hat sie nämlich höchstens drei singuläre Punkte. Jeder solche singuläre Punkt hat algebraische Koordinaten und jeder Punkt mit konjugierten Koordinaten muß gleichfalls singulärer Punkt der Kurve sein. Daher erzeugen die Koordinaten eines singulären Punktes einen Körper höchstens dritten Grades, d. h. die singulären Punkte sind kubisch konstruierbar. Wenn die Kurve (3) aber zerfällt, so erzeugen die Koeffizienten jedes Bestandteils wieder nur einen Körper höchstens vierten Grades. Die Ermittlung der singulären Punkte läßt sich demnach zurückführen auf die Bestimmung der Schnittpunkte von (kubisch konstruierbaren) Geraden und Kegelschnitten untereinander oder von einer Geraden mit einer Kurve dritter Ordnung, also auf kubische Konstruktionen.

III. Aus den gefundenen singulären Punkten können nun diejenigen herausgesucht werden, die zu zerfallenden Bündelquadriken gehören. Der Rest der Aufgabe besteht dann aus der

Ermittlung der Schnittpunkte von zwei Quadriken und einem Ebenenpaar. Die beiden Ebenen können aus der Gleichung des Paars durch Auflösung einer quadratischen Gleichung gefunden werden, und in diesen Ebenen sind dann noch je zwei Kegelschnitte miteinander zum Schnitt zu bringen, was auf kubische Konstruktionen führt.

IV. Es bleibt noch der Fall zu behandeln, daß die Kurve (3) einen doppelten Bestandteil enthält. Seine Ermittlung führt auf höchstens quadratische Gleichungen. Schneidet man ihn mit willkürlichen Geraden, etwa mit rationalen Gleichungskoeffizienten, so erhält man beliebig viele singuläre Punkte der Kurve (3). Es seien fünf davon bereits gefunden. Weil die Quadriken nur endlich viele Schnittpunkte haben sollen, können diese fünf singulären Punkte nicht alle zu eigentlichen Kegeln mit verschiedenen Spitzen gehören, denn jede solche Spitze wäre ein doppelter Schnittpunkt der drei Quadriken, was dem Bézoutschen Satz widerspricht. Also ist entweder eine der fünf Quadriken ein Ebenenpaar und die acht Schnittpunkte mit den übrigen Quadriken sind kubisch konstruierbar oder zwei der Quadriken sind Kegel mit gemeinsamer Spitze. Diese ist mindestens vierfacher Schnittpunkt und daher linear oder quadratisch konstruierbar. Die restlichen höchstens vier Schnittpunkte sind also kubisch konstruierbar.

V. Der damit fertiggestellte Beweis des Satzes 2 gibt kein Mittel an die Hand, die drei gegebenen Gleichungen wirklich aufzulösen. Dazu muß man die Doppelpunkte der Kurve (3) auf bekannte Art als sechsfache Schnittpunkte mit der Hesseschen Kurve

$$H \equiv \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 \Delta}{\partial \lambda^2} & \frac{\partial^2 \Delta}{\partial \lambda\, \partial \mu} & \frac{\partial^2 \Delta}{\partial \lambda\, \partial \nu} \\ \frac{\partial^2 \Delta}{\partial \mu\, \partial \lambda} & \frac{\partial^2 \Delta}{\partial \mu^2} & \frac{\partial^2 \Delta}{\partial \mu\, \partial \nu} \\ \frac{\partial^2 \Delta}{\partial \nu\, \partial \lambda} & \frac{\partial^2 \Delta}{\partial \nu\, \partial \mu} & \frac{\partial^2 \Delta}{\partial \nu^2} \end{vmatrix} = 0$$

suchen. Da H vom sechsten Grad in λ, μ, ν ist, erhält man bei inhomogener Schreibweise eine Resultante R vom höchstens 24. Grade, die, falls sie nicht identisch verschwindet, nicht mehr als vier sechsfache Wurzeln haben kann. Diese sind daher nach dem wiederholt angewendeten Schluß kubisch konstruierbar. Falls R identisch verschwindet, liegt auf jeder beliebigen Geraden ein singulärer Punkt von $\Delta = 0$.

5. Weiter folgen aus unseren Betrachtungen die folgenden Tatsachen:

Satz 3: *Haben die drei gegebenen Quadriken nur endlich viele Schnittpunkte und hat die Kurve (3) einen singulären Punkt, so ist entweder ein Schnittpunkt mit dem Lineal allein konstruierbar oder alle Schnittpunkte sind kubisch konstruierbar.*

Beweis: Wenn der singuläre Punkt der Kurve (3) einer zerfallenden Bündelquadrik entspricht, so sind wir nach Satz 2 fertig. Andernfalls entspricht er einem Kegel, dessen Spitze doppelt zählender Schnittpunkt ist. Wenn es nur einen solchen doppelten Schnittpunkt gibt, so müssen seine Koordinaten rational sein, d. h. er ist mit dem Lineal konstruierbar. Daß dann die übrigen Schnittpunkte nicht kubisch konstruierbar zu sein brauchen, folgt aus dem Beispiel (2) I, II, III'. Wenn es mehrere – höchstens vier – doppelte Schnittpunkte der drei Quadriken gibt, so müssen diese kubisch konstruierbar sein, und ebenso die höchstens vier restlichen Schnittpunkte. Nebenbei ergibt sich:

Haben drei Quadriken genau acht verschiedene Schnittpunkte und hat die Kurve (3) einen singulären Punkt, so verteilen sich die acht Schnittpunkte auf zwei Ebenen und sind kubisch konstruierbar.

Haben drei Quadriken genau acht verschiedene Schnittpunkte und hat die Kurve (3) genau zwei singuläre Punkte, so sind alle acht Schnittpunkte quadratisch konstruierbar, die reellen unter ihnen also mit Zirkel und Lineal.

Denn die beiden singulären Punkte der Kurve (3) müssen nach dem mehrfach angewendeten Schluß quadratisch konstruierbar sein. Sie führen, weil doppelte Schnittpunkte nach Voraussetzung ausgeschlossen sind, auf zwei verschiedene zerfallende Bündelquadriken, die sich in vier Geraden schneiden. Der Schnitt dieser Geraden mit einer weiteren Bündelquadrik führt wieder nur auf quadratische Gleichungen.