Sitzungsberichte

der

mathematisch-naturwissenschaftlichen Klasse

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften zu München

Jahrgang 1954

München 1955
Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften
In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung

Dyaden in der Theorie der Flächenabbildungen

Von **Frank Löbell** in München

Vorgelegt am 8. Oktober 1954

Kürzlich wurden in diesen Sitzungsberichten[1] alle Fälle angegeben, in denen die drei „Grundformen" eines Flächenpaares $\mathfrak{x}(u, v) \rightleftarrows \mathfrak{y}(u, v)$, d. h. die quadratischen Differentialformen

$$d\mathfrak{x}^2, \quad d\mathfrak{y}^2, \quad d\mathfrak{x}\, d\mathfrak{y},$$

linear abhängig sind, und es wurde dieses Verhalten geometrisch gedeutet. Bald danach wurden Beziehungen mitgeteilt,[2] in denen die soeben genannten oder mit ihnen nahe verwandte Formen ganz allgemein zu einer hinzugenommenen vierten Form stehen; speziell ist hierbei an die Form

$$\mathfrak{c}\, d\mathfrak{x}\, d\mathfrak{y}$$

gedacht, wo $\mathfrak{c}$ den Einheitsvektor der positiven Normalen der Fläche $\mathfrak{x}$ bedeutet. Es wurde dabei nicht haltgemacht bei Formen mit skalaren Koeffizienten, die bei den Grundformen die Fundamentalgrößen 1. O. der Flächen $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ und des Flächenpaares $\mathfrak{x} \rightleftarrows \mathfrak{y}$, bei anderen Formen aus den Fundamentalgrößen gebildete Funktionen sind, sondern es wurden auch Formen mit vektoriellen Koeffizienten betrachtet.

1. Bei der weiteren Beschäftigung mit diesem Gegenstand stellte sich nun heraus, daß ein Zusammenhang mit *Dyaden oder Affinoren* besteht, durch welche die durch die Flächenabbildung $\mathfrak{x} \to \mathfrak{y}$ in jedem Paar entsprechender Berührebenen $\varepsilon(u,v) \to \varepsilon'(u,v)$ induzierte Affinität ausgedrückt werden kann. Einen Hinweis hierauf enthielt nicht nur der Schluß der zweiten der obenerwähnten Noten, sondern eine schon vor mehreren Jahren veröffentlichte Arbeit[3] über das Vektorpolynom

[1] Diese Sitz.-Ber. (1954) S. 135 ff.

[2] Diese Sitz.-Ber. (1954) S. 149 ff.

$$\lambda^2 \cdot \mathfrak{j}_1 - \lambda \cdot \mathfrak{j} + \mathfrak{j}_2, \tag{1}$$

wo

$$\mathfrak{j}_1 = \mathfrak{x}_u \times \mathfrak{x}_v, \quad \mathfrak{j}_2 = \mathfrak{y}_u \times \mathfrak{y}_v, \quad \mathfrak{j} = \mathfrak{x}_u \times \mathfrak{y}_v - \mathfrak{x}_v \times \mathfrak{y}_u \tag{1a}$$

die vektoriellen Differentialinvarianten der Abbildung $\mathfrak{x} \to \mathfrak{y}$ sind, neben die noch die skalare Differentialinvariante

$$j = \mathfrak{x}_u \mathfrak{y}_v - \mathfrak{x}_v \mathfrak{y}_u \tag{1b}$$

tritt,[4] die, wenn $\mathfrak{j}_1 \mathfrak{j}_2 \mathfrak{j} \neq 0$ ist, durch die drei vektoriellen Invarianten eindeutig bestimmt ist.[5]

Für den Fall, daß die beiden einander zugeordneten *Berührebenen* ε und ε' der Flächen $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ *parallel* sind, wurde nämlich damals die nachstehende Identität angegeben,[6] die der Affinor A erfüllt, der die Affinität zwischen den Ebenen ε und ε' ausdrückt:

$$\mathfrak{j}_1 \cdot \mathsf{A}^2 - \mathfrak{j} \cdot \mathsf{A} + \mathfrak{j}_2 \cdot \bar{\mathsf{I}} = 0;$$

hier bedeutet $\bar{\mathsf{I}}$ die identische Transformation der Ebene ε, die durch eine die Berührpunkte ineinander überführende Translation mit der Ebene ε' zur Deckung gebracht zu denken ist.

Multipliziert man die linke Seite dieser Gleichung von links skalar mit $\mathfrak{j}_1$, so geht sie in die folgende über:

$$\mathfrak{j}_1^2 \cdot \mathsf{A}^2 - \mathfrak{j}_1 \mathfrak{j} \cdot \mathsf{A} + \mathfrak{j}_1 \mathfrak{j}_2 \cdot \bar{\mathsf{I}} = 0$$

oder

$$\mathsf{A}^2 - 2H \cdot \mathsf{A} + K \cdot \bar{\mathsf{I}} = 0, \tag{2}$$

wenn mit $2H$ und K die Größen $\mathfrak{j}_1 \mathfrak{j} : \mathfrak{j}_1^2$ und $\mathfrak{j}_1 \mathfrak{j}_2 : \mathfrak{j}_1^2$ bezeichnet werden, die, wie schon bei früheren Gelegenheiten festgestellt wurde,[7] als Verallgemeinerungen der doppelten *mittleren Krümmung* und des *Krümmungsmaßes* einer Fläche anzusehen sind.

Wenn der Affinor A ein *symmetrischer Tensor* ist, d. h. die ihn darstellende Dyade A gleich ihrer konjugierten $\bar{\mathsf{A}}$ oder das

[3] Sitz.-Ber. d. Bayer. Ak. d. Wiss., Math.-nat. Kl., 1946 S. 175 ff.

[4] Sitz.-Ber. d. Bayer. Ak. d. Wiss., Math.-nat. Abt., 1943, S. 217 ff.

[5] Es besteht nämlich eine Syzygie, die in der in [4] angegebenen Arbeit auf S. 222 bewiesen ist.

[6] In der in [3] genannten Note auf S. 183.

[7] Zum ersten Male in den Sitz.-Ber. d. Bayer. Ak. d. Wiss., Math.-nat. Kl., 1947 S. 23.

skalare Produkt von A mit jedem Vektor kommutativ ist, so folgt hieraus, weil dann der Bedeutung von A entsprechend

$$\mathsf{A}\,d\mathfrak{x} = d\mathfrak{x}\,\mathsf{A} = d\mathfrak{y} \tag{3}$$

ist, durch links- und rechtsseitige skalare Multiplikation der linken Seite der Gleichung mit $d\mathfrak{x}$ ein schon früher gewonnenes Ergebnis:

$$d\mathfrak{y}^2 - 2H \cdot d\mathfrak{x}\,d\mathfrak{y} + K \cdot d\mathfrak{x}^2 = 0. \tag{2'}$$

Der bekannteste Fall, in dem $\mathsf{A} = \overline{\mathsf{A}}$ gilt, ist der der Gaußschen Abbildung einer Fläche $\mathfrak{x}$ auf die Einheitskugel $\mathfrak{y} = \mathfrak{c}$ durch parallele Normalen.[8]

Die Beziehung (2′) läßt sich aber, wie wir wissen, für den Fall, daß A *nicht symmetrisch* ist, verallgemeinern; es tritt dann auf der linken Seite noch das Glied $J \cdot \mathfrak{c}\,d\mathfrak{x}\,d\mathfrak{y}$ hinzu, wo $J = j\colon \mathfrak{c}\mathfrak{j}_1$ ist.[8] Kann vielleicht auch die Geltung der Beziehung (2) in diesem Sinn erweitert werden? Wenn $\mathsf{A} \neq \overline{\mathsf{A}}$ ist, läßt sich aber $d\mathfrak{y}^2$ nicht durch Multiplikation von A^2 mit $d\mathfrak{x}$ von links und von rechts gewinnen; es müßte an Stelle von A^2 allgemein $\overline{\mathsf{A}}\,\mathsf{A}$ stehen, denn dann würde man, weil $\mathsf{A}\,d\mathfrak{x} = d\mathfrak{x}\,\overline{\mathsf{A}}$ ist, einen Term

$$d\mathfrak{x}\,\overline{\mathsf{A}}\,\mathsf{A}\,d\mathfrak{x} = d\mathfrak{y}^2$$

bekommen. Um das Produkt $\mathfrak{c}\,d\mathfrak{x}\,d\mathfrak{y} = -d\mathfrak{x}\,(\mathfrak{c} \times d\mathfrak{y})$ auf analoge Weise zu erhalten, müßten wir in (2) noch einen Summanden haben, der die aus A durch linksseitige vektorielle Multiplikation mit $\mathfrak{c}$ entstandene Dyade $\mathfrak{c} \times \mathsf{A}$, die kurz mit A^* bezeichnet werde, enthält; denn es ist $\mathsf{A}^*\,d\mathfrak{x} = \mathfrak{c} \times d\mathfrak{y}$, also $d\mathfrak{x}\,\mathsf{A}^*\,d\mathfrak{x} = d\mathfrak{x}\,\mathfrak{c}\,d\mathfrak{y}$.

Wenn wir, durch solche Überlegungen angeregt, den Ausdruck

$$\overline{\mathsf{A}}\,\mathsf{A} - 2H \cdot \mathsf{A} + K \cdot \mathsf{I} - J \cdot \mathsf{A}^*$$

ausrechnen, finden wir in der Tat, daß er – unter der Voraussetzung $\mathfrak{j}_1 \times \mathfrak{j}_2 = 0$ – verschwindet.

---

[8] Vgl. die in [1] angeführte Note S. 137. Der Affinor A hängt in diesem Sonderfall mit dem Tensor Γ zusammen, der in einer im Jahresbericht der Deutschen Mathematikervereinigung Bd. 39 (1929) veröffentlichten Arbeit des Verfassers über Flächentheorie auf kinematischer Grundlage auf S. 179 eingeführt wurde, und zwar vermöge der Beziehung

$$\mathsf{A} = -\mathfrak{c} \times \Gamma \times \mathfrak{c}.$$

2. Wir können aber auch ein *allgemeiner gültiges Ergebnis* erzielen. Alles bisher Gesagte galt ja unter der Annahme, daß die beiden Flächen $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ in entsprechenden Punkten parallele Berührebenen haben; daß daraus immer folgt, daß auch $\mathfrak{j}$ zu $\mathfrak{j}_1$ und $\mathfrak{j}_2$ parallel ist, wurde früher schon festgestellt und ist zudem unmittelbar aus der Komplanarität von $\mathfrak{x}_u$, $\mathfrak{x}_v$, $\mathfrak{y}_u$, $\mathfrak{y}_v$ zu ersehen.

Weiterhin sei also $\mathfrak{j}_1 \times \mathfrak{j}_2 \neq 0$ *vorausgesetzt.*

Dyaden, die die zwischen den einander zugeordneten Berührebenen ε und ε' bestehende Affinität vermitteln, können wir nun auf verschiedene Arten herstellen.

Eine *besonders einfache Dyade* solcher Art erhalten wir dadurch, daß wir in ε ein Paar senkrechter Einheitsvektoren wählen und diese als Rechtsfaktoren zweier dyadischer Produkte annehmen, als deren Linksfaktoren die ihnen je durch die Affinität $\varepsilon \longrightarrow \varepsilon'$ zugewiesenen Vektoren in ε' zu nehmen sind, und daß wir dann die Summe dieser Produkte bilden. Entscheiden wir uns für die Einheitsvektoren $\mathfrak{f}_1$ und $\mathfrak{f}_2$ der *Hauptrißrichtungen* in ε als Rechtsfaktoren und die ihnen entsprechenden Vektoren $\mathfrak{f}_1'$ und $\mathfrak{f}_2'$ in ε' als Linksfaktoren, so wird diese Dyade

$$\mathsf{A} = \mathfrak{f}_1' \cdot \mathfrak{f}_1 + \mathfrak{f}_2' \cdot \mathfrak{f}_2 . \tag{4}$$

Die Beibehaltung der bisherigen Bezeichnung rechtfertigt sich damit, daß diese Dyade im Falle paralleler Ebenen ε und ε' unmittelbar in die im Abschnitt 1 betrachtete Dyade A übergeht.[9] Als Summe von nur zwei dyadischen Produkten ist die neue Dyade A ausgeartet; dies ist auch daran zu erkennen, daß sich

$$\mathsf{A}\mathfrak{c} = 0$$

ergibt. Da nun in der Tat $\mathsf{A}\mathfrak{f}_1 = \mathfrak{f}_1'$ und $\mathsf{A}\mathfrak{f}_2 = \mathfrak{f}_2'$ ist, wird ganz allgemein

$$\mathsf{A}\,d\mathfrak{x} = d\mathfrak{y};$$

denn es kann ja mit einem geeigneten Winkel χ stets $d\mathfrak{x}/ds = \mathfrak{f}_1 \cos\chi + \mathfrak{f}_2 \sin\chi$ gesetzt werden, und es wird dann der entsprechende Vektor $d\mathfrak{y}/ds = \mathfrak{f}_1' \cos\chi + \mathfrak{f}_2' \sin\chi$.

---

[9] In diesem Sinn wurde die Dyade A schon in der in [4] genannten Arbeit erwähnt.

Wie wir wissen, ist aber[10]

$$\mathfrak{f}_1' = n_1 \mathfrak{f}_1 + q_1 \mathfrak{f}_2 + \gamma_1 \mathfrak{c}, \quad \mathfrak{f}_2' = -q_2 \mathfrak{f}_1 + n_2 \mathfrak{f}_2 + \gamma_2 \mathfrak{c}, \tag{5}$$

wo n_1 und n_2 die *Hauptrißmaßstäbe*, q_1 und q_2 die *Querrißmaßstäbe* und γ_1 und γ_2 die *Normalrißmaßstäbe*, d. h., da $\mathfrak{f}_1$ und $\mathfrak{f}_2$ Einheitsvektoren sind, die Größen der Normalkomponenten von $\mathfrak{f}_1'$ und $\mathfrak{f}_2'$ bezüglich der Fläche $\mathfrak{x}$ bedeuten, und es gilt[11] $q_1 = q_2 = -\frac{J}{2}$.

Hiernach wird

$$\mathsf{A} = n_1 \mathfrak{f}_1 \cdot \mathfrak{f}_1 + n_2 \mathfrak{f}_2 \cdot \mathfrak{f}_2 - q_2 \mathfrak{f}_1 \cdot \mathfrak{f}_2 + q_1 \mathfrak{f}_2 \cdot \mathfrak{f}_1 + \mathfrak{c} \cdot (\gamma_1 \mathfrak{f}_1 + \gamma_2 \mathfrak{f}_2). \tag{4'}$$

Nun ergibt sich aus (1a), wenn man $\mathfrak{x}_u = \mathfrak{f}_1$, $\mathfrak{x}_v = \mathfrak{f}_2$, $\mathfrak{y}_u = \mathfrak{f}_1'$, $\mathfrak{y}_v = \mathfrak{f}_2'$ setzt, wegen[7] $n_1 + n_2 = 2H$

$$\mathfrak{j} = 2H\mathfrak{c} - \gamma_1 \mathfrak{f}_1 - \gamma_2 \mathfrak{f}_2, \tag{6}$$

ferner, weil $\mathfrak{j}_1 = \mathfrak{f}_1 \times \mathfrak{f}_2$ der Einheitsvektor $\mathfrak{c}$ ist, $\mathfrak{J} = \mathfrak{j} : \mathfrak{c}\mathfrak{j}_1 = \mathfrak{j}$; wir können daher $\gamma_1 \mathfrak{f}_1 + \gamma_2 \mathfrak{f}_2$ durch $2H\mathfrak{c} - \mathfrak{J}$ ersetzen und finden

$$\mathsf{A} = n_1 \mathfrak{f}_1 \cdot \mathfrak{f}_1 + n_2 \mathfrak{f}_2 \cdot \mathfrak{f}_2 + \frac{J}{2} (\mathfrak{f}_1 \cdot \mathfrak{f}_2 - \mathfrak{f}_2 \cdot \mathfrak{f}_1) + \mathfrak{c} \cdot (2H\mathfrak{c} - \mathfrak{J}),$$

ferner

$$\bar{\mathsf{A}} = n_1 \mathfrak{f}_1 \cdot \mathfrak{f}_1 + n_2 \mathfrak{f}_2 \cdot \mathfrak{f}_2 - \frac{J}{2} (\mathfrak{f}_1 \cdot \mathfrak{f}_2 - \mathfrak{f}_2 \cdot \mathfrak{f}_1) + (2H\mathfrak{c} - \mathfrak{J}) \cdot \mathfrak{c},$$

folglich durch einfaches Ausrechnen

$$\bar{\mathsf{A}}\mathsf{A} = \left(n_1^2 + \frac{J^2}{4}\right) \mathfrak{f}_1 \cdot \mathfrak{f}_1 + \left(n_2^2 + \frac{J^2}{4}\right) \mathfrak{f}_2 \cdot \mathfrak{f}_2 + \\ + \frac{J}{2} (n_1 - n_2) (\mathfrak{f}_1 \cdot \mathfrak{f}_2 + \mathfrak{f}_2 \cdot \mathfrak{f}_1) + (2H\mathfrak{c} - \mathfrak{J}) \cdot (2H\mathfrak{c} - \mathfrak{J}).$$

Schließlich erhalten wir wegen $\mathfrak{c} \times \mathfrak{f}_1 = \mathfrak{f}_2$ und $\mathfrak{c} \times \mathfrak{f}_2 = -\mathfrak{f}_1$

$$\mathsf{A}^* = \frac{J}{2} (\mathfrak{f}_1 \cdot \mathfrak{f}_1 + \mathfrak{f}_2 \cdot \mathfrak{f}_2) - n_2 \mathfrak{f}_1 \cdot \mathfrak{f}_2 + n_1 \mathfrak{f}_2 \cdot \mathfrak{f}_1.$$

---

[10] Siehe die in [2] angeführte Note S. 155 oben und die ältere Arbeit, auf die dort auf S. 150 in Fußnote 3 hingewiesen wurde.

[11] Die Übereinstimmung der Querrißmaßstäbe für zwei zueinander senkrechte Tangentenrichtungen der Fläche $\mathfrak{x}$ kennzeichnet diese Richtungen als Hauptrißrichtungen in $\mathfrak{x}$ für die Abbildung $\mathfrak{x} \to \mathfrak{y}$; vgl. Sitz.-Ber. d. Bayer. Ak. d. Wiss., Math.-nat. Kl., 1947 S. 22.

Multiplizieren wir A mit $-2H = -n_1 - n_2$, A^* mit $-J$, addieren zu den so gewonnenen Produkten die Dyaden $\bar{\mathsf{A}}\mathsf{A}$ und $K \cdot \mathsf{I}$, wobei wir hier den Idemfaktor in der Form

$$\mathsf{I} = \mathfrak{f}_1 \cdot \mathfrak{f}_1 + \mathfrak{f}_2 \cdot \mathfrak{f}_2 + \mathfrak{c} \cdot \mathfrak{c}$$

– naturgemäß anders als in der Beziehung (2) – annehmen, und berücksichtigen wir,[7] daß $K = n_1 n_2 + q_1 q_2 = n_1 n_2 + \frac{J^2}{4}$ und $\mathfrak{c} = \mathfrak{j}_1 : \mathfrak{c}\mathfrak{j}_1 = \mathfrak{J}_1$ ist, so finden wir

$$\bar{\mathsf{A}}\mathsf{A} - 2H . \mathsf{A} - J . \mathsf{A}^* + K . \mathsf{I} = \mathfrak{J} . \mathfrak{J} - 2H \mathfrak{J} . \mathfrak{J}_1 + K \mathfrak{J}_1 . \mathfrak{J}_1 . \qquad (7)$$

In dieser Gleichung können wir tatsächlich eine Verallgemeinerung der obenerwähnten, früher bewiesenen Beziehung[12] erblikken; denn wenn wir ihre beiden Seiten von links und von rechts je mit $d\mathfrak{x}$ skalar multiplizieren, nimmt die rechte Seite wegen[13] $\mathfrak{J}_1 d\mathfrak{x} = 0$ und $\mathfrak{J} d\mathfrak{x} = -\mathfrak{J}_1 d\mathfrak{y} = -\gamma ds$ mit $ds^2 = d\mathfrak{x}^2$ den Wert

$$\gamma^2 d\mathfrak{x}^2$$

an, während die linke Seite

$$\begin{aligned} d\mathfrak{y}^2 - 2H \cdot d\mathfrak{x}\, d\mathfrak{y} + K \cdot d\mathfrak{x}^2 - J \cdot \mathfrak{c}\, d\mathfrak{x}\, d\mathfrak{y} &= \\ = d\mathfrak{y}^2 - \mathfrak{J}_1 \mathfrak{J} \cdot d\mathfrak{x}\, d\mathfrak{y} + \mathfrak{J}_1 \mathfrak{J}_2 \cdot d\mathfrak{x}^2 - J \cdot \mathfrak{J}_1\, d\mathfrak{x}\, d\mathfrak{y} \end{aligned}$$

wird.

Fragen wir uns noch, was aus (7) wird, wenn wir nun doch, entgegen unserer Voraussetzung, $\mathfrak{j}_1 \times \mathfrak{j}_2 = 0$ annehmen! Da nach (6) dann $\mathfrak{J} = 2H\mathfrak{c}$, ferner $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$ wird, so erhalten wir auf der rechten Seite von (7) in diesem Fall $K\mathfrak{c} \cdot \mathfrak{c}$. Daß sich nicht wie am Schluß von Abschnitt 1 Null ergibt, liegt daran, daß wir hier den Idemfaktor I nicht gleich $\mathfrak{f}_1 \cdot \mathfrak{f}_1 + \mathfrak{f}_2 \cdot \mathfrak{f}_2$ annehmen konnten, wie wir es dort entsprechend der Tatsache, daß die Wirkung des Affinors A auf eine Ebene beschränkt war, zu tun genötigt waren, so daß dort auf der linken Seite gerade das Glied $K\mathfrak{c} \cdot \mathfrak{c}$ fehlen mußte. Es ist also in der Ordnung, daß dieses Glied jetzt auf der rechten Seite auftritt.

---

[12] Vgl. die in [2] genannte Note S. 153 (14) in Verbindung mit der Beziehung $(\mathfrak{c} \times d\mathfrak{y})^2 = d\mathfrak{y}^2 - (\mathfrak{c}\, d\mathfrak{y})^2 = d\mathfrak{y}^2 - \gamma^2 ds^2$.

[13] Vgl. die in [2] angeführte Note S. 151 und die dort in Fußnote [5] zitierte ältere Arbeit.

Als befriedigender wird man es freilich empfinden – wir kehren jetzt wieder zu der Annahme $\mathfrak{j}_1 \times \mathfrak{j}_2 \neq 0$ zurück –, wenn es gelingt, die Affinität $\varepsilon \to \varepsilon'$ als Bestandteil einer nicht ausgearteten räumlichen Affinität durch eine *Dyade vom Rang 3* darzustellen. Das ist aber leicht zu erreichen: Die Dyade

$$\Phi = \mathsf{A} + \mathfrak{J}_2 \cdot \mathfrak{J}_1, \tag{8}$$

die auf die Ebene ε wegen $\mathfrak{J}_1 d\mathfrak{x} = 0$ wie A allein wirkt und dem Normalvektor $\mathfrak{J}_1 = \mathfrak{c}$ von $\mathfrak{x}$ den Normalvektor $\mathfrak{J}_2$ von $\mathfrak{y}$ zuordnet, kann, sofern die Abbildung $\mathfrak{x} \to \mathfrak{y}$ regulär ist, niemals singulär werden, weils stets $\mathfrak{J}_1 \neq 0$ aus der Ebene ε und $\mathfrak{J}_2 \neq 0$ aus der Ebene ε' herausweist. Es bietet keine Schwierigkeit, durch Einsetzen von $\mathsf{A} = \Phi - \mathfrak{J}_2 \cdot \mathfrak{J}_1$ in (7) die Gleichung abzuleiten, der Φ genügt und aus der durch Multiplikation mit $d\mathfrak{x}$ von beiden Seiten ebenfalls die oben besprochene Beziehung zwischen den Grundformen des Flächenpaares entsteht.

Durchführen wollen wir aber diesen Gedanken hier mit dem Affinor B, der ε in ε' und den Vektor $\mathfrak{c}$ in den Vektor $-2H\mathfrak{c}$ transformiert. Freilich müssen wir bei ihm die Möglichkeit in Kauf nehmen, daß er entartet; er tut das entweder, wenn H verschwindet, oder wenn die Normale $\mathfrak{c} = \mathfrak{J}_1$ von ε in ε' fällt, d. h. wenn $\mathfrak{J}_1 \mathfrak{J}_2 = K = 0$ ist, womit im Einklang steht, daß seine skalare Invariante – d. i. das äußere Produkt der drei Linksfaktoren, wenn die Rechtsfaktoren wie hier ein rechtshändiges orthogonales Tripel von Einheitsvektoren bilden – den Wert $-2HK$ besitzt, wie man mit Hilfe von (5) leicht verifizieren kann. B drückt sich durch A folgendermaßen aus:

$$\mathsf{B} = \mathsf{A} - 2H\mathfrak{c} \cdot \mathfrak{c}. \tag{9}$$

Da hiernach

$$\mathsf{A} = \mathsf{B} + 2H\mathfrak{c} \cdot \mathfrak{c}$$

und

$$\overline{\mathsf{A}} = \overline{\mathsf{B}} + 2H\mathfrak{c} \cdot \mathfrak{c}$$

ist, wird

$$\overline{\mathsf{A}}\,\mathsf{A} = \overline{\mathsf{B}}\,\mathsf{B} + 2H\mathfrak{c} \cdot \mathfrak{c}\mathsf{B} + 2H\overline{\mathsf{B}}\mathfrak{c} \cdot \mathfrak{c} + 4H^2\,\mathfrak{c} \cdot \mathfrak{c};$$

es ist aber gemäß (6)

$$\overline{\mathsf{B}}\mathfrak{c} = \mathfrak{c}\mathsf{B} = \mathfrak{c}\mathsf{A} - 2H\mathfrak{c} = \gamma_1\mathfrak{f}_1 + \gamma_2\mathfrak{f}_2 - 2H\mathfrak{c} = -\mathfrak{J},$$

folglich

$$\bar{\mathsf{A}}\mathsf{A} = \bar{\mathsf{B}}\mathsf{B} - 2H\mathfrak{c}\cdot\mathfrak{J} - 2H\mathfrak{J}\cdot\mathfrak{c} + 4H^2\mathfrak{c}\cdot\mathfrak{c}.$$

Weil ferner

$$\mathsf{A}^* = \mathsf{B}^*$$

ist, finden wir:

$$\bar{\mathsf{A}}\mathsf{A} - 2H\mathsf{A} - J\mathsf{A}^* =$$

$$\bar{\mathsf{B}}\mathsf{B} - 2H\mathfrak{c}\cdot\mathfrak{J} - 2H\mathfrak{J}\cdot\mathfrak{c} + 4H^2\mathfrak{c}\cdot\mathfrak{c} - 2H\mathsf{B} - 4H^2\mathfrak{c}\cdot\mathfrak{c} - J\mathsf{B}^*;$$

mithin wird vermöge (7)

$$\bar{\mathsf{B}}\mathsf{B} - 2H\mathsf{B} - J\mathsf{B}^* + K\mathsf{I} = \mathfrak{J}\cdot\mathfrak{J} + 2H\mathfrak{J}_1\cdot\mathfrak{J} + K\mathfrak{J}_1\cdot\mathfrak{J}_1. \quad (10)$$

Skalare Multiplikation mit $d\mathfrak{x}$ von beiden Seiten führt auch hier zu der früher schon aufgestellten Beziehung, von der oben die Rede war.[12]

3. Es liegt nahe, nun auch noch nach der Cayley-Hamiltonschen Gleichung für die verschiedenen besprochenen Affinitäten zu fragen.[14] Da man zu ihrer Aufstellung am besten von der charakteristischen Gleichung der betrachteten Affinität ausgeht und man diese am leichtesten findet, wenn man ihre Fixrichtungen kennt, so tut man gut, zunächst wieder den Sonderfall zu behandeln, in dem die Ebenen ε und ε' parallel sind, außerdem aber sich den Affinor B vorzunehmen, der als aus der Ebene $\varepsilon \equiv \varepsilon'$ herausweisende Fixrichtung die von vornherein bekannte Richtung $\mathfrak{c}$ besitzt. Setzen wir weiter für den Augenblick voraus, daß in ε zwei verschiedene reelle Fixrichtungen existieren, und bezeichnen wir diese mit $\mathfrak{x}_u$ und $\mathfrak{x}_v$ so wird die charakteristische Gleichung bekanntlich:

$$(\mathfrak{y}_u - \lambda\mathfrak{x}_u)\,(\mathfrak{y}_v - \lambda\mathfrak{x}_v)\,(-2H\mathfrak{c} - \lambda\mathfrak{c}) = 0.$$

Die Berechnung dieses dreifachen Produktes wird am einfachsten vor sich gehen, wenn wir zunächst das Vektorprodukt

$$(\mathfrak{y}_u - \lambda\mathfrak{x}_u) \times (\mathfrak{y}_v - \lambda\mathfrak{x}_v)$$

---

[14] Vgl. hierzu den Schluß der in [3] genannten Note.

bestimmen; es wird gleich dem Vektor[3]

$$\lambda^2 \mathfrak{x}_u \times \mathfrak{x}_v - \lambda (\mathfrak{x}_u \times \mathfrak{y}_v - \mathfrak{x}_v \times \mathfrak{y}_u) + \mathfrak{y}_u \times \mathfrak{y}_v = \lambda^2 \mathfrak{j}_1 - \lambda \mathfrak{j} + \mathfrak{j}_2.$$

Multiplizieren wir ihn skalar mit $\mathfrak{c}$ oder $\mathfrak{j}_1$, so werden die Koeffizienten $\mathfrak{j}_1^2, -\mathfrak{j}_1\mathfrak{j}, \mathfrak{j}_1\mathfrak{j}_2$, also proportional den Zahlen[7] $1, -2H, K$. Die *charakteristische Gleichung* wird somit

$$(\lambda^2 - 2H\lambda + K)(\lambda + 2H) = 0. \tag{11}$$

Dies gibt uns Anlaß, zunächst die Dyaden $\mathsf{B} + 2H\mathsf{I}$ und $\mathsf{B}^2 - 2H\mathsf{B} + K\mathsf{I}$ zu ermitteln, und zwar wollen wir das ohne die soeben gemachte Einschränkung tun, vielmehr unter der allgemeinen Voraussetzung, daß $\mathfrak{j}_1 \times \mathfrak{j}_2 \neq 0$ sein darf, so daß auch die Annahme zweier verschiedener Fixrichtungen in $\mathfrak{e}$ hinfällig wird:

Nach (4) und (9) ist

$$\mathsf{B} = \mathfrak{f}_1' \cdot \mathfrak{f}_1 + \mathfrak{f}_2' \cdot \mathfrak{f}_2 - 2H\mathfrak{c} \cdot \mathfrak{c},$$

folglich

$$\mathsf{B} + 2H\mathsf{I} = (\mathfrak{f}_1' + 2H\mathfrak{f}_1) \cdot \mathfrak{f}_1 + (\mathfrak{f}_2' + 2H\mathfrak{f}_2) \cdot \mathfrak{f}_2;$$

wir sehen, daß die Dyade $\mathsf{B} + 2H\mathsf{I}$ ausgeartet ist, wie es sein muß, und als Rechtsfaktoren nur die Vektoren $\mathfrak{f}_1$ und $\mathfrak{f}_2$ enthält.

Ferner erhalten wir, wenn wir berücksichtigen, daß nach (5)

$$\mathfrak{f}_1'\mathfrak{f}_1 = n_1, \quad \mathfrak{f}_2'\mathfrak{f}_2 = n_2, \quad \mathfrak{f}_1'\mathfrak{f}_2 = q_1, \quad \mathfrak{f}_2'\mathfrak{f}_1 = -q_2,$$
$$\mathfrak{f}_1'\mathfrak{c} = \gamma_1, \quad \mathfrak{f}_2'\mathfrak{c} = \gamma_2$$

ist,

$$\mathsf{B}^2 = (n_1\mathfrak{f}_1' + q_1\mathfrak{f}_2' - 2H\gamma_1\mathfrak{c}) \cdot \mathfrak{f}_1 + (-q_2\mathfrak{f}_1' + n_2\mathfrak{f}_2' - 2H\gamma_2\mathfrak{c}) \cdot \mathfrak{f}_2 + 4H^2\mathfrak{c} \cdot \mathfrak{c},$$

folglich, da ja $2H = n_1 + n_2$ ist,

$$\mathsf{B}^2 - 2H\mathsf{B} = (-n_2\mathfrak{f}_1' + q_1\mathfrak{f}_2' - 2H\gamma_1\mathfrak{c}) \cdot \mathfrak{f}_1 + (-q_2\mathfrak{f}_1' - n_1\mathfrak{f}_2' - 2H\gamma_2\mathfrak{c}) \cdot \mathfrak{f}_2 + 8H^2\mathfrak{c} \cdot \mathfrak{c}:$$

nun ergibt sich, ebenfalls aus (5),

$$-n_2\mathfrak{f}_1' + q_1\mathfrak{f}_2' = -(n_1n_2 + q_1q_2)\mathfrak{f}_1 - (n_2\gamma_1 - q_1\gamma_2)\mathfrak{c},$$
$$-q_2\mathfrak{f}_1' - n_1\mathfrak{f}_2' = -(n_1n_2 + q_1q_2)\mathfrak{f}_2 - (q_2\gamma_1 + n_1\gamma_2)\mathfrak{c}.$$

Demnach kommen, da $K = n_1 n_2 + q_1 q_2$ ist, in der Dyade

$$\mathsf{B}^2 - 2H\mathsf{B} + K\mathsf{I}$$

$\mathfrak{f}_1$ und $\mathfrak{f}_2$, wie zu erwarten, überhaupt nicht mehr als Linksfaktoren vor, sondern nur noch $\mathfrak{c}$.

Daher wird

$$(\mathsf{B} + 2H\mathsf{I})\ (\mathsf{B}^2 - 2H\mathsf{B} + K\mathsf{I}) = 0$$

oder

$$\mathsf{B}^3 + (K - 4H^2)\ \mathsf{B} + 2KH\,\mathsf{I} = 0. \tag{12}$$

Dies ist die *Cayley-Hamiltonsche Gleichung* der durch die Dyade B dargestellten Affinität, die wir uns aufzustellen vornahmen.

Aus ihr können wir auf die oben dargelegte Weise die entsprechende Gleichung für eine beliebige andere Affinität ableiten, die auf die Berührebene $\mathfrak{e}$ dieselbe Wirkung ausübt wie B, dem Normalvektor $\mathfrak{c}$ aber einen beliebig vorschreibbaren Vektor zuordnet.

Zum Schluß sei der Vollständigkeit zuliebe noch bemerkt: Die Beziehung (12) läßt sich, allerdings auf Kosten größerer Rechenarbeit, natürlich auch dadurch gewinnen, daß die beiden über der Zeile (12) in Klammern stehenden Ausdrücke in umgekehrter Reihenfolge skalar multipliziert werden; es sei deshalb das dyadische Produkt, in das die dreigliedrige Dyadensumme nach den oben gegebenen Hinweisen umgeformt werden kann, explizit mitgeteilt:

$$\mathsf{B}^2 - 2H\mathsf{B} + K\mathsf{I} =$$
$$= \mathfrak{c}\cdot\big((-\gamma_1(2H + n_2) + \gamma_2 q_1)\,\mathfrak{f}_1 - (\gamma_2(2H + n_1) + \gamma_1 q_2)\,\mathfrak{f}_2 +$$
$$+ (8H^2 + K)\,\mathfrak{c}\big).$$

Die Richtigkeit der Gleichung (12) kann man durch eine freilich etwas mühsame Rechnung auch unmittelbar verifizieren; zu ihrer Vorbereitung sei, unter Berücksichtigung von (6), B noch auf die folgende Form gebracht:

$$\mathsf{B} = n_1\mathfrak{f}_1\cdot\mathfrak{f}_1 + n_2\mathfrak{f}_2\cdot\mathfrak{f}_2 + \frac{J}{2}(\mathfrak{f}_1\cdot\mathfrak{f}_2 - \mathfrak{f}_2\cdot\mathfrak{f}_1) - \mathfrak{c}\cdot\mathfrak{J}.$$

Für den Fall, daß B nicht ausgeartet ist, besteht die Möglichkeit, sich die Arbeit dadurch zu erleichtern, daß man die mit B^{-1} multiplizierte Beziehung (12) auf ihre Gültigkeit prüft. Es ist aber, wie leicht nachzurechnen,

$$2HK\,\mathsf{B}^{-1} = 2H\left(n_2\mathfrak{f}_1\cdot\mathfrak{f}_1 + n_1\mathfrak{f}_2\cdot\mathfrak{f}_2 - \frac{J}{2}(\mathfrak{f}_1\cdot\mathfrak{f}_2 - \mathfrak{f}_2\cdot\mathfrak{f}_1)\right) - \mathfrak{c}\cdot\mathfrak{J}_2;$$

dabei ist zu bedenken, daß nach (1a) und (5)

$$\mathfrak{J}_2 = K\mathfrak{c} - \left(\gamma_1 n_2 + \gamma_2\frac{J}{2}\right)\mathfrak{f}_1 - \left(-\gamma_1\frac{J}{2} + \gamma_2 n_1\right)\mathfrak{f}_2$$

ist, wie man auf einem Weg, der dem zu (6) führenden ähnlich ist, finden kann.