Sitzungsberichte

der

mathematisch-naturwissenschaftlichen

Klasse

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften

zu München

Jahrgang 1954

München 1955

Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften

In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung

Neue Periodizitätsbeweise für die regelmäßigen und halbregelmäßigen Kettenbrüche quadratischer Irrationalzahlen

Von Oskar Perron in München

Vorgelegt am 5. November 1954

§ 1. Regelmäßige Kettenbrüche

Für den erstmals von *Lagrange* im Jahr 1770 bewiesenen Satz, daß der regelmäßige Kettenbruch für eine quadratische Irrationalzahl ξ_0 periodisch wird, gibt es heute zahlreiche Beweise. Im allgemeinen stützt man sich darauf, daß die Näherungsbrüche gegen die Zahl ξ_0 konvergieren, manchmal auch auf die Güte der Approximation (Näherungsgesetz), und gelangt dann nach einiger Rechnung zur Erkenntnis, daß es nur endlich viele verschiedene vollständige Quotienten ξ_ν geben kann. Daneben gibt es aber auch den Beweis von *Ballieu* aus dem Jahr 1942, der sich, ohne daß man etwas über die Konvergenz oder gar das Näherungsgesetz zu wissen braucht, nur auf den formalen Algorithmus stützt und besonders einfach ist. Diesen Beweis habe ich neben einigen älteren in meinem kürzlich erschienenen Buch dargestellt.[1] Inzwischen sind mir aber noch zwei von Herrn *Gonçalves* gefundene Beweise bekanntgeworden, die den gleichen Vorzug wie der *Ballieu*sche haben und in der Durchführung noch einfacher sind.

Wenn man unter Verwendung meiner Bezeichnung in Kebr § 20 die zu entwickelnde Zahl ξ_0 in die Form setzt:

$$(1) \qquad \xi_0 = \frac{\sqrt{D} + P_0}{Q_0}, \quad \textit{wo } D, P_0, Q_0, \ \frac{D - P_0^2}{Q_0} \ \textit{ganze Zahlen},$$

[1] *Oskar Perron,* Die Lehre von den Kettenbrüchen, 3. Auflage, Band 1, Stuttgart 1954. Wird im Text unter „Kebr" zitiert.

so haben die vollständigen Quotienten ξ_ν das Aussehen

$$\xi_\nu = \frac{\sqrt{D} + P_\nu}{Q_\nu}, \tag{2}$$

wo auch P_ν, Q_ν und $\frac{D - P_\nu^2}{Q_\nu}$ ganze Zahlen sind. Es ist dann, wenn die größte in ξ_ν enthaltene ganze Zahl mit b_ν bezeichnet wird,

$$\xi_\nu = b_\nu + \frac{1}{\xi_{\nu+1}}, \quad \text{also} \quad \frac{\sqrt{D} + P_\nu}{Q_\nu} = b_\nu + \frac{Q_{\nu+1}}{\sqrt{D} + P_{\nu+1}}. \tag{3}$$

Aus der letzten Formel erhält man durch Multiplikation mit den Nennern wegen der Irrationalität von $\sqrt{D}$ sofort die bekannten Beziehungen (Kebr Seite 69):

$$P_\nu + P_{\nu+1} = b_\nu Q_\nu, \tag{4}$$

$$D - P_{\nu+1}^2 = Q_\nu Q_{\nu+1}. \tag{5}$$

Der erste Beweis[1] von *Gonçalves* läuft nun darauf hinaus, daß mit gewissen Fallunterscheidungen je nach den Vorzeichen von Q_ν und $Q_{\nu+1}$ gezeigt wird, es ist

$$|Q_{\nu+1}| < \operatorname{Max}\,(2\sqrt{D}, |Q_{\nu-1}|), \tag{6}$$

während der zweite Beweis mit weniger Fallunterscheidungen auskommt und auf den Nachweis der Ungleichung

$$|P_{\nu+1}| < \operatorname{Max}\,(\sqrt{D}, |P_\nu|) \tag{7}$$

hinausläuft.[2] Wenn (6) bewiesen ist, sind die Q_ν beschränkt, daher nach (5) auch die P_ν, so daß für die ξ_ν nur endlich viele Möglichkeiten vorliegen, womit man die Periodizität hat. Wenn (7) bewiesen ist, sind die P_ν beschränkt, also nach (2) oder (4) oder (5) auch die Q_ν, womit man wieder die Periodizität hat.

---

[1] *J. Vicente Gonçalves* an zwei Stellen: 1. Curso de Álgebra superior, I. parte, 3. edição, Lisboa 1953, S. 125. – 2. Sur les fractions continues réelles. Revista da Faculdade de ciências de Lisboa, 2. série – A – vol. 2 (1953) S. 297–335, speziell S. 304.

[2] An der zweiten der zitierten Stellen, S. 304 Fußnote. Fast den gleichen Beweis hat übrigens unabhängig auch Herr *Steuerwald* gefunden, der ihn zudem mit einem etwas veränderten Beweis von (6) verquicken konnte; er hat das aber nicht publiziert.

Nachdem ich nun aus den *Gonçalves*schen Beweisen gelernt habe, daß es nur auf den Beweis einer der beiden meiner Aufmerksamkeit bisher entgangenen Ungleichungen (6) oder (7) ankommt, habe ich versucht, deren Beweis ohne Fallunterscheidungen noch etwas durchsichtiger zu gestalten:

Beweis von (7). Aus (4) und (2) folgt

$$P_{\nu+1} = b_\nu Q_\nu - P_\nu = b_\nu \cdot \frac{\sqrt{D} + P_\nu}{\xi_\nu} - P_\nu = \frac{\sqrt{D}\, b_\nu + (b_\nu - \xi_\nu) P_\nu}{\xi_\nu},$$

also, weil $\xi_\nu > b_\nu > 0$ ist,

$$|P_{\nu+1}| \leqq \mathrm{Max}\,(\sqrt{D}, |P_\nu|) \cdot \frac{b_\nu + (\xi_\nu - b_\nu)}{\xi_\nu} = \mathrm{Max}\,(\sqrt{D}, |P_\nu|) \cdot 1,$$

wobei, da wegen der Irrationalität von $\sqrt{D}$ nicht $\sqrt{D} = |P_\nu|$ sein kann, das Zeichen $\leqq$ auch durch $<$ ersetzt werden darf.

Beweis von (6). Nach (4) und (2) ist

$$b_\nu Q_\nu = P_\nu + P_{\nu+1} = (\xi_\nu Q_\nu - \sqrt{D}) + (\xi_{\nu+1} Q_{\nu+1} - \sqrt{D}),$$

also durch Auflösen nach $Q_{\nu+1}$ und mit Benutzung der ersten Formel (3)

$$Q_{\nu+1} = \frac{2\sqrt{D} - (\xi_\nu - b_\nu) Q_\nu}{\xi_{\nu+1}} = \frac{2\sqrt{D}}{\xi_{\nu+1}} - \frac{Q_\nu}{\xi_{\nu+1}^2}.$$

Entsprechend ist auch

$$Q_\nu = \frac{2\sqrt{D}}{\xi_\nu} - \frac{Q_{\nu-1}}{\xi_\nu^2},$$

und wenn man das in die vorige Formel einsetzt,

$$Q_{\nu+1} = \frac{2\sqrt{D}}{\xi_{\nu+1}} - \frac{2\sqrt{D}}{\xi_\nu \xi_{\nu+1}^2} + \frac{Q_{\nu-1}}{\xi_\nu^2 \xi_{\nu+1}^2} = \frac{2\sqrt{D} \cdot \xi_\nu (\xi_\nu \xi_{\nu+1} - 1) + Q_{\nu-1}}{\xi_\nu^2 \xi_{\nu+1}^2}.$$

Daher wegen $\xi_\nu > 1$, $\xi_{\nu+1} > 1$:

$$\begin{aligned} |Q_{\nu+1}| &\leqq \mathrm{Max}\,(2\sqrt{D}, |Q_{\nu-1}|) \cdot \frac{\xi_\nu (\xi_\nu \xi_{\nu+1} - 1) + 1}{\xi_\nu^2 \xi_{\nu+1}^2} \\ &< \mathrm{Max}\,(2\sqrt{D}, |Q_{\nu-1}|) \cdot \frac{\xi_\nu (\xi_\nu \xi_{\nu+1} - 1) + \xi_\nu}{\xi_\nu^2 \xi_{\nu+1}} \\ &= \mathrm{Max}\,(2\sqrt{D}, |Q_{\nu-1}|) \cdot 1. \end{aligned}$$

§ 2. Halbregelmäßige Kettenbrüche

Ein halbregelmäßiger Kettenbruch für die Zahl ξ_0 entsteht durch den Algorithmus

$$\xi_0 = b_0 + \frac{a_1}{\xi_1}, \quad \xi_1 = b_1 + \frac{a_2}{\xi_2}, \quad \xi_2 = b_2 + \frac{a_3}{\xi_3}, \quad \ldots,$$

wo jedes a_ν nach Willkür gleich $+1$ oder -1 und demgemäß b_ν die nächstkleinere oder nächstgrößere ganze Zahl von ξ_ν ist, für $\nu \geqq 1$ also stets $\xi_\nu > 1$, $b_\nu \geqq 1$. Nimmt man eine quadratische Irrationszahl ξ_0 wieder in der Gestalt (1) an, so haben die ξ_ν auch diesmal die Gestalt (2) mit ganzen P_ν, Q_ν. An Stelle von (3) kommt aber jetzt

$$\text{(3a)} \qquad \xi_\nu = b_\nu + \frac{a_{\nu+1}}{\xi_{\nu+1}}, \quad \text{also} \quad \frac{\sqrt{D} + P_\nu}{Q_\nu} = b_\nu + \frac{a_{\nu+1}\, Q_{\nu+1}}{\sqrt{D} + P_{\nu+1}},$$

und hieraus ergeben sich an Stelle von (4) und (5) die Formeln

$$\text{(4a)} \qquad P_\nu + P_{\nu+1} = b_\nu Q_\nu,$$

$$\text{(5a)} \qquad D - P_{\nu+1}^2 = a_{\nu+1}\, Q_\nu Q_{\nu+1}.$$

Die Periodizität beweist man meistens[1] dadurch, daß man sie für die regelmäßigen Kettenbrüche als bereits bekannt annimmt und sich dann darauf stützt, daß die ξ_ν der halbregelmäßigen mit den vollständigen Quotienten der regelmäßigen in gewisser Weise zusammenhängen (Kebr Seite 152, Satz 5.9; in früheren Auflagen ist die Durchführung etwas anders, weil der Satz 5.9 noch nicht bekannt war). Nun liegt es nahe, ohne diesen Umweg ein Analogon zu der *Gonçalves*schen Formel (7) zu suchen und daraus die Periodizität zu erschließen. Es soll das jetzt durchgeführt werden, wobei wieder keine Kenntnis der Konvergenz nötig ist, und zwar werden wir zeigen:

---

[1] Man sehe aber unten § 3.

I. *Wenn unendlich oft* $a_\nu = +1$ *ist, also etwa*

$$a_n = +1,\ a_{n+1} = -1,\ a_{n+2} = -1, \ldots, a_{n+k-1} = -1,\ a_{n+k} = +1,$$

wobei auch sinngemäß $k = 1$ *sein kann und natürlich* $n \geqq 1$ *ist, so ist*

$$|P_{n+k}| < \operatorname{Max}(\sqrt{D},\ |P_n|).$$

II. *Wenn von einem gewissen* ν *an stets* $a_\nu = -1$ *ist, also nach der Definition in Kebr Seite 139 stets* $b_\nu \geqq 2$ *und unendlich oft sogar* $b_\nu \geqq 3$, *etwa*

$$b_n \geqq 3,\ b_{n+1} = 2,\ b_{n+2} = 2, \ldots, b_{n+k-1} = 2,\ b_{n+k} \geqq 3,$$

wobei auch sinngemäß $k = 1$ *sein kann, so ist*

$$|P_{n+k}| < \operatorname{Max}(3\sqrt{D},\ |P_n|).$$

Aus diesen Sätzen folgt dann, daß die unendliche Menge der P_ν wenigstens eine unendliche Teilmenge hat, die beschränkt ist. Nach (2) oder (5a) mit $\nu-1$ an Stelle von ν ist dann auch die Menge der zugehörigen Q_ν beschränkt, so daß unter den ξ_ν unendlich viele einander gleich sind.[1] Hieraus folgt dann ohne weiteres die Periodizität, falls etwa die Teilzähler a_ν periodisch vorgegeben sind oder falls die Restklassen der b_ν modulo 2 periodisch vorgegeben sind oder falls es sich um Kettenbrüche nach nächsten oder entfernteren Ganzen handelt oder auch um singuläre Kettenbrüche.[2]

Wir beweisen jetzt die Behauptung I. Mit der in Kebr überall angewandten Bezeichnung ist

---

[1] Man erkennt hier, daß ein entsprechendes Analogon zur *Gonçalves*schen Formel (6) nichts nützen würde, da die Formeln (2), (4a) und (5a) nicht gestatten, aus der Beschränktheit einer unendlichen Teilmenge der Q_ν auf die Beschränktheit der zugehörigen P_ν zu schließen.

[2] Dagegen versagt diese Schlußweise bei Diagonalkettenbrüchen, weil bei diesen aus der Gleichheit $\xi_n = \xi_{n+k}$ nicht auf die Identität der zugehörigen Kettenbrüche geschlossen werden kann und sich deshalb die Überlegungen von Kebr S. 179–181 wohl nicht umgehen lassen. Der *Minkowski*sche Originalbeweis ist wesentlich komplizierter.

$$\xi_n = b_n - \frac{1|}{|b_{n+1}} - \cdots - \frac{1|}{|b_{n+k-1}} + \frac{1|}{|\xi_{n+k}} = \frac{A_{k-1,n}\xi_{n+k} + A_{k-2,n}}{B_{k-1,n}\xi_{n+k} + B_{k-2,n}}.$$

Hieraus folgt durch Auflösung nach ξ_{n+k}:

$$\xi_{n+k} = \frac{B_{k-2,n}\xi_n - A_{k-2,n}}{-B_{k-1,n}\xi_n + A_{k-1,n}},$$

oder also

$$\frac{\sqrt{D} + P_{n+k}}{Q_{n+k}} = \frac{B_{k-2,n}(\sqrt{D} + P_n) - A_{k-2,n}Q_n}{-B_{k-1,n}(\sqrt{D} + P_n) + A_{k-1,n}Q_n}.$$

Wenn man hier mit den Nennern heraufmultipliziert und dann den Faktor von $\sqrt{D}$ beiderseits gleichsetzt, erhält man

$$-P_{n+k}B_{k-1,n} - B_{k-1,n}P_n + A_{k-1,n}Q_n = Q_{n+k}B_{k-2,n},$$

oder unter Berücksichtigung von (2)

$$-P_{n+k}B_{k-1,n} - P_n B_{k-1,n} + A_{k-1,n} \cdot \frac{\sqrt{D} + P_n}{\xi_n} = \frac{\sqrt{D} + P_{n+k}}{\xi_{n+k}} \cdot B_{k-2,n}.$$

Nach Multiplikation mit $\xi_n \xi_{n+k}$ und Gliederumstellung ergibt sich hieraus:

$$P_{n+k}\xi_n(B_{k-1,n}\xi_{n+k} + B_{k-2,n})$$
$$= \sqrt{D}(A_{k-1,n}\xi_{n+k} - B_{k-2,n}\xi_n) - P_n\xi_{n+k}(B_{k-1,n}\xi_n - A_{k-1,n}).$$

Nun sind die $B_{\nu,n}$ positiv (Kebr Seite 135, Satz 5.1). Wegen $n \geqq 1$ und $A_{\nu,n} = B_{\nu+1,n-1}$ (Kebr Seite 11, Formel (5)) sind dann auch die $A_{\nu,n}$ positiv. Ferner ist

$$B_{k-1,n}\xi_n - A_{k-1,n} = B_{k-1,n} \cdot \frac{A_{k-1,n}\xi_{n+k} + A_{k-2,n}}{B_{k-1,n}\xi_{n+k} + B_{k-2,n}} - A_{k-1,n}$$
$$= \frac{B_{k-1,n}A_{k-2,n} - B_{k-2,n}A_{k-1,n}}{B_{k-1,n}\xi_{n+k} + B_{k-2,n}}$$
$$= \frac{(-1)^{k-1} \cdot (-1)^{k-1}}{B_{k-1,n}\xi_{n+k} + B_{k-2,n}} > 0.$$

Aus der vorigen Formel folgt daher:

$$|P_{n+k}| \cdot \xi_n(B_{k-1,n}\xi_{n+k} + B_{k-2,n})$$
$$\leqq \sqrt{D} \cdot (A_{k-1,n}\xi_{n+k} + B_{k-2,n}\xi_n) + |P_n| \cdot \xi_{n+k}(B_{k-1,n}\xi_n - A_{k-1,n}).$$

Hier ist nun der Faktor von $|P_{n+k}|$ gleich der Summe der beiden (positiven) Faktoren von $\sqrt{D}$ und $|P_n|$, so daß sich augenblicklich ergibt:

$$|P_{n+k}| < \operatorname{Max}(\sqrt{D}, |P_n|),$$

und zwar wegen der Irrationalität von $\sqrt{D}$ unter Ausschluß von Gleichheit.

Nun wenden wir uns zum Beweis der Behauptung II. Es ist

$$\xi_n = b_n - \frac{1|}{|2} - \frac{1|}{|2} - \cdots - \frac{1|}{|2} - \frac{1|}{|\xi_{n+k}} = \frac{A_{k-1,n}\,\xi_{n+k} - A_{k-2,n}}{B_{k-1,n}\,\xi_{n+k} - B_{k-2,n}},$$

und außerdem $b_n \geqq 3$, $b_{n+k} \geqq 3$, also $\xi_{n+k} > 2$. Durch Auflösung nach ξ_{n+k} folgt:

$$\xi_{n+k} = \frac{-B_{k-2,n}\,\xi_n + A_{k-2,n}}{-B_{k-1,n}\,\xi_n + A_{k-1,n}},$$

oder also

$$\frac{\sqrt{D} + P_{n+k}}{Q_{n+k}} = \frac{-B_{k-2,n}(\sqrt{D} + P_n) + A_{k-2,n}\,Q_n}{-B_{k-1,n}(\sqrt{D} + P_n) + A_{k-1,n}\,Q_n}.$$

Wenn man hier mit den Nennern heraufmultipliziert und dann den Faktor von $\sqrt{D}$ beiderseits gleichsetzt, erhält man

$$-P_{n+k}\,B_{k-1,n} - B_{k-1,n}\,P_n + A_{k-1,n}\,Q_n = -Q_{n+k}\,B_{k-2,n},$$

oder unter Berücksichtigung von (2)

$$-P_{n+k}\,B_{k-1,n} - P_n\,B_{k-1,n} + A_{k-1,n}\cdot\frac{\sqrt{D} + P_n}{\xi_n} = -\frac{\sqrt{D} + P_{n+k}}{\xi_{n+k}}\cdot B_{k-2,n}.$$

Nach Multiplikation mit $\xi_n\,\xi_{n+k}$ und Gliederumstellung ergibt sich hieraus:

$$P_{n+k}\,\xi_n\,(B_{k-1,n}\,\xi_{n+k} - B_{k-2,n})$$

$$= \sqrt{D}\,(A_{k-1,n}\,\xi_{n+k} + B_{k-2,n}\,\xi_n) + P_n\,\xi_{n+k}(A_{k-1,n} - B_{k-1,n}\,\xi_n).$$

Nun ist augenscheinlich

$$B_{0,n} = 1,\ B_{1,n} = 2,\ B_{2,n} = 3,\ \ldots,\ B_{k-2,n} = k-1,\ B_{k-1,n} = k.$$

Daher ist $B_{k-1,n}\,\xi_{n+k} - B_{k-2,n} > 0$ (auch für $k = 1$, weil nach Kebr Seite 4 $B_{-1} = 0$ ist) und folglich auch

$$A_{k-1,n} - B_{k-1,n}\xi_n = A_{k-1,n} - B_{k-1,n} \cdot \frac{A_{k-1,n}\xi_{n+k} - A_{k-2,n}}{B_{k-1,n}\xi_{n+k} - B_{k-2,n}}$$

$$= \frac{B_{k-1,n}A_{k-2,n} - A_{k-1,n}B_{k-2,n}}{B_{k-1,n}\xi_{n+k} - B_{k-2,n}} = \frac{(-1)^{k-1}\cdot(-1)^{k-1}}{B_{k-1,n}\xi_{n+k} - B_{k-2,n}} > 0.$$

Aus der letzten Formel folgt daher

$$|P_{n+k}| \cdot \xi_n (B_{k-1,n}\xi_{n+k} - B_{k-2,n})$$

$$\leqq \sqrt{D}\cdot(A_{k-1,n}\xi_{n+k} + B_{k-2,n}\xi_n) + |P_n|\cdot\xi_{n+k}(A_{k-1,n} - B_{k-1,n}\xi_n)$$

$$= 3\sqrt{D}\cdot\frac{1}{3}(A_{k-1,n}\xi_{n+k} + B_{k-2,n}\xi_n) + |P_n|\cdot\xi_{n+k}(A_{k-1,n} - B_{k-1,n}\xi_n).$$

Hier sind die Faktoren von $|P_{n+k}|$, $3\sqrt{D}$ und $|P_n|$ positiv; die Behauptung II wird daher bewiesen sein, wenn wir zeigen können, daß der erste größer als die Summe der beiden andern ist. Also handelt es sich nur noch um den Nachweis der Ungleichung

$$\xi_n (B_{k-1,n}\xi_{n+k} - B_{k-2,n}) > \frac{1}{3}(A_{k-1,n}\xi_{n+k} + B_{k-2,n}\xi_n) +$$
$$+ \xi_{n+k}(A_{k-1,n} - B_{k-1,n}\xi_n),$$

oder nach Multiplikation mit 3/2 und besserer Zusammenfassung:

(A) $$\xi_{n+k}(3\xi_n B_{k-1,n} - 2A_{k-1,n}) > 2B_{k-2,n}\xi_n.$$

Nun ist $B_{k-2,n} = k-1$, $B_{k-1,n} = k$, ferner

$$A_{0,n} = b_n,\quad A_{1,n} = 2b_n - 1,\quad A_{2,n} = 3b_n - 2,\quad \ldots,$$
$$\text{schließlich}\quad A_{k-1,n} = kb_n - k + 1.$$

Die noch zu beweisende Formel (A) nimmt daher die Gestalt an:

(B) $$\xi_{n+k}(3k\xi_n - 2kb_n + 2k - 2) > (2k-2)\xi_n.$$

Da $\xi_{n+k} > 2$ und die Klammergröße links größer als

$$3k(b_n - 1) - 2kb_n + 2k - 2 = k(b_n - 1) - 2 \geqq b_n - 1 - 2,$$

wegen $b_n \geqq 3$ also positiv ist, wird (B) sicher richtig sein, wenn wir beweisen können, daß sogar

$$2(3k\xi_n - 2kb_n + 2k - 2) > (2k-2)\xi_n$$

gilt, oder nach Division durch 2 und besserer Zusammenfassung:

$$(C) \qquad (2k+1)\,\xi_n > 2k\,b_n - 2k + 2.$$

Nun ist $\xi_n > b_n - 1$. Daher wird (C) sicher richtig sein, wenn sogar die Ungleichung

$$(2k+1)(b_n - 1) \geqq 2k\,b_n - 2k + 2$$

gilt. Diese besagt aber einfach $b_n \geqq 3$, gilt also nach Voraussetzung wirklich.

§ 3. Skizze eines anderen Beweises

In Kebr Seite 159 ist bemerkt, daß die Periodizität der halbregelmäßigen Kettenbrüche auch auf ganz ähnliche Art bewiesen werden kann, wie in § 20 der *Lagrange*sche Satz bewiesen wurde; das wäre also ein Beweis, bei dem die Konvergenz des Kettenbruches benutzt wird. Da aber bei der wirklichen Durchführung immerhin eine Klippe auftaucht, deren Umschiffung nicht ganz auf der Hand liegt, so mag die Gelegenheit hier benutzt werden, um die nötigen Änderungen darzustellen. Zunächst geht es wirklich ganz analog, bis man an Stelle der Formel Seite 68 oben die folgende gewinnt:

$$\eta_\nu = -a_\nu \frac{B_{\nu-2}}{B_{\nu-1}}(1+\varepsilon_\nu),$$

wo η_ν die zu ξ_ν konjugierte Zahl und $|\varepsilon_\nu|$ beliebig klein ist, etwa $|\varepsilon_\nu| < \frac{1}{2}$.

Wenn nun für $\nu > \nu_0$ dauernd $a_\nu = +1$ ist, geht es ohne Änderung weiter wie im Buch. Wenn für $\nu > \nu_0$ dauernd $a_\nu = -1$ ist, also $b_\nu \geqq 2$ und unendlich oft sogar $b_\nu \geqq 3$, so lehrt die Rekursionsformel $B_\nu = b_\nu B_{\nu-1} - B_{\nu-2}$, daß $B_\nu - B_{\nu-1}$ mit wachsendem ν niemals abnimmt und unendlich oft sogar wirklich wächst. Schließlich wird also $B_{\nu-2} - B_{\nu-3} > 0$, und sobald $b_{\nu-1} \geqq 3$ ist, wird dann $B_{\nu-1} \geqq 3B_{\nu-2} - B_{\nu-3} > 2B_{\nu-2}$, also

$$\eta_\nu = \frac{B_{\nu-2}}{B_{\nu-1}}(1+\varepsilon_\nu) < \frac{1}{2}(1+\varepsilon_\nu) < \frac{3}{4}.$$

Das besagt, daß für diese ν

$$\frac{\sqrt{D}+P_\nu}{Q_\nu} > 1\,, \quad \frac{-\sqrt{D}+P_\nu}{Q_\nu} < \frac{3}{4}, \quad \text{also} \quad \frac{2\sqrt{D}}{Q_\nu} > 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$$

ist. Daraus folgt $0 < Q_\nu < 8\sqrt{D}$ und dann weiter

$$Q_\nu + \sqrt{D} > P_\nu > Q_\nu - \sqrt{D}\,.$$

Daher bilden die P_ν, Q_ν für diese ν eine beschränkte Menge, und folglich sind unter den ξ_ν unendlich viele einander gleich.

Wenn schließlich unendlich oft $a_\nu = +1$ und unendlich oft $a_\nu = -1$ ist, so gibt es unendlich viele ν, für die $a_{\nu-1} = +1$, $a_\nu = -1$, also $b_{\nu-1} \geqq 2$ ist. Für diese ν ist dann

$$B_{\nu-1} \geqq 2B_{\nu-2} + B_{\nu-3}\,, \quad \text{also} \quad \frac{B_{\nu-2}}{B_{\nu-1}} < \frac{1}{2}\,;$$

daher wegen $a_\nu = -1$:

$$\eta_\nu = \frac{B_{\nu-2}}{B_{\nu-1}}(1+\varepsilon_\nu) < \frac{1}{2}(1+\varepsilon_\nu) < \frac{3}{4}\,.$$

Nun geht es weiter wie oben im Anschluß an die gleiche Formel.

§ 4. Kettenbrüche in imaginären quadratischen Zahlkörpern

Sei Δ eine der fünf Zahlen 3, 4, 7, 8, 11. Dann kann man zu jeder komplexen Zahl ξ eine „zugeordnete" ganze Zahl b des quadratischen Zahlkörpers $\mathfrak{K}(i\sqrt{\Delta})$ dadurch eindeutig festlegen, daß man verlangt:[1]

$$(8) \qquad -\frac{1}{2} \leqq \Re(\xi - b) < \frac{1}{2}\,, \qquad -\frac{\sqrt{\Delta}}{4} \leqq \Re\left(\frac{\xi-b}{i}\right) < \frac{\sqrt{\Delta}}{4}\,.$$

Dann ist $|\xi - b| \leqq \frac{\sqrt{\Delta+4}}{4} < 1$. Man kann also bei jeder komplexen Zahl ξ_0 den Algorithmus

[1] Damit diese Ungleichungen für alle Δ einheitlich ausfallen, sind hier die Körper $\mathfrak{K}(i)$ und $\mathfrak{K}(i\sqrt{2})$ in der Form $\mathfrak{K}(i\sqrt{4})$ und $\mathfrak{K}(i\sqrt{8})$ geschrieben.

$$(9)\qquad \xi_0 = b_0 + \frac{1}{\xi_1}, \quad \xi_1 = b_1 + \frac{1}{\xi_2}, \quad \xi_2 = b_2 + \frac{1}{\xi_3}, \ \ldots$$

durchführen, wo allgemein b_ν die zu ξ_ν zugeordnete ganze Zahl aus $\mathfrak{K}(i\sqrt{\Delta})$ ist. Dann gelten die Ungleichungen

$$(10)\qquad |\xi_\nu - b_\nu| \leqq \frac{\sqrt{\Delta+4}}{4} < 1 \qquad \text{für } \nu \geqq 0,$$

$$(11)\qquad |\xi_\nu| = \frac{1}{|\xi_{\nu-1} - b_{\nu-1}|} \geqq \frac{4}{\sqrt{\Delta+4}} > 1 \qquad \text{für } \nu \geqq 1,$$

aus denen, damit sie sich nicht widersprechen, hervorgeht, daß für $\nu \geqq 1$ stets $b_\nu \neq 0$, also $|b_\nu| \geqq 1$ ist.

Diese Entwicklungen werden, wenn ξ_0 einer im Körper $\mathfrak{K}(i\sqrt{\Delta})$ irreduzibeln quadratischen Gleichung genügt, periodisch. Ein Beweis dafür ist in Kebr § 46 für $\Delta = 4$ durchgeführt, für die andern Δ skizziert, wobei die Konvergenz der aus dem Algorithmus fließenden Kettenbrüche eine Rolle spielt. Man kann aber auch ohne Kenntnis der Konvergenz den Beweis noch schneller führen, indem man ein Analogon zur *Gonçalves*schen Ungleichung (7) herleitet, was jetzt geschehen soll.

Ist etwa $px^2 + qx + r = 0$ die in $\mathfrak{K}(i\sqrt{\Delta})$ irreduzible Gleichung für ξ_0 und nimmt man dabei p, q, r als ganze Zahlen des Körpers an, so ergibt die Auflösung:

$$\xi_0 = \frac{-q + \sqrt{q^2 - 4pr}}{2p}.$$

Daher hat ξ_0 die Gestalt (1), wobei aber das Wort „ganze Zahl" als „ganze Zahl des Körpers $\mathfrak{K}(i\sqrt{\Delta})$" zu verstehen ist. Die Zahl $\sqrt{D}$ gehört wegen der Irreduzibilität der Gleichung natürlich nicht dem Körper an. Führt man jetzt den Algorithmus durch, so erweisen sich sukzessive auch die ξ_ν als Zahlen der Form (2), wobei P_ν, Q_ν und $\dfrac{D - P_\nu^2}{Q_\nu}$ wiederum ganze Zahlen aus $\mathfrak{K}(i\sqrt{\Delta})$ sind. Nach dem Algorithmus gelten nun genau die Formeln (3), woraus, da $\sqrt{D}$ nicht dem Körper angehört, auch wieder die Formeln (4), (5) folgen. Aus (4) und (2) erhält man

$$P_{\nu+1} = b_\nu Q_\nu - P_\nu = b_\nu \cdot \frac{\sqrt{D}+P_\nu}{\xi_\nu} - P_\nu = \sqrt{D}\cdot\frac{b_\nu}{\xi_\nu} - P_\nu \cdot \frac{\xi_\nu - b_\nu}{\xi_\nu},$$

also gilt die Ungleichung

$$|P_{\nu+1}| \leqq |\sqrt{D}| \cdot \left|\frac{b_\nu}{\xi_\nu}\right| + |P_\nu| \cdot \left|\frac{\xi_\nu - b_\nu}{\xi_\nu}\right|. \tag{12}$$

Daher wird gewiß $|P_{\nu+1}| \leqq \operatorname{Max}(c|\sqrt{D}|, |P_\nu|)$ sein, falls man die positive Zahl c so bestimmen kann, daß

$$\frac{1}{c}\left|\frac{b_\nu}{\xi_\nu}\right| + \left|\frac{\xi_\nu - b_\nu}{\xi_\nu}\right| \leqq 1$$

ist. Nun folgt aus (10) und (11)

$$\left|\frac{\xi_\nu - b_\nu}{\xi_\nu}\right| \leqq \frac{\Delta+4}{16}, \quad \text{also} \quad \left|\frac{b_\nu}{\xi_\nu}\right| \leqq \frac{\Delta+4}{16} + 1 = \frac{\Delta+20}{16},$$

so daß

$$\frac{1}{c}\left|\frac{b_\nu}{\xi_\nu}\right| + \left|\frac{\xi_\nu - b_\nu}{\xi_\nu}\right| \leqq \frac{1}{c}\cdot\frac{\Delta+20}{16} + \frac{\Delta+4}{16}$$

ist. Die rechte Seite wird gleich 1 für $\frac{1}{c} = \frac{12-\Delta}{20+\Delta}$, also $c = \frac{20+\Delta}{12-\Delta}$. Somit ergibt sich als Analogon zur *Gonçalves*schen Ungleichung (7) die Formel

$$|P_{\nu+1}| \leqq \operatorname{Max}\left(\frac{20+\Delta}{12-\Delta}\cdot|\sqrt{D}|, |P_\nu|\right). \tag{13}$$

Aus dieser folgt nun, daß die P_ν eine beschränkte Menge bilden, und da sie als ganze Zahlen des Körpers $\mathfrak{K}(i\sqrt{\Delta})$ in der komplexen Zahlenebene isoliert liegen, gibt es nur endlich viele verschiedene. Aus (2) oder (4) (man beachte $|b_\nu| \geqq 1$) oder (5) schließt man dann, daß auch die Q_ν eine beschränkte Menge bilden, so daß es nur endlich viele verschiedene gibt. Somit gibt es auch nur endlich viele verschiedene ξ_ν, woraus sofort die Periodizität folgt.

In den Fällen $\Delta = 4$ und 8 ist die einer Zahl ξ durch die Forderungen (8) zugeordnete ganze Zahl b aus $\mathfrak{K}(i\sqrt{\Delta})$ zugleich die in der komplexen Zahlenebene am nächsten bei ξ gelegene, oder eine der nächstgelegenen, falls es mehrere (höchstens vier) gibt. Für $\Delta = 3, 7, 11$ ist das nicht immer so. Daher liegt es nahe, für $\Delta = 3, 7, 11$ den Algorithmus (9) in der Weise zu modifizieren, daß man für b_ν stets die am nächsten bei ξ_ν gelegene ganze Zahl wählt, wobei man, falls es mehrere nächstgelegene gibt (höchstens drei), durch eine zusätzliche Forderung leicht Eindeutigkeit erzielen kann. An Stelle von (10) und (11) treten dann die schärferen Ungleichungen (Kebr Seite 187):

$$|\xi_\nu - b_\nu| \leqq \frac{\Delta + 1}{4\sqrt{\Delta}} < 1 \qquad \text{für } \nu \geqq 0,$$

$$|\xi_\nu| = \frac{1}{|\xi_{\nu-1} - b_{\nu-1}|} \geqq \frac{4\sqrt{\Delta}}{\Delta + 1} > 1 \qquad \text{für } \nu \geqq 1.$$

Daher ist diesmal

$$\left|\frac{\xi_\nu - b_\nu}{\xi_\nu}\right| \leqq \frac{(\Delta + 1)^2}{16\Delta}, \quad \text{also} \quad \left|\frac{b_\nu}{\xi_\nu}\right| \leqq \frac{16\Delta + (\Delta + 1)^2}{16\Delta},$$

und folglich

$$\frac{1}{c}\left|\frac{b_\nu}{\xi_\nu}\right| + \left|\frac{\xi_\nu - b_\nu}{\xi_\nu}\right| \leqq \frac{1}{c} \cdot \frac{16\Delta + (\Delta + 1)^2}{16\Delta} + \frac{(\Delta + 1)^2}{16\Delta}.$$

Die rechte Seite wird gleich 1 für $c = \frac{16\Delta + (\Delta + 1)^2}{16\Delta - (\Delta + 1)^2}$. An Stelle von (13) tritt daher jetzt die Ungleichung

$$\text{(13a)} \qquad |P_{\nu+1}| \leqq \operatorname{Max}\left(\frac{16\Delta + (\Delta + 1)^2}{16\Delta - (\Delta + 1)^2} \cdot |\sqrt{D}|, |P_\nu|\right),$$

in der der Faktor von $|\sqrt{D}|$ natürlich kleiner ist als bei (13). Aus (13a) folgt nun auch für den modifizierten Algorithmus genau wie oben aus (13) die Periodizität.