Sitzungsberichte

der

mathematisch-naturwissenschaftlichen Klasse

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften
zu München

Jahrgang 1954

München 1955
Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften
In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung

Iterationsverfahren zur konformen Abbildung eines Ringgebietes auf einen konzentrischen Kreisring

Von **Rudolf Albrecht** in München

Vorgelegt von Herrn Josef Lense am 14. Mai 1954

Die konforme Abbildung des allgemeinen, nicht ausgearteten zweifach zusammenhängenden schlichten Gebietes auf einen konzentrischen Kreisring ist von P. Koebe [1][1] mittels seines von ihm als „Schmiegungsverfahren“ bezeichneten Iterationsverfahrens geleistet worden. Das Problem wird dabei mit Hilfe der universellen Überlagerungsfläche des Gebietes auf die Abbildung eines einfach zusammenhängenden Gebietes zurückgeführt. Dieses Verfahren eignet sich jedoch nicht für praktische Anwendungen.

Von E. Graeser [2] und Y. Komatu [3] wurden später zwei andere, prinzipiell wenig voneinander verschiedene Methoden der iterativen Behandlung der Abbildungsaufgabe angegeben, die die Benützung der universellen Überlagerungsfläche vermeiden. Nach den dort gegebenen Grundgedanken lassen sich durch Verallgemeinerung und Lockerung der Voraussetzungen im Hinblick auf die praktische Anwendungsmöglichkeit anpassungsfähige Iterationsverfahren konstruieren. Zum Nachweis ihrer Konvergenz erweist es sich zweckmäßig, den Existenzbeweis der Abbildung im folgenden nochmals zu führen.

I. Existenz der Abbildung

Wir nehmen an, daß das abzubildende Gebiet schlicht ist, da dieser Fall praktisch hauptsächlich interessiert. Ferner wählen wir für das Gebiet eine Gestalt, die unserem Verfahren besonders angepaßt ist.

---

[1] Die Zahlen in eckigen Klammern beziehen sich auf die am Schlusse angegebenen Literaturnachweise.

Definition 1: Unter einem „Ringgebiet D" sei ein zweifach zusammenhängendes Teilgebiet eines schlichten konzentrischen Kreisringes $K_{R,r}$ verstanden, dessen Randkontinua den inneren Kreis des Ringes ganz umschließen.

Ohne Einschränkung der Allgemeinheit können wir voraussetzen, daß das nicht ausgeartete, zweifach zusammenhängende, abzubildende Gebiet ein Ringgebiet D ist, das in einem Kreisring $K_{R,r}$ einer z-Ebene liegt, dessen Randkreise K_R bzw. K_r die Gleichungen $|z| = R$ bzw. $|z| = r$ $(R > r > 0)$ haben. Auf dem äußeren Randkontinuum von D gibt es nun mindestens je einen Punkt, der vom Punkt $z = 0$ einen maximalen Abstand D_a bzw. einen minimalen Abstand d_a hat. Ebenso gibt es auf dem inneren Randkontinuum von D mindestens je einen Punkt mit maximalem Abstand D_i bzw. minimalem Abstand d_i vom Nullpunkt. Wir wollen in Zukunft für den Kreisring $K_{R,r}$ $R = D_a$ und $r = d_i$ wählen.

Definition 2: Als „äußerer Modul $\overline{M}$" des Ringgebietes D wird das Verhältnis $\frac{D_a}{d_i}$, als „innerer Modul $\underline{M}$" das Verhältnis $\frac{d_a}{D_i}$ bezeichnet.

Ist $\overline{M} = \underline{M} = M$, D also selbst schon ein konzentrischer Kreisring, so wird der gemeinsame Wert M bekanntlich Modul schlechthin genannt. Die so definierten Moduln genügen der Ungleichung $\overline{M} \geq \underline{M}$ und sind sämtlich gegenüber den Abbildungen $w = cz^{\pm 1}$ $(c = \text{const})$ invariant.

Wir betrachten nun die Familie $\mathfrak{F}$ aller Funktionen, die

(I) in D regulär und schlicht sind und D wieder auf in $K_{R,r}$ gelegene Ringgebiete so abbilden, daß

(II) die äußeren Moduln der Bildgebiete kleiner als der äußere Modul von D sind.

Dann lassen sich folgende Sätze beweisen:

Hilfssatz 1: Die Funktionenmenge $\mathfrak{F}$ ist nicht leer, enthält keine Konstanten und bildet in D eine normale Familie.

Beweis: Um zu zeigen, daß $\mathfrak{F}$ nicht leer ist, betrachten wir das im Kreise K_R liegende, vom äußeren Randkontinuum von D begrenzte, einfach zusammenhängende Gebiet G_0, wobei wir, eventuell nach einer Spiegelung am Kreise $|z| = \sqrt{Rr}$, annehmen können, daß dieses Gebiet nicht mit dem Inneren von K_R identisch ist. Wir können dann stets eine im Komplementärbereich von D verzweigte Wurzelabbildung (z. B. eine Koebesche Quadratwurzelabbildung [4]) so ausüben, daß G_0 an den Kreis K_R angeschmiegt wird und der Nullpunkt dabei in sich übergeht. Dabei wird D schlicht und so abgebildet, daß die Bildpunkte des inneren Randkontinuums von D vom Nullpunkt wegrücken. Folglich ist der äußere Modul des Bildgebietes kleiner als der von D.

Nach Voraussetzung (I) soll D immer auf ein Ringgebiet abgebildet werden, also enthält $\mathfrak{F}$ keine Konstante.

Infolge der gleichartigen Beschränktheit der zugelassenen Abbildungsfunktionen ist $\mathfrak{F}$ eine normale Familie.

Hilfssatz 2: Die Familie $\mathfrak{F}$ ist kompakt.

Beweis: Wir zeigen, daß für den Betrag der Ableitung jeder Funktion aus $\mathfrak{F}$ in jedem abgeschlossenen Teilbereich von D eine gleichartige (d. h. von der Wahl der speziellen Funktion unabhängige), nur von der Art des genannten Teilbereiches abhängige, von Null verschiedene untere Schranke existiert:

Hat man eine offene, ganz in D gelegene Kreisscheibe, so folgt die Existenz der behaupteten Schranke für jede in der offenen Kreisscheibe enthaltene konzentrische abgeschlossene Kreisscheibe aus dem Koebeschen Verzerrungssatz [5]. Auf die oft angegebene normierte Formulierung dieses Satzes kann unser Fall leicht zurückgeführt werden durch eine ganze lineare Funktion mit Koeffizienten, deren Betrag zwischen zwei von Null verschiedenen festen Schranken liegt. Nach dem Heine-Borelschen Überdeckungssatz kann jeder beliebige, ganz in D gelegene, abgeschlossene Bereich durch eine endliche Anzahl offener, ganz in D gelegener Kreisscheiben überdeckt werden. Daraus folgt die Existenz der behaupteten Schranke für jeden abgeschlossenen Teilbereich.

Infolge dieser Beschränktheit des Betrages der Ableitung hat keine konvergente Funktionenfolge aus $\mathfrak{F}$ eine konstante Grenzfunktion. Dann ist aber nach einem bekannten Satz jede Grenzfunktion schlicht [6] und $\mathfrak{F}$ also kompakt.

Die beiden Hilfssätze liefern den

Satz 1: Der äußere Modul $\overline{M}$ der Bildgebiete von D ist ein stetiges Funktional $\overline{M} \geqq M > 1$ in $\mathfrak{F}$. Diejenigen Funktionen aus $\mathfrak{F}$, für die er sein Minimum M annimmt, bilden das Ringgebiet D auf einen konzentrischen Kreisring mit dem Modul M ab und sind bis auf Abbildungen der Art $w = cz^{\pm 1}$ ($c =$ const) eindeutig bestimmt.

Beweis: Jeder Funktion $f \in \mathfrak{F}$ ist eindeutig ein äußerer Modul $\overline{M(f)}$ zugeordnet, jeder konvergenten Funktionenfolge im besonderen der äußere Modul ihrer in $\mathfrak{F}$ enthaltenen Grenzfunktion. $\overline{M(f)}$ ist also ein stetiges, positives Funktional in $\mathfrak{F}$. Somit existiert nach einem bekannten Satz [7] eine Extremalfunktion $f_0 \in \mathfrak{F}$, die $\overline{M(f)}$ minimalisiert, d.h. für die $\overline{M(f_0)} \leqq \overline{M(f)}$ für jede Funktion $f \in \mathfrak{F}$ ist. Das Minimum $\overline{M(f_0)} = M$ ist > 1, da nach Hilfssatz 2 der äußere Modul eines Bildgebietes sich nicht beliebig dem Wert 1 nähern kann.

f_0 bildet D auf einen konzentrischen Kreisring mit dem Modul M ab; denn wären die Randkontinua des von f_0 entworfenen Bildgebietes von D keine konzentrischen Kreise, so ist durch Hinzunahme einer beim Beweis des Hilfssatzes 1 angegebenen Abbildung eine Funktion aus $\mathfrak{F}$ zu konstruieren, die den äußeren Modul weiter verkleinert, im Gegensatz zur geforderten Minimaleigenschaft.

Eine andere Extremalfunktion f_0^* muß D auf einen ebensolchen Kreisring abbilden. Die allgemeinste Abbildung eines schlichten konzentrischen Kreisringes mit dem Nullpunkt als Mittelpunkt auf einen ebensolchen ist bekanntlich $w = cz^{\pm 1}$ [8]. Bei ihr bleibt der Modul invariant. Folglich können sich f_0 und f_0^* nur um eine solche Abbildung unterscheiden, und es gibt keine Funktion, die D auf einen konzentrischen Kreisring mit einem größeren Modul als M abbildet.

Satz 1 veranlaßt zur folgenden

Definition 3: Wir bezeichnen die Funktionen aus $\mathfrak{F}$ als „Schmiegungsfunktionen für das Ringgebiet D".

Bei einer schlichten Abbildung eines konzentrischen Kreisringes auf ein Ringgebiet der bezeichneten Art ist der äußere Modul des Bildes also größer als der des Kreisringes. Es gilt aber noch allgemeiner folgende Aussage.

Satz 2: Die Funktion $z = g(w)$ sei im Kreisring $r_w < |w| < R_w$ regulär und eindeutig und auf das Innere des Kreisringes $r_z < |z| < R_z$ beschränkt. Einer in $r_w < |w| < R_w$ gelegenen geschlossenen Kurve mit von Null verschiedener Umlaufszahl bezüglich des Punktes $w = 0$ möge dabei eine ebensolche bezüglich des Punktes $z = 0$ entsprechen. Dann ist $\frac{R_w}{r_w} \leqq \frac{R_z}{r_z}$ und das $=$Zeichen tritt im und nur im Falle $z = Cw^{\pm 1}$ ($C =$ const) ein.

Beweis: Wir betrachten die universelle Überlagerungsfläche von $r_w < |w| < R_w$. Infolge der obigen Voraussetzungen wird sie auf ein einfach zusammenhängendes Gebiet der universellen Überlagerungsfläche von $r_z < |z| < R_z$ abgebildet. Durch je eine reguläre Funktion mit nicht verschwindender Ableitung können die Überlagerungsflächen auf die Einheitskreise einer ω- bzw. einer ζ-Ebene abgebildet werden. Dann entspricht der Funktion $z = g(w)$ eine in $|\omega| < 1$ reguläre, auf $|\zeta| < 1$ beschränkte Funktion $\zeta = g_1(\omega)$. Wir führen in den Einheitskreisen eine bezüglich linearer Transformationen des Einheitskreises in sich invariante Metrik [9] mit dem Bogenelement

$$ds_\omega = \frac{2\,|d\omega|}{1 - |\omega|^2}$$

ein. Der in dieser Metrik gemessene Minimalabstand Ψ_{min} zweier äquivalenter Punkte ist, wie eine einfache geometrische Überlegung lehrt, in der ω-Ebene längs des Bildes von $w = \sqrt{R_w r_w}$ zu messen und beträgt

$$\Psi_{min} = \operatorname{Tang} \frac{\pi^2}{\ln \frac{R_w}{r_w}} \quad [10].$$

Infolge des Satzes von G. Pick [11] gilt für den in der gleichen Metrik gemessenen Minimalabstand Ψ_{min} zweier äquivalenter Punkte nach der Abbildung $\zeta = g_1(\omega)$

$$\psi_{min} \leqq \Psi_{min}$$

oder

$$\frac{R_z}{r_z} \geqq \frac{R_w}{r_w},$$

wobei das $=$ Zeichen dann und nur dann eintritt, wenn $\zeta = g_1(\omega)$ eine lineare Transformation des Einheitskreises in sich ist. Einer solchen entspricht aber eine schlichte Abbildung des Kreisringes $r_w < |w| < R_w$ auf den Kreisring $r_z < |z| < R_z$, die nur die Funktion $z = Cw^{\pm 1}$ leistet.

Ziel des Satzes 2 ist folgendes

Kriterium für Schmiegungsfunktionen: $z = g(w)$ sei eine Funktion nach Satz 2, die von einem Teilgebiet von $r_w < |w| < R_w$ als Bild ein im Kreisring $r_z < |z| < R_z$ gelegenes schlichtes Ringgebiet D entwirft, dessen äußerer Modul gleich $\frac{R_z}{r_z}$ ist. Dann ist der in D eindeutige Zweig $w = f(z)$ der Umkehrfunktion von $z = g(w)$ für D eine Schmiegungsfunktion.

Dies folgt nun unmittelbar aus Definition 3 und Satz 2.

Ein Beispiel einer solchen Schmiegungsoperation ist folgende Verallgemeinerung einer von J. Heinhold [12] angegebenen Schmiegungsabbildung einfach zusammenhängender Gebiete: D sei Teilgebiet eines (schlichten) konzentrischen Kreisringes, dessen Randkreise Punkte mit den Randkontinua von D gemeinsam haben. Der Kreisring wird, falls dies möglich ist, durch im Komplementärbereich von D verlaufende radiale „Geradenstacheln" aufgeschlitzt. Die schlichte Abbildungsfunktion des geschlitzten Kreisringes auf einen konzentrischen Kreisring ist für D nach obigem Kriterium eine Schmiegungsfunktion.

II. Konstruktion von Iterationsfolgen

Praktisch approximiert man eine nicht bekannte Abbildungsfunktion eines Ringgebietes auf einen Kreisring durch eine Folge iterierter Schmiegungsfunktionen für Ringgebiete aus der Familie $\mathfrak{F}$. Das Ergebnis einer solchen Iteration ist stets eine Funktion aus $\mathfrak{F}$, die das Ringgebiet auf ein anderes mit kleinerem äußeren Modul abbildet und deshalb nach dem vorhergehenden Existenzbeweis eine Näherungsfunktion der gewünschten Abbilbildungsfunktion darstellt:

Wir bilden D durch eine Folge von Funktionen $f_\nu(z)$ auf eine Folge von Ringgebieten D_ν in z_ν-Ebenen $(\nu = 1, 2, 3, \ldots)$ ab, indem wir jeweils $D_{\nu-1}$ auf D_ν durch eine Schmiegungsfunktion $z_\nu = \varphi_\nu(z_{\nu-1})$ bezüglich $D_{\nu-1}$ abbilden und

$$f_\nu(z) = \varphi_\nu(\varphi_{\nu-1}\,(\varphi_{\nu-2}\ldots))$$

setzen (der Index 0 ist wegzulassen). Die reguläre Funktion $f_\nu(z)$ ist in D schlicht und gehört wieder der Familie $\mathfrak{F}$ an. Die zu den Gebieten D_ν gehörigen äußeren Moduln $\overline{M}_\nu$ bilden dann eine im strengen Sinn monoton abnehmende Folge. Wir fordern noch, daß

$$\text{(III)}\qquad \begin{aligned} &\lim_{\nu\to\infty} f_\nu(z) = f(z) \quad \text{vorhanden und} \\ &\lim_{\nu\to\infty} \overline{M}_\nu \quad = M \quad \text{ist,} \end{aligned}$$

wobei M wieder die untere Grenze der äußeren Moduln bezeichnen soll. Dann ist $f(z)$ nach Satz 1 eine gewünschte Abbildungsfunktion.

Wesentlich für die Anwendung ist nun, daß man für die Schmiegungsfunktionen φ_ν elementare Schmiegungsfunktionen zur Abbildung einfach zusammenhängender Gebiete auf eine Kreisscheibe benützen kann. Diese Rückführung des Abbildungsproblemes auf die Abbildung einfach zusammenhängender Gebiete kann ohne Verwendung der universellen Überlagerungsfläche auf zwei Arten erfolgen:

1.

Wir schneiden den Kreisring $K_{R,r}$, der das abzubildende Ringgebiet D enthält, längs eines Radius auf, dessen diametraler, in $K_{R,r}$ verlaufender Radius nicht nur aus Punkten von D besteht. Den aufgeschnittenen Kreisring samt dem durch den Schnitt einfach zusammenhängend gewordenen Gebiet D bilden wir so auf eine Kreisscheibe E ab, daß die Bildpunkte der Schnittränder von D symmetrisch zu einem Durchmesser von E liegen. Diese Abbildung benötigt die sn-Funktion. Dann üben wir in E Operationen so aus, daß das Bild des aufgeschnittenen Ringgebietes D auf E angeschmiegt wird und gleichzeitig die Symmetrie der Bilder der Schnittränder von D erhalten bleibt. Beispiel einer solchen Operation ist eine Koebesche Wurzelabbildung, deren in E gelegener Verzweigungspunkt außerhalb des Bildgebietes des aufgeschnittenen Ringgebietes D auf dem Durchmesser liegt, der Symmetrielinie der Bilder der Schnittränder ist.

Wird nun wieder E samt dem angeschmiegten Bildgebiet so auf einen radial aufgeschnittenen Kreisring K_{R_1, r_1} abgebildet, daß sich die Bilder der Schnittränder von D ohne Störung der Stetigkeit aneinander schließen und außerdem dabei die übrigen in K_{R_1, r_1} gelegenen Teile der Schnittlinie keine Bildpunkte der Kreise K_R und K_r enthalten,[1] so ist die resultierende Abbildungsfunktion nach dem Schwarzschen Spiegelungsprinzip und dem obigen Kriterium für D eine Schmiegungsfunktion: Ihre Umkehrfunktion ist als Zusammensetzung regulärer Funktionen in K_{R_1, r_1} regulär und bildet ein Teilgebiet dieses Kreisringes schlicht auf D ab.

2.

Die Verwendung elliptischer Funktionen kann aber auch vermieden werden. Wie beim Beweise von Hilfssatz 1 bereits angedeutet, führt folgende Verallgemeinerung der alternierenden Verfahren von E. Graeser [2] und Y. Komatu [3] zum Ziele:

Wir betrachten das abzubildende Ringgebiet D als Durchschnitt zweier einfach zusammenhängender Gebiete G_0 bzw. G_∞. G_0 sei das im Inneren von K_R gelegene, vom äußeren Randkontinuum von D begrenzte und den Nullpunkt enthaltende Gebiet, G_∞ das im Äußeren von K_r gelegene, vom inneren Randkontinuum von D begrenzte und den Punkt ∞ enthaltende Gebiet. Wie beim Beweise von Hilfssatz 1 folgt, daß alle Funktionen, z. B. solche von Wurzelabbildungen [1] (wobei nicht nur der meist gewählte Fall der Quadratwurzel gemeint ist), Kreissichel- [13], Stachel- [12] oder Kreisbogendreieckabbildungen [14], oder auch die der Methode von T. Theodorsen [15], die entweder G_0 unter Festhaltung des Nullpunktes an K_R oder G_∞ unter Festhaltung des Punktes ∞ an K_r anschmiegen, auch Schmiegungsfunktionen für das Ringgebiet D zur Annäherung an einen konzentrischen Kreisring sind.

---

[1] Diese Voraussetzung ist notwendig, damit in den Kreisring K_{R_1, r_1} keine radialen Schlitze hineingezogen werden, wodurch der äußere Modul zunimmt (siehe das Beispiel auf Seite 174).

Ausdrücklich sei bemerkt, daß wir bei der praktischen Anwendung für die Schmiegungsfunktionen $\varphi_\nu(z_{\nu-1})$ nicht stets ein und denselben Funktionstyp wählen und damit durch Iteration eine Näherungsfunktion

$$f_\nu = \varphi_\nu(\varphi_{\nu-1}(\varphi_{\nu-2}\ldots))$$

der gewünschten Abbildungsfunktion herstellen, sondern jeweils beliebige, möglichst zweckmäßig dem abzubildenden Ringgebiet angepaßte Schmiegungsoperationen benutzen, wodurch die Konvergenz des Verfahrens wesentlich beschleunigt werden kann. Hierdurch unterscheiden sich unsere praktischen Verfahren von den mehr im Sinne von Existenzbeweisen geführten der beiden oben genannten Autoren, bei denen streng abwechselnd auf je eines der Gebiete G_0 bzw. G_∞ eine Koebesche Quadratwurzelabbildung oder eine exakte Abbildung auf einen Kreis durchgeführt wird.

Praktisch werden immer nur endlich viele Schritte ausgeführt, in denen D beliebig genau einem konzentrischen Kreisring angenähert werden kann. Soll jedoch mit Hilfe eines solchen Iterationsverfahrens der Existenzbeweis der Abbildungsfunktion geführt werden, so ist zu beachten, daß nicht jede der oben genannten Schmiegungsfunktionen bei beliebiger Gestalt der einfach zusammenhängenden Gebiete G_0 und G_∞ anwendbar ist.[1] Ferner müssen die Forderungen (III) erfüllt werden.

Wurzelabbildungen sind bekanntlich immer möglich. Mit ihnen kann der Existenzbeweis folgendermaßen geführt werden:

Wir wählen im Falle der Anschmiegung von G_0 an K_R bzw. von G_∞ an K_r jeweils einen Randpunkt, der vom Nullpunkt einen kleinsten bzw. einen größten Abstand hat, als Verzweigungspunkt der Wurzelabbildung und wenden solche Schmiegungsoperationen alternierend auf G_0 bzw. G_∞ an. Ferner führen wir stets einen bestimmten Punkt von D in sich und das äußere Randkontinuum von D in das äußere des Bildes über. Aus der Folge der so erhaltenen Schmiegungsfunktionen $f_\nu(z)$ ausgewählte konvergente Teilfolgen müssen sämtlich gegen Grenzfunktionen kon-

[1] Das Innere einer radial aufgeschlitzten Kreisscheibe kann z. B. nicht durch eine Kreissichelabbildung auf diese Kreisscheibe selbst angeschmiegt werden.

vergieren, die D auf einen konzentrischen Kreisring abbilden, da unser Verfahren nicht konvergieren kann, solange der innere und der äußere Modul des Bildgebietes von D voneinander verschieden sind, und weil ferner die Familie der Schmiegungsfunktionen normal und kompakt ist. Die erhaltenen Grenzfunktionen sind aber alle identisch. Dies folgt aus Satz 1, denn Abbildungen der Art $w = cz^{\pm 1}$ sind durch das Festhalten des Innenpunktes und die Überführung des äußeren Randkontinuums von D auf das äußere des Bildes ausgeschlossen. Weil jede konvergente Teilfolge gegen dieselbe Grenzfunktion konvergiert, konvergiert die Folge der $f_\nu(z)$ selbst gegen diese nach Satz 1 eindeutig bestimmte Grenzfunktion.

Literaturnachweise

[1] P. Koebe: „Abhandlungen zur Theorie der konformen Abbildung I." Journ. f. r. u. ang. Math. 145 (1915). S. 195–205.

[2] E. Graeser: „Über konforme Abbildung des allgemeinen zweifach zusammenhängenden schlichten Bereiches auf die Fläche eines Kreisrings." Diss. Leipzig 1930.

[3] Y. Komatu: „Ein alternierendes Approximationsverfahren für konforme Abbildung von einem Ringgebiet auf einen Kreisring." Proc. Jap. Akad. 21 (1945). S. 146–155.

[4] Siehe [1] S. 177–195.

[5] Z. B. L. Bieberbach: „Lehrbuch der Funktionentheorie" Bd. II. Leipzig, Berlin 1927. S. 88.

[6] Z. B. C. Carathéodory: „Funktionentheorie" Bd. I. Basel 1950. S. 193.

[7] Z. B. C. Carathéodory: „Conformal Representation." London 1932. S. 62.

[8] Siehe z. B. [1] S. 197.

[9] Siehe [6] S. 86.

[10] Siehe [7] S. 73.

[11] Z. B. C. Carathéodory: „Funktionentheorie" Bd. II. Basel 1950. S. 14.

[12] J. Heinhold: „Ein Schmiegungsverfahren der konformen Abbildung." Sitz.-Ber. d. Bayer. Akad. d. Wiss., math.-nat. Kl. 1948. S. 203–222.

[13] F. Ringleb: „Numerische und graphische Verfahren der konformen Abbildung." Habilitationsschrift. Heidelberg 1939.

[14] R. Albrecht: „Zum Schmiegungsverfahren der konformen Abbildung." Zeitschr. f. ang. Math. u. Mech. Bd. 32 (1952). S. 316–318.

[15] T. Theodorsen: „Theory of wing sections of arbitrary shape." N.A.C.A. Report Nr. 411 (1931).