

Sitzungsberichte

der

mathematisch-naturwissenschaftlichen

Klasse

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften

zu München

Jahrgang 1953

München 1954

Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften

In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung

Zur Kennzeichnung der Kurven n -ter Ordnung im n -dimensionalen projektiven Raum

Von Otto Haupt in Erlangen

Vorgelegt am 4. Dezember 1953

1. Vorbemerkung

1.1. Ein auf A. Möbius¹ zurückgehender Satz besagt folgendes: Ist C eine einfache (geschlossene) Kurve in der projektiven Ebene R_2 und besitzt jeder Punkt von C eine konvexe Umgebung auf C , so ist C selbst konvex. Anders ausgedrückt: Besitzt eine Kurve C in R_2 keine mehrfachen Punkte und nur Punkte von zweiter (linearer) Ordnung,² so ist C selbst von zweiter Ordnung.

Bei den uns bekannten Beweisen wird meist³ vorausgesetzt, daß C in jedem Punkt differenzierbar ist, d. h. eine Tangente besitzt, die dann (wegen der lokalen Konvexität) von selbst stetig ist.⁴

1.2. Dieser Satz von Möbius (Nr. 1.1.) ist von J. Hjelmslev⁵ für den n -dimensionalen projektiven Raum R_n , $n \geq 3$, verallgemeinert worden zum folgenden:

¹ A. Möbius, Ber. Verh. Ges. d. Wiss. Leipzig 1848, 179ff. = Ges. Werke 2. Bd. (Lpz. 1886) 173 ff.

² Vgl. die Definition in Nr. 2. 1. 2.

³ Vgl. die Angaben bei E. Kivikoski, Ann. Acad. Sci. Fennicae, Ser. A. I. Math.-Phys. 131 (1952), insbesondere S. 5–6. Von Herrn Kivikoski wird (S. 6 oben) auch auf einen Beweis des allgemeinen Satzes (d. h. ohne Differenzierbarkeitsvoraussetzungen) hingewiesen, der mit der Abrundung etwaiger Ecken arbeitet. Ein anderer Beweis des allgemeinen Satzes bei H. Künneth, Journ. f. d. r. u. angew. Math. 191 (1953) 158 ff.; vgl. insbes. S. 160 Satz 1.

⁴ Vgl. z. B. Haupt-Aumann-Pauc, Differential- und Integralrechnung, 2. Bd. (2. Aufl., Berlin 1950), Nr. 2. 2. 5. Ferner I. Sauter, a. a. O. Fußnote 10, II., Nr. 2. 4.

⁵ J. Hjelmslev, Acta Math. 87 (1952) 59 ff. Der Satz selbst wurde von Hjelmslev (ohne Beweis) zuerst bekanntgegeben in Haupt, Sitz.-Ber. Phys.-med. Soz. zu Erlangen 72 (1940/41) 216 ff., insbesondere 222.

Satz. *Besitzt eine geschlossene Kurve C im R_n keine n linear abhängigen Punkte⁶ und nur Punkte n -ter Ordnung, so ist C selbst von n -ter Ordnung ($2 \leq n$).*

Entsprechend der üblichen Differenzierbarkeitsvoraussetzung beim Möbiusschen Satze ($n = 2$) macht auch Hjelmslev die Einschränkung, daß C in jedem Punkt *gewöhnlich differenzierbar* sei, d. h. daß in jedem Punkt $p \in C$ der vordere und der hintere k -dimensionale Tangentialschmieghalbraum identisch seien für $k = 1, \dots, n - 1$; diese Schmieghalbräume sind dann von selbst sogar stetig (vgl. dazu Nr. 2.1.2.).

1.3. Inwieweit der Satz von Hjelmslev aber auch ohne die in Nr. 1.2. genannte Differenzierbarkeitsvoraussetzung, speziell also etwa für Polygone, gilt, scheint bis jetzt nicht bekannt zu sein.⁷ In den folgenden Zeilen soll nun ein Beweis des in Nr. 1.2. angeführten Satzes von Hjelmslev skizziert werden, der keine Differenzierbarkeitsvoraussetzungen benötigt, also lediglich den bekannten⁸ allgemeinen Begriff der Kurve von der (linearen) Ordnung n im R_n zugrunde legt.

Wesentlich bei unserem Beweis ist vor allem: *Einerseits* eine genauere Analyse und Formulierung der Forderung, daß die betrachtete Kurve keine n „linear abhängigen“ Punkte enthalte (vgl. Nr. 2.1.3.); *andererseits* eine Untersuchung derjenigen Hyperebenen E , die mit C mehr als n Punkte gemeinsam haben (falls solche Hyperebenen überhaupt existieren) – oder vielmehr eine Untersuchung darüber, wie sich die gemeinsamen Punkte von C und E ändern, wenn E um eine Gerade durch geeignete zwei, evtl. „zusammenfallende“, dieser gemeinsamen Punkte monoton in geeigneter Richtung gedreht wird (vgl. Nr. 2.2.2.1.).

1.3.1. Der Kürze und auch der größeren Anschaulichkeit wegen wird in der vorliegenden vorläufigen Mitteilung: *erstens*

⁶ Dabei werden *mehrfache* sowie „unendlich benachbarte“ Punkte mit ihrer Vielfachheit gezählt, vgl. Hjelmslev, a. a. O. Fußnote 5, S. 74 Z. 5/6 von oben. Für nicht (überall) gewöhnlich differenzierbare Kurven, zunächst für $n = 3$, vgl. oben im Text Nr. 2. 1. 3.

⁷ Vgl. Hjelmslev, a. a. O. Fußnote 5, S. 59 u. 61 unten.

⁸ Vgl. etwa die grundlegende Arbeit von J. Hjelmslev, Introduction à la théorie des suites monotones, D. Kgl. Danske Vidensk. Selsk., Oversigt 1914, Nr. 1.

lediglich der Fall $n = 3$ besprochen, an welchem sich schon alle entscheidenden, gegenüber dem Beweis von Hjelmslev neuen, Überlegungen aufzeigen lassen; *zweitens* der Fall außer acht gelassen, daß die betrachtete Kurve ebene Teilbogen enthält; *drittens* möglichst enger Anschluß an den Gedankengang von Hjelmslev gewahrt.

1.3.2. Eine ausführliche Darlegung des Beweises soll später erscheinen. Dabei wird dann sogleich der Fall beliebiger $n \geq 2$ behandelt und der Fall einbezogen werden, daß die Kurve Teilbogen besitzt, die sich in eine Hyperebene einbetten lassen.⁹

Schließlich sei noch bemerkt: Da umgekehrt jede Kurve n -ter Ordnung ohne n linear abhängige Punkte der Voraussetzung des Hjelmslevschen Satzes genügt, so liefert dieser Satz eine Kennzeichnung solcher Kurven n -ter Ordnung. Auf die Frage, inwieweit die Forderung, daß keine n „linear abhängigen“ Punkte auf der Kurve existieren, für beliebige Kurven n -ter Ordnung erfüllt ist, soll an anderer Stelle eingegangen werden.

2. Skizze eines Beweises ohne Heranziehung von Differenzierbarkeitsvoraussetzungen

2.1. Bezeichnungen. Definitionen. Wir erinnern – zur Erleichterung der Lektüre – zunächst an die von uns benötigten wichtigsten Begriffe.

2.1.1. Tangenten und Schmiegeebenen. Paratingenten.¹⁰ Unter einem (einfachen) *Bogen* B bzw. einer (einfachen) *Kurve* C werde im folgenden jenes topologische¹¹ Bild einer abgeschlossenen Strecke bzw. einer 1-dimensionalen Sphäre im R_3 verstanden. Das in dieser Nr. für B Gesagte gilt von selbst auch für C . Eine

⁹ Herrn H. Künneth möchte ich auch an dieser Stelle herzlich danken für die Durchsicht und Kritik meines Manuskripts, das die ins einzelne gehenden Beweise für $n = 3$ enthält.

¹⁰ Näheres bei I. Sauter (I) Math. Zeitschr. 41 (1936) 507 ff.; (II) Math. Zeitschr. 42 (1937) 580 ff.

¹¹ Es genügt, nur *topologische* Bilder zu betrachten, da die hier in Frage kommenden Bogen und Kurven keine 3 linear abhängigen Punkte enthalten, also erst recht keine mehrfachen Punkte besitzen, vgl. Fußnote 16.

Menge M im R_3 heißt *beschränkt* bzw. *beschränkt*, wenn eine zur abgeschlossenen Hülle \overline{M} von M im R_3 fremde Ebene E existiert bzw. wenn eine zu \overline{M} fremde Ebene E als *uneigentliche* Ebene E_∞ ausgezeichnet ist ($R_3 - E_\infty$ kann dann als euklidischer Raum K_3 aufgefaßt werden); auf ein solches E_∞ bzw. K_3 beziehen sich die Begriffe „Halbgerade“, „Halbebene“, „von zwei Halbgeraden gebildeter Winkel“ usw.

Es sei B beschränkt und mit einer *Orientierung* versehen, auf welche sich die Bezeichnung „vorn“ (vorangehend) und „hinten“ (nachfolgend) beziehen. Unter der *vorderen* bzw. *hinteren Halbtangente* an B im Punkt $p \in B$ versteht man den Limes (falls er existiert) der Halbgeraden mit p als Anfangspunkt durch einen vor p auf B gelegenen, gegen p konvergierenden Punkt bzw. der Halbgeraden, die komplementär sind zu den Halbgeraden mit p als Anfangspunkt durch einen auf B hinter p gelegenen Punkt, der gegen p konvergiert. Existiert in p an B sowohl die vordere als die hintere Halbtangente und sind beide identisch, so heißt ihre Trägergerade die (*gewöhnliche*) Tangente an B in p . Die *vordere* bzw. *hintere Schmieghalbebene*¹² an B in p wird erklärt als der Limes, falls er existiert, derjenigen Halbebenen, die begrenzt werden von der, als existierend vorausgesetzten, gewöhnlichen Tangente an B in p und die einen vor bzw. hinter p auf B gelegenen Punkt von B enthalten, der gegen p konvergiert. Existiert sowohl die vordere als die hintere Schmieghalbebene an B in p und fallen beide Halbebenen zusammen, so spricht man von *der* Schmieghalbebene an B in p und bezeichnet ihre Trägerebene als die (*gewöhnliche*) Schmiegebene an B in p . Ein Punkt von B , in dem die Schmieghalbebene, also die (*gewöhnliche*) Tangente und Schmiegebene existiert, heißt gewöhnlich differenzierbar.

Ferner bezeichnet man als 1- bzw. 2-Paratingente an B in p jede Gerade bzw. Ebene, die Limes von Geraden bzw. Ebenen durch beliebige 2 bzw. 3 auf B (irgendwie) gegen p konvergierende Punkte ist. Die Orientierung von B überträgt sich auf die 1-Paratingenten, insbesondere also auch auf die (*gewöhnliche*) Tangente, falls sie existiert. Als orientierte Paratingenten-

¹² Ausführlicher auch „*Tangential*schmieghalbebene“ (im Gegensatz zur Paratingente). Vgl. Sauter, a. a. O. Fußnote 10, II., S. 586 Nr. 2. 1.

halbgerade an B in p bezeichnen wir jede mit einer orientierten 1-Paratingente in p gleichgerichtete Halbgerade, die p als Anfangspunkt besitzt.

2.1.2. Bogen und Punkte 3. Ordnung. Differenzierbarkeitseigenschaft. – Ein Bogen B heiße von 3. Ordnung, wenn B mit jeder Ebene höchstens 3 und mit mindestens einer Ebene genau 3 Punkte gemeinsam hat. Ein Punkt p von B heißt von 3. Ordnung, wenn eine, also jede hinreichend kleine, Umgebung¹³ von p auf B von 3. Ordnung ist.

In einem gewöhnlich differenzierbaren Punkt $p \in B$ von 3. Ordnung ist¹⁴ die Tangente bzw. die Schmiegeebene zugleich die einzige 1- bzw. 2-Paratingente an B . Auf jedem Bogen 3. Ordnung liegen die *gewöhnlich differenzierbaren Punkte dicht*, daher auch auf jedem Bogen und auf jeder Kurve, deren Punkte (bis auf eine auf B nirgends dichte Menge) sämtlich von 3. Ordnung sind. Bogen mit lauter Punkten 3. Ordnung sind Vereinigungen *endlich vieler* Bogen 3. Ordnung. Ein *beschränkter* Bogen, dessen Punkte sämtlich von 3. Ordnung sind, ist *rektifizierbar*.¹⁵ Zu einem derartigen Bogen gibt es (daher) eine Länge λ' derart, daß jeder Teilbogen von höchstens der Länge λ' von 3. Ordnung ist.

2.1.3. Definition der Trisekanten eines Bogens. An Stelle der Redeweise „Keine 3 Punkte von B sind linear abhängig“ (vgl. Nr. 1.2., Satz) benutzen wir von jetzt ab diese: „*Es besitzt B keine Trisekanten*“ und erklären als Trisekante von B jede Gerade G von einer der drei folgenden Arten:

a) Es hat G mit B mindestens 3 Punkte gemeinsam;¹⁶

¹³ Unter „Umgebungen“ eines Punktes $p \in B$ auf B werden hier stets in B offene, p enthaltende Teilbogen von B verstanden.

¹⁴ Vgl. Sauter, a. a. O. Fußnote 10, II., S. 588 Nr. 2. 3.

¹⁵ Dies gilt sogar für beschränkte Bogen von „beschränkter“ Ordnung. Vgl. A. Marchaud, Acta Math. 55 (1930) 67 ff.

¹⁶ Ist B nicht topologisches, sondern nur eindeutiges stetiges Streckenbild, darf also B mehrfache Punkte besitzen, so soll jeder Punkt von GB mit seiner Vielfachheit zu zählen sein. Bei dieser, der Natur der Sache entsprechenden Verabredung können Bogen ohne Trisekanten, wie sie im Satz von Hjelmslev zugrunde gelegt sind, nur einfach, d. h. nur topologische Streckenbilder, sein. (Vgl. Fußn. 11.)

b) Jede 1-Paratingente an B in einem Punkt $p \in B$, die – außer p – einen von p verschiedenen Punkt von B enthält;

c) Es sei E eine 2-Paratingente in p an B ; ferner seien H', H'' in E zwei verschiedene orientierte Paratingentenhalfgeraden in p an B (bei festem E_∞ ; vgl. Nr. 2. 1. 1.). Sind H', H'' (verschieden, aber) nicht entgegengesetzt gerichtet, so gilt als Trisekante jede, einen von p verschiedenen Punkt $q \in B \cap E$ enthaltende Gerade durch p , welche in dem durch H' und H'' begrenzten, abgeschlossenen Winkelraum kleiner als π und in dessen Scheitelwinkelraum verläuft. Ist $H' = H''$, so gilt als Trisekante die Trägergerade von H' , falls sie einen von p verschiedenen Punkt mit C gemeinsam hat. (Der Fall, daß H' entgegengesetzt gerichtet ist wie H'' , kann für uns außer Betracht bleiben.)

Anmerkung. Die Festsetzung (c) erweist sich als Konsequenz der Festsetzung (b), wenn gezeigt wird, daß die Geraden gemäß (c) zugleich 1-Paratingenten an B in p sind, wenigstens im Falle, daß die Paratingenten die Stetigkeitseigenschaften wie bei Bogen 3. Ordnung besitzen. Hinsichtlich der hiermit angeschnittenen Frage muß auf die ausführliche Darstellung verwiesen werden.

2.1.4. Folgerung. Aus der Voraussetzung, daß alle Punkte von C von 3. Ordnung sind und daß C keine Trisekanten im Sinne von Nr. 2. 1. 3. besitzt, kann man folgendes schließen: Es sei B ein Teilbogen von C , der (bezüglich eines festen E_∞) beschränkt und im übrigen beliebig ist; ferner sei B^* ein (stets vorhandener) beschränkter, offener Teilbogen von C derart, daß die in C abgeschlossene Hülle \bar{B} von B in B^* enthalten ist. Dann existiert zu B^* und B eine Länge γ mit folgender Eigenschaft: Jeder Punkt von B ist Mittelpunkt einerseits eines Teilbogens V' von B^* der Länge 4γ und von der Ordnung Drei, andererseits eines Teilbogens V von B^* der Länge γ , so daß folgendes gilt: Es seien p_1, p_2, p_3 zunächst (allgemeiner Fall) verschiedene Punkte von V , wobei p_j vor p_{j+1} auf C liegt; die p_j sind also linear unabhängig. Hat nun die Ebene D durch die p_j mit C (mindestens) einen von den p_j verschiedenen Punkt q gemeinsam, so liegt q in einem der nachstehend definierten Teile W, W', W_∞ von D : Man bezeichne mit $H(p_1; p_2)$ bzw. mit $H(p_3; p_2)$ diejenige Halbgerade, welche p_2 als Anfangspunkt besitzt, deren Trägergerade p_1 bzw. p_3 enthält,

während $H(p_1; p_2)$ bzw. $H(p_3; p_2)$ selbst fremd ist zu p_1 bzw. zu p_3 ; dann ist W der von $H(p_1; p_2)$ und $H(p_3; p_2)$ begrenzte offene Winkelraum kleiner als π mit p_2 als Scheitel; und weiter ist $W' = W'' - P$, wobei W'' den offenen Scheitelwinkelraum von $W \neq 0$ und P das beschränkte, von den p_j als Ecken bestimmte abgeschlossene Dreieck bedeutet; und schließlich ist W_∞ der Durchschnitt der (in D) abgeschlossenen Hüllen von W und W' (mit E_∞). – Dazu kommen noch die beiden Grenzfälle, daß D (1) die Ebene durch die Tangente T_1 an C in $p_1 = p_2 \neq p_3$ und durch den Punkt p_3 ist; (2) die Schmiegebene an C im gewöhnlich differenzierbaren Punkt $p_1 = p_2 = p_3$ ist. Im Fall (1) tritt an Stelle von $H(p_1; p_2)$ des allgemeinen Falles die im Sinne von C orientierte (hintere) Halbtangente T_h an C in p_1 , während W usw. wie im allgemeinen Falle definiert werden; im Fall (2) ist W' die von der Tangente T_1 im Punkt p_1 an C begrenzte offene Schmieghalbebene und W die zu W' komplementäre offene Halbebene von D .

2.1.5. Fallunterscheidung. Es sei C eine Kurve, deren Punkte sämtlich von 3. Ordnung sind. Weiter sei γ eine Länge von der in Nr. 2.1.4. angegebenen Art und V ein Teilbogen von C höchstens der Länge γ . Schließlich seien p_1, p_2, p_3 drei verschiedene Punkte von V , wobei p_j auf C vor p_{j+1} liegt. Hat nun die von den p_j aufgespannte Ebene D mit C noch (mindestens) einen weiteren Punkt q gemeinsam (also¹⁷ $q \in C - V$), so kann und soll angenommen werden, daß der, p_2 und p_3 enthaltende Teilbogen B' von C , dessen Endpunkte p_1 und q sind, mit D nur die p_j und q gemeinsam hat. Durch beliebig kleine Abänderung der p_j kann überdies erreicht werden, daß die p_j sämtlich gewöhnlich differenzierbar sind und daß q nicht in W_∞ liegt. Gemäß Nr. 2.1.4. ist dann einerseits entweder $q \in W'$ oder $q \in W$. Andererseits kann eine Umgebung von q auf B' auf der einen oder der anderen Seite von D liegen; wir bezeichnen dabei diejenige Seite von D als positiv bzw. negativ, auf der eine hintere Umgebung $O(p_3)$ von p_3 bzw. eine vordere Umgebung $U(p_1)$ von p_1 auf C liegt, also $U(p_1) - (p_1) \subset C - B'$. Nun bezeichnen wir mit $U(q)$ eine hinreichend kleine Umgebung von q auf B' und als Fall (I, 1) bzw. (I, 2) denjenigen Fall, in welchem $q \in W'$ ist und $U(q) - (q)$ auf

¹⁷ Weil V zufolge der Wahl von γ ein Bogen 3. Ordnung ist.

der positiven Seite von D liegt bzw. $q \in W$ ist und $U(q) - (q)$ auf der negativen Seite von D liegt. Durch Vertauschung von „positiven Seite“ und „negativen Seite“ in der Definition von Fall (I, 1) und (I, 2) ergibt sich die Definition der Fälle (II, 1) und (II, 2), womit alle Möglichkeiten erschöpft sind. – Wegen der noch in Betracht kommenden Grenzfälle vgl. Zusatz (2).

Zusatz. (1) Es geht Fall (I, 1) stetig in Fall (I, 2) über, wenn – bei geeigneter stetiger Bewegung von D – der Punkt q stetig durch W_∞ hindurch aus W' in W hinüberwandert; und umgekehrt. Entsprechend für (II, 1) und (II, 2). – (2) Der Fall (I, 1) führt bei geeignetem, stetigem Zusammenrücken der p_j in einen gewöhnlich differenzierbaren Punkt p' von B' zu dem (Grenz-) Fall, daß die Schmieghalbebene an B' in p' außer p' noch einen Punkt $q' \in C$ enthält ($p' \neq q'$), vorausgesetzt, daß beim Grenzübergang $p_j \rightarrow p'$ stets ein $q \in W' \subset C$ vorhanden ist und Fall (I, 1) vorliegt (vgl. auch Nr. 2.1.4., Grenzfall (2)). Entsprechendes gilt für den Fall, daß beispielsweise p_1 gegen p' und p_2 ebenfalls gegen p' konvergiert, wobei $p' \neq p_3$ (vgl. auch Nr. 2.1.4., Grenzfall (1)). – (3) Wird $U(p_1)$ bzw. $O(p_3)$ hinreichend klein gewählt, so bleibt $U(p_1) - (p_1)$ bzw. $O(p_3) - (p_3)$ bei den später (vgl. Nr. 2.2.5.) ausgeführten Drehungen von D stets fremd zu den bei den Drehungen auftretenden Ebenen D' ; man kann also von der „gleichen“ Seite verschiedener solcher Ebenen D' sprechen.

2.2. Gedankengang des Beweises. *Vorausgesetzt* ist C als (einfache) Kurve im projektiven R_3 ohne Trisekanten und ohne ebene Teilbogen sowie mit lauter Punkten 3. Ordnung. *Behauptet* wird, daß C von 3. Ordnung ist. – Der *Beweis* kann indirekt so geführt werden:

2.2.1. Man zeigt: Ist C von mindestens 4. Ordnung, so existieren auf C zwei Punkte p und q der folgenden Art: Ist V eine beliebig kleine Umgebung von p auf C , so gibt es gewöhnlich differenzierbare Punkte $p_j \in V$, $j = 1, 2, 3$, die mit q in der gleichen Ebene liegen (und von q sowie untereinander verschieden sind).

2.2.2. Unter der Differenzierbarkeitsannahme von Hjelmslev ist p gewöhnlich differenzierbar; in diesem Falle enthält daher die Schmiegebene an C in p noch einen Punkt $q \in C$ mit $p \neq q$. In

dem von uns zu behandelnden allgemeinen Fall hingegen kann p auch nicht-differenzierbar sein; um zu einer Schmiegeebene an C zu gelangen, die (mindestens) zwei Punkte von C enthält, muß man daher anders vorgehen. Wir nehmen o. B. d. A. an, daß p_1, p_2, p_3, q auf C in dieser Anordnung aufeinander folgen und daß der, p_2 und p_3 enthaltende Bogen B' mit den Endpunkten p_1 und q nur die p_j und q mit der Ebene durch die 3 (verschiedenen) p_j gemeinsam hat.

2.2.2.1. Wir zeigen nun: Je nachdem Fall (I) oder Fall (II) vorliegt, hat die Schmiegeebene an C in dem (gewöhnlich differenzierbaren) Punkt p_3 oder p_1 (mindestens) einen, von p_3 bzw. p_1 verschiedenen Punkt mit B' gemeinsam. – Der Beweis für diese Behauptung kann beispielsweise für den Fall (I) so geführt werden: Bei festen p_1, p_3 läßt man D sich so um die Verbindungsgerade von p_1 und p_3 drehen, daß p_2 stetig und monoton auf B' gegen p_3 rückt; man zeigt, daß sich dabei D monoton dreht und daß (infolgedessen) dabei $q \in D \cap B'$ auf B' monoton gegen p_3 rückt, während D gegen die Tangentialebene D' in p_3 an C durch p_1 konvergiert. Ist nun T_3 die Tangente an B' in p_3 , so läßt man die Ebene D' durch T_3 und p_1 sich so um T_3 drehen, daß p_1 auf B' stetig und monoton gegen p_3 rückt; man zeigt, daß sich dabei D' monoton um die (feste) Achse T_3 dreht und daß (infolgedessen) dabei $q \in D' \cap B'$ auf B' monoton gegen p_3 rückt. Dann konvergiert aber D' gegen die Schmiegeebene S an C im (gewöhnlich differenzierbaren) Punkt $p_3 \in C$ und S hat mit C den Limes der Punkte $q \in D' \cap B'$ gemeinsam.

2.2.3. Man zeigt weiter: Aus der Existenz einer Schmiegeebene an C in einem gewöhnlich differenzierbaren Punkt $p \in C$, welche einen Punkt $q \in C$ mit $p \neq q$ enthält, folgt die Existenz sogar einer Schmiegehalbebene an C in einem gewöhnlich differenzierbaren Punkt $p' \in C$, welche mit C einen Punkt $q' \in C$ mit $p' \neq q'$ gemeinsam hat (der Beweis kann im wesentlichen wie bei Hjelmslev geführt werden).

2.2.4. Man zeigt: Ist S_h eine Schmiegehalbebene im gewöhnlich differenzierbaren Punkt $p \in C$ und ist $(C - (p)) \cap D_h$ nicht leer, so liegt der Fall (I, 1) vor, genauer gesagt, ein Grenzfall von (I, 1)

(vgl. Nr. 2.1.5., Zusatz (2)) vor für einen *beschränkten* (abgeschlossenen) Teilbogen B von C mit den Endpunkten p und q , welcher mit S_h nur p und q gemeinsam hat.

2.2.5. Von dem in Nr. 2.2.4. betrachteten speziellen Fall (I, 1) ausgehend kann man nun einen Teilbogen B' von B konstruieren, welcher um mindestens eine feste Länge γ' kürzer ist als B und für den wieder der spezielle Fall (I, 1) aus Nr. 2.2.4. vorliegt. Man benutzt zur Konstruktion das in Nr. 2.2.2.1. angedeutete Verfahren; nämlich: Man wählt zu B eine Länge γ gemäß Nr. 2.1.4. und einen gewöhnlich differenzierbaren Punkt $p_3 \in B$, welcher auf B von $p = p_1$ um mehr als $\gamma' = 2^{-1}\gamma$ und um weniger als γ entfernt ist. Sodann dreht man S_h *monoton und stetig* in einem geeigneten Sinne um die Tangente T_1 an C in p_1 und zeigt: Bei dieser Drehung geht S_h in Ebenen über, die mit C einerseits einen auf B *monoton* von p_1 nach p_3 wandernden Punkt p'_3 gemeinsam haben, andererseits einen auf B *monoton* von q aus gegen p_3 wandernden Punkt q' . Zufolge der Wahl von γ liegt während des ganzen Verlaufes der Drehung in Hinsicht auf p_1 , T_1 , p'_3 und q' stets der Fall (I, 1) vor – genauer gesagt ein Grenzfall von (I, 1) (vgl. Nr. 2.1.5., Zusatz (2)) – und außerdem kann sich q' nicht beliebig dem Punkt p_3 nähern, auch wenn p'_3 gegen p_3 konvergiert. Nachdem $p'_3 = p_3$ erreicht ist, dreht man die durch T_1 und p_3 bestimmte Ebene D' um die Verbindungsgerade G der jetzt festgehaltenen Punkte p_1 und p_3 derart, daß dabei ein auf B gelegener Punkt p_2 der sich drehenden Ebene *monoton und stetig* von p_1 nach p_3 wandert. Ist $p_2 = p_3$ erreicht, so dreht man weiter um die Tangente T_3 an C in p_3 bis in die Schmiegebene an C in p_3 . Man konstatiert: Erstens wandert auch bei den betrachteten Drehungen um die Geraden G und T_3 ein auf der sich drehenden Ebene liegender Punkt q' von B *monoton* gegen p_3 ohne sich p_3 beliebig zu nähern; zweitens liegt während des ganzen Verlaufes der Drehungen stets der Fall (I, 1) vor, so daß sich am Ende der Drehungen ein Teilbogen B' des beschränkten Bogens B ergibt mit folgender Eigenschaft: Der eine Endpunkt von B' ist $p' = p_3$ und gewöhnlich differenzierbar; die Schmiegehalbebene in p' an B' hat mit B' nur dessen anderen Endpunkt q' gemeinsam; es liegt q' innerhalb B und B' ist um mehr als $2^{-1}\gamma = \gamma'$ kürzer als B .

2.2.6. Zuzolge Nr. 2.2.5. liegt für den um mehr als γ' kürzeren Teilbogen B' von B bezüglich seiner Endpunkte p', q' der gleiche Fall vor wie für B bezüglich p, q . Daher kann auf B' das gleiche Verfahren angewandt werden wie auf B in Nr. 2.2.5., und zwar mit der gleichen Länge γ' wie für B . Bei Fortsetzung des Verfahrens gelangt man also nach beschränkt vielen Schritten zu einem Teilbogen B'' von B , dessen Länge kleiner als 2γ ist und für den die Schmieghalbebene im (gewöhnlich differenzierbaren) Endpunkt p'' den anderen Endpunkt q'' enthält. Dies steht im Widerspruch dazu, daß B'' , weil von kleinerer Länge als 2γ , echter Teilbogen eines Bogens 3. Ordnung ist.