Sitzungsberichte

der

mathematisch-naturwissenschaftlichen Klasse

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften zu München

Jahrgang 1953

München 1954

Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften

In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung

Bemerkungen zur Winkelteilung

Von **Hanfried Lenz** in München

Vorgelegt von Herrn Frank Löbell am 6. November 1953

In dieser Note soll die Frage behandelt werden: Welche Strekken lassen sich mit dem Lineal und einem gedachten Instrument *(Winkelteiler)* konstruieren, das erlaubt, jeden Winkel in beliebig viele gleiche Teile zu teilen, wenn die Strecken aus einem vorliegenden reellen Zahlenkörper G gegeben sind? (Die freie Benützung des Zirkels sei also nicht gestattet.) Alle Bausteine zur Lösung sind durch die klassische Theorie der algebraischen Gleichungen und die Hilbertschen Untersuchungen über Konstruktionen mit Lineal und Eichmaß mit den Ergänzungen von Artin gegeben[1, 2, 3]; es handelt sich hier nur noch darum, die Lösung daraus zusammenzufügen. Wir beweisen im folgenden

Satz 1: *Notwendig und hinreichend dafür, daß eine Strecke x aus den Punkten, deren Koordinaten (in einem rechtwinkligen cartesischen Koordinatensystem) reelle Zahlen aus einem Körper G sind, mit Lineal und Winkelteiler konstruierbar ist, sind folgende Bedingungen:*

I. *x ist algebraisch über G mit auflösbarer Galoisscher Gruppe.*

II. *Das über G irreduzible Polynom, das durch x zu Null gemacht wird, zerfällt in jedem reell abgeschlossenen Körper $K \supseteqq G$ in Linearfaktoren.*

Im Fall, daß sich G nur auf eine Art anordnen läßt (z. B. wenn G der rationale Zahlkörper oder reell quadratisch abgeschlossen ist), genügt es, für K den Körper der reellen Zahlen zu nehmen. Denn dann ist jeder reell abgeschlossene Körper $K \supseteqq G$ ein

---

[1] B. L. v. d. Waerden, Moderne Algebra, Bd. 1, insbes. Kap. VII u. IX.

[2] D. Hilbert, Grundlagen der Geometrie, VII. Aufl., Leipzig 1930, insbesondere § 37.

[3] E. Artin, Über die Zerlegung definiter Funktionen in Quadrate, Abh. math. Sem. Hamburg 5 (1927), S. 100–115.

Oberkörper des über G algebraischen, reell abgeschlossenen Körpers aus reellen Zahlen (bis auf Isomorphie mit Erhaltung der Anordnung). Dagegen genügt diese abgeschwächte Bedingung z. B. nicht im Fall $G = R(\sqrt{2})$, wobei R der rationale Zahlkörper ist. Denn die Gleichung $x^2 = 1 + \sqrt{2}$ hat bekanntlich [2](S. 120) zwei reelle Wurzeln, die nicht mit Lineal und Eichmaß (oder Winkelhalbierer) konstruierbar sind. Bedingung II ist hier auch nicht erfüllt, denn in $R(\sqrt{2})$ ist $\sqrt{2} + 1$ nicht Quadratsumme, also gibt es (v. d. Waerden a. a. O., S. 244 u. 247) einen reell abgeschlossenen Körper K, in dem $-(\sqrt{2} + 1)$ Quadrat ist. Dann kann aber $\sqrt{2} + 1$ nicht auch Quadrat in K sein.

Beweis des Satzes 1: **1.** Die Notwendigkeit der Bedingung I folgt daraus, daß Winkelteilungen sich durch Adjunktion von Radikalen im Komplexen ausführen lassen.

2. Wir beweisen die Behauptung zunächst für den Sonderfall, daß $G(x)$ über G zyklisch vom Primzahlgrad p ist. Es sei zunächst $p = 2$. Daß Bedingung II dann notwendig ist, folgt daraus, daß durch Winkelhalbierungen zu G nur Quadratwurzeln aus Quadratsummen adjungiert werden können; denn alle solchen Quadratwurzeln liegen in jeder reell abgeschlossenen Erweiterung von G.

Andererseits sei Bedingung II erfüllt, und $x = \sqrt{c}$ sei die zu adjungierende Größe. Wäre c nicht Quadratsumme in G, so gäbe es nach Artin einen reell abgeschlossenen Körper $K \supseteqq G$, in dem $-c$ Quadrat wäre, $+c$ also nicht, was Bedingung II widerspricht. Also ist c Quadratsumme und x durch Winkelhalbierungen konstruierbar.

3. Es sei nun p eine ungerade Primzahl. Daß Bedingung II notwendig ist, ergibt sich wie folgt: *Einen Winkel in p Teile zu teilen bedeutet, den Wert von* $\operatorname{tg} \varphi$ *zu ermitteln, wenn* $\operatorname{tg} p\varphi$ *eine Größe aus G ist.* Die zugehörige algebraische Gleichung ist von ungeradem Grad, hat also in jedem reell abgeschlossenen Körper $K \supseteqq G$ eine Wurzel. Ist x_0 eine solche, so ist auch

$$x_k = \frac{x_0 + \operatorname{tg} \frac{k\pi}{p}}{1 - x_0 \operatorname{tg} \frac{k\pi}{p}}$$

eine. Nun gehört $\operatorname{tg}\frac{k\pi}{p}$ jedem reell abgeschlossenen Körper an (genauer: die irreduzible Gleichung, der $\operatorname{tg}\frac{k\pi}{p}$ genügt, zerfällt in jedem reell abgeschlossenen Körper in Linearfaktoren), also auch x_k; d. h. alle Konjugierten zu x_0 liegen in K, und das war der Inhalt der Bedingung II.

4. Umgekehrt gelte nun Bedingung II. Wir wollen zeigen, daß sich x durch Winkelhalbierungen und -p-Teilungen aus G konstruieren läßt. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit dürfen wir annehmen, daß G die Real- und Imaginärteile aller $2p$-ten Einheitswurzeln enthält, da diese durch Winkelhalbierungen und eine Winkel-p-Teilung konstruierbar sind. γ sei eine primitive p-te Einheitswurzel. Dann wird $G(\gamma) = G(i)$. $x_0, x_1, \ldots, x_{p-1}$ seien die (reellen) Wurzeln einer über G irreduziblen zyklischen Gleichung p-ten Grades in solcher Anordnung, daß $x_k = S^k x_0$ ist, wobei S die erzeugende Substitution der Galoisschen Gruppe sei. Wir bilden, wie üblich, die Lagrangesche Resolvente

$$(1) \qquad \alpha = (\gamma, x) = x_0 + \gamma x_1 + \gamma^2 x_2 + \ldots + \gamma^{p-1} x_{p-1}.$$

Bekanntlich (vgl. v. d. Waerden, S. 178) ist $x_0 \in G(i, \alpha)$.

5. Setzen wir $\bar{\alpha} = (\gamma^{-1}, x)$, so ist $\alpha + \bar{\alpha}$ eine reelle Zahl aus $G(i, x_0)$, also aus $G(x_0)$. Läge $\alpha + \bar{\alpha}$ schon in G, so wäre wegen $\alpha \cdot \bar{\alpha} \in G$, (weil $\alpha \cdot \bar{\alpha}$ erstens nach v. d. Waerden, S. 177–78 in $G(i)$ liegt und zweitens reell ist), α quadratisch über G; d. h. $x_0 \in G(\alpha, i)$ wäre vom ersten, zweiten oder vierten Grade über G, was nicht sein kann.

Also ist, weil es keinen Körper zwischen G und $G(x_0)$ gibt,

$$G(\alpha + \bar{\alpha}) = G(x_0).$$

Wir können, weil α^p in $G(\gamma) = G(i)$ liegt, setzen

$$\alpha = r \cdot e^{\varphi i} \quad \text{mit} \quad r = \sqrt[p]{|a|},\ a \in G(i),$$
$$e^{2p\varphi i} \in G(i),$$

also
$$\operatorname{tg} p\varphi = -i\,\frac{1 - e^{-2p\varphi i}}{1 + e^{-2p\varphi i}} \in G(i).$$

Weil $\operatorname{tg} p\varphi$ reell ist, ist sogar $\operatorname{tg} p\varphi \in G$.

Ferner ist

$$\alpha\bar{\alpha} = r^2 \in G \subseteq G(|a|).$$

Andererseits war

$$r^p \in G(|a|),$$

Es folgt $r \in G(|a|)$, d.h. *r ist aus G durch einmaliges Winkelhalbieren konstruierbar.*

Weiter ist

$$\alpha + \bar{\alpha} = 2r\cos\varphi = \frac{2r}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\varphi}}.$$

Daraus folgt: *x_0 ist aus G durch eine Winkel-p-Teilung und höchstens zwei Winkelhalbierungen konstruierbar.*

6. Nun betrachten wir den allgemeinen Fall. y sei primitives Element des von x erzeugten, über G normalen Körpers. Ferner sei $G = G_0 \subset G_1 \subset \ldots \subset G_s = G(y)$ eine Kette ineinandergeschachtelter Körper, und y_k sei primitives Element von G_k für $k = 1, 2, \ldots, s$. Bedingung II sagt also aus, daß die irreduzible Gleichung $f(y) = 0$, der y genügt, in jedem reell abgeschlossenen Körper $K \supseteq G$ vollständig zerfällt.

Das ist dann und nur dann der Fall, wenn Bedingung II für jede einzelne der Erweiterungen G_{k+1} über G_k gilt.

Es gelte nämlich erstens Bedingung II für $G(y)$ über G. Ein reell abgeschlossener Körper $K_k \supseteq G_k$ enthält G, also zerfällt $f(y)$ in K_k in Linearfaktoren. Daher liegt auch y_{k+1} mit allen über G_k Konjugierten in K_k, d. h. Bedingung II gilt für die Erweiterung von G_k auf G_{k+1}.

Zweitens gelte Bedingung II für jede einzelne der Erweiterungen. Jeder reell abgeschlossene Körper $K \supseteq G$ enthält dann einen zu G_1 isomorphen Körper, nach Bedingung II für die Erweiterung von G_1 auf G_2 auch einen zu G_2 isomorphen Körper usw., d.h. Bedingung II gilt auch für die Erweiterung von G durch y zu $G(y)$.

7. Aus diesem Ergebnis folgt, daß man den für zyklische Erweiterungen vom Primzahlgrad bereits bewiesenen Satz 1 schrittweise anwenden darf, und damit, daß er allgemein gilt.

Bemerkungen: a) Man kann sich fragen, *wieviele* Winkelteilungen zur Gewinnung des Körpers $G(x)$ erforderlich sind und ob die Konstruktion, die mit der geringsten Zahl von Winkelteilungen zum Ziel führt, eindeutig bestimmt ist hinsichtlich der zu adjungierenden irrationalen Zahlen. Als Beispiel beweisen wir

Satz 2: *Jede reelle Zahl, die sich aus dem rationalen Grundkörper mit dem Lineal und höchstens einmaliger Anwendung des Zirkels gewinnen läßt, läßt sich auch mit dem Lineal und höchstens zwei Winkelhalbierungen konstruieren.*

Beweis: Die mit einmaliger Benützung des Zirkels konstruierbaren Irrationalzahlen sind genau die Zahlen $a + b\sqrt{m}$, wobei a, b, rational, $m > 1$ ganz rational und quadratfrei sei. Wenn m Summe zweier Quadrate ist und nur dann, genügt *eine* Winkelhalbierung. Wenn m nicht von der Form $8k + 7$ ist, ist m Summe dreier Quadrate,[4] woraus die Behauptung folgt. Ist $m \equiv 7 \pmod 8$, so wähle man für u und v zwei teilerfremde Zahlen, von denen keine durch 4 teilbar ist. Dann existiert eine Darstellung

$$m(u^2 + v^2) = a^2 + b^2 + c^2$$

in ganzen rationalen Zahlen a, b, c oder

$$m(u^2 + v^2)^2 = \left(ua + v\sqrt{b^2 + c^2}\right)^2 + \left(va - u\sqrt{b^2 + c^2}\right)^2,$$

woraus die Behauptung folgt.

b) Als weiteres Beispiel behandeln wir die Wurzel x einer *auflösbaren* Gleichung 7. Grades mit lauter reellen Wurzeln und rationalen Koeffizienten. Die Bedingungen des Satzes 1 sind dann erfüllt. Die Ordnung der Galoisschen Gruppe von $G(x)$ über G ist ein Teiler von 42. Nach Adjunktion von $\operatorname{tg}\frac{\pi}{7}$ mit Hilfe von Halbierungen und einer Dreiteilung wird also noch (höchstens) eine Dreiteilung und eine Siebenteilung (neben weiteren Halbierungen) benötigt.

c) Wir zeigen an einem Beispiel, daß es nicht immer möglich ist, bei der Lösung einer den Bedingungen des Satzes 1 genügen-

[4] Enzykl. d. math. Wiss. I C 2, S. 619.

den Gleichung von ungeradem Primzahlgrad ohne Halbierungen auszukommen. Es sei $x = \cos\varphi$ mit $\cos 3\varphi = 1/3$. Die Zahl x genügt der Gleichung

$$12x^3 - 9x - 1 = 0,$$

die nach dem Schoenemann-Eisensteinschen Kriterium (angewandt auf die Gleichung für $1/x$) irreduzibel ist. Der von x erzeugte Normalkörper 6. Grades ist $G(y) = G(\cos\varphi, \sqrt{3}\sin\varphi) = G(\cos\varphi, \sqrt{3}\cdot\operatorname{tg} 3\varphi) = G(x, \sqrt{6})$. $G(y)$ ist zyklisch vom 3. Grad über $G(\sqrt{6})$, nicht aber über $G(\sqrt{3})$. Denn ist $H \supseteqq G$ ein Erweiterungskörper von G und ist $H(y)$ über H nicht zyklisch vom 3. Grad, wohl aber über $H_1 \supset H$, so ist notwendig $H_1 = H(\sqrt{6})$. Denn $H(y)$ enthält nur *einen* über H normalen Unterkörper, weil die Galoissche Gruppe nur einen eigentlichen Normalteiler enthält. Nun kann eine Winkeltrisektion niemals einen $\sqrt{3}$ enthaltenden Körper H quadratisch erweitern. Daher ist es nicht immer möglich, nur mit dem Lineal und mit Winkeldreiteilungen aus dem Cosinus eines Winkels β den Cosinus des Winkels $\beta/3$ zu konstruieren. (Schon $\operatorname{tg}\beta$ ist mit diesen Mitteln nicht immer aus $\cos\beta$ konstruierbar.)

Die verwandte Frage nach der Möglichkeit, eine über dem rationalen Zahlkörper *zyklische* Gleichung 3. Grades allein durch Winkeldreiteilungen (und Linealkonstruktionen, aber ohne Halbierungen) zu lösen, kann ich nicht beantworten.

Gleichfalls unbeantwortet bleibt die Frage nach dem Bereich aller allein mittels Winkelteilungen durch *vorgegebene* Nenner, zu denen 2 *nicht* gehöre, konstruierbaren Strecken, sowie die entsprechende für *Zirkel und Winkelteiler* als zulässige Hilfsmittel. Die Bedingung, daß x mit allen Konjugierten über dem beliebigen reellen Grundkörper reell und algebraisch mit auflösbarer Gruppe sein soll, ist offenbar hinreichend, aber nicht notwendig für Konstruierbarkeit mit Zirkel und Winkelteiler. Notwendig ist diese Bedingung nur für jede Einzelerweiterung vom Primzahlgrad.

d) Die Bedingung II des Satzes 1 kann in manchen Fällen abgeschwächt werden zu

II′. *Die über G irreduzible Gleichung, der x genügt, hat lauter reelle Wurzeln und behält diese Eigenschaft, wenn man G in irgendeiner anderen Anordnung in den Körper der reellen Zahlen einbettet.*

Das ist klar, wenn G absolut algebraisch ist, denn dann ist jeder über G algebraische, reell abgeschlossene Körper einem reellen Zahlenkörper isomorph. Das gilt aber, wie gleich gezeigt wird, auch, wenn G durch Adjunktion endlich vieler reeller Zahlen aus dem rationalen Zahlenkörper R entsteht. Denn dann kann G als algebraischer Funktionenkörper von endlichem Transzendenzgrad aufgefaßt werden. Es genügt, wie beim Beweis zu Satz 1, die einzelnen zyklischen Erweiterungen vom Primzahlgrad p zu betrachten. Für ungerades p reicht bereits die Bedingung, daß x selbst reell sei, hin. Für $p = 2$ ist zu zeigen, daß eine adjungierte Quadratwurzel eine Quadratsumme als Radikanden hat. Ist nämlich $x = \sqrt{c}$, so verlangt Bedingung II′, daß c bei jeder *archimedischen* Anordnung von G positiv ausfällt. G archimedisch anordnen bedeutet nun nichts anderes, als für die Elemente einer Transzendenzbasis von G über R solche algebraisch unabhängigen transzendenten Zahlen einzusetzen, daß G ein reeller Zahlenkörper wird. Das ist nach Artin[3] (S. 114) möglich. Bei einer solchen Einsetzung, und daher bei *jeder* Einsetzung reeller Zahlen, für die G ein reeller Zahlenkörper wird (weil in beliebiger Nähe eines n-tupels reeller Zahlen stets ein n-tupel algebraisch unabhängiger transzendenter Zahlen liegt), wird c nach Bedingung II′ niemals negativ. Nach dem letzten Satz in der Artinschen Arbeit[3] ist daher c Quadratsumme in G.

Im allgemeinen Fall aber wäre die Ersetzung von II durch II′ *falsch*, wie das folgende Beispiel zeigt:

Es sei R der rationale Zahlkörper, $H = R(t)$ eine reine einfach transzendente Erweiterung und G entstehe aus H durch Adjunktion aller Wurzeln $\sqrt{1 + nt}$, wobei n die Reihe der natürlichen Zahlen durchlaufe. G gestattet dann unendlich viele archimedische Anordnungen mit positivem t. Man braucht, um das zu sehen, für t nur eine beliebige positive transzendente Zahl einzusetzen. Für $t < 0$ dagegen folgt aus der Eigenschaft, daß $1 + nt$ Quadrat ist:

$$nt > -1 \text{ für alle } n,$$

d. h. t ist notwendig eine negative unendlich kleine Größe. Andererseits ist, falls $t < 0$ unendlich klein angenommen wird, auch immer $1 + nt > 0$; daher ist G Unterkörper des algebraischen reell abgeschlossenen Körpers über G, der die Ordnung von $R(t)$ fortsetzt, und kann daher nichtarchimedisch angeordnet werden.

Die Gleichung $x^2 = t$ hat also bei jeder Einbettung von G in den reellen Zahlenkörper reelle Wurzeln, wie es Bedingung II' fordert, und doch ist t nicht Quadratsumme, x also nicht durch Winkelhalbieren konstruierbar.

e) Der rationale Zahlkörper R hat nach Satz 2 die Eigenschaft, daß jede aus ihm mit *einmaliger Anwendung* des Zirkels konstruierbare Strecke auch durch Winkelhalbieren gewonnen werden kann. Diese Eigenschaft ist nicht auf R beschränkt, sondern es gilt

Satz 3: Für reelle Zahlkörper G sind die folgenden Eigenschaften gleichbedeutend:

A. *G läßt sich eindeutig anordnen.*

B. *Jede Zahl aus G ist entweder Quadratsumme oder negative Quadratsumme.*

C. *Jede mit einmaliger Anwendung des Zirkels aus G konstruierbare Strecke läßt sich auch mit Lineal und Winkelhalbierer konstruieren.*

Beweis: Aus Eigenschaft B folgt, daß das Vorzeichen jeder Zahl des geordneten Körpers G eindeutig bestimmt ist, also A. Umgekehrt folgt B aus A. Denn gäbe es eine Zahl $g \in G$, so daß weder g noch $-g$ Quadratsumme wäre, so gäbe es nach dem üblichen Artinschen Schluß (Fußnote 3, S. 102) zwei reell abgeschlossene Körper über G, so daß in dem einen $-g$, in dem anderen $+g$ Quadrat wäre. Diese beiden Körper bestimmten in G zwei verschiedene Anordnungen (mit verschiedenem Vorzeichen der Zahl g) im Widerspruch zu A.

Aus B folgt nun C; denn ist x mit einmaliger Anwendung des Zirkels konstruierbar, so ist $x = a + b\sqrt{g}$ mit a, b, g aus G, also $g > 0$. Daher ist $-g$ nicht Quadratsumme, nach B also $+g$, und

x ist durch Winkelhalbieren konstruierbar. Gilt umgekehrt C, so muß jedes positive $g \in G$ Quadratsumme sein, woraus B folgt.

Beispiele für Körper, die die Bedingungen des Satzes 3 erfüllen, sind

α) Der Körper, der aus dem rationalen Zahlkörper R durch Adjunktion aller 2^n-ten ($n = 1, 2, 3, \ldots$) Wurzeln aus einer festen rationalen Zahl entsteht.

β) Der Körper, der aus R durch Adjunktion aller reellen Wurzeln irreduzibler Gleichungen mit genau einer reellen Wurzel entsteht, oder ein beliebiger Unterkörper dieses Körpers.

Diese beiden Körper gestatten nämlich, wie man leicht sieht, keine nichtidentischen isomorphen Abbildungen auf reelle Zahlenkörper, und daraus folgt für absolut algebraische Körper die Eigenschaft 1. Aus Satz 3 folgt speziell: Jeder *Wurzelausdruck* über dem Körper der rationalen Zahlen, in dem erstens keine Quadratwurzel unter einer anderen Quadratwurzel steht und zweitens die Radikanden der Quadratwurzeln positiv sind, läßt sich mit Hilfe von reellen Radikalen *ungeraden* Grades und Winkelhalbierungen konstruieren.

Denn der Radikand jeder vorkommenden Quadratwurzel ist positiv und gehört einem Unterkörper U des unter β genannten Körpers an, ist also Quadratsumme in U.