Sitzungsberichte

der

mathematisch-naturwissenschaftlichen

Klasse

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften

zu München

Jahrgang 1953

München 1954

Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften

In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung

Über vollständige Erweiterungen linearer, stetiger Abbildungen

Von Elmar Thoma in Pretzfeld/Ofr.

Vorgelegt von Herrn Otto Haupt am 8. Mai 1953

1. Bezeichnungen.

Unter einem σ-Vektorverband R wird im folgenden ein Vektorverband mit den reellen Zahlen als Operatoren (Rieszscher Raum) verstanden, in welchem die Vereinigung bzw. der Durchschnitt jeder nach oben bzw. nach unten beschränkten, abzählbaren Teilmenge von R existiert; es ist dann z. B. erklärt $\underline{\lim}\text{ alg } a_n = \bigcup_{\nu=1}^{\infty}\left(\bigcap_{n=\nu}^{\infty} a_n\right)$ usw.[1] – Beispiel: Der σ-Vektorverband $w(\mathfrak{M})$ der eindeutigen, *reellen*, *endlichen* Funktionen mit gemeinsamem Definitionsbereich $\mathfrak{M}$, wenn für $f_1, f_2 \in w(\mathfrak{M})$ erklärt wird: $f_1 \leqq f_2$, falls $f_1(x) \leqq f_2(x)$ für jedes $x \in \mathfrak{M}$. – Betrachtet werden im folgenden die (eindeutigen) linearen, stetigen Abbildungen F eines Untervektorverbandes r von R in $w(\mathfrak{M})$,[2] in Zeichen $w(\mathfrak{M})/F/r$ oder kürzer F/r oder F; „linear" besagt: $F(\alpha f + \beta g) = \alpha F(f) + \beta F(g)$ für beliebige $f, g \in r$ und beliebige reelle Zahlen α, β; „stetig" besagt: Aus $f_n \geqq f_{n+1}$, $f_n \in r$, $n = 1, 2, \ldots,$ und $\lim\text{ alg } f_n = 0$ in R folgt $\lim\text{ alg } F(f_n) = 0$, wobei 0 die Null der Addition in R bzw. in $w(\mathfrak{M})$ ist.

2. Fragestellung und Ergebnis.

Das Problem ist, bei Zugrundelegung eines jeweils bestimmten Prozesses $\boldsymbol{P}$, jedes lineare, stetige F/r zu einem linearen, stetigen

---

[1] $\bigcup$ und $\bigcap$ sind dabei in R bzw. später auch in $w(\mathfrak{M})$ gebildet. Bezüglich des im folgenden benutzten Rechnens in Vektorverbänden vgl. man etwa G. Birkoff, Lattice Theory, New York 1948 oder H. Nakano, Modern Spectral Theory, Tokio 1950. Die Bezeichnung lim alg nach Haupt-Aumann-Pauc, Differential- und Integralrechnung, III. Bd. (2. Aufl.), Nr. 1.6.3 (im Druck).

[2] Die in der Beschränkung auf $w(\mathfrak{M})$ liegende Spezialisierung gegenüber R wird bei unseren Beweisen mehrfach benötigt.

F/r', der sog. „$\boldsymbol{P}$-Erweiterung", zu erweitern, derart, daß r' mit $r \subseteqq r' \subseteqq R$ ein σ-Untervektorverband von R (also insbesondere Erweiterung von r) ist und daß die $\boldsymbol{P}$-Erweiterung „$\boldsymbol{P}$-vollständig", d. h. nicht mehr $\boldsymbol{P}$-erweiterbar, ist. Im folgenden werden zwei Prozesse $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{A}$ und $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{M}$ zugrunde gelegt, welche Verallgemeinerungen zweier bekannter Prozesse sind, wie sie beispielsweise bei der Erweiterung des bestimmten Integrals stetiger Funktionen (im euklidischen E_n) zum Lebesgueschen Integral Verwendung finden.[1] Von diesen Prozessen *arbeitet* $\boldsymbol{A}$ *mit der Bildung von* lim alg *in* R *und in* $w(\mathfrak{M})$, besitzt also verbandsalgebraischen Charakter, *während* $\boldsymbol{M}$ *Limesbildungen bezüglich einer*, weiter unten zu definierenden, *Metrik* (genauer Quasimetrik) *heranzieht*. Ein *Vergleich* der $\boldsymbol{A}$-*vollständigen* und der $\boldsymbol{M}$-*vollständigen Erweiterung* ergibt: Die $\boldsymbol{M}$-*Erweiterung* ist *Verengung der* $\boldsymbol{A}$-*Erweiterung*; ob dabei der Fall echter Verengung auftritt, konnte bisher nicht entschieden werden.[2]

3. Die Erweiterungsprozesse.

Es sollen jetzt noch die Erweiterungsprozesse $\boldsymbol{A}$ und $\boldsymbol{M}$ geschildert werden. Zunächst wird gezeigt, daß man jede stetige, lineare Abbildung F/r als Differenz zweier stetiger, linearer, positiver[3] Abbildungen F^+/r und F^-/r darstellen kann. Bei $\boldsymbol{A}$ wird zuerst F/r als positiv vorausgesetzt und sodann die obige Differenzdarstellung von F/r herangezogen; bei $\boldsymbol{P}$ wird ein Teilschritt von $\boldsymbol{A}$ benutzt. Der Nachweis, daß F/r in F^+/r und F^-/r zerlegbar ist, stützt sich wesentlich auf den Satz, daß jedes stetige, lineare F/r von selbst „relativ beschränkt" ist, d. h. daß zu jedem $f \in r$ ein $Q \in w(\mathfrak{M})$ existiert mit $|F(g)| \leqq Q$ für jedes $g \in r$ mit $|g| \leqq |f|$ (Betr. $|f|$ vgl. Nr. 3. 2.). Beim Beweis dieses

---

[1] Man vgl. dazu etwa P. J. Daniell, A General Form of Integral, Annals of Math. 19, 2 (1917–1919) und M. H. Stone, Notes on Integration I–II, Proc. nat. Acad. Sci. USA 34 (1948).

[2] Hinsichtlich der Beweise sowie wegen weiterer Einzelheiten sowie der Literaturangaben sei auf die Arbeit des Verf.: Über die Erweiterung und Vollständigkeit stetiger linearer Abbildungen (Diss. Erlangen 1952) verwiesen.

[3] Es heißt F/r *positiv*, wenn $F(a) \geqq 0$ für jedes $a \in r$ mit $a \geqq 0$. Wegen der Linearität ist damit gleichbedeutend, daß $F(a) \leqq F(b)$, wenn $a \leqq b$ und $a, b \in r$.

Satzes wird die Tatsache benützt, daß die Elemente von $w(\mathfrak{M})$ reelle Funktionen sind.

3. 1. Die A-Erweiterung.[1] Es sei $\bar{w}(\mathfrak{M})$ das System aller reellen (auch nicht-endlichen) Funktionen mit dem Definitionsbereich $\mathfrak{M}$, ferner sei F/r *positiv* und $\{a_n\}$ eine nicht-fallende bzw. nicht-steigende Folge mit $a_n \in r$, $n = 1, 2, \ldots$. Wir setzen dann $\lim \text{alg}\, F(a_n) = F^*(\{a_n\})$ bzw. $= F_*(\{a_n\})$; (hierbei ist lim alg auf $\bar{w}(\mathfrak{M})$ bezogen und existiert in $\bar{w}(\mathfrak{M})$.) Weiter bezeichnen wir für jedes $a \in R$ mit $e^*(a)$ bzw. $e_*(a)$ das (ev. leere) System aller nicht-fallenden bzw. nicht-steigenden Folgen $\{a_n\}$ mit $a_n \in r$, für welche $a = \lim \text{alg}\,(a \frown a_n)$ bzw. $a = \lim \text{alg}\,(a \smile a_n)$. Wir erklären zwei Abbildungen $\bar{w}(\mathfrak{M})/\bar{F}/R$ und $\bar{w}(\mathfrak{M})/\underline{F}/R$ wie folgt: für leeres $e^*(a)$ bzw. $e_*(a)$ sei $\bar{F}(a) = +\infty$ bzw. $\underline{F}(a) = -\infty$;[2] sonst sei $\bar{F}(a) = \inf\big(F^*(\{a_n\});\ \{a_n\} \in e^*(a)\big)$ bzw. $\underline{F}(a) = \sup\big(F_*(\{a_n\});\ a_n \in e_*(a)\big)$. Nun wird s definiert als das System aller $a \in R$ mit $\bar{F}(a) = \underline{F}(a) \in w(\mathfrak{M})$ und sodann $w(\mathfrak{M})/I/s$ vermöge $I(a) = \bar{F}(a)$ für $a \in s$. Es erweist sich I/s als linear, stetig und positiv, sowie als Erweiterung von F/r; ferner ist s mit $r \subseteq s \subseteq R$ sogar ein σ-Unterverband von R derart, daß aus $a_n, g, h \in s$ mit $g \leqq a_n \leqq h$, $n = 1, 2, \ldots$, und $a = \lim \text{alg}\, a_n$ in R folgt: Es ist $a \in s$ sowie $I(a) = \lim \text{alg}\, I(a_n)$. Überdies gilt: I/s ist A-vollständig; ferner ist jede lineare, stetige, positive Erweiterung I'/s' von F/r mit I/s auf $s \frown s'$ identisch.

Jetzt sei F/r nicht notwendig positiv, also $F = F^+ - F^-$ mit linearen, stetigen, positiven F^+ und F^-. Ist nun I^+/s^+ bzw. I^-/s^- die A-Erweiterung von F^+/r bzw. F^-/r, so ist I/s mit $s = s^+ \frown s^-$ und mit $I(a) = I^+(a) - I^-(a)$, $a \in s$, wieder lineare, stetige und A-vollständige Erweiterung von F/r.

3. 2. Die M-Erweiterung. Bei gegebenem F/r setzen wir $F_0 = F^+ + F^-$; dann ist F_0/r linear, stetig und positiv. Wir bilden (vgl. 3. 1) $\bar{w}(\mathfrak{M})/\bar{F}_0/R$ und verengen dies zu $w(\mathfrak{M})/N/p$, nämlich

---

[1] Man vergleiche zur A-Erweiterung positiver, stetiger, linearer Abbildungen auch H. Nakano, Über die Erweiterung von allgemein teilweise geordneten Moduln, II. Proc. Imp. Acad. Tokyo Vol. 19 (1943), S. 140–143. Der Verf. erhielt erst während der Korrektur Kenntnis von dieser Arbeit.

[2] Hierbei steht $+\infty$ bzw. $-\infty$ als Abkürzung für $f \in \bar{w}(\mathfrak{M})$ mit $f(x) = +\infty$ bzw. $= -\infty$ für alle $x \in \mathfrak{M}$.

auf das System p aller $a \in R$ mit $N(|a|) = \bar{F}(|a|) \in w(\mathfrak{M})$, wobei $|a| = (a \cup 0) + (-a \cup 0)$; es ist $r \subseteqq p$. Da $N(|a|)$ für jedes $a \in p$ eine reelle, endliche, nicht-negative Funktion ist, die der Bedingung $N(|a+b|) \leqq N(|a|) + N(|b|)$ genügt, läßt sich mittels N definieren: $\{a_n\}$ mit $a_n \in p$ heißt N-konvergent mit $a \in p$ als N-Limes von $\{a_n\}$, wenn ein nicht steigendes $\{e_m\}$ existiert mit $e_m \in w(\mathfrak{M})$ und folgenden Eigenschaften: $\lim \operatorname{alg} e_m = 0$; zu jedem m gibt es eine natürliche Zahl $k(m)$ derart, daß $N(|a - a_n|) \leqq e_m$ für $n \geqq k(m)$. (Man beachte, daß ein N-Limes durch $\{a_n\}$ nicht eindeutig bestimmt ist.) Es sei jetzt r_1 das System aller $a \in p$, welche N-Limiten von $\{a_n\}$ mit $a_n \in r$ sind, und es sei $S_1(a) = \lim \operatorname{alg} F(a_n)$, wenn a N-Limes eines $\{a_n\}$ mit $a_n \in r$ ist ($\lim \operatorname{alg} F(a_n)$ existiert in $w(\mathfrak{M})$). Es ist $r \subseteqq r_1$, ferner $w(\mathfrak{M})/S_1/r_1$ linear, stetig und Erweiterung von F/r. Erneute Anwendung dieses Erweiterungsverfahrens, jetzt auf S_1/r_1 (statt auf F/r) liefert nach höchstens ω_1 Schritten (wobei ω_1 die erste Ordnungszahl der dritten Zahlklasse) eine ***M**-vollständige*, lineare, stetige Abbildung $w(\mathfrak{M})/S^*/r^*$, wobei r^* ein σ-Unterverband von R ist. Bei *abzählbarem* $\mathfrak{M}$ ist bereits S_1/r_1 **M**-vollständig.