Sitzungsberichte

der

mathematisch-naturwissenschaftlichen Klasse

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften zu München

Jahrgang 1953

München 1954
Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften
In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung

Über die Preece'schen Kettenbrüche

Von **Oskar Perron** in München

Vorgelegt am 9. Januar 1953

§ 1. Ziel der Arbeit

Unter den vielen unbewiesenen Formeln, mit denen Ramanujan die mathematische Welt überrascht hat und die in den Collected Papers abgedruckt sind, findet man auch die folgenden zwei (Seite XXVIII):

$$8\int_0^\infty \frac{te^{-t\sqrt{5}}}{e^t+e^{-t}}\,dt = \left[\frac{1|}{|1} \overline{+\frac{\nu^2|}{|1} + \frac{\nu^2|}{|1}}\right]_{\nu=1}^{\infty},$$

$$4\int_0^\infty \frac{t^2e^{-t\sqrt{3}}}{e^t-e^{-t}}\,dt = \left[\frac{1|}{|1} \overline{+\frac{\nu^3|}{|1} + \frac{\nu^3}{|2\nu+1}}\right]_{\nu=1}^{\infty}.$$

In der ersten Formel ist die rechte Seite eine Abkürzung für den ausführlich geschriebenen Kettenbruch

$$\frac{1|}{|1} + \frac{1^2|}{|1} + \frac{1^2|}{|1} + \frac{2^2|}{|1} + \frac{2^2|}{|1} + \frac{3^2|}{|1} + \frac{3^2|}{|1} + \cdots.$$

Analog ist die zweite Formel zu verstehen, und entsprechende leicht verständliche Schreibungen werden im folgenden stets gebraucht.

In dem Bestreben, hinter das Geheimnis dieser Formeln zu gelangen, hat Herr Preece Kettenbrüche für die Integrale mit einer Variabeln an Stelle der Konstanten $\sqrt{5}$ und $\sqrt{3}$ gesucht und ist dabei zu folgenden Formeln gekommen[1]:

---

[1] C. T. Preece, Theorems stated by Ramanujan (X), The Journal of the London mathematical society **6** (1930).

$$(1.1)\quad \int_0^\infty \frac{2e^{-xt}}{e^t+e^{-t}}\,dt = \left[\frac{1|}{|x}\,\overline{+\,\frac{\nu^2|}{|x}}\right]_{\nu=1}^{\infty},$$

$$(1.2)\quad \int_0^\infty \frac{2te^{-xt}}{e^t+e^{-t}}\,dt = \left[\frac{1}{|x^2-1}\,\overline{|+\,\frac{4\nu^2|}{|1}+\frac{4\nu^2}{|x^2-1}|}\right]_{\nu=1}^{\infty},$$

$$(1.3)\quad \int_0^\infty \frac{2te^{-xt}}{e^t-e^{-t}}\,dt = \left[\frac{1|}{|x}\,\overline{+\,\frac{\nu^4}{|(2\nu+1)x}|}\right]_{\nu=1}^{\infty},$$

$$(1.4)\quad \int_0^\infty \frac{2t^2e^{-xt}}{e^t-e^{-t}}\,dt = \left[\frac{1}{|x^2-1}\,\overline{|+\,\frac{2\nu^3|}{|1}+\frac{2\nu^3}{|(2\nu+1)(x^2-1)}|}\right]_{\nu=1}^{\infty}.$$

Aus der zweiten für $x=\sqrt{5}$ und aus der vierten für $x=\sqrt{3}$ entstehen durch eine einfache Äquivalenztransformation die Ramanujanschen Formeln. Herr Preece gelangt zu seinen Kettenbrüchen, indem er die Funktionen

$$\frac{2t}{e^t\pm e^{-t}},\quad \frac{2te^{-t}}{e^t\pm e^{-t}}$$

nach Potenzen von t entwickelt, die Reihen mit e^{-xt} multipliziert und dann gliedweise von 0 bis ∞ integriert. Die so entstehenden für alle x divergenten Reihen stellen allerdings die betreffenden Integrale für $x\to\infty$ asymptotisch dar; der weitere Weg bis zu den Kettenbrüchen unterliegt jedoch den gleichen Bedenken, die ich kürzlich zu dem in der gleichen Arbeit enthaltenen Beweis einer anderen Ramanujan-Formel geäußert habe[2]. Auf alle Fälle bedeutet aber diese Methode ein fruchtbares heuristisches Prinzip, um derartige Kettenbrüche überhaupt einmal zu finden, wenn sie auch nicht als strenger Beweis gelten kann. Im folgenden will ich nun die Preece'schen Formeln und noch eine Reihe weiterer mit Hilfe der Bauer-Muir-Transformation herleiten, die ich auch in meiner gerade zitierten Arbeit zum Beweis der dortigen Ramanujan-Formel benutzt habe. In § 2 soll zunächst das Wesen der Methode auseinandergesetzt werden; in den folgenden

[2] Oskar Perron, Über eine Formel von Ramanujan. Diese Sitzungsberichte Jahrgang 1952.

Paragraphen folgen dann die verschiedenen Kettenbrüche einfach als Beispiele. Wie ich dem Buch von Wall[3] entnehme, sind die gewonnenen Formeln zum Teil schon von Stieltjes[4] und Rogers[5] auf andere Weise gefunden worden.

§ 2. Die Bauer-Muir-Transformation

Bezeichnet man die Näherungszähler und -nenner des Kettenbruches

$$\left[b_0 \overline{+ \frac{a_\nu}{b_\nu}}\right]_{\nu=1}^{\infty} \tag{2.1}$$

mit A_ν, B_ν, so daß also

$$\begin{cases} A_0 = b_0, \; A_1 = b_0 b_1 + a_1, \; A_\nu = b_\nu \; A_{\nu-1} + a_\nu A_{\nu-2} \text{ für } \nu \geqq 2 \\ B_0 = 1, \; B_1 = b_1, \qquad\qquad B_\nu = b_\nu \; B_{\nu-1} + a_\nu B_{\nu-2} \text{ für } \nu \geqq 2 \end{cases} \tag{2.2}$$

ist, so kann man einen Kettenbruch

$$\left[d_0 \overline{+ \frac{c_\nu}{d_\nu}}\right]_{\nu=1}^{\infty} \tag{2.3}$$

bilden, dessen Näherungszähler und -nenner nach Vorgabe irgend einer Folge $r_0, r_1, r_2, \ldots$ der Reihe nach die folgenden sind:

$$\begin{cases} A_0 + r_0, \; A_1 + r_1 A_0, \; A_2 + r_2 A_1, \; A_3 + r_3 A_2, \ldots \\ B_0, \qquad B_1 + r_1 B_0, \; B_2 + r_2 B_1, \; B_3 + r_3 B_2, \ldots \end{cases} \tag{2.4}$$

Die Größen c_ν, d_ν sind diesen Forderungen gemäß leicht zu be-

---

[3] H. S. Wall, Analytic theory of continued fractions. New York 1948.

[4] T. J. Stieltjes, Sur la réduction en fraction continue d'une série procédant suivant les puissances descendantes d'une variable, Annales de la faculté des sciences de Toulouse **3** (1889) = Oeuvres, vol. **2**. – Sur quelques intégrales définies et leur développement en fractions continues, Quarterly journal of mathematics **24** (1890) = Oeuvres, vol. **2**.

[5] L. J. Rogers, On the representation of certain asymptotic series as convergent continued fractions, Proceedings of the London mathematical society, ser. 2, vol. **4** (1907).

rechnen und sind in meinem Buch[6] auf Seite 216 angegeben. Es sind, wenn zur Abkürzung

$$a_\nu - r_{\nu-1}(b_\nu + r_\nu) = \varphi_\nu \tag{2.5}$$

gesetzt wird, die folgenden:

$$d_0 = b_0 + r_0, \quad c_1 = \varphi_1, \quad d_1 = b_1 + r_1,$$

$$c_\nu = a_{\nu-1}\frac{\varphi_\nu}{\varphi_{\nu-1}}, \quad d_\nu = b_\nu + r_\nu - r_{\nu-2}\frac{\varphi_\nu}{\varphi_{\nu-1}} \quad \text{für} \quad \nu \geqq 2.$$

Der transformierte Kettenbruch ist also dieser:

$$\left[b_0 + r_0 + \frac{\varphi_1 \mid}{\mid b_1 + r_1} \overline{+ \frac{a_{\nu-1}\varphi_\nu : \varphi_{\nu-1} \mid}{\mid b_\nu + r_\nu - r_{\nu-2}\varphi_\nu : \varphi_{\nu-1}}}\right]_{\nu=2}^{\infty}. \tag{2.6}$$

Dabei müssen die φ_ν natürlich von 0 verschieden vorausgesetzt werden. Man sagt dann, daß der Kettenbruch (2.6) durch eine Bauer-Muir-Transformation aus (2.1) entsteht.

Nun ist folgendes klar: Wenn die Elemente a_ν, b_ν des Kettenbruches (2.1) reell und wenn die Näherungsnenner B_ν von einem gewissen ν an positiv sind, was insbesondere dann zutrifft, wenn abgesehen vom Anfangsglied b_0 die a_ν, b_ν selbst positiv sind, und wenn der Kettenbruch konvergiert, wenn ferner auch die r_ν von einem gewissen ν an wenigstens $\geqq 0$ sind, so ist der transformierte Kettenbruch (2.6) ebenfalls konvergent und ist gleich dem ursprünglichen; in der Tat sind ja seine Näherungsbrüche $\frac{A_\nu + r_\nu A_{\nu-1}}{B_\nu + r_\nu B_{\nu-1}}$ Mittelwerte zwischen $\frac{A_\nu}{B_\nu}$ und $\frac{A_{\nu-1}}{B_{\nu-1}}$. Das ist im wesentlichen der Inhalt von Satz 12 in Kett S. 220; nur ist dort zur Vermeidung der Brüche $\frac{\varphi_\nu}{\varphi_{\nu-1}}$ eine geänderte Bezeichnung gewählt. Für den gegenwärtigen Zweck ist es bequemer, die obige Bezeichnung beizubehalten.

Aber auch, wenn die B_ν und r_ν nicht positiv sind, so daß die Näherungsbrüche des transformierten Kettenbruches keine Mit-

---

[6] Oskar Perron, Die Lehre von den Kettenbrüchen. Leipzig und Berlin 1913, zweite Aufl. 1929. Im folgenden unter Kett zitiert.

telwerte sind, kann unter Umständen auf Gleichheit der beiden Kettenbrüche geschlossen werden. Das wird bei unserem letzten Beispiel der Fall sein.

In den folgenden Beispielen werden nun durchwegs die $a_{2\nu-1}$ und $a_{2\nu}$ Polynome von ν sein, die $b_{2\nu-1}$ und $b_{2\nu}$ ebenfalls; doch werden letztere noch eine Variable x enthalten, so daß der Kettenbruch (2.1) eine Funktion $F(x)$ ist. Man sucht nun die $r_{2\nu-1}$ und $r_{2\nu}$ so als Polynome von ν zu bestimmen, daß φ_ν von ν unabhängig wird. Dann hat der transformierte Kettenbruch (2.6) dieselben Teilzähler wie der ursprüngliche, nur mit einer Indexverschiebung. In den Teilnennern von (2.6) wird die Variable x vorkommen und der transformierte Kettenbruch wird ein ähnliches Aussehen haben wie der ursprüngliche. Die Beispiele sind so gewählt, daß einfach x in $x+\gamma$ geändert erscheint, wo γ eine Konstante. Die Gleichsetzung der beiden Kettenbrüche gewinnt dadurch das Aussehen einer Funktionalgleichung

$$F(x) = \frac{P(x)\,F(x+\gamma) + Q(x)}{R(x)\,F(x+\gamma) + S(x)}, \tag{2.7}$$

die dann, wenn die Matrix

$$\begin{pmatrix} P(x) & Q(x) \\ R(x) & S(x) \end{pmatrix}$$

genügend einfach ist, die Funktion $F(x)$ durch Iteration zu berechnen gestattet, indem man für x der Reihe nach x, $x+\gamma$, $x+2\gamma$, ... setzt.

Beim letzten Beispiel (§ 10) wird die Sache etwas komplizierter sein. Da lassen sich zwar die $r_{2\nu-1}$ und $r_{2\nu}$ so bestimmen, daß die $\varphi_{2\nu-1}$ und $\varphi_{2\nu}$ von ν unabhängig werden; es wird aber nicht mehr $\varphi_{2\nu-1} = \varphi_{2\nu}$, sondern $\varphi_{2\nu-1} = -\varphi_{2\nu}$. Daher werden die Teilzähler des transformierten Kettenbruches nicht mehr gleich denen des ursprünglichen, sondern bekommen ein Minuszeichen. Man kann nun aber auf den transformierten Kettenbruch eine zweite Bauer-Muir-Transformation anwenden, wodurch wieder ein dem ursprünglichen ähnlicher Kettenbruch entsteht und man eine Funktionalgleichung der Form (2.7) erhält. Bei der zweiten Bauer-Muir-Transformation sind aber die B_ν und r_ν nicht mehr positiv,

so daß hier noch eine Sonderbetrachtung nötig wird (§ 11), um sicher zu sein, daß der zweimal transformierte Kettenbruch gleich dem einmal transformierten ist.

§ 3. Erstes Beispiel

Bei dem Kettenbruch

$$(3.1)\quad F(x) = \left[x + \frac{c\nu^2}{|\,2\nu + x}\right]_{\nu=1}^{\infty} \qquad (c > 0,\ (x > -2)$$

ist $a_\nu = c\nu^2$, $b_\nu = 2\nu + x$ und, allenfalls vom Anfangsglied b_0 abgesehen, sind alle a_ν, b_ν positiv. Nach dem Kriterium Kett S. 239, Satz 10 erweist er sich als konvergent[7]. Wir suchen nun $r_\nu = p\nu + q$ so zu bestimmen, daß φ_ν von ν unabhängig wird. Zunächst ist nach (2.5)

$$\varphi_\nu = c\nu^2 - (p\nu + q - p) \cdot [(p + 2)\nu + q + x].$$

Damit das von ν unabhängig wird, müssen p und q so gewählt werden, daß

$$p(p + 2) = c, \quad p(q + x) + (q - p)(p + 2) = 0$$

ist. Damit r_ν von einem gewissen ν an sicher positiv wird, muß $p > 0$ sein. Aus diesen Forderungen ergibt sich

$$(3.2)\qquad p = -1 + \sqrt{1 + c}, \quad q = \frac{p(p + 2) - px}{2p + 2}.$$

Dann wird

$$(3.3)\qquad \varphi_\nu = (p - q)(q + x).$$

Nun ist

$$(3.4)\quad \left\{\begin{aligned} p - q &= p - \frac{p(p + 2) - px}{2p + 2} = \frac{p(p + x)}{2p + 2}, \\ q + x &= \frac{p(p + 2) - px}{2p + 2} + x = \frac{(p + 2)(p + x)}{2p + 2}. \end{aligned}\right.$$

---

[7] Auch bei den späteren Beispielen wird sich die Konvergenz stets aus diesem Kriterium erkennen lassen, ohne daß wir das erneut sagen.

Damit $\varphi_\nu \neq 0$ ist, muß also $x \neq -p$ sein. Mit Rücksicht auf Späteres wollen wir sogar $x > -p$ voraussetzen. Der transformierte Kettenbruch ist nun nach (2.6) der folgende:

$$\left[x + q + \frac{\varphi_1}{|\,2 + x + p + q} \overline{\Big|} + \frac{c\,(\nu - 1)^2}{|\,2\nu + x + 2p}\right]_{\nu=2}^{\infty}$$

$$= \left[x + q + \frac{(p - q)\,(q + x)}{|\,(q - p) + (x + 2 + 2p)} \overline{\Big|} + \frac{c\,\nu^2}{|\,2\nu + x + 2 + 2p}\right]_{\nu=1}^{\infty}$$

$$= x + q + \frac{(p - q)\,(q + x)}{q - p + F(x + 2 + 2p)}.$$

Man hat daher die Funktionalgleichung

$$F(x) = x + q + \frac{(p - q)\,(q + x)}{q - p + F(x + 2 + 2p)} = \frac{(x + q)\,F(x + 2 + 2p)}{F(x + 2 + 2p) + q - p},$$

oder einfacher unter Berücksichtigung von (3.4)

$$(3.5) \qquad \frac{1}{F(x)} = \frac{2p + 2}{p + 2} \cdot \frac{1}{p + x} - \frac{p}{p + 2} \cdot \frac{1}{F(x + 2 + 2p)}.$$

Da nun p nach (3.2) von x unabhängig ist und da offenbar $\lim\limits_{x \to \infty} F(x) = \infty$ ist, ergibt sich aus (3.5), indem man x durch $x + 2\nu + 2\nu p$ ersetzt, sodann mit $\left(\frac{-p}{p + 2}\right)^\nu$ multipliziert und schließlich nach ν summiert:

$$\frac{1}{F(x)} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{2p + 2}{p + 2} \left(\frac{-p}{p + 2}\right)^\nu \frac{1}{p + x + 2\nu + 2\nu p}.$$

Die Reihe hat die Gestalt einer integrierten geometrischen Reihe und läßt sich als solche in mannigfacher Weise summieren, z. B. so:

$$2 \int_0^1 \frac{t^{(x-1):(p+1)}}{(p + 2) + p\,t^2}\, dt,$$

wobei die oben gemachte Voraussetzung $x > -p$ wesentlich ist. Man verifiziert das sofort, indem man den Integranden nach Potenzen von t entwickelt. Wenn man jetzt für $F(x)$ den Ketten-

bruch (3.1) und für p den Wert aus (3.2) einsetzt, ergibt sich das Resultat

(3.6)

$$\left[\frac{1\,|}{|\,x}\,\overline{+\,\frac{c\,\nu^2}{|\,2\nu+x}}\right]_{\nu=1}^{\infty} = 2\int_0^1 \frac{t^{(x-1):\sqrt{1+c}}}{(\sqrt{1+c}+1)+(\sqrt{1+c}-1)\,t^2}\,dt.$$

$$\text{für } c>0,\ x>-2,\ x>1-\sqrt{1+c}.$$

Diese Formel steht ebenfalls in den Collected Papers von Ramanujan (Seite XXIX) und ist auch von Preece in einer anderen Arbeit bestätigt worden[8].

§ 4. Zweites Beispiel

Bei dem Kettenbruch

$$(4.1)\quad F(x)=\left[x+\overline{\frac{(\nu^2-m^2)\,(\nu^2-n^2)\,|}{|\,(2\nu+1)\,x}}\right]_{\nu=1}^{\infty} \qquad \left(\begin{matrix} x>0, \\ m^2<1,\ n^2<1 \end{matrix}\right)$$

ist $a_\nu=(\nu^2-m^2)\,(\nu^2-n^2)$, $b_\nu=(2\nu+1)\,x$. Alle a_ν, b_ν sind positiv[9] und der Kettenbruch ist konvergent. Diesmal wird man r_ν als Polynom zweiten Grades von ν ansetzen und die Koeffizienten so zu bestimmen suchen, daß φ_ν von ν unabhängig wird. Man findet

$$(4.2)\qquad r_\nu=\nu^2+(1-x)\,\nu+\frac{1+x^2-m^2-n^2}{2}.$$

Dann ist in der Tat

$$(4.3)\quad \left\{\begin{aligned} \varphi_\nu &= (\nu^2-m^2)\,(\nu^2-n^2)- \\ &\quad -\left[\nu^2-(x+1)\,\nu+\frac{(x+1)^2-m^2-n^2}{2}\right]\left[\nu^2+(x+1)\,\nu+\frac{(x+1)^2-m^2-n^2}{2}\right] \\ &= m^2n^2-\left[\frac{(x+1)^2-m^2-n^2}{2}\right]^2 \end{aligned}\right.$$

---

[8] C. T. Preece, Theorems stated by Ramanujan (VI): Theorems on continued fractions, The Journal of the London mathematical society **4** (1928).

[9] m^2 und n^2 dürfen auch negativ sein.

oder durch Zerlegung in Faktoren

$$(4.4)\qquad \varphi_\nu = -\frac{1}{4}\prod_\varepsilon (x+1+m+\varepsilon n)(x+1-m-\varepsilon n),$$

wo das Produkt über die zwei Werte $\varepsilon = \pm 1$ zu erstrecken ist. Damit $\varphi_\nu \neq 0$ wird, müssen wir also $x+1 \neq \pm(m+n)$, $\pm(m-n)$ voraussetzen. Es ist

$$b_\nu + r_\nu - r_{\nu-2} = (2\nu+1)x + 4\nu - 4 + 2(1-x) = (2\nu-1)(x+2),$$

und da für hinreichend großes ν offenbar auch die Forderung $r_\nu > 0$ erfüllt ist, gilt also die Transformationsformel

$$F(x) = \left[\frac{(x+1)^2-m^2-n^2}{2} + \cfrac{\varphi_1}{2x+2+\cfrac{1+x^2-m^2-n^2}{2} + \cfrac{\left|\overline{\cfrac{[(\nu-1)^2-m^2]\,[(\nu-1)^2-n^2]}{(2\nu-1)(x+2)}}\right|}{}}\right]_{\nu=2}^{\infty}$$

$$= \left[\frac{(x+1)^2-m^2-n^2}{2} + \cfrac{\varphi_1}{\cfrac{(x+1)^2-m^2-n^2}{2}+x+2 + \cfrac{\left|\overline{\cfrac{(\nu^2-m^2)(\nu^2-n^2)}{(2\nu+1)(x+2)}}\right|}{}}\right]_{\nu=1}^{\infty}.$$

Aus ihr fließt die Funktionalgleichung

$$F(x) = \frac{(x+1)^2-m^2-n^2}{2} + \cfrac{\varphi_1}{\cfrac{(x+1)^2-m^2-n^2}{2} + F(x+2)},$$

oder mit Benutzung von (4.3):

$$(4.5)\qquad F(x) = \frac{\frac{1}{2}[(x+1)^2-m^2-n^2]\,F(x+2) + m^2n^2}{F(x+2) + \frac{1}{2}[(x+1)^2-m^2-n^2]}.$$

Nunmehr unterscheiden wir zwei Fälle: $mn \neq 0$ und $mn = 0$.

Fall 1. $mn \neq 0$. Setzt man

$$\frac{F(x)+mn}{F(x)-mn} = G(x), \qquad \text{also} \qquad F(x) = mn\,\frac{G(x)+1}{G(x)-1},$$

so geht die Funktionalgleichung nach leichter Rechnung über in:

$$G(x) = \frac{(x+1+m-n)(x+1-m+n)}{(x+1+m+n)(x+1-m-n)}\cdot G(x+2).$$

Die hier auftretenden Faktoren haben wir als $\neq 0$ vorausgesetzt. Sie bleiben von selbst $\neq 0$, wenn x durch $x+2$, $x+4$, ... ersetzt wird, weil ja m und n, falls reell, auf das Intervall von -1

bis $+1$ beschränkt sind. Da augenscheinlich $\lim\limits_{x\to\infty} F(x) = \infty$, also $\lim\limits_{x\to\infty} G(x) = 1$ ist, so folgt aus der letzten Formel, wenn man x durch $x + 2\nu$ ersetzt und das Produkt nach ν bildet:

$$G(x) = \prod_{\nu=1}^{\infty} \frac{(x-1+2\nu+m-n)(x-1+2\nu-m+n)}{(x-1+2\nu+m+n)(x-1+2\nu-m-n)}.$$

Dieses Produkt läßt sich auf Grund der bekannten Formel

$$\prod_{\nu=1}^{\infty} \frac{a+\nu}{\nu} e^{-\frac{a}{\nu}} = \frac{e^{-Ca}}{\Gamma(a+1)} \quad (C = \text{Euler'sche Konstante})$$

sofort in geschlossener Form darstellen:

$$\frac{\Gamma\left(\frac{x+1+m+n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{x+1-m-n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{x+1+m-n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{x+1-m+n}{2}\right)}.$$

Somit ergibt sich das Resultat

$$(4.6)\quad \begin{cases} \left[x + \dfrac{(\nu^2-m^2)(\nu^2-n^2)}{(2\nu+1)x}\right]_{\nu=1}^{\infty} = mn\,\dfrac{G(x)+1}{G(x)-1}, \\ G(x) = \dfrac{\Gamma\left(\frac{x+1+m+n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{x+1-m-n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{x+1+m-n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{x+1-m+n}{2}\right)} \\ \text{für } x > 0,\ m^2 < 1,\ n^2 < 1,\ x+1 \neq \pm(m+n),\ \pm(m-n). \end{cases}$$

Fall 2. $n = 0$. In diesem Fall vereinfacht sich die Funktionalgleichung (4.5) zu

$$\frac{1}{F(x)} = \frac{2}{(x+1)^2 - m^2} + \frac{1}{F(x+2)},$$

woraus wegen $\lim\limits_{x\to\infty} F(x) = \infty$ sofort folgt:

$$(4.7)\qquad \frac{1}{F(x)} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{2}{(x-1+2\nu)^2 - m^2},$$

und für $m \neq 0$ durch Partialbruchzerlegung

$$\frac{1}{F(x)} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{m}\left(\frac{1}{x-1+2\nu-m} - \frac{1}{x-1+2\nu+m}\right).$$

Diese Reihen sind auf Grund der bekannten Formeln

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\frac{1}{a+\nu}-\frac{1}{\nu}\right)=-C-\frac{\Gamma'}{\Gamma}(a+1),$$

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{(a+\nu)^2}=\frac{\Gamma''}{\Gamma}(a+1)-\left[\frac{\Gamma'}{\Gamma}(a+1)\right]^2$$

gleich

$$\frac{1}{2m}\left[-\frac{\Gamma'}{\Gamma}\left(\frac{x+1-m}{2}\right)+\frac{\Gamma'}{\Gamma}\left(\frac{x+1+m}{2}\right)\right] \qquad (\text{falls } m \neq 0),$$

$$\frac{1}{2}\frac{\Gamma''}{\Gamma}\left(\frac{x+1}{2}\right)-\frac{1}{2}\left[\frac{\Gamma'}{\Gamma}\left(\frac{x+1}{2}\right)\right]^2 \qquad (\text{falls } m = 0).$$

Man gewinnt daher die Resultate:

$$(4.8)\quad \left|\begin{array}{l}\left[\dfrac{1}{|x}\,\Big|\,\dfrac{(\nu^2-m^2)\,\nu^2}{|(2\nu+1)\,x}\right]_{\nu=1}^{\infty}=\dfrac{1}{2m}\left[\dfrac{\Gamma'}{\Gamma}\left(\dfrac{x+1+m}{2}\right)-\dfrac{\Gamma'}{\Gamma}\left(\dfrac{x+1-m}{2}\right)\right]\\ \text{für } x>0,\ 1>m^2>-\infty,\ m\neq 0,\end{array}\right.$$

$$(4.9)\quad \left[\frac{1}{|x}\,\Big|\,\frac{\nu^4}{|(2\nu+1)\,x}\right]_{\nu=1}^{\infty}=\frac{1}{2}\frac{\Gamma''}{\Gamma}\left(\frac{x+1}{2}\right)-\frac{1}{2}\left[\frac{\Gamma'}{\Gamma}\left(\frac{x+1}{2}\right)\right]^2$$

$$\text{für } x>0.$$

Für $m = 0$ läßt sich die Reihe (4.7) noch auf eine zweite Art summieren. Es ist nämlich

$$\int_0^\infty \frac{2te^{-xt}}{e^t-e^{-t}}\,dt-\int_0^\infty \frac{2te^{-(x+2)t}}{e^t-e^{-t}}\,dt$$

$$=\int_0^\infty \frac{2te^{-(x+1)t}}{e^t-e^{-t}}(e^t-e^{-t})\,dt=\int_0^\infty 2te^{-(x+1)t}\,dt=\frac{2}{(x+1)^2},$$

und daraus folgt sofort

$$\int_0^\infty \frac{2te^{-xt}}{e^t-e^{-t}}\,dt=\frac{2}{(x+1)^2}+\frac{2}{(x+3)^2}+\cdots=\sum_{\nu=1}^{\infty}{}'\frac{2}{(x-1+2\nu)^2}.$$

Das ist gerade die Reihe (4.7) für $m = 0$, so daß sich das weitere Resultat ergibt:

$$(4.10)\qquad \left[\frac{1|}{|x} + \overline{\frac{\nu^4|}{|(2\nu+1)x}}\right]_{\nu=1}^{\infty} = \int_0^\infty \frac{2te^{-xt}}{e^t - e^{-t}}\,dt.$$

Das ist die in § 1 erwähnte Formel (1.3) von Preece.

§ 5. Drittes Beispiel

Bei dem Kettenbruch

$$(5.1)\qquad F(x) = \left[x + \overline{\frac{(2\nu-1)^2 - n^2|}{|x} + \frac{(2\nu)^2 - m^2|}{|x}}\right]_{\nu=1}^{\infty}$$

$$(x > 0,\ 1 > n^2 > -\infty,\ 4 > m^2 > -\infty)$$

ist $a_{2\nu-1} = (2\nu-1)^2 - n^2$, $a_{2\nu} = (2\nu)^2 - m^2$, $b_\nu = x$. Die a_ν, b_ν sind wieder positiv und der Kettenbruch ist konvergent. Man wird $r_{2\nu-1}$ und $r_{2\nu}$ als Polynome ersten Grades von ν ansetzen und die Forderung, daß φ_ν von ν unabhängig werden soll, führt dann zu:

$$(5.2)\qquad \begin{cases} r_{2\nu-1} = 2\nu - \frac{1}{2}\left(x + 1 + \frac{m^2 - n^2}{x+1}\right), \\ r_{2\nu} = 2\nu + \frac{1}{2}\left(1 - x + \frac{m^2 - n^2}{x+1}\right). \end{cases}$$

In der Tat ist dann

$$(5.3)\qquad \begin{cases} \varphi_{2\nu-1} = (2\nu-1)^2 - n^2 - \\ \quad -\left[2\nu - 1 - \frac{1}{2}\left(x + 1 - \frac{m^2-n^2}{x+1}\right)\right]\left[2\nu - 1 + \frac{1}{2}\left(x + 1 - \frac{m^2-n^2}{x+1}\right)\right] \\ \quad = \frac{1}{4}\left(x + 1 - \frac{m^2-n^2}{x+1}\right)^2 - n^2, \end{cases}$$

$$(5.4)\qquad \begin{cases} \varphi_{2\nu} = (2\nu)^2 - m^2 - \\ \quad -\left[2\nu - \frac{1}{2}\left(x + 1 + \frac{m^2-n^2}{x+1}\right)\right]\left[2\nu + \frac{1}{2}\left(x + 1 + \frac{m^2-n^2}{x+1}\right)\right] \\ \quad = \frac{1}{4}\left(x + 1 + \frac{m^2-n^2}{x+1}\right)^2 - m^2. \end{cases}$$

Die beiden Ausdrücke für $\varphi_{2\nu-1}$ und $\varphi_{2\nu}$ sind, wie sofort zu sehen, einander gleich, so daß φ_ν wirklich ganz von ν unabhängig ist. Durch Zerlegen in Faktoren ergibt sich

$$\varphi_\nu = \frac{1}{4(x+1)^2} \prod_\varepsilon (x+1+n+\varepsilon m)(x+1-n-\varepsilon m),$$

wo das Produkt wieder über die beiden Werte $\varepsilon = \pm 1$ zu erstrecken ist. Damit $\varphi_\nu \neq 0$ wird, müssen wir also noch $x+1 \neq \pm(n+m)$, $\pm(n-m)$ voraussetzen. Da r_ν für hinreichend großes ν wieder positiv ist, gilt dann die Transformationsformel

$$F(x) = \left[\frac{1}{2}\left(x+1+\frac{m^2-n^2}{x+1}\right) + \frac{\varphi_1 \,|}{\left|\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\left(x-\frac{m^2-n^2}{x+1}\right)\right.} + \frac{\overline{(2\nu-1)^2-n^2\,|}}{x+2} + \frac{(2\nu)^2-m^2}{x+2}\right]_{\nu=1}^{\infty},$$

und da der erste Teilnenner auch in der Form

$$-\frac{1}{2}\left(x+1+\frac{m^2-n^2}{x+1}\right)+x+2$$

geschrieben werden kann, ergibt sich die Funktionalgleichung

$$F(x) = \frac{1}{2}\left(x+1+\frac{m^2-n^2}{x+1}\right) + \frac{\varphi_1}{-\frac{1}{2}\left(x+1+\frac{m^2-n^2}{x+1}\right)+F(x+2)},$$

oder mit Rücksicht auf den für $\varphi_{2\nu}$ gefundenen und deshalb auch für φ_1 gültigen Ausdruck (5.4)

$$(5.5) \qquad F(x) = \frac{\frac{1}{2}\left(x+1+\frac{m^2-n^2}{x+1}\right)F(x+2)-m^2}{F(x+2)-\frac{1}{2}\left(x+1+\frac{m^2-n^2}{x+1}\right)}.$$

Das ist nun wieder die in meiner oben zitierten Arbeit auf S. 201 für die dortige Funktion $\varphi(x)$, die sich mit unserer Funktion (5.1) deckt, gefundene Funktionalgleichung, deren Weiterbehandlung hier nicht wiederholt zu werden braucht. Es war aber damals von Anfang an der Fall $m = 0$ ausgeschlossen und es wurde nur in § 4 ohne Angabe des herauskommenden Resultates gesagt, wie man diesen nachträglich durch einen Grenzprozeß erledigen kann. Wir können aber jetzt den Fall $m = 0$ direkt viel einfacher behandeln. Da ist zunächst die Bedingung $x+1 \neq \pm n$ von selbst erfüllt, weil $x > 0$ ist und n, falls reell, zwischen -1 und $+1$ liegt. Ferner vereinfacht sich die Funktionalgleichung (5.5) zu

$$\frac{1}{F(x)} = \frac{2(x+1)}{(x+1)^2 - n^2} - \frac{1}{F(x+2)},$$

und hieraus folgt sofort, da offenbar wieder $\lim\limits_{x \to \infty} F(x) = \infty$ ist,

$$\frac{1}{F(x)} = \sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^{\nu-1} \frac{2(x-1+2\nu)}{(x-1+2\nu)^2 - n^2}$$

$$= \sum_{\nu=1}^{\infty} \left(\frac{2(x-3+4\nu)}{(x-3+4\nu)^2 - n^2} - \frac{2(x-1+4\nu)}{(x-1+4\nu)^2 - n^2} \right)$$

$$= \sum_{\nu=1}^{\infty} \left(\frac{1}{x-3+4\nu+n} + \frac{1}{x-3+4\nu-n} - \frac{1}{x-1+4\nu+n} - \frac{1}{x-1+4\nu-n} \right).$$

Die Reihe läßt sich wieder, indem man hinter jedem der vier Brüche $\frac{1}{4\nu}$ abzieht, was sich neutralisiert, mittels der Gammafunktion summieren, und zwar ist sie gleich

$$\frac{1}{4}\left[-\frac{\Gamma'}{\Gamma}\left(\frac{x+1+n}{4}\right) - \frac{\Gamma'}{\Gamma}\left(\frac{x+1-n}{4}\right) + \frac{\Gamma'}{\Gamma}\left(\frac{x+3+n}{4}\right) + \frac{\Gamma'}{\Gamma}\left(\frac{x+3-n}{4}\right)\right].$$

Man gewinnt somit das Resultat

$$(5.6) \quad \begin{cases} \left[\frac{1|}{|x} + \overline{\frac{(2\nu-1)^2-n^2|}{x} + \frac{(2\nu)^2|}{|x}} \right]_{\nu=1}^{\infty} \\ = \frac{1}{4}\left[\frac{\Gamma'}{\Gamma}\left(\frac{x+3+n}{4}\right) + \frac{\Gamma'}{\Gamma}\left(\frac{x+3-n}{4}\right) - \frac{\Gamma'}{\Gamma}\left(\frac{x+1+n}{4}\right) - \left(\frac{\Gamma'}{\Gamma}\frac{x+1-n}{4}\right) \right. \\ \qquad \text{für} \quad x > 0, \quad 1 > n^2 > -\infty. \end{cases}$$

Speziell für $n = 0$ läßt sich der Kettenbruch kürzer so schreiben

$$\left[\frac{1|}{|x} + \overline{\frac{\nu^2|}{|x}} \right]_{\nu=1}^{\infty}$$

und die obige Reihe nimmt die einfachere Gestalt

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \left(\frac{2}{x-3+4\nu} - \frac{2}{x-1+4\nu} \right) = \frac{2}{x+1} - \frac{2}{x+3} + \frac{2}{x+5} - \cdots$$

an und läßt sich auf eine zweite Art summieren. Es ist nämlich

$$\int_0^{\infty} \frac{2e^{-xt}}{e^t + e^{-t}}\, dt + \int_0^{\infty} \frac{2e^{-(x+2)t}}{e^t + e^{-t}}\, dt$$

$$= \int_0^{\infty} \frac{2e^{-(x+1)t}}{e^t + e^{-t}} (e^t + e^{-t})\, dt = \int_0^{\infty} 2e^{-(x+1)t}\, dt = \frac{2}{x+1},$$

und daraus ergibt sich

$$\int_0^\infty \frac{2\,e^{-xt}}{e^t + e^{-t}}\,dt = \frac{2}{x+1} - \frac{2}{x+3} + \frac{2}{x+5} - \cdots,$$

also gerade unsere Reihe. Man gewinnt somit das weitere Resultat

$$(5.7)\qquad \left[\frac{1|}{|x} + \overline{\frac{\nu^2|}{|x}}\right]_{\nu=1}^{\infty} = \int_0^\infty \frac{2\,e^{-xt}}{e^t + e^{-t}}\,dt \qquad (x > 0).$$

Das ist die in § 1 erwähnte Formel (1.1) von Preece.

§ 6. Viertes Beispiel

Bei dem Kettenbruch

$$(6.1)\qquad F(x) = \left[x + \overline{\frac{\nu(\nu+k-1)|}{|x}}\right]_{\nu=1}^{\infty} \qquad (k > 0,\ x > 0)$$

ist $a_\nu = \nu(\nu+k-1)$, $b_\nu = x$. Die a_ν, b_ν sind also positiv und der Kettenbruch ist konvergent. Setzt man r_ν als Polynom ersten Grades von ν an, so führt die Forderung, daß φ_ν von ν unabhängig sein soll, zu

$$(6.2)\qquad r_\nu = \nu + \frac{k-x}{2}.$$

In der Tat ist dann

$$(6.3)\qquad \varphi_\nu = \nu(\nu+k-1) - \left(\nu - 1 + \frac{k-x}{2}\right)\left(\nu + \frac{k+x}{2}\right) = \frac{(x+2-k)\,(x+k)}{4},$$

also von ν unabhängig; wir müssen zunächst $k \neq x+2$ voraussetzen, damit $\varphi_\nu \neq 0$ ist. Da $r_\nu > 0$ für genügend großes ν, gilt dann die Transformationsformel und Funktionalgleichung

$$F(x) = \frac{k+x}{2} + \frac{\varphi_1|}{\left|\frac{k+x+2}{2}\right.} + \frac{a_1|}{|x+2} + \frac{a_2|}{|x+2} + \cdots$$

$$= \frac{k+x}{2} + \frac{\varphi_1}{\frac{k-x-2}{2} + F(x+2)} = \frac{\frac{k+x}{2}F(x+2)}{F(x+2) + \frac{k-x-2}{2}},$$

oder etwas anders geschrieben:

$$\frac{1}{F(x)} = \frac{2}{k+x} + \frac{k-x-2}{k+x}\,\frac{1}{F(x+2)}. \tag{6.4}$$

Indem man hier x durch $x + 2\nu$ ersetzt, ergibt sich

$$\frac{1}{F(x+2\nu)} = \frac{2}{k+x+2\nu} + \frac{k-x-2-2\nu}{k+x+2\nu}\,\frac{1}{F(x+2+2\nu)}, \tag{6.5}$$

wobei analog zu der Forderung $k \neq x + 2$ auch $k \neq x + 2 + 2\nu$ vorauszusetzen ist.

Nun ist augenscheinlich

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{F(x)} = 1. \tag{6.6}$$

Außerdem ist

$$\lim_{\nu\to\infty} \frac{k-x-2}{k+x}\,\frac{k-x-4}{k+x+2}\cdots\frac{k-x-2-2\nu}{k+x+2\nu}\,\frac{1}{k+x+2+2\nu}$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{\nu\to\infty}(-1)^{\nu+1}\,\frac{\Gamma\left(\nu+2+\frac{x-k}{2}\right)\Gamma\left(\frac{x+k}{2}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{x-k}{2}\right)\Gamma\left(\nu+2+\frac{x+k}{2}\right)} = 0,$$

und daher wegen (6.6) auch

$$\lim_{\nu\to\infty} \frac{k-x-2}{k+x}\,\frac{k-x-4}{k+x+2}\cdots\frac{k-x-2-2\nu}{k+x+2\nu}\,\frac{1}{F(x+2+2\nu)} = 0.$$

Aus (6.4) und (6.5) für $\nu = 1, 2, 3, \ldots$ folgt daher leicht:

$$\frac{1}{F(x)} = \frac{2}{k+x} + \frac{2(k-x-2)}{(k+x)(k+x+2)} + \frac{2(k-x-2)(k-x-4)}{(k+x)(k+x+2)(k+x+4)} + \cdots, \tag{6.7}$$

wobei nun die bisher gemachte Voraussetzung $k \neq x + 2 + 2\nu$ aus Stetigkeitsgründen sich als überflüssig erweist.

Die Reihe (6.7) ist auch gleich dem Integral

$$\Phi(k, x) = \int_0^\infty \frac{2^k e^{-xt}}{(e^t + e^{-t})^k}\,dt. \tag{6.8}$$

In der Tat ergibt sich durch partielle Integration leicht

$$\Phi(k, x) = \frac{1}{x} - \frac{k}{x}\,[\Phi(k, x) - \Phi(k+1, x+1)],$$

oder, wenn mit dem Nenner heraufmultipliziert und dann k, x durch $k-1$, $x+1$ ersetzt wird:

$$(k+x)\cdot\Phi(k-1, x+1) = 1 + (k-1)\cdot\Phi(k, x+2).$$

Anderseits folgt aus der Identität

$$\frac{2^k e^{-xt}}{(e^t+e^{-t})^k} + \frac{2^k e^{-(x+2)t}}{(e^t+e^{-t})^k} = 2\cdot\frac{2^{k-1} e^{-(x+1)t}}{(e^t+e^{-t})^{k-1}}$$

durch Integration

$$\Phi(k, x) + \Phi(k, x+2) = 2\,\Phi(k-1, x+1),$$

und wenn man rechts den Ausdruck aus der vorigen Gleichung einsetzt:

$$\Phi(k, x) + \Phi(k, x+2) = \frac{2}{k+x} + \frac{2k-2}{k+x}\,\Phi(k, x+2),$$

oder etwas anders geschrieben:

$$\Phi(k, x) = \frac{2}{k+x} + \frac{k-x-2}{k+x}\,\Phi(k, x+2). \tag{6.9}$$

Nun ist aber auch

(6.10)

$$\lim_{x\to\infty} x\Phi(k, x) = \lim_{x\to\infty}\int_0^\infty \frac{2^k x e^{-xt}}{(e^t+e^{-t})^k}\,dt = \lim_{x\to\infty}\int_0^\infty \frac{2^k e^{-u}\,du}{(e^{u:x}+e^{-u:x})^k} = 1,$$

und genau wie aus den Formeln (6.4) und (6.6) die Formel (6.7) hervorging, ergibt sich nun aus den analogen Formeln (6.9) und (6.10), daß auch $\Phi(k, x)$ gleich der Reihe (6.7) ist. Man hat daher das Resultat $\frac{1}{F(x)} = \Phi(k, x)$, oder also:

(6.11)

$$\left[\frac{1|}{|x} + \frac{\nu(\nu+k-1)\;|}{|\;x}\right]_{\nu=1}^{\infty} = \int_0^\infty \frac{2^k e^{-xt}}{(e^t+e^{-t})^k}\,dt \qquad (k>0,\ x>0).$$

Speziell für $k=1$ ist das wieder die Formel (5.7).

§ 7. Fünftes Beispiel

Bei dem Kettenbruch

$$(7.1)\qquad F(x) = \left[x + \frac{(2\nu-1)^2 - n^2 \mid}{\mid\; x+2} + \frac{(2\nu-1)^2 - m^2 \mid}{\mid\; x}\right]_{\nu=1}^{\infty}$$

$$(x > 0,\ 1 > n^2 > -\infty,\ 1 > m^2 > -\infty)$$

ist $a_{2\nu-1} = (2\nu-1)^2 - n^2$, $a_{2\nu} = (2\nu-1)^2 - m^2$, $b_{2\nu-1} = x+2$, $b_{2\nu} = x$. Die a_ν, b_ν sind also wieder positiv und der Kettenbruch konvergiert. Man wird $r_{2\nu-1}$ und $r_{2\nu}$ als Polynome ersten Grades von ν ansetzen, und die Forderung, daß φ_ν von ν unabhängig werden soll, führt zu

$$(7.2)\qquad \left\{\begin{aligned} r_{2\nu-1} &= 2\nu - 1 + \frac{n^2-m^2}{2x+4} - \frac{x+2}{2}, \\ r_{2\nu} &= 2\nu - 1 - \frac{n^2-m^2}{2x+4} - \frac{x-2}{2}. \end{aligned}\right.$$

In der Tat ist dann

$$\begin{aligned} \varphi_{2\nu-1} &= (2\nu-1)^2 - n^2 - \\ &\quad - \left(2\nu - 1 - \frac{n^2-m^2}{2x+4} - \frac{x+2}{2}\right)\left(2\nu - 1 + \frac{n^2-m^2}{2x+4} + \frac{x+2}{2}\right) \\ &= \left(\frac{x+2}{2} + \frac{n^2-m^2}{2x+4}\right)^2 - n^2, \\ \varphi_{2\nu} &= (2\nu-1)^2 - m^2 - \\ &\quad - \left(2\nu - 1 + \frac{n^2-m^2}{2x+4} - \frac{x+2}{2}\right)\left(2\nu - 1 - \frac{n^2-m^2}{2x+4} + \frac{x+2}{2}\right) \\ &= \left(\frac{x+2}{2} - \frac{n^2-m^2}{2x+4}\right)^2 - m^2. \end{aligned}$$

Man sieht sofort, daß die Ausdrücke für $\varphi_{2\nu-1}$ und $\varphi_{2\nu}$ einander gleich sind, so daß φ_ν wirklich von ν ganz unabhängig ist. Durch Zerlegung in Faktoren erhält man

$$(7.3)\qquad \varphi_\nu = \frac{1}{4(x+2)^2} \prod_{\varepsilon} (x + 2 + n + \varepsilon m)(x + 2 - n - \varepsilon m),$$

wo das Produkt wieder über die beiden Werte $\varepsilon = \pm 1$ zu erstrecken ist. Da $x > 0$ ist und da die n, m, falls reell, zwischen

-1 und $+1$ liegen, ist $\varphi_\nu \neq 0$. Da außerdem r_ν für genügend großes ν wieder positiv ist, gilt also die Transformationsformel

$$F(x) = \left[\frac{m^2-n^2}{2x+4} + \frac{x}{2} + \frac{\varphi_1}{\left|\frac{n^2-m^2}{2x+4} + \frac{x+4}{2}\right.} \overline{\left|\frac{(2\nu-1)^2-n^2}{x+2}\right. + \left|\frac{(2\nu-1)^2-m^2}{x+4}\right.}\right]_{\nu=1}^{\infty}.$$

Hier bringen wir das Anfangsglied nach links und ersetzen dann den Kettenbruch durch einen äquivalenten, indem wir abwechselnd die Multiplikatoren $\frac{x+2}{x+4}$ und $\frac{x+4}{x+2}$ verwenden. So kommt die Formel

$$F(x) - \frac{m^2-n^2}{2x+4} - \frac{x}{2} = \left[\frac{\varphi_1 \frac{x+2}{x+4}}{\left|\frac{n^2-m^2}{2x+8} + \frac{x+2}{2}\right.} \overline{\left|\frac{(2\nu-1)^2-n^2}{x+4}\right. + \left|\frac{(2\nu-1)^2-m^2}{x+2}\right.}\right]_{\nu=1}^{\infty}$$

und hieraus die Funktionalgleichung

$$F(x) - \frac{m^2-n^2}{2x+4} - \frac{x}{2} = \frac{\varphi_1 \frac{x+2}{x+4}}{\frac{n^2-m^2}{2x+8} - \frac{x+2}{2} + F(x+2)},$$

oder also:

$$\left[F(x) - \frac{m^2-n^2}{2x+4} - \frac{x}{2}\right]\left[F(x+2) - \frac{m^2-n^2}{2x+8} - \frac{x+2}{2}\right] = \varphi_1 \frac{x+2}{x+4}$$

$$= \frac{1}{4(x+2)(x+4)} \prod_{\varepsilon} (x+2+n+\varepsilon m)(x+2-n-\varepsilon m).$$

Ersetzt man hier x durch $x+2$, so folgt durch Division:

$$\frac{1}{x}\left[F(x) - \frac{m^2-n^2}{2x+4} - \frac{x}{2}\right] : \frac{1}{x+4}\left[F(x+4) - \frac{m^2-n^2}{2x+12} - \frac{x+4}{2}\right]$$

$$= \frac{(x+4)(x+6)}{x(x+2)} \prod_{\varepsilon} \frac{(x+2+n+\varepsilon m)(x+2-n-\varepsilon m)}{(x+4+n+\varepsilon m)(x+4-n-\varepsilon m)}$$

$$= \prod_{\varepsilon} \frac{(x+5+\varepsilon)(x+2+n+\varepsilon m)(x+2-n-\varepsilon m)}{(x+1+\varepsilon)(x+4+n+\varepsilon m)(x+4-n-\varepsilon m)}.$$

Nun ist augenscheinlich

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x}\left[F(x) - \frac{m^2-n^2}{2x+4} - \frac{x}{2}\right] = \frac{1}{2}.$$

Aus der letzten Formel folgt daher, wenn man x durch $x+4\nu-4$ ersetzt und dann das Produkt nach ν bildet:

$$\frac{1}{x}\left[F(x)-\frac{m^2-n^2}{2x+4}-\frac{x}{2}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\prod_{\varepsilon}\prod_{\nu=1}^{\infty}\frac{(x+1+\varepsilon+4\nu)(x-2+n+\varepsilon m+4\nu)(x-2-n-\varepsilon m+4\nu)}{(x-3+\varepsilon+4\nu)(x+n+\varepsilon m+4\nu)(x-n-\varepsilon m+4\nu)}.$$

Hier läßt sich das innere Produkt analog wie in § 4 durch die Gammafunktion ausdrücken, und zwar ist es gleich

$$\frac{\Gamma\left(\frac{x+1+\varepsilon}{4}\right)\Gamma\left(\frac{x+4+n+\varepsilon m}{4}\right)\Gamma\left(\frac{x+4-n-\varepsilon m}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{x+5+\varepsilon}{4}\right)\Gamma\left(\frac{x+2+n+\varepsilon m}{4}\right)\Gamma\left(\frac{x+2-n-\varepsilon m}{4}\right)}$$

$$=\frac{4}{x+1+\varepsilon}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{x+4+n+\varepsilon m}{4}\right)\Gamma\left(\frac{x+4-n-\varepsilon m}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{x+2+n+\varepsilon m}{4}\right)\Gamma\left(\frac{x+2-n-\varepsilon m}{4}\right)}.$$

Setzt man das oben ein, so kommt schließlich

$$F(x)-\frac{m^2-n^2}{2x+4}-\frac{x}{2}=\frac{x}{2}\cdot\frac{16}{x(x+2)}\cdot\prod_{\varepsilon}\frac{\Gamma\left(\frac{x+4+n+\varepsilon m}{4}\right)\Gamma\left(\frac{x+4-n-\varepsilon m}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{x+2+n+\varepsilon m}{4}\right)\Gamma\left(\frac{x+2-n-\varepsilon m}{4}\right)}.$$

Man hat also das Resultat

$$(7.4)\quad\left\{\begin{aligned}&\left[x+\frac{(2\nu-1)^2-n^2|}{|x+2}+\frac{(2\nu-1)^2-m^2|}{|x}\right]_{\nu=1}^{\infty}\\&=\frac{m^2-n^2}{2x+4}+\frac{x}{2}+\frac{8}{x+2}\prod_{\varepsilon}\frac{\Gamma\left(\frac{x+4+n+\varepsilon m}{4}\right)\Gamma\left(\frac{x+4-n-\varepsilon m}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{x+2+n+\varepsilon m}{4}\right)\Gamma\left(\frac{x+2-n-\varepsilon m}{4}\right)}\\&\text{für}\quad x>0,\ 1>n^2>-\infty,\ 1>m^2>-\infty.\end{aligned}\right.$$

Speziell für $n=m=0$ kommt:

(7.5)

$$\left[x+\frac{(2\nu-1)^2|}{|x+2}+\frac{(2\nu-1)^2|}{|x}\right]_{\nu=1}^{\infty}=\frac{x}{2}+\frac{8}{x+2}\left[\frac{\Gamma\left(\frac{x+4}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{x+2}{4}\right)}\right]^4(x>0).$$

Wenn man die Formel (7.4) mit $x+2$ multipliziert, sodann den Kettenbruch durch einen äquivalenten ersetzt, wobei man ab-

wechselnd die Multiplikatoren $\frac{1}{x+2}$ und $x+2$ verwendet, und wenn man dann noch x durch $x-1$ ersetzt, erhält man das weitere Resultat:

$$(7.6)\quad \begin{cases} \left[x^2-1+\overline{\frac{(2\nu-1)^2-n^2|}{|1}+\frac{(2\nu-1)^2-m^2|}{|x^2-1}}\right]_{\nu=1}^{\infty} \\ = \frac{x^2-1+m^2-n^2}{2}+8\prod_{\varepsilon}\frac{\Gamma\left(\frac{x+3+n+\varepsilon m}{4}\right)\Gamma\left(\frac{x+3-n-\varepsilon m}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{x+1+n+\varepsilon m}{4}\right)\Gamma\left(\frac{x+1-n-\varepsilon m}{4}\right)} \\ \text{für}\quad x>1,\ 1>n^2>-\infty,\ 1>m^2>-\infty, \end{cases}$$

und speziell für $n=m=0$:

$$\left[x^2-1+\overline{\frac{(2\nu-1)^2|}{|1}+\frac{(2\nu-1)^2|}{|x^2-1}}\right]_{\nu=1}^{\infty}=\frac{x^2-1}{2}+8\left[\frac{\Gamma\left(\frac{x+3}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{x+1}{4}\right)}\right]^4$$
$$(x>1).$$

§ 8. Sechstes Beispiel

Bei dem Kettenbruch

$$(8.1)\quad F(x)=\left[x^2-1+\overline{\frac{4\nu^2-n^2|}{|1}+\frac{4\nu^2|}{|x^2-1}}\right]_{\nu=1}^{\infty}\quad\begin{pmatrix}x>1,\\ 4>n^2>-\infty\end{pmatrix}$$

ist $a_{2\nu-1}=4\nu^2-n^2$, $a_{2\nu}=4\nu^2$, $b_{2\nu-1}=1$, $b_{2\nu}=x^2-1$. Die a_ν, b_ν sind also positiv und der Kettenbruch ist konvergent[10]. Wenn man $r_{2\nu-1}$ und $r_{2\nu}$ wieder als Polynome ersten Grades von ν ansetzt, so führt die Forderung, daß φ_ν von ν unabhängig werden soll, zu

$$(8.2)\quad \begin{cases} r_{2\nu-1}=\frac{1}{x+1}\left(2\nu+\frac{n^2}{2x+2}-\frac{x+1}{2}\right), \\ r_{2\nu}\ =(x+1)\left(2\nu-\frac{n^2}{2x+2}+\frac{3-x}{2}\right). \end{cases}$$

---

[10] Es mag unmotiviert erscheinen, daß hier $b_{2\nu}=x^2-1$ gesetzt wird statt einfacher $b_{2\nu}=y$. Aber dann zwingt die Berechnung der Koeffizienten von $r_{2\nu-1}$ und $r_{2\nu}$ dazu, die Wurzel $\sqrt{y+1}$ einzuführen, so daß es bequemer ist, diese mit einem Buchstaben x zu bezeichnen, also $y=x^2-1$.

In der Tat wird dann

$$(8.3)\qquad \varphi_{2\nu-1} = 4\nu^2 - n^2 - \left(2\nu - \frac{n^2}{2x+2} - \frac{x+1}{2}\right)\left(2\nu + \frac{n^2}{2x+2} + \frac{x+1}{2}\right)$$

$$= \left(\frac{n^2}{2x+2} + \frac{x+1}{2}\right)^2 - n^2,$$

$$(8.4)\qquad \varphi_{2\nu} = 4\nu^2 - \left(2\nu + \frac{n^2}{2x+2} - \frac{x+1}{2}\right)\left(2\nu - \frac{n^2}{2x+2} + \frac{x+1}{2}\right)$$

$$= \left(\frac{n^2}{2x+2} - \frac{x+1}{2}\right)^2.$$

Die beiden Ausdrücke sind wieder einander gleich, also φ_ν wirklich von ν unabhängig. Durch Zerlegen in Faktoren erhält man

$$(8.5)\qquad \varphi_\nu = \frac{(x+1+n)^2\,(x+1-n)^2}{4\,(x+1)^2}.$$

Da $x > 1$ ist und n, falls reell, zwischen -2 und $+2$ liegt, ist $\varphi_\nu \neq 0$. Da außerdem r_ν für genügend großes ν wieder positiv ist, gilt also die Transformationsformel

$$F(x) =$$

$$= \left[\frac{(x+1)^2-n^2}{2} + \frac{\varphi_1}{\left|\frac{1}{x+1}\left(\frac{n^2}{2x+2} + \frac{x+5}{2}\right)\right.} + \overline{\frac{4\nu^2-n^2}{\left|x^2-1+2(x+1)\right.} + \frac{4\nu^2}{\left|1+\frac{2}{x+1}\right.}}\right]_{\nu=1}^{\infty}.$$

Wir ersetzen den Kettenbruch durch einen äquivalenten, indem wir abwechselnd die Multiplikatoren $(x+1)^2$ und $\frac{1}{(x+1)^2}$ verwenden. Dadurch entsteht die Formel

$$F(x) = \left[\frac{(x+1)^2-n^2}{2} + \frac{\varphi_1\cdot(x+1)^2}{\left|\frac{n^2-(x+1)^2}{2} + (x+2)^2 - 1\right.} + \overline{\frac{4\nu^2-n^2}{\left|1\right.} + \frac{4\nu^2}{\left|(x+2)^2-1\right.}}\right]_{\nu=1}^{\infty},$$

und hieraus die Funktionalgleichung

$$F(x) = \frac{(x+1)^2-n^2}{2} + \frac{\varphi_1\cdot(x+1)^2}{\frac{n^2-(x+1)^2}{2} + F(x+2)}$$

$$= \frac{\frac{(x+1)^2-n^2}{2}\,F(x+2)}{F(x+2) + \frac{n^2-(x+1)^2}{2}}.$$

Etwas anders geschrieben lautet sie

$$\frac{1}{F(x)} = \frac{2}{(x+1)^2 - n^2} - \frac{1}{F(x+2)},$$

und da offenbar wieder $\lim\limits_{x \to \infty} F(x) = \infty$ ist, ergibt sich

$$(8.6) \qquad \frac{1}{F(x)} = \sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^{\nu-1} \frac{2}{(x-1+2\nu)^2 - n^2}$$

$$= \sum_{\nu=1}^{\infty} \left(\frac{2}{(x-3+4\nu)^2 - n^2} - \frac{2}{(x-1+4\nu)^2 - n^2} \right),$$

und, falls $n \neq 0$ ist, durch Zerlegung in Partialbrüche:

(8.7)

$$\frac{1}{F(x)} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{1}{x-3+4\nu-n} - \frac{1}{x-3+4\nu+n} - \frac{1}{x-1+4\nu-n} + \frac{1}{x-1+4\nu+n} \right).$$

Die Reihe (8.7) läßt sich wieder analog wie in § 5 summieren und ist gleich

$$\frac{1}{4n} \left[-\frac{\Gamma'}{\Gamma}\left(\frac{x+1-n}{4}\right) + \frac{\Gamma'}{\Gamma}\left(\frac{x+1+n}{4}\right) + \frac{\Gamma'}{\Gamma}\left(\frac{x+3-n}{4}\right) - \frac{\Gamma'}{\Gamma}\left(\frac{x+3+n}{4}\right) \right],$$

während für $n = 0$ die Reihe (8.6) gleich

$$\frac{1}{8} \left\{ \frac{\Gamma''}{\Gamma}\left(\frac{x+1}{4}\right) - \left[\frac{\Gamma'}{\Gamma}\left(\frac{x+1}{4}\right)\right]^2 - \frac{\Gamma''}{\Gamma}\left(\frac{x+3}{4}\right) + \left[\frac{\Gamma'}{\Gamma}\left(\frac{x+3}{4}\right)\right]^2 \right\}$$

ist. Man hat also die Resultate

$$(8.8) \quad \left\{ \begin{aligned} &\left[\frac{1}{|x^2-1} + \overline{\frac{4\nu^2-n^2}{|1} + \frac{4\nu^2}{|x^2-1}} \right]_{\nu=1}^{\infty} \\ &= \frac{1}{4n} \left[\frac{\Gamma'}{\Gamma}\left(\frac{x+1+n}{4}\right) - \frac{\Gamma'}{\Gamma}\left(\frac{x+1-n}{4}\right) - \frac{\Gamma'}{\Gamma}\left(\frac{x+3+n}{4}\right) + \frac{\Gamma'}{\Gamma}\left(\frac{x+3-n}{4}\right) \right] \\ &\qquad \text{für} \quad x > 1, \quad 4 > n^2 > -\infty, \quad n \neq 0, \end{aligned} \right.$$

$$(8.9) \quad \left[\frac{1}{|x^2-1} + \overline{\frac{4\nu^2}{|1} + \frac{4\nu^2}{|x^2-1}} \right]_{\nu=1}^{\infty}$$

$$= \frac{1}{8} \left\{ \frac{\Gamma''}{\Gamma}\left(\frac{x+1}{4}\right) - \left[\frac{\Gamma'}{\Gamma}\left(\frac{x+1}{4}\right)\right]^2 - \frac{\Gamma''}{\Gamma}\left(\frac{x+3}{4}\right) + \left[\frac{\Gamma'}{\Gamma}\left(\frac{x+3}{4}\right)\right]^2 \right\}$$

$$(x > 1).$$

Für $n = 0$ läßt sich aber die Reihe (8.6) noch auf eine zweite Art summieren. Durch eine analoge Rechnung wie am Schluß des § 5 findet man nämlich

$$\int_0^\infty \frac{2te^{-xt}}{e^t + e^{-t}} dt = \frac{2}{(x+1)^2} - \frac{2}{(x+3)^2} + \cdots = \sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^{\nu-1} \frac{2}{(x-1+2\nu)^2},$$

und das ist gerade die Reihe (8.6) für $n = 0$, so daß man das weitere Resultat erhält:

$$(8.10) \quad \left[\frac{1}{|x^2-1} \overline{+ \frac{4\nu^2}{|1} + \frac{4\nu^2}{|x^2-1}} \right]_{\nu=1}^{\infty} = \int_0^\infty \frac{2te^{-xt}}{e^t + e^{-t}} dt.$$

Das ist die in § 1 erwähnte Formel (1.2) von Preece.

§ 9. Siebtes Beispiel

Bei dem Kettenbruch

$$(9.1) \quad F(x) = \left[x^2 - \delta^2 + \frac{4\nu^2 - (2-2\delta)\nu}{|1} + \frac{4\nu^2 + (2-2\delta)\nu}{|x^2-\delta^2} \right]_{\nu=1}^{\infty}$$

$$(x > |\delta|, \; -1 < \delta < 3)$$

ist $a_{2\nu-1} = 4\nu^2 - (2-2\delta)\nu$, $a_{2\nu} = 4\nu^2 + (2-2\delta)\nu$, $b_{2\nu-1} = 1$, $b_{2\nu} = x^2 - \delta^2$. Die a_ν, b_ν sind also positiv und der Kettenbruch ist konvergent. Man wird wieder $r_{2\nu-1}$ und $r_{2\nu}$ als Polynome ersten Grades von ν ansetzen und auf Grund der Forderung, daß φ_ν von ν unabhängig sein soll, findet man

$$(9.2) \quad \begin{cases} r_{2\nu-1} = \dfrac{1}{x+\delta}\left(2\nu - \dfrac{x+\delta}{2}\right), \\ r_{2\nu} \quad = (x+\delta), \left(2\nu - \dfrac{x-2-\delta}{2}\right). \end{cases}$$

In der Tat ist dann

$$(9.3) \quad \begin{cases} \varphi_{2\nu-1} = 4\nu^2 - (2-2\delta)\nu - \\ -\left(2\nu - \dfrac{x+2-\delta}{2}\right)\left(2\nu + \dfrac{x+\delta}{2}\right) = \dfrac{(x+2-\delta)(x+\delta)}{4}, \end{cases}$$

$$(9.4) \quad \begin{cases} \varphi_{2\nu} = 4\nu^2 + (2-2\delta)\nu - \\ -\left(2\nu - \dfrac{x+\delta}{2}\right)\left(2\nu + \dfrac{x+2-\delta}{2}\right) = \dfrac{(x+\delta)(x+2-\delta)}{4}, \end{cases}$$

also φ_ν von ν unabhängig und von 0 verschieden. Für genügend großes ν ist außerdem r_ν positiv und folglich gilt die Transformationsformel

$$F(x) = \left[\frac{x^2-\delta^2}{2} + x + \delta + \frac{\varphi_1 \,|}{|\,\frac{2}{x+\delta} + \frac{1}{2}} + \frac{4\nu^2-(2-2\delta)\nu \,|}{|\,x^2-\delta^2+2(x+\delta)} + \frac{4\nu^2+(2-2\delta)\nu \,|}{|\,1+\frac{2}{x+\delta}}\right]_{\nu=1}^{\infty}.$$

Wir ersetzen den Kettenbruch durch einen äquivalenten, indem wir abwechselnd die Multiplikatoren

$$(x+\delta)(x+2-\delta) \quad \text{und} \quad \frac{1}{(x+\delta)(x+2-\delta)}$$

verwenden. Dann kommt

$$F(x) = \left[\frac{(x+\delta)(x+2-\delta)}{2} + \frac{\varphi_1 \cdot (x+\delta)(x+2-\delta) \,|}{|\,2(x+2-\delta) + \frac{1}{2}(x+\delta)(x+2-\delta)}\right.$$

$$\left. + \frac{4\nu^2-(2-2\delta)\nu \,|}{|\,1} + \frac{4\nu^2+(2-2\delta)\nu \,|}{|\,(x+2)^2-\delta^2}\right]_{\nu=1}^{\infty}$$

und da der erste Teilnenner auch in der Gestalt

$$-\frac{(x+\delta)(x+2-\delta)}{2} + (x+2)^2 - \delta^2$$

geschrieben werden kann, ergibt sich die Funktionalgleichung

$$F(x) = \frac{(x+\delta)(x+2-\delta)}{2} + \frac{\varphi_1 \cdot (x+\delta)(x+2-\delta)}{-\frac{(x+\delta)(x+2-\delta)}{2} + F(x+2)} = \frac{\frac{1}{2}(x+\delta)(x+2-\delta)\,F(x+2)}{F(x+2) - \frac{1}{2}(x+\delta)(x+2-\delta)}.$$

Etwas anders geschrieben lautet sie:

$$\frac{1}{F(x)} = \frac{2}{(x+\delta)(x+2-\delta)}, \quad -\frac{1}{F(x+2)},$$

und hieraus folgt, da wieder $\lim\limits_{x\to\infty} F(x) = \infty$ ist,

$$(9.5) \qquad \frac{1}{F(x)} = \sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^{\nu-1} \frac{2}{(x-2+2\nu+\delta)(x+2\nu-\delta)}.$$

Für $\delta = 1$ decken sich der Kettenbruch (9.1) und die Formel (9.5) mit (8.1) und (8.6) für $n = 0$, und die weitere Rechnung

braucht nicht wiederholt zu werden. Daher sei jetzt $\delta \neq 1$. Dann folgt aus (9.5) durch Partialbruchzerlegung

$$\frac{1}{F(x)} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \left(\frac{2}{(x-4+4\nu+\delta)(x-2+4\nu-\delta)} - \frac{2}{(x-2+4\nu+\delta)(x+4\nu-\delta)} \right)$$

$$= \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{1-\delta} \left(\frac{1}{x-4+4\nu+\delta} - \frac{1}{x-2+4\nu-\delta} - \frac{1}{x-2+4\nu+\delta} + \frac{1}{x+4\nu-\delta} \right),$$

und diese Reihe läßt sich analog wie schon mehrfach summieren und ist gleich

$$\frac{1}{4-4\delta} \left[-\frac{\Gamma'}{\Gamma}\left(\frac{x+\delta}{4}\right) + \frac{\Gamma'}{\Gamma}\left(\frac{x+2-\delta}{4}\right) + \frac{\Gamma'}{\Gamma}\left(\frac{x+2+\delta}{4}\right) - \frac{\Gamma'}{\Gamma}\left(\frac{x+4-\delta}{4}\right) \right],$$

so daß sich folgendes Resultat ergibt:

$$(9.6) \quad \left\{ \begin{aligned} &\left[\frac{1}{|x^2-\delta^2} \overline{+ \frac{4\nu^2-(2-2\delta)\nu}{|1} + \frac{4\nu^2+(2-2\delta)\nu}{|x^2-\delta^2}} \right]_{\nu=1}^{\infty} \\ &= \frac{1}{4-4\delta} \left[\frac{\Gamma'}{\Gamma}\left(\frac{x+2+\delta}{4}\right) + \frac{\Gamma'}{\Gamma}\left(\frac{x+2-\delta}{4}\right) - \frac{\Gamma'}{\Gamma}\left(\frac{x+\delta}{4}\right) - \frac{\Gamma'}{\Gamma}\left(\frac{x+4-\delta}{4}\right) \right] \\ &\qquad \text{für} \quad x > |\delta|, \quad -1 < \delta < 3, \quad \delta \neq 1. \end{aligned} \right.$$

§ 10. Achtes und neuntes Beispiel

Wir setzen

$$(10.1) \quad \left\{ \begin{aligned} a_{2\nu-1} &= 2\nu^3 + c\nu, & b_{2\nu-1} &= 1, \\ a_{2\nu} &= 2\nu^3 + c\nu, & b_{2\nu} &= (2\nu+1)(x^2-1), \end{aligned} \right.$$

$$(10.2) \quad \left\{ \begin{aligned} a^*_{2\nu-1} &= -a_{2\nu-1}, & b^*_{2\nu-1} &= (x+1)\,[4\nu^2+2c+(x+1)^2], \\ a^*_{2\nu} &= -a_{2\nu}, & b^*_{2\nu} &= \frac{2\nu+1}{x+1}, \end{aligned} \right.$$

und bilden mit diesen Elementen die beiden Kettenbrüche

$$(10.3) \qquad b_0 + \frac{a_1|}{|b_1} + \frac{a_2|}{|b_2} + \cdots = F(x),$$

$$(10.4) \qquad b^*_0 + \frac{a^*_1|}{|b^*_1} + \frac{a^*_2|}{|b^*_2} + \cdots = F^*(x).$$

Die Näherungszähler und -nenner von (10.3) seien A_ν, B_ν; die von (10.4) seien A_ν^*, B_ν^*.

Die Konstante c sei > -2, die Variable x sei > 1. Dann hat der Kettenbruch (10.3) positive Elemente und konvergiert; er ist eine Funktion von x, die wir $F(x)$ nennen. Beim Kettenbruch (10.4) sind die Teilzähler negativ, so daß die Konvergenz zunächst zweifelhaft ist. Sie wird sich aber rasch herausstellen; dann erweist er sich als eine Funktion von x, die wir $F^*(x)$ nennen.

Beim Kettenbruch (10.3) kann man eine Bauer-Muir-Transformation versuchen, indem man $r_{2\nu-1}$ und $r_{2\nu}$ als Polynome ersten bzw. zweiten Grades von ν ansetzt und die Koeffizienten so zu bestimmen sucht, daß $r_{2\nu-1} > 0$ und $r_{2\nu} > 0$ wird und daß $\varphi_{2\nu-1}$ und $\varphi_{2\nu}$ von ν unabhängig werden. Das gelingt auf genau eine Weise; dabei wird aber nicht mehr $\varphi_{2\nu-1} = \varphi_{2\nu}$. Man findet nämlich

$$(10.5)\quad \begin{cases} r_{2\nu-1} = \dfrac{1}{x+1}\left[\nu - \dfrac{x+1}{2}\right], \\[2ex] r_{2\nu} = (x+1)\left[2\nu^2 + (3-x)\nu + c + \dfrac{x^2+3}{2}\right]. \end{cases}$$

Dann ist zunächst

$$b_{2\nu-1} + r_{2\nu-1} = \frac{1}{x+1}\left[\nu + \frac{x+1}{2}\right],$$

$$b_{2\nu} + r_{2\nu} = (x+1)\left[2\nu^2 + (x+1)\nu + c + \frac{(x+1)^2}{2}\right],$$

und es ergibt sich:

$$(10.6)\quad \begin{cases} \varphi_{2\nu-1} = 2\nu^3 + c\nu - \\ \qquad -\left[2\nu^2 - (x+1)\nu + c + \dfrac{(x+1)^2}{2}\right]\left[\nu + \dfrac{x+1}{2}\right] = -c\dfrac{x+1}{2} - \dfrac{(x+1)^3}{4}, \end{cases}$$

$$(10.7)\quad \begin{cases} \varphi_{2\nu} = 2\nu^3 + c\nu - \\ \qquad -\left[\nu - \dfrac{x+1}{2}\right]\left[2\nu^2 + (x+1)\nu + c + \dfrac{(x+1)^2}{2}\right] = c\dfrac{x+1}{2} + \dfrac{(x+1)^3}{4}. \end{cases}$$

Es sind also zwar $\varphi_{2\nu-1}$ und $\varphi_{2\nu}$ von ν unabhängig; es ist aber $\varphi_{2\nu-1} = -\varphi_{2\nu}$, so daß der transformierte Kettenbruch von (10.3) so aussieht:

$$c(x+1) + \frac{(x+1)^3}{2} + \frac{\varphi_1}{\left|\dfrac{1}{x+1} + \dfrac{1}{2}\right.} \Big| - \frac{a_1}{\left| b_2 + r_2 + r_0\right.} \Big| - \frac{a_2}{\left| b_3 + r_3 + r_1\right.} \Big| - \cdots.$$

Hier ist nun $-a_\nu = a_\nu^*$ und das Anfangsglied ist nach (10.6) gleich $-2\varphi_1$. Außerdem ist $\frac{1}{x+1} = b_0^*$ und schließlich

$$b_{2\nu} + r_{2\nu} + r_{2\nu-2} = (x+1)\,[4\nu^2 + 2c + (x+1)^2] = b_{2\nu-1}^*,$$

$$b_{2\nu+1} + r_{2\nu+1} + r_{2\nu-1} = \frac{2\nu+1}{x+1} = b_{2\nu}^*.$$

Der transformierte Kettenbruch von (10.3) ist also folgender:

$$(10.8) \qquad -2\varphi_1 + \frac{\varphi_1 \,|}{|\,\frac{1}{2} + b_0^*} + \frac{a_1^* \,|}{|\,b_1^*} + \frac{a_2^* \,|}{|\,b_2^*} + \cdots.$$

Da er nach § 2 konvergiert und gleich $F(x)$ ist, muß auch der Kettenbruch (10.4) mindestens im weiteren Sinne konvergieren und sein Wert $F^*(x)$, der auch ∞ sein kann, ergibt sich aus der Gleichung

$$(10.9) \qquad F(x) = -2\varphi_1 + \frac{\varphi_1}{\frac{1}{2} + F^*(x)} = \frac{-4\varphi_1 F^*(x)}{2F^*(x) + 1}.$$

Die Näherungszähler und -nenner von (10.8) sind nach § 2

$$A_\nu + r_\nu A_{\nu-1}, \qquad B_\nu + r_\nu B_{\nu-1},$$

also trotz der negativen Teilzähler sämtlich positiv. Ferner ist

$$\frac{A_\nu + r_\nu A_{\nu-1}}{B_\nu + r_\nu B_{\nu-1}} = -2\varphi_1 + \frac{\varphi_1}{\frac{1}{2} + \frac{A_{\nu-1}^*}{B_{\nu-1}^*}} = \frac{-2\varphi_1 A_{\nu-1}^*}{A_{\nu-1}^* + \frac{1}{2} B_{\nu-1}^*},$$

und sogar[11]

$$(10.10) \qquad \begin{cases} A_\nu + r_\nu A_{\nu-1} = -2\varphi_1 A_{\nu-1}^*, \\ B_\nu + r_\nu B_{\nu-1} = A_{\nu-1}^* + \frac{1}{2} B_{\nu-1}^*. \end{cases}$$

---

[11] Daß hier nicht nur die Brüche, sondern auch die Zähler und Nenner beiderseits einander gleich sind, beruht auf folgendem: Bezeichnet man die Näherungszähler und -nenner der zwei Kettenbrüche

$$b_0 + \frac{a_1 \,|}{|\,b_1} + \frac{a_2 \,|}{|\,b_2} + \cdots \quad \text{bzw.} \quad b_1 + \frac{a_2 \,|}{|\,b_2} + \frac{a_3 \,|}{|\,b_3} + \cdots$$

mit A_ν, B_ν, bzw. $A_{\nu,1}$, $B_{\nu,1}$, so ist nicht nur

$$\frac{A_\nu}{B_\nu} = b_0 + \frac{a_1}{A_{\nu-1,1} : B_{\nu-1,1}} = \frac{b_0 A_{\nu-1,1} + a_1 B_{\nu-1,1}}{A_{\nu-1,1}},$$

Da φ_1 nach (10.6) negativ ist, sind also auch die A_ν^* positiv.

Wir wenden jetzt auf den Kettenbruch (10.4) ebenfalls eine Bauer-Muir-Transformation an, indem wir setzen:

$$(10.11)\quad \begin{cases} r_{2\nu-1}^* = (x+1)\left[-2\nu^2 + (x+1)\nu - c - \dfrac{(x+1)^2}{2}\right], \\ r_{2\nu}^* = \dfrac{1}{x+1}\left[-\nu + \dfrac{x-1}{2}\right]. \end{cases}$$

Dann ist

$$b_{2\nu-1}^* + r_{2\nu-1}^* = (x+1)\left[2\nu^2 + (x+1)\nu + c + \frac{(x+1)^2}{2}\right],$$

$$b_{2\nu}^* + r_{2\nu}^* = \frac{1}{x+1}\left[\nu + \frac{x+1}{2}\right],$$

und folglich

$$\begin{aligned} \varphi_{2\nu-1}^* &= -(2\nu^3 + c\nu) - \\ &\quad -\left[-\nu + \frac{x+1}{2}\right]\left[2\nu^2 + (x+1)\nu + c + \frac{(x+1)^2}{2}\right] \\ &= -c\,\frac{x+1}{2} - \frac{(x+1)^3}{4} = \varphi_{2\nu-1}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi_{2\nu}^* &= -(2\nu^3 + c\nu) - \\ &\quad -\left[-2\nu^2 + (x+1)\nu - c - \frac{(x+1)^2}{2}\right]\left[\nu + \frac{x+1}{2}\right] \\ &= c\,\frac{x+1}{2} + \frac{(x+1)^3}{4} = \varphi_{2\nu}. \end{aligned}$$

Der transformierte Kettenbruch von (10.4) mit den Näherungszählern und -nennern

$$(10.12)\qquad A_\nu^* + r_\nu^* A_{\nu-1}^*, \quad B_\nu^* + r_\nu^* B_{\nu-1}^*$$

ist also folgender:

(10.13)

$$\frac{1}{2} + \frac{\varphi_1}{\left|(x+1)\left[x+3+c+\frac{1}{2}(x+1)^2\right]\right.} \left| - \frac{a_1^*}{\left| b_2^* + r_2^* + r_0^*\right.} \right| - \frac{a_2^*}{\left| b_3^* + r_3^* + r_1^*\right.} \left| - \cdots.\right.$$

---

sondern nach den Formeln (27) in Kett § 5 sind die Zähler und Nenner je für sich einander gleich:

$$A_\nu = b_0 A_{\nu-1,\,1} + a_1 B_{\nu-1,\,1}, \quad B_\nu = A_{\nu-1,\,1}.$$

Hier ist nun $-a_\nu^* = a_\nu$; der erste Teilnenner ist gleich $(x+2)^2 - 1 - 2\varphi_1$ und im übrigen ist nach (10.2) und (10.11)

$$b_{2\nu}^* + r_{2\nu}^* + r_{2\nu-2}^* = 1,$$

$$b_{2\nu+1}^* + r_{2\nu+1}^* + r_{2\nu-1}^* = (2\nu+1)\left[(x+2)^2 - 1\right].$$

Der Kettenbruch (10.13) bekommt dadurch die Gestalt

(10.14)

$$\left[\frac{1}{2} + \frac{\varphi_1}{|-2\varphi_1 + (x+2)^2 - 1|} + \frac{2\nu^3 + c\nu|}{|1} + \frac{2\nu^3 + c\nu}{|(2\nu+1)|(x+2)^2 - 1]}\right]_{\nu=1}^{\infty}.$$

Er hat abgesehen vom ersten Teilzähler positive Elemente und ist konvergent, und zwar ist er gleich

$$(10.15) \qquad \frac{1}{2} + \frac{\varphi_1}{-2\varphi_1 + F(x+2)} = \frac{F(x+2)}{2F(x+2) - 4\varphi_1}.$$

Wir können aber nicht ohne weiteres sagen, daß der transformierte Kettenbruch (10.14) gleich dem ursprünglichen Kettenbruch (10.4), also gleich $F^*(x)$ ist, weil ja die B_ν^* vielleicht nicht positiv und die r_ν^* sogar bestimmt negativ sind. Um einzusehen, daß trotzdem die Kettenbrüche (10.4) und (10.14) einander gleich sind, daß also die Formel

$$(10.16) \qquad F^*(x) = \frac{F(x+2)}{2F(x+2) - 4\varphi_1}$$

gilt, muß gezeigt werden, daß die beiden Grenzwerte

$$\lim_{\nu\to\infty} \frac{A_\nu^*}{B_\nu^*}, \quad \lim_{\nu\to\infty} \frac{A_\nu^* + r_\nu^* A_{\nu-1}^*}{B_\nu^* + r_\nu^* B_{\nu-1}^*}$$

einander gleich (eventuell ∞) sind. Daß sie beide existieren (eventuell ∞), ist klar; denn die Kettenbrüche (10.4) und (10.14) sind ja beide mindestens im weiteren Sinne konvergent. Daher wird es genügen, wenn wir etwa beweisen können, daß

$$\lim_{\nu\to\infty} \left(\frac{B_{2\nu}^* + r_{2\nu}^* B_{2\nu-1}^*}{A_{2\nu}^* + r_{2\nu}^* A_{2\nu-1}^*} - \frac{B_{2\nu}^*}{A_{2\nu}^*}\right) = 0,$$

oder also

$$(10.17) \qquad \lim_{\nu\to\infty} \frac{r_{2\nu}^*(A_{2\nu}^* B_{2\nu-1}^* - B_{2\nu}^* A_{2\nu-1}^*)}{A_{2\nu}^*(A_{2\nu}^* + r_{2\nu}^* A_{2\nu-1}^*)} = 0$$

ist. Dieser Beweis wird im nächsten Paragraphen geführt werden. Dann gilt also die Formel (10.16).

Aus (10.9) und (10.16) folgt

$$(10.18)\qquad \frac{1}{F(x)} = -\frac{1}{2\varphi_1} - \frac{1}{4\varphi_1}\cdot\frac{1}{F^*(x)} = -\frac{1}{\varphi_1} + \frac{1}{F(x+2)}.$$

Also ist, wenn für φ_1 der Wert aus (10.6) eingesetzt wird,

$$\frac{1}{F(x)} = \frac{4}{(x+1)^3 + 2c(x+1)} + \frac{1}{F(x+2)},$$

und da offenbar wieder $\lim\limits_{x\to\infty} F(x) = \infty$ ist, folgt hieraus:

$$(10.19)\qquad \frac{1}{F(x)} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{4}{(x-1+2\nu)^3 + 2c(x-1+2\nu)}.$$

Im Fall $c \neq 0$ ist es bequemer, $-2n^2$ an Stelle von c zu schreiben, wobei dann $1 > n^2 > -\infty$ sein muß. Dann erhält man analog wie schon mehrfach durch Partialbruchzerlegung und Summation mit Hilfe der Gammafunktion

$$\frac{1}{F(x)} = \frac{1}{2n^2}\sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\frac{-2}{x-1+2\nu} + \frac{1}{x-1+2\nu+2n} + \frac{1}{x-1+2\nu-2n}\right)$$

$$= \frac{1}{4n^2}\left[2\frac{\Gamma'}{\Gamma}\left(\frac{x+1}{2}\right) - \frac{\Gamma'}{\Gamma}\left(\frac{x+1+2n}{2}\right) - \frac{\Gamma'}{\Gamma}\left(\frac{x+1-2n}{2}\right)\right],$$

während für $c = 0$ die Reihe (10.19) gleich

$$-\frac{d^2}{dx^2}\left[\frac{\Gamma'}{\Gamma}\left(\frac{x+1}{2}\right)\right]$$

ist. Man hat daher die Resultate:

$$(10.20)\qquad \left\{\begin{aligned} &\left[\frac{1\,|}{|\,x^2-1} + \overline{\frac{2\nu(\nu^2-n^2)\,|}{|\,1} + \frac{2\nu(\nu^2-n^2)\,|}{|\,(2\nu+1)(x^2-1)}}\right]_{\nu=1}^{\infty} \\ &= \frac{1}{4n^2}\left[2\frac{\Gamma'}{\Gamma}\left(\frac{x+1}{2}\right) - \frac{\Gamma'}{\Gamma}\left(\frac{x+1+2n}{2}\right) - \frac{\Gamma'}{\Gamma}\left(\frac{x+1-2n}{2}\right)\right] \\ &\qquad \text{für}\quad x > 1,\ 1 > n^2 > -\infty,\ n \neq 0 \end{aligned}\right.$$

$$(10.21)\qquad \left[\frac{1\,|}{|\,x^2-1} + \overline{\frac{2\nu^3\,|}{|\,1} + \frac{2\nu^3}{|\,(2\nu+1)(x^2-1)}}\right]_{\nu=1}^{\infty}$$

$$= -\frac{d^2}{dx^2}\left[\frac{\Gamma'}{\Gamma}\left(\frac{x+1}{2}\right)\right] \qquad (x > 1).$$

Für $c = 0$ ist aber die Reihe (10.19) auch gleich dem Integral

$$\int_0^\infty \frac{2t^2 e^{-xt}}{e^t - e^{-t}}\, dt,$$

wie man durch eine Rechnung analog zu der am Schluß des § 4 sofort bestätigt. Man hat daher das weitere Resultat

(10.22)

$$\left[\frac{1}{|x^2-1} + \frac{2\nu^3}{|1} + \frac{2\nu^3}{|(2\nu+1)(x^2-1)}\right]_{\nu=1}^{\infty} = \int_0^\infty \frac{2t^2 e^{-xt}}{e^t - e^{-t}}\, dt \quad (x > 1).$$

Das ist die in § 1 erwähnte Formel (1.4) von Preece.

Nach (10.4) ist

$$\frac{1}{F^*(x)} = \left[\frac{1}{\left|\frac{1}{x+1}\right.} - \frac{2\nu^3 + c\nu}{|(x+1)[4\nu^2 + 2c + (x+1)^2]} - \frac{2\nu^3 + c\nu}{\left|\frac{2\nu+1}{x+1}\right.}\right]_{\nu=1}^{\infty},$$

und dieser Kettenbruch ist äquivalent mit

$$\left[\frac{x+1}{|1} - \frac{2\nu^3 + c\nu}{|4\nu^2 + 2c + (x+1)^2} - \frac{2\nu^3 + c\nu}{|2\nu+1}\right]_{\nu=1}^{\infty}.$$

Da nun nach (10.9)

$$2 + \frac{1}{F^*(x)} = -\frac{4\varphi_1}{F(x)} = \frac{2c(x+1) + (x+1)^3}{F(x)}$$

ist, ergeben sich aus (10.20), (10.21) und (10.22), wenn nachträglich x an Stelle von $x + 1$ geschrieben wird, die weiteren Resultate:

$$(10.23)\quad \left\{\begin{aligned} &\left[2 + \frac{x}{|1} - \frac{2\nu(\nu^2 - n^2)}{|4(\nu^2 - n^2) + x^2} - \frac{2\nu(\nu^2 - n^2)}{|2\nu+1}\right]_{\nu=1}^{\infty} \\ &= \frac{x^3 - 4n^2 x}{4n^2}\left[2\frac{\Gamma'}{\Gamma}\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{\Gamma'}{\Gamma}\left(\frac{x}{2} + n\right) - \frac{\Gamma'}{\Gamma}\left(\frac{x}{2} - n\right)\right] \\ &\qquad \text{für} \quad x > 2,\ 1 > n^2 > -\infty,\ n \neq 0, \end{aligned}\right.$$

$$(10.24)\quad \left\{\begin{aligned} &\left[2 + \frac{x}{|1} - \frac{2\nu^3}{|4\nu^2 + x^2} - \frac{2\nu^3}{|2\nu+1}\right]_{\nu=1}^{\infty} \\ &= -x^3 \frac{d^2}{dx^2}\left[\frac{\Gamma'}{\Gamma}\left(\frac{x}{2}\right)\right] = x^3 \int_0^\infty \frac{2t^2 e^{-(x-1)t}}{e^t - e^{-t}}\, dt \quad (x > 2). \end{aligned}\right.$$

§ 11. Beweis einer in § 10 vorweggenommenen Formel

Es ist jetzt der Beweis für die Formel (10.17) nachzutragen. Zunächst ist

$$(11.1)\quad |A^*_{2\nu} B^*_{2\nu-1} - B^*_{2\nu} A^*_{2\nu-1}| = |a^*_1 a^*_2 \dots a^*_{2\nu-1} a^*_{2\nu}| = a_1^2 a_3^2 \dots a_{2\nu-1}^2 .$$

Sodann entnimmt man aus dem Kettenbruch (10.14) für seine ersten beiden Näherungszähler

$$A^*_0 + r^*_0 \quad = \frac{1}{2} > 0,$$

$$A^*_1 + r^*_1 A^*_0 = \frac{1}{2}\,[(x+2)^2 - 1] > 0.$$

Daher sind auch alle folgenden Näherungszähler positiv und aus der für sie geltenden Rekursionsformel gewinnt man die Abschätzung

$$A^*_{2\nu} + r^*_{2\nu} A^*_{2\nu-1} = 1 \cdot (A^*_{2\nu-1} + r^*_{2\nu-1} A^*_{2\nu-2})$$
$$+ a_{2\nu-1}(A^*_{2\nu-2} + r^*_{2\nu-2} A^*_{2\nu-3}) > a_{2\nu-1}(A^*_{2\nu-2} + r^*_{2\nu-2} A^*_{2\nu-3}),$$

also auch

$$(11.2)\qquad A^*_{2\nu} + r^*_{2\nu} A^*_{2\nu-1} > \frac{1}{2}\, a_1 a_3 \dots a_{2\nu-1}.$$

Ferner folgt aus den drei Gleichungen

$$A^*_{2\nu} \quad = b^*_{2\nu} \quad A^*_{2\nu-1} - a_{2\nu} \quad A^*_{2\nu-2},$$

$$A^*_{2\nu-1} = b^*_{2\nu-1} A^*_{2\nu-2} - a_{2\nu-1} A^*_{2\nu-3},$$

$$A^*_{2\nu-2} = b^*_{2\nu-2} A^*_{2\nu-3} - a_{2\nu-2} A^*_{2\nu-4}$$

durch Elimination von $A^*_{2\nu-1}$ und $A^*_{2\nu-3}$:

$$A^*_{2\nu} = \left(-a_{2\nu} + b^*_{2\nu-1} b^*_{2\nu} - a_{2\nu-1} \frac{b^*_{2\nu}}{b^*_{2\nu-2}}\right) A^*_{2\nu-2}$$
$$- a_{2\nu-2}\, a_{2\nu-1} \frac{b^*_{2\nu}}{b^*_{2\nu-2}} A^*_{2\nu-4}.$$

Nun ist aber $\frac{b^*_{2\nu}}{b^*_{2\nu-2}} = \frac{2\nu+1}{2\nu-1}$, $a_{2\nu} = a_{2\nu-1}$, so daß diese Formel übergeht in:

$$A^*_{2\nu} = \left(b^*_{2\nu-1}\, b^*_{2\nu} - a_{2\nu-1}\frac{4\nu}{2\nu-1}\right) A^*_{2\nu-2} - a_{2\nu-3}\, a_{2\nu-1}\frac{2\nu+1}{2\nu-1} A_{2\nu-4},$$

oder etwas anders geschrieben

$$A^*_{2\nu} - a_{2\nu-1} A^*_{2\nu-2} = a_{2\nu-1}\frac{2\nu+1}{2\nu-1}(A^*_{2\nu-2} - a_{2\nu-3} A^*_{2\nu-4})$$
$$+ A^*_{2\nu-2}\left(b^*_{2\nu-1}\, b^*_{2\nu} - a_{2\nu-1}\frac{8\nu}{2\nu-1}\right).$$

Die Größe in der letzten Klammer ist gleich

$$(2\nu+1)\,[4\nu^2 + 2c + (x+1)^2] - (2\nu^3 + c\nu)\frac{8\nu}{2\nu-1}$$
$$= \frac{1}{2\nu-1}\,[4\nu^2(x^2+2x) - 2c - (x+1)^2],$$

also für hinreichend großes ν, etwa für $\nu \geqq p$ positiv. Aus der vorigen Formel folgt daher, da auch $A^*_{2\nu-2} > 0$ ist, wie im Anschluß an (10.10) festgestellt wurde,

(11.3)
$$A^*_{2\nu} - a_{2\nu-1} A^*_{2\nu-2} > a_{2\nu-1}\frac{2\nu+1}{2\nu-1}(A^*_{2\nu-2} - a_{2\nu-3} A^*_{2\nu-4}) \quad (\nu \geqq p).$$

Nun kann nicht von einem gewissen ν an dauernd $A^*_{2\nu-2} \leqq a_{2\nu-3} A^*_{2\nu-4}$ sein. Sonst gäbe es nämlich eine von ν unabhängige Schranke K derart, daß

$$A^*_{2\nu-2} \leqq K a_1 a_3 \ldots a_{2\nu-3}$$

wäre. Nach (10.10) wäre dann auch

$$A_{2\nu-1} + r_{2\nu-1} A_{2\nu-2} \leqq K' a_1 a_3 \ldots a_{2\nu-3}$$

und erst recht

$$A_{2\nu-1} \leqq K' a_1 a_3 \ldots a_{2\nu-3}.$$

In Wirklichkeit ist aber

$$A_{2\nu-1} = b_{2\nu-1} A_{2\nu-2} + a_{2\nu-1} A_{2\nu-3} > a_{2\nu-1} A_{2\nu-3},$$

also auch $A_{2\nu-1} > K'' a_1 a_3 \ldots a_{2\nu-1}$, was wegen des zusätzlichen Faktors $a_{2\nu-1} = 2\nu^3 + c\nu$ der vorigen Abschätzung widerspricht. Hiernach gibt es also beliebig große Indizes ν, für welche

$$A^*_{2\nu-2} - a_{2\nu-3} A^*_{2\nu-4} > 0$$

ist. Nach (11.3) gilt diese Ungleichung dann aber sogar für alle hinreichend großen ν, etwa für $\nu \geqq q$, und aus (11.3) folgt

$$A^*_{2\nu} - a_{2\nu-1} A^*_{2\nu-2}$$

$$> \frac{2\nu+1}{2q-1} a_{2q-1} a_{2q+1} \ldots a_{2\nu-1} (A^*_{2q-2} - a_{2q-3} A^*_{2q-4}) > 0.$$

Schreibt man diese Ungleichung der Reihe nach für $\nu = q$, $q+1$, $q+2, \ldots$, auf, so ergibt sich durch Multiplikation mit passenden Faktoren und Addition sofort

$$A^*_{2\nu} > \frac{a_{2q-1} a_{2q+1} \ldots a_{2\nu-1}}{2q-1} (A^*_{2q-2} - a_{2q-3} A^*_{2q-4}) \cdot$$

$$\cdot [(2q+1) + (2q+3) + \ldots + (2\nu+1)],$$

also eine Abschätzung der Form

$$A^*_{2\nu} > k\, a_1 a_3 \ldots a_{2\nu-1} \cdot \nu^2.$$

Da schließlich $|r^*_{2\nu}|$ nach (10.11) kleiner als 2ν ist, gewinnt man zusammenfassend die Abschätzung

$$\left| \frac{r^*_{2\nu} (A^*_{2\nu} B^*_{2\nu-1} - B^*_{2\nu} A^*_{2\nu-1})}{A^*_{2\nu} (A^*_{2\nu} + r^*_{2\nu} A^*_{2\nu-1})} \right|$$

$$< \frac{2\nu \cdot a_1^2 a_3^2 \ldots a_{2\nu-1}^2}{k a_1 a_3 \ldots a_{2\nu-1} \cdot \nu^2 \cdot \frac{1}{2} a_1 a_3 \ldots a_{2\nu-1}} = \frac{4}{k\nu}.$$

Mit ihr ist der Beweis von (10.17) erbracht.

§ 12. Erweiterung des Geltungsbereiches

Bei jedem unserer Resultate läßt sich der Geltungsbereich nachträglich bedeutend erweitern. Das beruht darauf, daß die für die verschiedenen Kettenbrüche gefundenen Ausdrücke durch-

wegs analytische Funktionen von x und den eventuell vorkommenden Parametern (c, n, m, k, δ) sind. Der Geltungsbereich läßt sich daher stets zu jedem Bereich erweitern, in dem die Kettenbrüche ebenfalls analytisch bleiben. Solche Bereiche kann man leicht etwa nach dem Rezept finden, das ich in meiner auf Seite 22 zitierten Arbeit angewandt habe: Man läßt von den Kettenbrüchen genügend viele Anfangselemente weg und verwandelt den verbleibenden Restkettenbruch in einen äquivalenten, dessen Teilzähler sämtlich gleich 1 sind. Auf diesen kann man dann ein beliebiges Kriterium für gleichmäßige Konvergenz anwenden, am zweckmäßigsten den Satz 35 von Kett Seite 268. Auf Einzelheiten soll hier nicht mehr eingegangen werden.