Sitzungsberichte

der

mathematisch-naturwissenschaftlichen

Klasse

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften

zu München

Jahrgang 1952

München 1953

Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften

In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung

Ein Mittelwertsatz der ebenen Elastizitätstheorie

Von **Ludwig Föppl**, München

Vorgelegt am 7. November 1952

Wir wollen einen ebenen Spannungszustand voraussetzen, bei dem eine Scheibe von überall gleicher Stärke durch Randkräfte beansprucht wird. Im Innern der Scheibe sollen keine Einzelkräfte angreifen, sondern höchstens kontinuierlich verteilte. Ferner sei vorausgesetzt, daß die Scheibe zunächst einfach zusammenhängend sein soll, d. h. kein Loch besitze.

Bekanntlich gilt überall bei elastischer Beanspruchung der Scheibe, daß die Spannungssumme eine harmonische Ortsfunktion ist. Sie sei mit

$$(\sigma_x + \sigma_y)_0 = q(x, y) \tag{1}$$

bezeichnet. Der Index o an der Spannungssumme $\sigma_x + \sigma_y$ soll andeuten, daß sich die Spannungen auf die ursprünglich gegebene ungelochte Scheibe beziehen. Der Mittelwert der Spannungssumme für einen geschlossenen ganz innerhalb der Scheibe verlaufenden Integrationsweg ist:

$$\frac{\oint q(x,y)\, ds}{\oint ds} = \bar{q}\,. \tag{2}$$

Als Integrationsweg nehmen wir dabei eine Kontur, die nachträglich die Begrenzung eines Loches werden soll, das wir in die Scheibe einschneiden wollen. Dabei soll vorausgesetzt werden, daß die Abstände des Loches vom Rand der Scheibe groß sind gegenüber den Abmessungen des Loches.

Nachdem wir das Loch in die Scheibe eingeschnitten haben, ohne die äußeren Kräfte geändert zu haben, hat sich der Spannungszustand der Scheibe gegenüber dem ursprünglichen geändert und demnach auch die Spannungssumme, die wir jetzt durch den Index 1 bezeichnen wollen. Wenn die infolge des Loches hervorgerufene Änderung der ursprünglichen Spannungssumme

$(\sigma_x + \sigma_y)_0$ durch die Störungsfunktion $\varphi(x, y)$ gekennzeichnet wird, so gilt die Gleichung

$$(\sigma_x + \sigma_y)_1 = (\sigma_x + \sigma_y)_0 + \varphi(x, y) = q(x, y) + \varphi(x, y). \quad (3)$$

Da auch $(\sigma_x + \sigma_y)_1$ eine harmonische Funktion ist, gilt dies auch für die Störungsfunktion $\varphi(x, y)$, d. h.:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0. \quad (4)$$

Nach dem St. Venantschen Prinzip nimmt die Störung des ursprünglichen Spannungszustandes, die durch das Loch hervorgerufen wird, mit dem Abstand vom Loch stark ab, so daß sie überall an der äußeren Begrenzung der Scheibe, die nach Voraussetzung weit entfernt sein soll, verschwunden ist. Infolgedessen ist für einen geschlossenen Integrationsweg, der nahe der äußeren Begrenzung der Scheibe verläuft:

$$\oint \varphi(x, y)\, ds = 0. \quad (5)$$

Der Integrationsweg läßt sich aber auf den Lochrand zusammenziehen, ohne daß sich der Wert des Integrals ändern würde, da $\varphi(x, y)$ in der ganzen Scheibe außerhalb des Loches keine Singularität besitzt und Gl. (4) genügt.

Wir bilden nun das Integral von $(\sigma_x + \sigma_y)_1$ über den Lochrand als Integrationsweg, wobei

$$(\sigma_x + \sigma_y)_1 = \sigma_t \quad (6)$$

gesetzt werden kann, wenn σ_t die Tangentialspannung am Lochrand bedeuten soll. Damit folgt aus Gl. (3) unter Berücksichtigung von Gl. (5):

$$\oint_{\text{Lochrand}} \sigma_t\, ds = \oint_{\text{Lochkontur}} q\, ds, \quad (7)$$

wobei sich $q(x, y)$ auf die ungelochte Scheibe bezieht. Wenn man beide Seiten dieser Gleichung mit der Länge des Lochumfanges dividiert, erhält man

$$\bar{\sigma}_t = \bar{q}; \quad (8)$$

d. h.: Der Mittelwert der Tangentialspannungen σ_t längs des Lochrandes stimmt mit dem Mittelwert der

Spannungssumme q längs desselben Weges in der ungestörten lochfreien Scheibe überein. Voraussetzung ist, daß $\varphi(x, y)$ keine Singularität außerhalb des Loches besitzt.

Für den oft vorkommenden Fall, daß der ursprüngliche Spannungszustand homogen ist, z. B. ein ausgedehntes Blech, das nach einer Richtung gleichmäßig mit q_1 und senkrecht dazu gleichmäßig mit q_2 auf Zug oder Druck beansprucht wird, so daß $q = q_1 + q_2$ in der ganzen Scheibe konstant ist, stimmt $\bar{q}$ in Gl. (8) mit dem gegebenen q überein.

Als Anwendung des Mittelwertsatzes auf ein bekanntes Beispiel einer Kerbwirkung durch ein Loch sei der Fall eines ausgedehnten, nur auf Zug von der Stärke q in einer Richtung beanspruchten ebenen Bleches mit einem kreisförmigen Loch angenommen. Am Lochrand ist die Tangentialspannung σ_t bekanntlich

$$\sigma_t = q(1 - 2 \cos 2\alpha), \tag{9}$$

wenn α den Winkel bedeutet, den der zu σ_t gehörige Radius des Kreises mit der Zugrichtung von q einschließt.

Für $\alpha = 0$ wird nach Gl. (9) $\sigma_t = -q$ und für $\alpha = \frac{\pi}{2}$ wird $\sigma_t = 3q$. Nimmt man den Mittelwert von σ_t für den ganzen Kreis, so folgt aus Gl. (9)

$$\bar{\sigma}_t = q, \tag{10}$$

wie es der Mittelwertsatz verlangt. Eine entsprechende Rechnung läßt sich auch für den Fall eines elliptischen Loches anstellen. Bei anders geformten Löchern, für die bisher noch keine exakte theoretische Lösung gefunden ist, läßt sich die Gültigkeit des Mittelwertsatzes experimentell recht einfach mit Hilfe der Spannungsoptik nachweisen, da die σ_t-Spannungsverteilung längs des lastfreien Lochrandes unmittelbar aus den Ordnungen der Isochromaten, die in den Rand einmünden, entnommen werden kann. Auf diese Anwendung des Mittelwertsatzes soll an anderer Stelle eingegangen werden.