Sitzungsberichte

der

mathematisch-naturwissenschaftlichen

Klasse

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften

zu München

Jahrgang 1952

München 1953

Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften

In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung

Über eine Formel von Ramanujan

Von Oskar Perron in München

Vorgelegt am 3. Oktober 1952

§ 1. Die Formel und Kritik eines Beweises

In den Collected Papers von Ramanujan finden sich viele merkwürdige Formeln, die Ramanujan bei seinem ersten Auftreten Hardy mitgeteilt hat, ohne sich jemals über ihre Herkunft zu äußern. Eine dieser Formeln (S. 350) gibt den Wert eines Kettenbruches an, und zwar:

$$(1.1)\qquad x + \frac{1^2 - n^2 \,|}{|\, x} + \frac{2^2 - m^2 \,|}{|\, x} + \frac{3^2 - n^2 \,|}{|\, x} + \frac{4^2 - m^2 \,|}{|\, x} + \\ + \dots = m \cdot \frac{1 + P(x)}{1 - P(x)},$$

wobei $P(x)$ das folgende über die Werte $\varepsilon = \pm 1$ zu erstreckende Produkt ist:

$$(1.2)\qquad P(x) = \prod_{\varepsilon} \frac{\Gamma\left(\frac{1 + x + m + \varepsilon n}{4}\right) \Gamma\left(\frac{3 + x - m - \varepsilon n}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{1 + x - m - \varepsilon n}{4}\right) \Gamma\left(\frac{3 + x + m + \varepsilon n}{4}\right)}.$$

Mit (1.1) ist für $m \neq 0$ offenbar gleichbedeutend die Formel

$$(1.3)\qquad 1 + \frac{2m \,|}{|\, x - m} + \frac{1^2 - n^2 \,|}{|\, x} + \frac{2^2 - m^2 \,|}{|\, x} + \frac{3^2 - n^2 \,|}{|\, x} + \dots = \frac{1}{P(x)}.$$

Speziell für $n = m$ findet sich diese bereits bei Stieltjes[1] und ist auch in meinem Buch[2] bewiesen (S. 226, Fl. (29)). Mit genau

---

[1] T. J. Stieltjes, Note sur quelques fractions continues, The quarterly journal of pure and applied mathematics **25** (1891). – Correspondance d'Hermite et Stieltjes, Paris 1905.

[2] O. Perron, Die Lehre von den Kettenbrüchen, Leipzig und Berlin 1913, zweite Auflage 1929. Im folgenden unter „Kett" zitiert.

den gleichen Hilfsmitteln wie damals, nämlich mit der Transformation von Bauer und Muir (Kett § 47) werde ich im folgenden die allgemeine Formel (1.3) beweisen. Inzwischen hat nun Herr Preece einen Beweis veröffentlicht[1], gegen dessen Stichhaltigkeit ich schwerste Bedenken habe. Preece bemerkt nämlich, daß die Funktion $\log P(x)$ eine (aus der Stirlingschen Reihe herleitbare) asymptotische Entwicklung hat, die für $x \to \infty$ (aber nicht für $x \to -\infty$) gilt und in der nur ungerade Potenzen vorkommen. Daraus resultiert dann auch eine asymptotische Reihe für $P(x)$ selbst. Ob deren Koeffizienten die für die Existenz eines korrespondierenden Kettenbruches ($x = \frac{1}{u}$ gesetzt) erforderlichen Bedingungen (Nichtverschwinden gewisser Determinanten) erfüllen, wird nicht geprüft und wird sich bei dem formelmäßig nur schwer angebbaren komplizierten Bildungsgesetz dieser Koeffizienten auch kaum direkt beweisen lassen. Was etwa eine angegebene Integraldarstellung von $\log P(x)$ dabei nützen sollte, vermag ich nicht einzusehen. Und wenn ein solcher Kettenbruch wirklich existiert, kann er die Funktion $P(x)$ doch wohl höchstens asymptotisch darstellen und braucht gar nicht zu konvergieren. Preece setzt aber $P(x)$ einfach gleich dem Kettenbruch und sagt zur Rechtfertigung lediglich: „The actual equality of the function and the continued fraction with the same asymptotic expansion depends on some theorems due to Stieltjes". Welche Theoreme von Stieltjes das sein sollen und wo sie stehen, wird nicht gesagt; und warum soll der Kettenbruch gerade der Funktion $P(x)$ gleich sein und nicht irgendeiner anderen Funktion mit derselben asymptotischen Entwicklung, etwa $P(x) + \exp(-x^2)$? Späterhin wird von einer Funktion gesagt, daß sie formal eine gerade Funktion sei, was vermutlich bedeuten soll, daß sie eine wohl wieder nur für $x \to \infty$, aber nicht für $x \to -\infty$ gültige asymptotische Entwicklung hat, die nur gerade Potenzen aufweist. Daraus werden dann ähnliche ebensowenig begründete Schlußfolgerungen über Existenz und Gleichheit des korrespondierenden Kettenbruches gezogen. All das scheint mir höchst bedenklich.

[1] C. T. Preece, Theorems stated by Ramanujan (X), The journal of the London mathematical society **6** (1930).

§ 2. Beweis der Formel

Wir setzen

$$(2.1)\quad x + \frac{1^2 - n^2 |}{| \; x} + \frac{2^2 - m^2 |}{| \; x} + \frac{3^2 - n^2 |}{| \; x} + \frac{4^2 - m^2 |}{| \; x} + \ldots = \varphi(x),$$

$$(2.2)\qquad \frac{\varphi(x) + m}{\varphi(x) - m} = \Phi(x), \quad \text{also} \quad \varphi(x) = m \cdot \frac{\Phi(x) + 1}{\Phi(x) - 1}.$$

Offenbar ist dann

$$(2.3)\quad 1 + \frac{2m |}{| \; x - m} + \frac{1^2 - n^2 |}{| \; x} + \frac{2^2 - m^2 |}{| \; x} + \frac{3^2 - n^2 |}{| \; x} +$$

$$+ \ldots = 1 + \frac{2m}{\varphi(x) - m} = \Phi(x),$$

und wir haben zu beweisen, daß $\Phi(x) = \frac{1}{P(x)}$ ist.

Der Kettenbruch (2.1) hat für

$$(2.4)\qquad x > 0, \quad 1 > n^2 > -\infty, \quad 4 > m^2 > -\infty$$

positive Elemente und ist nach einem Kriterium von Pringsheim (Kett S. 239, Satz 10) konvergent. Auf diese Werte von x, n, m wollen wir uns beschränken[1] und dabei vorläufig auch den Wert $m = 0$ ausschließen. Dann ist auch der Kettenbruch (2.3) mindestens im weiteren Sinne konvergent und aus seinem Wert $\Phi(x)$ ergibt sich der Wert $\varphi(x)$ des Kettenbruches (2.1) aus (2.2).

Zur Berechnung von (2.3) stützen wir uns auf den folgenden Satz (Kett S. 220, Satz 12):

Wenn der Kettenbruch

$$\beta_0 - \alpha_1 \rho_1 + \frac{\alpha_1(1 + \rho_1\beta_1) |}{| \; \beta_1 - \alpha_2\rho_2} + \frac{\alpha_2(1 + \rho_2\beta_2) |}{| \; \beta_2 - \alpha_3\rho_3} + \frac{\alpha_3(1 + \rho_3\beta_3) |}{| \; \beta_3 - \alpha_4\rho_4} + \cdots$$

positive Elemente hat und konvergiert und wenn von einem gewissen ν an stets $\alpha_\nu \rho_\nu \geqq 0$ ist, so konvergiert

[1] Wir bemerken schon hier, daß wir später auch den Fall $x < 0$ und sogar nichtreelle x behandeln und dabei die Bezeichnungen $\varphi(x)$, $\Phi(x)$ beibehalten. Für $x < 0$ ist aber, wie wir sehen werden, nicht mehr $\Phi(x) = \frac{1}{P(x)}$, die Formel von Ramanujan also nicht mehr gültig.

auch der Kettenbruch

$$\beta_0 + \frac{\alpha_1 |}{|\beta_1} + \frac{\alpha_2(1+\rho_1\beta_1)|}{|\beta_2 - \alpha_2\rho_1} + \frac{\alpha_3(1+\rho_2\beta_2)|}{|\beta_3 - \alpha_3\rho_2} + \frac{\alpha_4(1+\rho_3\beta_3)|}{|\beta_4 - \alpha_4\rho_3} + \cdots$$

und hat den gleichen Wert.

Wir wenden diesen Satz an auf die folgenden Werte α_ν, ρ_ν, β_ν:

$$\text{(A)} \qquad \alpha_\nu = \alpha = \frac{1}{4}(1+x)^2 + \frac{1}{4}\left(\frac{n^2-m^2}{1+x}\right)^2 - \frac{1}{2}(n^2+m^2)$$

$$= \frac{1}{4(1+x)^2}\prod_\varepsilon (1+x+m+\varepsilon n)(1+x-m-\varepsilon n),$$

$$\text{(B)} \qquad \alpha\rho_{2\nu+1} = 2\nu+1-p, \quad \alpha\rho_{2\nu} = 2\nu - q,$$

$$\text{(C)} \qquad \beta_{2\nu+1} = 2\nu+1+p, \quad \beta_{2\nu} = 2\nu+q,$$

$$\text{(D)} \qquad p = \frac{1}{2}\left(1+x+\frac{n^2-m^2}{1+x}\right), \quad q = \frac{1}{2}\left(1+x-\frac{n^2-m^2}{1+x}\right).$$

Damit die Definition (B) möglich ist, muß natürlich $\alpha \neq 0$ sein, also

$$\text{(2.5)} \qquad 1+x \neq \pm(m+n), \ \pm(m-n).$$

Das wollen wir vorläufig voraussetzen. Aus (A) und (D) ergibt sich

$$\text{(2.6)} \qquad \alpha = p^2 - n^2 = q^2 - m^2,$$

und folglich ist

$$\alpha + \alpha\rho_{2\nu+1}\beta_{2\nu+1} = p^2 - n^2 + (2\nu+1)^2 - p^2 = (2\nu+1)^2 - n^2,$$

$$\alpha + \alpha\rho_{2\nu}\beta_{2\nu} = q^2 - m^2 + (2\nu)^2 - q^2 = (2\nu)^2 - m^2,$$

$$\beta_{2\nu} - \alpha\rho_{2\nu+1} = \beta_{2\nu+1} - \alpha\rho_{2\nu+2} = p+q-1 = x,$$

$$\beta_{2\nu} - \alpha\rho_{2\nu-1} = \beta_{2\nu+1} - \alpha\rho_{2\nu} = p+q+1 = x+2.$$

Die beiden Kettenbrüche des obigen Satzes werden daher die folgenden:

$$x + \frac{1^2-n^2|}{|x} + \frac{2^2-m^2|}{|x} + \frac{3^2-n^2|}{|x} + \frac{4^2-m^2|}{|x} + \cdots,$$

$$q + \frac{\alpha \quad |}{|1+p} + \frac{1^2-n^2|}{|x+2} + \frac{2^2-m^2|}{|x+2} + \frac{3^2-n^2|}{|x+2} + \frac{4^2-m^2|}{|x+2} + \cdots.$$

Der erste ist $\varphi(x)$, der zweite offenbar

$$q+\frac{\alpha}{p-1-x+\varphi(x+2)}=q+\frac{\alpha}{-q+\varphi(x+2)}$$
$$=\frac{q\varphi(x+2)-q^2+\alpha}{-q+\varphi(x+2)}=\frac{q\varphi(x+2)-m^2}{\varphi(x+2)-q}.$$

Nach obigem Satz sind sie einander gleich; man hat also die Funktionalgleichung

$$\varphi(x)=\frac{q\varphi(x+2)-m^2}{\varphi(x+2)-q},$$

aus der weiter folgt:

$$\Phi(x)=\frac{\varphi(x)+m}{\varphi(x)-m}=\frac{q\varphi(x+2)-m^2+m[\varphi(x+2)-q]}{q\varphi(x+2)-m^2-m[\varphi(x+2)-q]}$$
$$=\frac{(q+m)[\varphi(x+2)-m]}{(q-m)[\varphi(x+2)+m]}=\frac{q+m}{q-m}\,\frac{1}{\Phi(x+2)}.$$

Daher ist

$$\Phi(x)\Phi(x+2)=\frac{q+m}{q-m}=\frac{(1+x+m+n)(1+x+m-n)}{(1+x-m+n)(1+x-m-n)}\tag{2.7}$$
$$=\prod_{\varepsilon}\frac{1+x+m+\varepsilon n}{1+x-m-\varepsilon n}.$$

Man beachte, daß die Faktoren wegen (2.5) sämtlich von 0 verschieden sind. Erst recht werden sie von 0 verschieden sein, wenn man x um eine gerade Zahl vermehrt, weil ja $m+\varepsilon n$, falls reell, wegen (2.4) absolut kleiner als 3 ist. Ersetzt man in (2.7) x durch $x+2$, so kommt durch Division:

$$\frac{\Phi(x)}{\Phi(x+4)}=\prod_{\varepsilon}\frac{(1+x+m+\varepsilon n)(3+x-m-\varepsilon n)}{(1+x-m-\varepsilon n)(3+x+m+\varepsilon n)},$$

wofür man wegen

$$\frac{1+x+m+\varepsilon n}{4}=\Gamma\left(\frac{5+x+m+\varepsilon n}{4}\right):\Gamma\left(\frac{1+x+m+\varepsilon n}{4}\right)$$

und analoger Formeln auch schreiben kann:

$$\frac{\Phi(x)}{\Phi(x+4)}=\prod_{\varepsilon}\frac{\Gamma\left(\frac{5+x+m+\varepsilon n}{4}\right)\Gamma\left(\frac{7+x-m-\varepsilon n}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{5+x-m-\varepsilon n}{4}\right)\Gamma\left(\frac{7+x+m+\varepsilon n}{4}\right)}$$
$$:\prod_{\varepsilon}\frac{\Gamma\left(\frac{1+x+m+\varepsilon n}{4}\right)\Gamma\left(\frac{3+x-m-\varepsilon n}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{1+x-m-\varepsilon n}{4}\right)\Gamma\left(\frac{3+x+m+\varepsilon n}{4}\right)}.$$

Ersetzt man hier x der Reihe nach durch $x, x+4, x+8, \ldots,$ $x+4\nu-4$ und multipliziert die entstehenden Gleichungen miteinander, so ergibt sich:

$$(2.8)\quad \frac{\Phi(x)}{\Phi(x+4\nu)} = \prod_{\varepsilon} \frac{\Gamma\left(\frac{1+4\nu+x+m+\varepsilon n}{4}\right)\Gamma\left(\frac{3+4\nu+x-m-\varepsilon n}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{1+4\nu+x-m-\varepsilon n}{4}\right)\Gamma\left(\frac{3+4\nu+x+m+\varepsilon n}{4}\right)}$$

$$: \prod_{\varepsilon} \frac{\Gamma\left(\frac{1+x+m+\varepsilon n}{4}\right)\Gamma\left(\frac{3+x-m-\varepsilon n}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{1+x-m-\varepsilon n}{4}\right)\Gamma\left(\frac{3+x+m+\varepsilon n}{4}\right)}.$$

Nun folgt aus der Definitionsformel (2.1) unmittelbar $\lim\limits_{x\to\infty} \varphi(x) = \infty$ und somit aus (2.2): $\lim\limits_{x\to\infty} \Phi(x) = 1$. Ferner strebt das Produkt im Dividenden auf der rechten Seite von (2.8), wie man aus der Formel

$$\lim_{\nu\to\infty} \frac{\Gamma(x+\nu)}{(\nu-1)!\,\nu^x} = 1$$

leicht erkennt, für $\nu \to \infty$ gegen 1, während das Produkt im Divisor die in (1.2) eingeführte Funktion $P(x)$ ist. Daher ergibt sich aus (2.8) durch den Grenzübergang $\nu \to \infty$ sofort: $\Phi(x) = \frac{1}{P(x)}$, also gerade die zu beweisende Formel.

Wir wiederholen noch einmal das Resultat, indem wir $\Phi(x)$ statt $P(x)$ einführen und mittels (2.2) von $\Phi(x)$ zu $\varphi(x)$ zurückkehren:

$$(2.9)\left\{\begin{aligned} & x + \frac{1^2-n^2|}{|\;x} + \frac{2^2-m^2|}{|\;x} + \frac{3^2-n^2|}{|\;x} + \frac{4^2-m^2|}{|\;x} + \\ & \qquad + \cdots = m \cdot \frac{\Phi(x)+1}{\Phi(x)-1}, \\ & \Phi(x) = \prod_{\varepsilon} \frac{\Gamma\left(\frac{1+x-m-\varepsilon n}{4}\right)\Gamma\left(\frac{3+x+m+\varepsilon n}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{1+x+m+\varepsilon n}{4}\right)\Gamma\left(\frac{3+x-m-\varepsilon n}{4}\right)} \end{aligned}\right.$$

für $x > 0$, $1 > n^2 > -\infty$, $4 > m^2 > -\infty$, $m \neq 0$, $1 + x \neq \pm(m+n), \pm(m-n)$.

§ 3. Der Kettenbruch für negative x

Wenn wir für n und m die Forderungen $1 > n^2 > -\infty$, $4 > m^2 > -\infty$ beibehalten, so ist der Kettenbruch (2.1) auch für negative x konvergent. Aus (2.1) folgt nämlich

$$(3.1)\quad -\varphi(x) = -x - \frac{1^2-n^2|}{|\,x} + \frac{2^2-m^2|}{|\,x} + \frac{3^2-n^2|}{|\,x} + \cdots$$

und, indem man den Kettenbruch durch einen äquivalenten ersetzt, auch

$$(3.2)\quad -\varphi(x) = -x + \frac{1^2-n^2|}{|\,-x} + \frac{2^2-m^2|}{|\,-x} + \frac{3^2-n^2|}{|\,-x} + \cdots.$$

Das ist nun für $x < 0$ ein Kettenbruch mit positiven Elementen, der konvergiert. Daher ist auch der Kettenbruch (2.3), also der Kettenbruch

$$(3.3)\quad 1 + \frac{2m|}{|\,x-m} + \frac{1^2-n^2|}{|\,x} + \frac{2^2-m^2|}{|\,x} + \frac{3^2-n^2|}{|\,x} + \frac{4^2-m^2|}{|\,x} + \\ + \cdots = \Phi(x)$$

für negative x mindestens im weiteren Sinne konvergent. Wir werden aber sehen, daß er jetzt nicht mehr gleich der für negative x ebenfalls existierenden Funktion $\frac{1}{P(x)}$ ist. Um ihn zu berechnen, bilden wir der Reihe nach die Kettenbrüche

$$x - m + \frac{1^2-n^2|}{|\,x} + \frac{2^2-m^2|}{|\,x} + \cdots = \frac{2m}{\Phi(x)-1},$$

$$x + m + \frac{1^2-n^2|}{|\,x} + \frac{2^2-m^2|}{|\,x} + \cdots = \frac{2m}{\Phi(x)-1} + 2m = \frac{2m\,\Phi(x)}{\Phi(x)-1},$$

$$\frac{2m|}{|\,x+m} + \frac{1^2-n^2|}{|\,x} + \frac{2^2-m^2|}{|\,x} + \cdots = \frac{\Phi(x)-1}{\Phi(x)} = 1 - \frac{1}{\Phi(x)}.$$

Also ist schließlich

$$\frac{1}{\Phi(x)} = 1 - \frac{2m|}{|\,x+m} + \frac{1^2-n^2|}{|\,x} + \frac{2^2-m^2|}{|\,x} + \cdots$$

und durch Übergang zu einem äquivalenten Kettenbruch

$$(3.4)\quad \frac{1}{\Phi(x)} = 1 + \frac{2m|}{|\,-x-m} + \frac{1^2-n^2|}{|\,-x} + \frac{2^2-m^2|}{|\,-x} + \cdots.$$

Der Wert dieses Kettenbruches kann nun, da $-x$ positiv ist, nach dem vorigen Paragraphen angegeben werden, womit man dann auch $\Phi(x)$ hat; und zwar findet man:

$$\Phi(x) = \prod_{\varepsilon} \frac{\Gamma\left(\frac{1-x+m+\varepsilon n}{4}\right)\Gamma\left(\frac{3-x-m-\varepsilon n}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{1-x-m-\varepsilon n}{4}\right)\Gamma\left(\frac{3-x+m+\varepsilon n}{4}\right)}, \tag{3.5}$$

wobei zu den Voraussetzungen $x < 0$, $1 > n^2 > -\infty$, $4 > m^2 > -\infty$ analog zu (2.5) noch die weitere $1 - x \neq \pm (m+n)$, $\pm (m-n)$ hinzuzufügen ist; außerdem auch wieder $m \neq 0$, weil sich sonst aus dem Kettenbruch (3.4) nichts für (3.1) ergibt.

Für positive x hatten wir die Formel

$$\Phi(x) = \frac{1}{P(x)} = \prod_{\varepsilon} \frac{\Gamma\left(\frac{1+x-m-\varepsilon n}{4}\right)\Gamma\left(\frac{3+x+m+\varepsilon n}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{1+x+m+\varepsilon n}{4}\right)\Gamma\left(\frac{3+x-m-\varepsilon n}{4}\right)}.$$

Würde diese auch für negative x gelten, so müßten die beiden Gammaprodukte einander gleich sein. Ihr Quotient erweist sich aber auf Grund der Formel $\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x}$ nicht als 1, sondern als

$$\prod_{\varepsilon} \frac{\sin \pi \frac{3+x+m+\varepsilon n}{4} \cdot \sin \pi \frac{1+x-m-\varepsilon n}{4}}{\sin \pi \frac{3+x-m-\varepsilon n}{4} \cdot \sin \pi \frac{1+x+m+\varepsilon n}{4}} = \prod_{\varepsilon} \frac{\cot \pi \frac{1+x+m+\varepsilon n}{4}}{\cot \pi \frac{1+x-m-\varepsilon n}{4}}.$$

Wir wiederholen nochmals das Ergebnis dieses Paragraphen, indem wir von $\Phi(x)$ wieder zu $\varphi(x)$ zurückkehren:

$$\left\{\begin{aligned} & x + \frac{1^2 - n^2 |}{| \; x} + \frac{2^2 - m^2 |}{| \; x} + \frac{3^2 - n^2 |}{| \; x} + \frac{4^2 - m^2 |}{| \; x} + \\ & \qquad + \cdots = m \cdot \frac{\Phi(x) + 1}{\Phi(x) - 1}, \\ & \Phi(x) = \prod_{\varepsilon} \frac{\Gamma\left(\frac{1-x+m+\varepsilon n}{4}\right)\Gamma\left(\frac{3-x-m-\varepsilon n}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{1-x-m-\varepsilon n}{4}\right)\Gamma\left(\frac{3-x+m+\varepsilon n}{4}\right)} \end{aligned}\right. \tag{3.6}$$

für $x < 0$, $1 > n^2 > -\infty$, $4 > m^2 > -\infty$, $m \neq 0$,
$1 - x \neq \pm(m+n)$, $\pm(m-n)$.

§ 4. Die bisher ausgeschlossenen Fälle

Der bei (2.9) und (3.6) ausgeschlossene Fall $m = 0$ erledigt sich rasch. Der Kettenbruch (2.9) hat nämlich positive Elemente;

daher liegt sein Wert stets zwischen zwei aufeinanderfolgenden Näherungsbrüchen. Die Näherungsbrüche sind aber rationale und folglich stetige Funktionen von m, woraus man ohne weiteres erkennt, daß der Kettenbruch (2.9) selbst eine stetige Funktion von m ist. Dasselbe gilt vom Kettenbruch (3.6), wie man sofort sieht, wenn man ihn mit -1 multipliziert und dann zu dem äquivalenten Kettenbruch (3.2) übergeht, der jetzt positive Elemente hat. Man erhält daher den Wert der Kettenbrüche (2.9) und (3.6) für $m = 0$ einfach dadurch, daß man rechts den Grenzübergang $m \to 0$ ausführt, was formelmäßig etwa mit der Hôpitalschen Regel geschehen kann.

In (2.9) waren weiter die Fälle $x > 0$, $1 + x = \pm(m+n)$, $\pm(m-n)$ ausgeschlossen, und in (3.6) die Fälle $x < 0$, $1 - x = \pm(m+n)$, $\pm(m-n)$. Diese erledigen wir jetzt durch den Nachweis der beiden Formeln

$$(4.1)\quad m+n-1+\frac{1^2-n^2|}{|m+n-1}+\frac{2^2-m^2|}{|m+n-1}+\frac{3^2-n^2|}{|m+n-1}+\cdots=m,$$

$$(4.2)\quad 1-m-n+\frac{1^2-n^2|}{|1-m-n}+\frac{2^2-m^2|}{|1-m-n}+\frac{3^2-n^2|}{|1-m-n}+\cdots=-m,$$

und zwar beide für beliebige reelle m, n mit $m+n > 1$ und für nicht verschwindende Teilzähler. Indem man hier m und n auch durch $-m$ und $-n$ ersetzen kann, sind die anderen ausgeschlossenen Werte von x gleich mit erledigt.

Zum Beweis von (4.1) setzen wir

$$(4.3)\quad y_{2k} = m+n-1+\frac{(2k)^2-m^2|}{|m+n-1}+\frac{(2k+1)^2-n^2|}{|m+n-1}+\frac{(2k+2)^2-m^2|}{|m+n-1}+\cdots,$$

$$(4.4)\quad y_{2k+1} = m+n-1+\frac{(2k+1)^2-n^2|}{|m+n-1}+\frac{(2k+2)^2-m^2|}{|m+n-1}+\frac{(2k+3)^2-n^2|}{|m+n-1}+\cdots.$$

Für hinreichend große k sind das konvergente Kettenbrüche mit positiven Elementen. Definiert man jetzt bei einem festgehaltenen hinreichend großen k eine Zahlenfolge x_ν durch die Formeln

$$x_0 = 1,\ \frac{x_0}{x_1} = 2k-1+n,\ \frac{x_1}{x_2} = 2k+m,\ \frac{x_2}{x_3} = 2k+1+n,\ \frac{x_3}{x_4} = 2k+2+m,\ \ldots,$$

so sind offenbar alle x_ν positiv, und es gilt das Rekursionssystem

$$\begin{aligned}
x_0 &= (m+n-1)\,x_1 + [(2k)^2 - m^2]\,x_2,\\
x_1 &= (m+n-1)\,x_2 + [(2k+1)^2 - n^2]\,x_3,\\
x_2 &= (m+n-1)\,x_3 + [(2k+2)^2 - m^2]\,x_4,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}$$

Aus diesem folgt nun nach Kett S. 291, Satz 46 sofort:

$$\frac{x_0}{x_1} = m+n-1 + \frac{(2k)^2 - m^2 |}{| m+n-1} + \frac{(2k+1)^2 - n^2 |}{| m+n-1} + \frac{(2k+2)^2 - m^2 |}{| m+n-1} + \cdots,$$

weil der Kettenbruch positive Elemente hat und konvergiert und weil auch alle x_ν positiv sind. Nach der Definitionsformel (4.3) ist also

$$y_{2k} = \frac{x_0}{x_1} = 2k - 1 + n.$$

Hieraus kann man nun auf Grund von (4.3) und (4.4) rekurrent rückwärts schließen:

$$\begin{aligned}
y_{2k-1} &= m+n-1 + \frac{(2k-1)^2 - n^2}{y_{2k}} = m+n-1 + \frac{(2k-1)^2 - n^2}{2k-1+n}\\
&= 2k - 2 + m,\\
y_{2k-2} &= m+n-1 + \frac{(2k-2)^2 - m^2}{y_{2k-1}} = m+n-1 + \frac{(2k-2)^2 - m^2}{2k-2+m}\\
&= 2k - 3 + n,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
y_2 &= m+n-1 + \frac{2^2 - m^2}{y_3} = m+n-1 + \frac{2^2 - m^2}{2+m} = 1 + n,\\
y_1 &= m+n-1 + \frac{1^2 - n^2}{y_2} = m+n-1 + \frac{1 - n^2}{1+n} = m.
\end{aligned}$$

Mit der letzten Formel ist nun bereits (4.1) bewiesen. Die Schlußkette wird nur dann hinfällig, wenn einmal ein Nenner verschwindet, also für $n = -1, -3, -5, \ldots$ und $m = -2, -4, -6, \ldots$ Diese Werte sind aber bei (4.1) durch die Forderung nicht verschwindender Teilzähler bereits ausgeschlossen.

Bemerkt sei übrigens, daß unser Beweis die Formeln

$$(4.5) \qquad y_{2k} = 2k - 1 + n, \quad y_{2k+1} = 2k + m$$

auch für nicht ganzzahlige reelle k und nicht verschwindende Teilzähler verbürgt.

Was nun den Kettenbruch (4.2) anbelangt, so wird er nach Multiplikation mit -1 äquivalent mit (4.1), hat dann also den Wert m und daher vorher den Wert $-m$.

Bemerkung. Die Formeln (4.1) und (4.2) lassen sich dahin deuten, daß man in (2.9) und (3.6) die ausgeschlossenen Werte $x = m + n - 1$ bzw. $x = 1 - m - n$ noch zulassen darf. Für diese hat nämlich eine der im Zähler bzw. Nenner von $\Phi(x)$ auftretenden Gammafunktionen einen Pol, so daß man $\Phi(x) = \infty$ bzw. 0, also $\varphi(x) = m$ bzw. $-m$ setzen muß.

§ 5. Ausdehnung ins Komplexe

Wir können nachträglich den Geltungsbereich der Formeln (2.9) und (3.6) noch erheblich ausdehnen, wobei insbesondere auch die Fälle des § 4 erneut erfaßt werden und die Bemerkung am Schluß des § 4 ins rechte Licht gerückt wird. Wenn wir trotzdem die Ausführungen des § 4 nicht als überflüssig unterdrücken wollten, so geschah das wegen der besonders einfachen Herleitung der Formeln (4.1) und (4.2) und weil sich dabei über unser eigentliches Ziel hinaus die Formeln (4.5) in Verbindung mit den Definitionen (4.3) und (4.4) auch für nicht ganzzahlige reelle k ergaben.

Der Kettenbruch

$$(5.1)\quad \varphi(x) = x + \frac{1^2 - n^2|}{|\,x} + \frac{2^2 - m^2|}{|\,x} + \frac{3^2 - n^2|}{|\,x} + \frac{4^2 - m^2|}{|\,x} + \cdots$$

ist äquivalent mit

$$x + \frac{1|}{|\,b_1 x} + \frac{1|}{|\,b_2 x} + \frac{1|}{|\,b_3 x} + \cdots,$$

wobei

$$b_1 = \frac{1}{1^2 - n^2}, \quad b_{2\nu-1} = \frac{[2^2 - m^2]\,[4^2 - m^2]\ldots[(2\nu-2)^2 - m^2]}{[1^2 - n^2]\,[3^2 - n^2]\ldots[(2\nu-1)^2 - n^2]},$$

$$b_{2\nu} = \frac{[1^2 - n^2]\,[3^2 - n^2]\ldots[(2\nu-1)^2 - n^2]}{[2^2 - m^2]\,[4^2 - m^2]\ldots[(2\nu)^2 - m^2]}.$$

Wir nehmen n, m vorläufig nur im Bereich $1 > n^2 > 0$, $4 > m^2 > 0$. Dann sind die b_ν positiv und es ist

$$(b_1+b_2)+\cdots+(b_{2\nu-1}+b_{2\nu}) > \sqrt{b_1 b_2}+\sqrt{b_3 b_4}+\cdots+\sqrt{b_{2\nu-1} b_{2\nu}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2^2-m^2}}+\frac{1}{\sqrt{4^2-m^2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{(2\nu)^2-m^2}}$$

$$> \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2\nu}.$$

Nach Kett S. 268, Satz 35 ist daher der Kettenbruch $\varphi(x)$ in jedem Bereich

$$x = re^{i\vartheta}, \quad 0 < r_0 \leqq r \leqq r_1, \quad -\frac{\pi}{2}+\eta \leqq \vartheta \leqq \frac{\pi}{2}-\eta,$$

wo $\eta > 0$ beliebig klein, also in jedem abgeschlossenen ganz im Innern der Halbebene $\Re(x) > 0$ gelegenen Bereich gleichmäßig konvergent und folglich eine analytische Funktion von x. Da aber auch auf der rechten Seite von (2.9) eine analytische Funktion von x steht, so gilt die Formel (2.9) in der ganzen Halbebene $\Re(x) > 0$.

Ebenso ist der Kettenbruch

$$-\varphi(x) = -x - \frac{1^2-n^2|}{|x} + \frac{2^2-m^2|}{|x} + \frac{3^2-n^2|}{|x} + \cdots$$

äquivalent mit

$$-x + \frac{1^2-n^2|}{|-x} + \frac{2^2-m^2|}{|-x} + \frac{3^2-n^2|}{|-x} + \cdots$$

und folglich auch mit

$$-x + \frac{1|}{|-b_1 x} + \frac{1|}{|-b_2 x} + \frac{1|}{|-b_3 x} + \cdots,$$

wo die b_ν die gleichen sind wie oben. Dieser letzte Kettenbruch ist daher für

$$-x = re^{i\vartheta}, \quad 0 < r_0 \leqq r \leqq r_1, \quad -\frac{\pi}{2}+\eta \leqq \vartheta \leqq \frac{\pi}{2}-\eta,$$

also in jedem abgeschlossenen ganz im Innern der Halbebene $\Re(x) < 0$ gelegenen Bereich gleichmäßig konvergent und folglich eine analytische Funktion von x. Da auch auf der rechten Seite von (3.6) eine analytische Funktion von x steht, so gilt die Formel (3.6) in der ganzen Halbebene $\Re(x) < 0$.

Schließlich lassen sich auch die m^2, n^2 ins Komplexe ausdehnen. Zu dem Zweck sei

$$(5.2)\qquad \varphi_{2k+1}(x) = x + \frac{(2k+1)^2 - n^2 |}{| \quad x} + \frac{(2k+2)^2 - m^2 |}{| \quad x} + \cdots,$$

also speziell $\varphi_1(x) = \varphi(x)$. Ersetzt man diesen Kettenbruch durch einen äquivalenten mit lauter Teilzählern 1

$$(5.3)\qquad \varphi_{2k+1}(x) = x + \frac{1 \quad |}{| \, b_{1,k}x} + \frac{1 \quad |}{| \, b_{2,k}x} + \cdots,$$

wo also

$$b_{1,k} \quad = \frac{1}{(2k+1)^2 - n^2},$$

$$b_{2\nu-1,k} = \frac{[(2k+2)^2 - m^2]\,[(2k+4)^2 - m^2] \ldots [(2k+2\nu-2)^2 - m^2]}{[(2k+1)^2 - n^2]\,[(2k+3)^2 - n^2] \ldots [(2k+2\nu-1)^2 - n^2]},$$

$$b_{2\nu,k} \quad = \frac{[(2k+1)^2 - n^2]\,[(2k+3)^2 - n^2] \ldots [(2k+2\nu-1)^2 - n^2]}{[(2k+2)^2 - m^2]\,[(2k+4)^2 - m^2] \ldots [(2k+2\nu)^2 - m^2]},$$

und setzt man

$$b_{\nu,k} = |\, b_{\nu,k} \,|\, e^{i\,\omega_{\nu,k}},$$

so überzeugt man sich leicht davon, daß, wenn n, m in einem beschränkten Bereich der komplexen Zahlenebene $|n| < K$, $|m| < K$ variieren, die Winkel $\omega_{\nu,k}$ absolut beliebig klein sind, sobald nur k hinreichend groß ist. Ist daher x irgendeine feste Zahl in der Halbebene $\Re(x) > 0$, etwa $x = re^{i\alpha}$, wo $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$, so ist

$$b_{\nu,k}\,x = |\, b_{\nu,k}\,x \,|\, e^{i\,\vartheta_{\nu,k}} \qquad \text{wo} \qquad \alpha - \eta < \vartheta_{\nu,k} < \alpha + \eta$$

bei beliebig kleinem positivem η, wenn nur k groß genug. Nach Kett S. 268, Satz 35 wird daher der Kettenbruch (5.3) im Bereich $|n| < K$, $|m| < K$ gleichmäßig konvergieren und folglich eine analytische Funktion von n und m sein. Dann ist aber auch, wenn man für n die ungeraden und für m die geraden ganzen Zahlen außer $m = 0$ ausschließt, der Kettenbruch $\varphi(x)$ mindestens im weiteren Sinne konvergent und analytisch, und zwar ist

$$\varphi(x) = x + \frac{1^2 - n^2 |}{x} + \frac{2^2 - m^2 |}{| \quad x} + \cdots + \frac{(2k-1)^2 - n^2 |}{| \quad x} + \frac{(2k)^2 - m^2 |}{| \, \varphi_{2k+1}(x)}$$

Da nun auf der rechten Seite der Formal (2.9) ebenfalls eine analytische Funktion von n und m steht, so gilt schließlich (2.9) für $\Re(x) > 0$ und beliebige komplexe n, m, sofern kein Teilzähler verschwindet.

Analog ergibt sich, indem man den Kettenbruch $-\varphi_{2k+1}(x)$ heranzieht, daß die Formel (3.6) für $\Re(x) < 0$ und beliebige komplexe n, m gilt, sofern kein Teilzähler verschwindet.

§ 6. Ein weiterer Kettenbruch

Wir betrachten jetzt den Kettenbruch

$$\frac{a_1|}{|b_1} + \frac{a_2|}{|b_2} + \frac{a_3|}{|b_3} + \cdots \tag{6.1}$$

mit den Elementen

$$\begin{aligned} a_{2\nu} &= (2\nu - 1 + n)(2\nu - m), & b_{2\nu} &= x + n - m, \\ a_{2\nu+1} &= (2\nu + m)(2\nu + 1 - n), & b_{2\nu+1} &= x - n + m, \end{aligned} \tag{6.2}$$

wobei $0 < n < 1$, $0 < m < 2$, $x > |m - n|$ vorausgesetzt werden soll. Dann hat der Kettenbruch positive Elemente und konvergiert. Sind A_ν, B_ν seine Näherungszähler und -nenner, so wollen wir einen neuen Kettenbruch

$$d_0 + \frac{c_1|}{|d_1} + \frac{c_2|}{|d_2} + \cdots \tag{6.3}$$

bilden, dessen Näherungszähler und -nenner $A_\nu + r_\nu A_{\nu-1}$ bzw. $B_\nu + r_\nu B_{\nu-1}$ sind, wobei

$$r_{2\nu} = 2\nu + m, \quad r_{2\nu+1} = 2\nu + 1 + n$$

sein soll. Der Näherungsbruch ν-ter Ordnung von (6.3) liegt dann zwischen den Näherungsbrüchen ν-ter und $(\nu-1)$-ter Ordnung von (6.1), so daß (6.3) gegen den gleichen Wert wie (6.1) konvergiert.

Nach den Formeln Kett S. 216 sind die Elemente von (6. 3) die folgenden:

$$d_0 = r_0 = m, \quad d_1 = b_1 + r_1 = x + 1 + m,$$

$$c_1 = a_1 - r_0(b_1 + r_1) = m(1-n) - m(x+1+m) = -m(x+m+n),$$

$$\left.\begin{aligned} c_\nu &= a_{\nu-1} \frac{a_\nu - r_{\nu-1}(b_\nu + r_\nu)}{a_{\nu-1} - r_{\nu-2}(b_{\nu-1} + r_{\nu-1})}, \\ d_\nu &= b_\nu + r_\nu - r_{\nu-2} \frac{a_\nu - r_{\nu-1}(b_\nu + r_\nu)}{a_{\nu-1} - r_{\nu-2}(b_{\nu-1} + r_{\nu-1})} \end{aligned}\right| \quad (\nu \geqq 2).$$

Nun ist in unserem Fall

$$\begin{aligned} a_{2\nu} - r_{2\nu-1}(b_{2\nu} + r_{2\nu}) &= (2\nu - 1 + n)(2\nu - m) - \\ &\quad - (2\nu - 1 + n)(x + n + 2\nu) \\ &= -(2\nu - 1 + n)(x + m + n), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_{2\nu+1} - r_{2\nu}(b_{2\nu+1} + r_{2\nu+1}) &= (2\nu + m)(2\nu + 1 - n) - \\ &\quad - (2\nu + m)(x + m + 2\nu + 1) \\ &= -(2\nu + m)(x + m + n). \end{aligned}$$

Daher ergibt sich für $\nu \geqq 1$

$$c_{2\nu} = (2\nu - 2 + m)(2\nu - 1 - n)\frac{2\nu - 1 + n}{2\nu - 2 + m} = (2\nu - 1)^2 - n^2,$$

$$d_{2\nu} = x + n - m + 2\nu + m - (2\nu - 2 + m)\frac{2\nu - 1 + n}{2\nu - 2 + m} = 1 + x,$$

$$c_{2\nu+1} = (2\nu - 1 + n)(2\nu - m)\frac{2\nu + m}{2\nu - 1 + n} = (2\nu)^2 - m^2,$$

$$d_{2\nu+1} = x - n + m + 2\nu + 1 + n - (2\nu - 1 + n)\frac{2\nu + m}{2\nu - 1 + n} = 1 + x,$$

und man erhält die Formel

$$\frac{m(1-n)|}{x-n+m} + \frac{(1+n)(2-m)|}{|x+n-m} + \frac{(2+m)(3-n)|}{|x-n+m} + \frac{(3+n)(4-m)|}{|x+n-m} + \cdots$$

$$= m - \frac{m(x+m+n)|}{|x+1+m} + \frac{1^2-n^2|}{|1+x} + \frac{2^2-m^2|}{|1+x} + \frac{3^2-n^2|}{|1+x} + \cdots.$$

Dieser letzte Kettenbruch ist uns aber bekannt, er ist mit der Bezeichnung des § 2 und 3 gleich

$$m - \frac{m(x+m+n)}{m + \varphi(1+x)} = \frac{m[\varphi(1+x) - x - n]}{m + \varphi(1+x)}$$

$$= \frac{m-n-x}{2} + \frac{m+n+x}{2} \frac{1}{\Phi(1+x)}.$$

Damit ergibt sich schließlich:

(6.4)

$$\frac{m(1-n)|}{|x-n+m} + \frac{(1+n)(2-m)|}{|x+n-m} + \frac{(2+m)(3-n)|}{|x-n+m} + \frac{(3+n)(4-m)|}{|x+n-m} + \cdots$$

$$= \frac{m-n-x}{2} + \frac{m+n+x}{2} \frac{1}{\Phi(1+x)}$$

$$\text{für } 0 < n < 1, \quad 0 < m < 2, \quad x > |n-m|,$$

wobei die Funktion Φ den in (2.9) angegebenen Wert hat.

Die gleiche Formel gilt nun aber auch für negative x, und zwar für

$$0 < n < 1, \quad 0 < m < 2, \quad x < -1, \quad |x| > |n-m|,$$

wobei dann die Funktion Φ, weil ihr Argument jetzt negativ ist, den in (3.6) angegebenen Wert hat. Um das einzusehen, bemerken wir, daß der Kettenbruch in (6.4) nach Multiplikation mit $x - n + m$ äquivalent wird mit

$$\frac{m(1-n)|}{1} + \frac{(1+n)(2-m)|}{|x^2-(n-m)^2} + \frac{(2+m)(3-n)|}{|1} + \frac{(3+n)(4-m)|}{|x^2-(n-m)^2} + \cdots,$$

und dieser Kettenbruch bleibt unverändert, wenn man x durch $-x$ ersetzt. Dasselbe gilt aber auch von der rechten Seite der Formel (6.4), falls $|x| > 1$. Denn

$$(x-n+m)(m-n-x) = (n-m)^2 - x^2$$

bleibt trivialerweise unverändert, und es ist auch

$$(6.5) \quad \frac{(x-n+m)(m+n+x)}{\Phi(1+x)} = \frac{(-x-n+m)(m+n-x)}{\Phi(1-x)} \text{ für } x > 1$$

(für $0 < x < 1$ gilt das nicht). Die linke Seite von (6.5) ist nämlich nach (2.9) gleich

$$\prod_{\varepsilon} \frac{(x+m+\varepsilon n)\,\Gamma\left(\frac{2+x+m+\varepsilon n}{4}\right)\Gamma\left(\frac{4+x-m-\varepsilon n}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{2+x-m-\varepsilon n}{4}\right)\Gamma\left(\frac{4+x+m+\varepsilon n}{4}\right)}$$

$$= 16 \prod_{\varepsilon} \frac{\Gamma\left(\frac{2+x+m+\varepsilon n}{4}\right)\Gamma\left(\frac{4+x-m-\varepsilon n}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{2+x-m-\varepsilon n}{4}\right)\Gamma\left(\frac{x+m+\varepsilon n}{4}\right)},$$

und die rechte Seite von (6.5) ist, da auf ihr die Funktion Φ ein negatives Argument hat, nach (3.6) gleich

$$\prod_{\varepsilon} \frac{(x-m-\varepsilon n)\,\Gamma\left(\frac{x-m-\varepsilon n}{4}\right)\Gamma\left(\frac{2+x+m+\varepsilon n}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{x+m+\varepsilon n}{4}\right)\Gamma\left(\frac{2+x-m-\varepsilon n}{4}\right)}$$

$$= 16 \prod_{\varepsilon} \frac{\Gamma\left(\frac{4+x-m-\varepsilon n}{4}\right)\Gamma\left(\frac{2+x+m+\varepsilon n}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{x+m+\varepsilon n}{4}\right)\Gamma\left(\frac{2+x-m-\varepsilon n}{4}\right)}.$$

Beide Ausdrücke sind in der Tat dieselben, womit (6.5) bewiesen ist.

Schließlich läßt sich die Formel (6.4) auch wieder auf komplexe n, m, x ausdehnen, und zwar gilt sie für solche n, m, x, für die kein Teilzähler verschwindet, die Realteile von $x+n-m$ und $x-n+m$ gleiches Vorzeichen haben und im Fall des negativen Vorzeichens auch $\Re(1+x)<0$ ist. Der Beweis läßt sich am besten für die drei Argumente n, m, x gleichzeitig durchführen, indem man von dem Kettenbruch (6.1) einen Restkettenbruch

$$\frac{a_k|}{|b_k} + \frac{a_{k+1}|}{|b_{k+1}} + \frac{a_{k+2}|}{|b_{k+2}} + \cdots$$

für genügend großes gerades oder ungerades k abtrennt, diesen in einen äquivalenten Kettenbruch mit lauter Teilzählern 1 verwandelt und dann im (n, m, x)-Raum für $\Re(x+n-m)>0$ einen Bereich der Gestalt

$$|n|<K,\quad |m|<K,\quad |x|<K,$$

$$|x\pm(m-n)| \geqq r_0 > 0,\quad -\frac{\pi}{2}+\eta \leqq \arg\,(x\pm(m-n)) \leqq \frac{\pi}{2}-\eta$$

und für $\Re(x+n-m)<0$ einen Bereich der Gestalt

$$|n|<K,\quad |m|<K,\quad |x|<K,$$

$$|x\pm(m-n)| \geqq r_0 > 0,\quad -\frac{\pi}{2}+\eta \leqq \arg\,(-x\mp(m-n)) \leqq \frac{\pi}{2}-\eta,$$

$$|1+x| \geqq r_0 > 0,\qquad -\frac{\pi}{2}+\eta \leqq \arg\,(-1-x) \leqq \frac{\pi}{2}-\eta$$

betrachtet. Dann geht wieder alles mit dem Satz 35 in Kett S. 268. Die genaue Durchführung sei dem Leser überlassen.