Sitzungsberichte

der

mathematisch-naturwissenschaftlichen Klasse

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften zu München

Jahrgang 1952

München 1953
Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften
In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung

Über eine Verallgemeinerung des Gauß'schen arithmetisch-geometrischen Mittels und die zugehörige Folge von Zahlen-n-tupeln

Von **Heinrich Tietze** in München

Vorgelegt am 3. Oktober 1952

1. Seien n ($\geqq 2$) positive Zahlen gegeben:

$$x_1 \geqq x_2 \geqq \ldots \geqq x_n , \tag{1}$$

die nicht alle einander gleich seien. Es seien $f_1 = \sum x_1$, $f_2 = \sum x_1 x_2, \ldots, f_n = x_1 x_2 \ldots x_n$ ihre elementar-symmetrischen Funktionen und $x_1^{(1)}, \ldots, x_n^{(1)}$ die durch

$$x_k^{(1)} = \sqrt[k]{\frac{f_k}{\binom{n}{k}}} > 0 \tag{2}$$

definierten elementar-symmetrischen Mittel der Zahlen $x_1, \ldots, x_n$, wobei bekanntlich[1] $x_1^{(1)} > x_2^{(1)} > \ldots > x_n^{(1)}$ gilt. Wie aus den $x_k = x_k^{(0)}$ die Zahlen $x_k^{(1)}$, so lassen sich aus diesen wiederum Zahlen $x_k^{(2)}$, und in Fortsetzung des Verfahrens eine Folge von positiven Zahlen-n-tupeln

$$x_1^{(\nu)} > x_2^{(\nu)} > \ldots > x_n^{(\nu)} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots) \tag{3}$$

bilden, wobei

$$\lim_{\nu \to \infty} x_1^{(\nu)} = \ldots = \lim_{\nu \to \infty} x_n^{(\nu)} \tag{4}$$

ein Mittel der Zahlen $x_1, \ldots, x_n$ darstellt, das für $n = 2$ das Gauß'sche arithmetisch-geometrische Mittel ist[2].

---

[1] Satz von Maclaurin (1729): vgl. G. H. Hardy-J. E. Littlewood-G. Pólya, Inequalities, Cambridge 1934, pag. 52, theorem 52.

[2] C. F. Gauß, Werke, Bd. 3, p. 352, 358f. (p. 530, wie irrtümlich in der Enc. zitiert, gibt es in Bd. 3 nicht). Vgl. Encyklopädie d. Math. Wiss., Bd. II, Teil II, Artikel II B 3. R. Fricke, Elliptische Funktionen, p. 196, 197, 222ff.

Wählen wir etwa als ein Beispiel, auf das wir nachher zurückgreifen, $n = 3$ und

$$x_1 = 8, \qquad x_2 = 3, \qquad x_3 = 2, \tag{5}$$

so erhalten wir (mit vier Dezimalen)

$$x_1^{(1)} = \frac{13}{3} = 4{,}3333, \qquad x_2^{(1)} = \sqrt{\frac{46}{3}} = 3{,}9158, \qquad x_3^{(1)} = \sqrt[3]{48} = 3{,}6342,$$

ferner

$$x_1^{(2)} = 3{,}9611, \qquad x_2^{(2)} = 3{,}9559, \qquad x_3^{(2)} = 3{,}9508,$$

und weiterhin Werte $x_k^{(\nu)}$, die für $\nu \to \infty$ einem Grenzwert (näherungsweise 3,9559 ...) als verallgemeinertem arithmetisch-geometrischem Mittel zustreben.

Die entscheidende Aussage (4) ist mit enthalten in den allgemeinen Sätzen, die G. Aumann, im Rahmen seiner Untersuchungen über die Theorie von Mittelbildungen, speziell über den „Mischalgorithmus" von analytischen Mitteln entwickelt hat[3], wobei auch prinzipielle Feststellungen über die bemerkenswerte Güte der Konvergenz sich ergeben haben[4]. Was aber im besonderen das verallgemeinerte arithmetisch-geometrische Mittel anlangt, so soll hier nur, in Zusammenhang mit einer Note über „medial-monotone" Polynome[5], eine Bemerkung Platz fin-

[3] G. Aumann, Math. Zeitschr. 39 (1935) p. 625–629. Über den Begriff des analytischen Mittels vgl. G. Aumann, Sitz.ber. d. Bayer. Akad. d. Wiss., Jgg. 1934, S. 45–81.

[4] Man mag also beispielsweise (im Reellen und speziell im Bereich positiver Zahlen x_k verbleibend) $n = 2$ wählen und für $x_1^{(1)}$ das geometrische Mittel, für $x_2^{(1)}$ das harmonische Mittel $\left(\text{den Reziprokwert des arithmetischen Mittels von } \frac{1}{x_1} \text{ und } \frac{1}{x_2}\right)$; oder $n = 3$ und für die $x_k^{(1)}$ das arithmetische, geometrische und harmonische Mittel der x_k, jeweils mit unbegrenzter Fortsetzung des Verfahrens. Hierzu erwähnt sei eine spezielle, für $n = 4$ Zahlen von C. W. Borchardt bei Untersuchungen über Nullwerte von Thetafunktionen eingeführte, als „arithmetisch-geometrisches Mittel" bezeichnete derartige Mittelbildung; vgl. Encyklopädie d. math. Wiss., Bd. II, Teil II, Artikel II B 7, A. Krazer-W. Wirtinger, Abelsche Funktionen und allgemeine Thetafunktionen, p. 758 ff.

[5] H. Tietze, Über eine Klasse von Polynomen, die diejenigen mit lauter positiven Nullstellen umfaßt. Mathemat. Nachrichten, Band 8 (1952), p. 7.

den über ein Durchlaufen der Folge der Zahlen-n-tupel (3) in umgekehrter Richtung, derart daß aus den Zahlen (3) die Zahlen $x_1^{(\nu-1)}, \ldots, x_n^{(\nu-1)}$ zu ermitteln sind, wobei man fragen kann, ob die Folge dieser Zahlen-n-tupel nicht vielleicht noch über die ursprünglich gegebenen Zahlen $x_k^{(0)} = x_k$ hinaus nach rückwärts fortgesetzt werden kann.

2. Nun sind mit den $x_k^{(1)}$ gemäß (2) auch die

$$f_k = \binom{n}{k} \left(x_k^{(1)}\right)^k \qquad (k = 1, \ldots, n) \tag{6}$$

mit gegeben, und daher mit ihnen auch die x_k, nämlich als die n Wurzeln der Gleichung

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k f_k x^{n-k} = 0 \tag{7}$$

(dabei $f_0 = 1$); d. h. die n positiven (nicht durchwegs zusammenfallenden Zahlen) x_k sind durch ihre (dann durchwegs untereinander verschiedenen) elementar-symmetrischen Mittel $x_k^{(1)}$ eindeutig bestimmt. Und analog ergeben sich überhaupt für $\nu \geqq 1$ die $x_k^{(\nu-1)}$ eindeutig aus den $x_k^{(\nu)}$.

3. Fragt man nun aber, ob die Zahlen $x_k = x_k^{(0)}$ ihrerseits die n elementar-symmetrischen Mittel von n positiven Zahlen $y_1 = x_1^{(-1)}, \ldots, y_n = x_n^{(-1)}$ sein können, so ist dies dem Gesagten gemäß zunächst einmal in dem Fall zu verneinen, daß unter den (nach Voraussetzung nicht durchwegs einander gleichen) Zahlen x_k sich unter einander gleiche finden. Um diesen Fall auszuschließen, werde also unter Verschärfung von (1)

$$x_1 > x_2 > \ldots > x_n > 0$$

angenommen, dann in Analogie zu (6) und (7)

$$g_0 = 1, \quad g_k = \binom{n}{k} (x_k)^k \qquad (k = 1, \ldots, n) \tag{8}$$

gesetzt und das Polynom

$$g(y) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k g_k y^{n-k} \tag{9}$$

gebildet, dessen Koeffizienten also (nebst $g_0 = 1$) den Bedingungen

$$(10,\mathrm{a}) \qquad g_k > 0 \qquad (1 \leqq k \leqq n);$$

$$(10,\mathrm{b}) \qquad \left(\frac{g_k}{\binom{n}{k}}\right)^{\frac{1}{k}} > \left(\frac{g_{k+1}}{\binom{n}{k+1}}\right)^{\frac{1}{k+1}} \qquad (1 \leqq k < n)$$

genügen[6]. Hat dann die Gleichung $g(y) = 0$ lauter positive Wurzeln, dann sind dies die gesuchten $y_k = x_k^{(-1)}$. Für $n \geqq 3$ ist dies aber allein durch die Bedingungen (10 a, b) keineswegs gewährleistet, wie schon an unserem obigen Beispiel der Zahlen (5) zu sehen ist, für die sich, gemäß (8), (9),

$$g_1 = 24, \quad g_2 = 27, \quad g_3 = 8 \quad \text{und} \quad g(y) = y^3 - 24\,y^2 + 27\,y - 8$$

ergibt. Dieses Polynom hat aber nur eine einzige reelle Nullstelle: es ist

$$g(y) = (y - y_0)\,((y - \beta)^2 + \gamma^2),$$

wo

$$\beta = 12 - \frac{y_0}{2}, \qquad \gamma^2 = 3\left(\left(\frac{y_0}{2} - 4\right)^2 - 55\right) > 0,$$

dabei näherungsweise $y_0 = 22{,}8328377$, $\beta = 0{,}58358115$, $\gamma^2 = 0{,}0098056$. Da $g(y)$ statt dreier nur eine positive Nullstelle hat, sind die Zahlen (5) nicht die elementar-symmetrischen Mittel dreier positiver Zahlen[7]. Demnach muß man mit der Möglichkeit rechnen, daß ausgehend von den $x_k = x_k^{(0)}$ die Bildung von (positiven) Zahlen-n-tupeln

$$(11) \qquad x_1^{(\nu)}, \; \ldots, \; x_n^{(\nu)}$$

---

[6] Die in Anm. 5 zitierte Note befaßt sich gerade mit Polynomen (die dort als „medial-monoton" bezeichnet werden), die den Bedingungen (10a, b) genügen, – wobei nur in (10, b) „$\geqq$" statt „$>$" zugelassen wird. Sei bei dieser Gelegenheit ein Druckfehler in der dortigen Formel (7) berichtigt: Die Exponenten p_1 und p_2 sind (wie (6) zeigt) zu vertauschen.

[7] Ein anderes Beispiel wäre $g(y) = y^3 - 9\,y^2 + 25\,y - 17$ mit $y = 1$ als einziger reeller Nullstelle, auch dieses ein medial-monotones Polynom, das sich einstellen würde, wenn man $x_1 = \frac{1}{3}\,g_1 = 3$, $x_2 = \sqrt{\frac{1}{3}\,g_2} = \sqrt{\frac{25}{3}}$, $x_3 = \sqrt[3]{17}$ wählt. Vgl. l. c.[5], Nr. 1; ebendort weitere Beispiele solcher (10a, b) erfüllender Polynome, die nicht durchwegs positive Nullstellen haben.

für $\nu = -1, -2, -3, \ldots$ einmal abbricht. Und es bleibt offen, ob es überhaupt für $n \geqq 3$ solche n-tupel $x_1, \ldots, x_n$ gibt, für die sich die Folge der n-tupel (11) beliebig nach rückwärts fortsetzen läßt. Andererseits ist für $n = 2$, wo aus $x_1 > x_2 > 0$ sich

$$y_1 = x_1 + \sqrt{x_1^2 - x_2^2} > y_2 = x_1 - \sqrt{x_1^2 - x_2^2} > 0$$

ergibt, die unbeschränkte Fortsetzbarkeit selbstverständlich.