Sitzungsberichte

der

mathematisch-naturwissenschaftlichen

Klasse

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften

zu München

Jahrgang 1952

München 1953

Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften

In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung

Ein Grenzwertsatz

Von **Herbert Forster** in München

Vorgelegt von Herrn O. Perron am 6. Juni 1952

Satz:

Die Reihen

$$F(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} f_\nu(x); \quad G(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} g_\nu(x) \tag{1}$$

seien für $x \geqq x_0 \geqq 0$ konvergent. Dabei sei

$$\text{I.} \quad f_\nu(x) = a_\nu x^{b+c\cdot\nu} \; (c > 0) \tag{2}$$

mit

$$1. \; a_\nu > 0; \tag{3}$$

$$2. \; \frac{a_{\nu+1}}{a_\nu} \geqq \frac{a_{\nu+2}}{a_{\nu+1}} \quad \text{für} \quad \nu > \nu_0, \; \lim_{\nu\to\infty} \frac{a_{\nu+1}}{a_\nu} = 0; \tag{4}$$

$$3. \; \lim_{\mu\to\infty} \frac{a_{\mu+\lambda+1}}{a_{\mu+\lambda}} \cdot \frac{a_{\mu-1}}{a_\mu} = 1 \quad \text{für jedes feste} \quad \lambda \geqq 0. \tag{5}$$

$$\text{II.} \; g_\nu(x) > 0 \text{ für } \nu > \nu_0, \; \lim_{x\to\infty} \frac{|g_{\nu+1}(x)|}{|g_\nu(x)|} = \infty \text{ für } \nu = 0, 1, 2 \ldots \tag{6}$$

Ferner sei für jedes ν ein τ_ν vorhanden, $(0 \leqq \tau_\nu \leqq 1)$ derart, daß der Grenzwert

$$\lim_{\nu\to\infty} \frac{f_\nu^{\tau_\nu}(x) \cdot f_{\nu+1}^{1-\tau_\nu}(x)}{g_\nu(x)} = K \quad \text{(unabhängig von } x\text{)} \tag{7}$$

gleichmäßig für alle $x > x_0$ existiert.

Dann ist auch

$$\lim_{x\to\infty} \frac{F(x)}{G(x)} = K. \tag{8}$$

Dabei kann K auch ∞ bedeuten.

Bevor wir zum Beweis übergehen, sei ein Beispiel gebracht.

Beispiel:

Gegeben sei

$$F(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{x^{2\nu}}{\nu!\,\Gamma(\nu+n+1)\,\Gamma(2\nu+n+1)},$$

wobei n irgendeine konstante positive Zahl bedeutet.
Es ist

$$\lim_{x\to\infty} \frac{F(x)}{\sqrt{x}\cdot F'(x)}$$

gesucht.

Im Anschluß an obige Bezeichnungen setzen wir:

$$\frac{x^{2\nu}}{\nu!\,\Gamma(\nu+n+1)\,\Gamma(2\nu+n+1)} = f_\nu(x),$$

$$\sqrt{x}\cdot F'(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{2x^{2\nu+3/2}}{\nu!\,\Gamma(\nu+n+2)\,\Gamma(2\nu+n+3)} = \sum_{\nu=0}^{\infty} g_\nu(x).$$

Daß die beiden Reihen die Voraussetzungen unseres Satzes erfüllen, ist leicht zu bestätigen.

Setzen wir nun $\tau_\nu = \frac{1}{4}$, so wird

$$\lim_{\nu\to\infty} \frac{f_\nu^{1/4} f_{\nu+1}^{3/4}}{g_\nu} = \lim_{\nu\to\infty} \frac{(\nu+n+1)\,(2\nu+n+1)\,(2\nu+n+2)}{2\,[(\nu+1)\,(\nu+n+1)\,(2\nu+n+1)\,(2\nu+n+2)]^{3/4}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Also ist nach unserem Satz:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{F(x)}{\sqrt{x}\cdot F'(x)} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Beweis:

a) Aus (2) und (3) folgt

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f_{\nu+1}(x)}{f_\nu(x)} = \infty. \tag{9}$$

b) Wegen (4) gibt es für jedes große x $(x > x_0)$ einen und nur einen Wert $M(x)$, so daß

$$\frac{a_{M(x)}}{a_{M(x)-1}} \geqq \frac{1}{x^c} > \frac{a_{M(x)+1}}{a_{M(x)}} \tag{10}$$

ist.

Dann ist für $\mu \geqq M(x)$

$$\frac{a_{\mu+1}}{a_\mu} < \frac{1}{x^c}; \quad \text{also } f_{\mu+1} = a_{\mu+1} \cdot x^{b+c(\mu+1)} < a_\mu x^{b+c\cdot\mu} = f_\mu(x);$$

für $\mu < M(x)$ ist

$$\frac{a_{\mu+1}}{a_\mu} \geqq \frac{1}{x^c}; \text{ also } f_{\mu+1}(x) = a_{\mu+1} \cdot x^{b+c(\mu+1)} \geqq a_\mu \cdot x^{b+c\mu} = f_\mu(x).$$

$M(x)$ hat also die Eigenschaft, daß für $\nu > \nu_0$

$$(11) \quad \begin{aligned} & f_\nu(x) \leqq f_{\nu+1}(x) \leqq \cdots \leqq f_{M(x)-1}(x) \leqq f_{M(x)}(x) \quad \text{und} \\ & f_{M(x)}(x) > f_{M(x)+1}(x) > f_{M(x)+2}(x) > \cdots \end{aligned}$$

Aus (10) und (4) ersieht man, daß

$$(12) \qquad \lim_{x\to\infty} M(x) = \infty.$$

c) Ist ε eine beliebige kleine positive Zahl, so wählen wir die ganze Zahl λ so, daß

$$(13) \qquad \frac{1}{\lambda} < \frac{\varepsilon}{2}$$

ist. Zu λ wird ein $\delta > 0$ so bestimmt, daß

$$(14) \qquad (1-\delta)^\lambda > \frac{1}{2}$$

wird. Nach (5) können wir dann μ_0 so bestimmen, daß für $\mu > \mu_0$

$$1 - \delta < \frac{a_{\mu+\lambda+1}}{a_{\mu+\lambda}} \cdot \frac{a_{\mu-1}}{a_\mu} \leqq 1,$$

also

$$\frac{a_{\mu+\lambda+1}}{a_{\mu+\lambda}} > (1-\delta) \cdot \frac{a_\mu}{a_{\mu-1}}$$

ist.

Wegen (4) ist dann für $0 \leqq \sigma \leqq \lambda$ und $\mu > \mu_0$

$$(15) \qquad (1-\delta)\frac{a_\mu}{a_{\mu-1}} < \frac{a_{\mu+\sigma+1}}{a_{\mu+\sigma}} \leqq \frac{a_\mu}{a_{\mu-1}}.$$

Wählen wir nun noch x_0 so groß, daß $M(x) > \mu_0$ ist für $x > x_0$, dann gilt für $x > x_0$ auch, wenn für $M(x)$ kürzer M geschrieben wird,

$$\frac{f_M(x)}{F(x)} = \frac{a_M \cdot x^{b+c\cdot M}}{\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} a_\nu x^{b+c\cdot\nu}} < \frac{a_M x^{cM}}{\sum\limits_{\nu=0}^{\lambda} a_{M+\nu} x^{c(M+\nu)}} = \frac{1}{\sum\limits_{\nu=0}^{\lambda} \frac{a_{M+\nu}}{a_M} \cdot x^{c\nu}}$$

$$(16) \qquad = \frac{1}{1+\sum\limits_{\nu=1}^{\lambda}\left(\prod\limits_{\sigma=0}^{\nu-1}\frac{a_{M+\sigma+1}}{a_{M+\sigma}}x^c\right)} \leqq \frac{1}{1+\sum\limits_{c=1}^{\lambda}\left((1-\delta)\frac{a_M}{a_{M-1}}\cdot x^c\right)^\nu}$$

$$\leqq \frac{1}{1+\sum\limits_{\nu=1}^{\lambda}(1-\delta)^\nu} < \frac{1}{1+\lambda(1-\delta)^\lambda} < \frac{1}{1+\frac{\lambda}{2}} < \frac{2}{\lambda} < \varepsilon;$$

also

$$(16a) \qquad \lim_{x\to\infty} \frac{f_{M(x)}(x)}{F(x)} = 0.$$

d) Nach (7) wählen wir nun $N > \nu_0$ so groß, daß für $x > x_0$ und $\nu \geqq N$

$$(17) \qquad \left| \frac{f_\nu^{\tau_\nu} \cdot f_{\nu+1}^{1-\tau_\nu}}{g_\nu} - K \right| < \varepsilon$$

ist; dann bestimmen wir $\xi > x_0$ so, daß für $x \geqq \xi$

$$(18) \qquad \begin{aligned} &1. \quad \frac{\sum\limits_{\nu=1}^{N+1} f_\nu(x)}{F(x)} < \varepsilon \quad \text{(nach (9))},\\ &2. \quad \frac{\left|\sum\limits_{\nu=1}^{N+1} g_\nu(x)\right|}{G(x)} < \varepsilon \quad \text{(nach (6))},\\ &3. \quad \frac{f_{M(x)}(x)}{F(x)} < \varepsilon \quad \text{(nach (16a))}\\ &4. \quad M(x) > N \quad \text{(nach (12)) ist.}\end{aligned}$$

Bezeichnen wir

$$F(x) - \sum_{\nu=1}^{N} f_\nu(x) - f_{M(x)}(x) \quad \text{mit} \quad \sum{}' f_\nu(x),$$

so ist für $x \geqq \xi$ nach (18)

$$\Sigma' f_\nu(x) > F(x) \cdot (1 - 2\varepsilon). \tag{19}$$

(17) und (11) ergeben dann für $x \geqq \xi$

(20)

$$F(x) < \frac{1}{1-2\varepsilon} \Sigma' f_\nu$$

$$\leqq \frac{1}{1-2\varepsilon} \left(\sum_{\nu=N+1}^{M(x)-1} f_\nu^{\tau_\nu}(x) \cdot f_{\nu+1}^{1-\tau_\nu}(x) + \sum_{M(x)+1}^{\infty} f_\nu^{1-\tau_{\nu-1}}(x) \cdot f_{\nu-1}^{\tau_{\nu-1}}(x) \right)$$

$$< \frac{1}{1-2\varepsilon} \sum_{\nu=N+1}^{\infty} (\varepsilon + K) g_\nu(x) < \frac{1+\varepsilon}{1-2\varepsilon} (\varepsilon + K) \cdot G(x).$$

Wenn $K = 0$, bedeutet dies, daß $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{F(x)}{G(x)} = 0$ ist.

Für $K > 0$ erhalten wir für $x \geqq \xi$ aus (18), (17), (11) und (16a)

(21)

$$F(x) > \frac{F(x) + f_{M(x)}(x)}{1+\varepsilon} > \frac{1}{1+\varepsilon} \left(\sum_{\nu=N+1}^{M(x)} f_\nu(x) + \sum_{\nu=M(x)}^{\infty} f_\nu(x) \right)$$

$$\geqq \frac{1}{1+\varepsilon} \left(\sum_{\nu=N+1}^{M(x)} f_\nu^{1-\tau_{\nu-1}}(x) \cdot f_{\nu-1}^{\tau_{\nu-1}}(x) + \sum_{\nu=M(x)}^{\infty} f_\nu^{\tau_\nu}(x) \cdot f_{\nu+1}^{1-\tau_\nu}(x) \right)$$

$$\geqq \frac{K-\varepsilon}{1+\varepsilon} \sum_{\nu=N+1}^{\infty} g_\nu(x) > \frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon} (K - \varepsilon) \cdot G(x).$$

Also

$$\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon} (K - \varepsilon) < \frac{F(x)}{G(x)} < \frac{(\varepsilon + K)(1+\varepsilon)}{1-2\varepsilon} \quad \text{für} \quad x > \xi.$$

Dies bedeutet aber, daß

$$\lim_{x\to\infty} \frac{F(x)}{G(x)} = K.$$

e) Wenn $K = \infty$ ist, so hat man nur in (21) statt $K - \varepsilon$ eine beliebig große Zahl Z einzusetzen und erhält schließlich

$$\frac{F(x)}{G(x)} > Z \cdot \frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon};$$

also

$$\lim_{x\to\infty} \frac{F(x)}{G(x)} = \infty.$$