Sitzungsberichte

der

mathematisch-naturwissenschaftlichen

Klasse

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften

zu München

Jahrgang 1952

München 1953

Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften

In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung

Zur Darstellung der Krümmungen einer Flächenkurve mit Pfaffschen Formen

Von Heinrich Scharff in Kaiserslautern

Vorgelegt von Herrn Frank Löbell am 7. März 1952

Die folgenden Ausführungen möchten eine kleine Ergänzung zum Aufbau der Flächentheorie im euklidischen R_3 geben, wie ihn W. Blaschke in seinem neuesten Buch mit Hilfe Pfaffscher Formen im Sinne E. Cartans durchgeführt hat.[1]

Dort wird zunächst ein orthogonales Dreibein angenommen, dessen Lage von zwei Parametern u^1, u^2 abhängt. Sein Ursprung ist durch den Ortsvektor $\mathfrak{r}(u^1, u^2)$ einer gegebenen Fläche, seine Achsen sind durch drei untereinander senkrechte Einheitsvektoren $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_2$, $\mathfrak{a}_3$ festgelegt, derart, daß $\mathfrak{a}_1$ und $\mathfrak{a}_2$ Tangenten an die Linien eines auf der Fläche liegenden orthognoalen Netzes sind, $\mathfrak{a}_3$ also in die Flächennormale weist. $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_2$, $\mathfrak{a}_3$ sollen ein Rechtssystem bilden.

1. Mit Hilfe der Ableitungsgleichungen[2]

$$d\mathfrak{r} = \mathfrak{a}_1\sigma_1 + \mathfrak{a}_2\sigma_2, \tag{1}$$
$$d\mathfrak{a}_1 = \mathfrak{a}_2\omega_3 - \mathfrak{a}_3\omega_2, \quad d\mathfrak{a}_2 = \mathfrak{a}_3\omega_1 - \mathfrak{a}_1\omega_3, \quad d\mathfrak{a}_3 = \mathfrak{a}_1\omega_2 - \mathfrak{a}_2\omega_1$$

werden die linearen Differentialformen

$$\sigma_1, \quad \sigma_2, \quad \omega_1, \quad \omega_2, \quad \omega_3$$

eingeführt; die σ_j bedeuten die Komponenten der Schiebung nach den Achsen $\mathfrak{a}_1$ und $\mathfrak{a}_2$, die ω_j die der Drehung um die Achsen $\mathfrak{a}_1$,

---

[1] W. Blaschke, Einführung in die Differentialgeometrie, Berlin 1950. Außerdem seien genannt: E. Cartan, La théorie des groupes finis et continus et la géométrie différentielle traitées par la méthode du repère mobile, Paris 1937, und E. Cartan, Les systèmes différentiels extérieurs et leurs applications géométriques, Paris 1945. – Beim Hinweis auf diese Werke werden im folgenden die Abkürzungen benützt: Bl., C. I, C. II.

[2] Bl. S. 44 (13), C. II p. 121 (1).

$\mathfrak{a}_2$, $\mathfrak{a}_3$ bei der Verrückung $d\mathfrak{x}$. Sie genügen den Integrierbarkeitsbedingungen[1]

$$(2)\quad \begin{aligned} &[d\sigma_1] = [\omega_3\sigma_2], \quad [d\sigma_2] = -[\omega_3\sigma_1], \quad 0 = [\sigma_1\omega_2] - [\sigma_2\omega_1], \\ &[d\omega_1] = [\omega_3\omega_2], \quad [d\omega_2] = [\omega_1\omega_3], \quad [d\omega_3] = [\omega_2\omega_1]. \end{aligned}$$

Da mehr als zwei, aus zwei unabhängigen Differentialen gebildete Pfaffsche Linearformen stets linear abhängig sind,[2] σ_1 und σ_2 aber, weil die $d\mathfrak{x}$ nicht alle die gleiche Richtung haben, linear unabhängig sein müssen, so gilt

$$(3)\quad \begin{aligned} \omega_2 &= c_{11}\sigma_1 + c_{12}\sigma_2, \\ -\omega_1 &= c_{21}\sigma_1 + c_{22}\sigma_2, \\ \omega_3 &= g_1\sigma_1 + g_2\sigma_2. \end{aligned}$$

Im Hinblick auf die dritte der Integrabilitätsbedingungen (2) ist

$$(4)\quad c_{12} = c_{21}.$$

2. Unser Dreibein werde nun um die Flächennormale durch den Winkel $\tau(u^1, u^2)$ gedreht. Dann gelten für die Pfaffschen Formen ω_j die Transformationsgleichungen[3]

$$(5)\quad \begin{aligned} \bar{\omega}_1 &= \omega_1 \cos\tau + \omega_2 \sin\tau, \\ \bar{\omega}_2 &= -\omega_1 \sin\tau + \omega_2 \cos\tau, \\ \bar{\omega}_3 &= \omega_3 + d\tau. \end{aligned}$$

Bedeutet σ das Bogenelement eines beliebigen Flächenstreifens, so ist[4]

$$(6)\quad \sigma_1 = \sigma \cdot \cos\tau, \quad \sigma_2 = \sigma \cdot \sin\tau; \quad \sigma_1^2 + \sigma_2^2 = \sigma^2.$$

Bezeichnen wir mit T seine geodätische Windung, mit N seine Normalkrümmung und mit G seine geodätische Krümmung, so

---

[1] Bl. S. 44 (14), C. II p. 122 (2). $[\sigma\,\omega]$ bedeutet das äußere Produkt von σ und ω, $[d\,\omega]$ das äußere Differential von ω.

[2] Vgl. hierzu die Arbeit von J. Dufresnoy, A. Revuz, Introduction au calcul différentiel extérieur. Bulletin of the Technical University of Istanbul, 1948, t. 1, p. 1–19.

[3] Bl. S. 44 (2), C. II p. 125.

[4] Bl. S. 86 (4).

gilt[1]

$$T = \bar{\omega}_1 : \sigma, \qquad N = \bar{\omega}_2 : \sigma, \qquad G = \bar{\omega}_3 : \sigma. \tag{7}$$

Aus den hieraus folgenden, bekannten Ausdrücken[2]

$$(8)\quad \begin{aligned} T &= \frac{\omega_1 \cos\tau + \omega_2 \sin\tau}{\sigma} = \frac{\sigma_1\omega_1 + \sigma_2\omega_2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} = \frac{-c_{12}\sigma_1^2 + (c_{11} - c_{22})\sigma_1\sigma_2 + c_{12}\sigma_2^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}, \\ N &= \frac{\omega_2 \cos\tau - \omega_1 \sin\tau}{\sigma} = \frac{\sigma_1\omega_2 - \sigma_2\omega_1}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} = \frac{c_{11}\sigma_1^2 + 2c_{12}\sigma_1\sigma_2 + c_{22}\sigma_2^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} \end{aligned}$$

entnimmt man leicht die geometrische Bedeutung der Invarianten[3] c_{jk}:

für $\sigma_2 = 0$ wird $\sigma = \sigma_1$ und $T = -c_{12} = t_1$, $N = c_{11} = n_1$,

für $\sigma_1 = 0$ wird $\sigma = \sigma_2$ und $T = c_{12} = t_2$, $N = c_{22} = n_2$;

t_1 und t_2 sind also die geodätischen Windungen, n_1 und n_2 die Normalkrümmungen der Netzkurven $\sigma = \sigma_1$ bzw. $\sigma = \sigma_2$. Die Beziehung $t_1 = -t_2 = t$ spricht einen bekannten Satz von Bonnet aus.

Jetzt erhalten wir aus (8) bei Berücksichtigung von (6)

$$(9)\quad \begin{aligned} T &= (n_1 - n_2)\cos\tau\sin\tau + t(\cos^2\tau - \sin^2\tau), \\ N &= n_1\cos^2\tau - 2t\cos\tau\sin\tau + n_2\sin^2\tau. \end{aligned}$$

Beim Aufbau der Flächentheorie mittels des Kalküls der Pfaffschen Formen gelangen wir so zwangsläufig zu Formeln, die denen der „natürlichen Geometrie" E. Cesaros gleichen;[4] für diese erweist sich die Methode E. Cartans geradezu als ein ideales Hilfsmittel.

3. Es gilt nun noch, die Ausdrücke für G aufzustellen, die in ihrem Bau den Ausdrücken (8) für T und N entsprechen. Nach (7) und (5) ist[5]

$$G = (\omega_3 + d\tau) : \sigma. \tag{10}$$

---

[1] Bl. S. 15 (6), C. II p. 125.

[2] C. II p. 126.

[3] Bl. S. 89 (28).

[4] Vgl. hierzu M. Lagally, Vorlesungen über Vektorrechnung, Leipzig 1934. Die Formeln (9) des Textes finden sich dort auf S. 93 (85b, a).

[5] Bl. S. 45 (5), C. II p. 125 (8).

Diese Beziehung ist vermöge der dritten der Gleichungen (3) die Quelle einer bekannten Formel von Liouville.

Die gewöhnliche Differentiation von σ_1 und σ_2 ergibt nun wegen (6)

$$d\sigma_1 = d\sigma \cdot \cos\tau - \sigma \sin\tau \, d\tau,$$

$$d\sigma_2 = d\sigma \cdot \sin\tau + \sigma \cos\tau \, d\tau.$$

Es ist also

$$\cos\tau \cdot d\sigma_2 - \sin\tau \cdot d\sigma_1 = \sigma \, d\tau;$$

dies führt mit Hilfe von (6) zu

$$d\tau = (\sigma_1 d\sigma_2 - \sigma_2 d\sigma_1) : \sigma^2.$$

Damit wird

$$G = (\sigma_1 d\sigma_2 - \sigma_2 d\sigma_1 + \omega_3 \sigma^2) : \sigma^3.$$

oder

(11) $$G = (\sigma_1(\sigma_1\omega_3 + d\sigma_2) + \sigma_2(\sigma_2\omega_3 - d\sigma_1)) : (\sigma_1^2 + \sigma_2^2)^{3/2}.$$

Setzen wir hierin den Wert von ω_3 aus (3) ein, so erhalten wir

(12)
$$G = (\sigma_1(g_1\sigma_1^2 + g_2\sigma_1\sigma_2 + d\sigma_2) + \sigma_2(g_1\sigma_1\sigma_2 + g_2\sigma_2^2 - d\sigma_1)) : (\sigma_1^2 + \sigma_2^2)^{3/2};$$

dieser Ausdruck für die geodätische Krümmung einer allgemeinen Flächenkurve schließt zugleich die geometrische Deutung von g_1 und g_2 in sich.