Sitzungsberichte

der

mathematisch-naturwissenschaftlichen

Klasse

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften

zu München

Jahrgang 1951

München 1952

Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften

In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung München

Unterschallströmungen um Profile bei quadratisch approximierter Adiabate

Von Robert Sauer in München

Vorgelegt am 1. Juni 1951

Das Problem der Unterschallströmungen um Profile ist durch die Bergmansche Methode der Integraloperatoren [1] für ideale Gase grundsätzlich gelöst. Die praktische Durchführung erfordert jedoch einen erheblichen Rechenaufwand. Im Spezialfall des Karman-Tsienschen Gases mit der Druck-Dichte-Beziehung $p = A + \frac{B}{\rho}$ geht die Bergmansche Methode in das bekannte und sehr einfache Karman-Tsiensche Verfahren [2] über, bei dem sich aus inkompressiblen Profilströmungen durch eine Transformation des Geschwindigkeitsbetrags (Tschapliginsche Transformation) kompressible Unterschallströmungen um geeignet deformierte Profile herleiten lassen (vgl. [3], § 17). Auf diese Weise ergeben sich Näherungen kompressibler Unterschallströmungen von Gasen mit beliebig vorgegebener Druck-Dichte-Beziehung $p = p(\rho)$ derart, daß bei passender Wahl der beiden verfügbaren Konstanten A und B die vorgegebene Kurve $p = p(\rho)$ in der $p, \frac{1}{\rho}$-Ebene durch eine Gerade (Tangente oder Sehne) approximiert wird.

Im Falle eines hinreichend kleinen Variabilitätsbereichs von p und ρ (kleine Mach-Zahlen oder schlanke Profile) liefert das Karman-Tsiensche Verfahren praktisch brauchbare Näherungen. Für größere Variabilitätsbereiche hat Poritzky [4] das Verfahren dadurch verallgemeinert, daß er die Kurve $p = p(\rho)$ durch ein Polygon approximiert. Statt dieser Verallgemeinerung wird im folgenden eine andere, ebenfalls für größere Variabilitätsbereiche von p und ρ brauchbare Methode vorgeschlagen. Bei dieser Methode werden in ähnlicher und fast ebenso einfacher Weise wie beim gewöhnlichen Karman-Tsienschen Verfahren kompressible Unterschallströmungen um Profile aus inkompressiblen Profilströmungen hergeleitet, die gegebene Kurve $p = p(\rho)$ wird jedoch quadratisch approximiert, also z. B. durch eine dreipunktig berührende Kurve (gemeinsame Tangente und Krümmung) ersetzt.

Wir werden zwei Varianten der Methode angeben, bei denen der Übergang von der Strömungsebene (x, y-Ebene) zur Hodographenebene (w, ϑ-Ebene) einmal durch die Molenbroek-Transformation der Stromfunktion und das andere Mal durch die Legendre-Transformation des Potentials erfolgt.

§ 1. Ermittlung von Profilströmungen mittels *Molenbroek*-Transformation der Stromfunktion

1. Stromfunktionsgleichung in der Hodographenebene

Die Stromfunktion $\psi(w, \vartheta)$ der Polarkoordinaten w, ϑ des Geschwindigkeitsvektors genügt der linearen Differentialgleichung

$$\psi_{ww} + \frac{1 - M^2}{w^2} \psi_{\vartheta\vartheta} + \frac{1 + M^2}{w} \psi_w = 0; \tag{1}$$

$M = M(w) = \frac{w}{a}$ ist die örtliche Mach-Zahl, $a = a(w)$ die örtliche Schallgeschwindigkeit. M und w sind mit der Dichte $\rho = \rho(w)$ durch die mit der Bernoullischen Gleichung äquivalente Beziehung

$$1 + M^2 = \rho \frac{d}{dw}\left(\frac{w}{\rho}\right)$$

verknüpft, vermöge deren Gleichung (1) in

$$\psi_{ww} + \frac{1 - M^2}{w^2} \psi_{\vartheta\vartheta} + \frac{\rho}{w} \frac{d}{dw}\left(\frac{w}{\rho}\right) \psi_w = 0$$

oder ($M \neq 1$ vorausgesetzt) in

$$\psi_{\vartheta\vartheta} + \frac{w^2}{1 - M^2} \psi_{ww} + \frac{\rho w}{1 - M^2} \frac{d}{dw}\left(\frac{w}{\rho}\right) \psi_w = 0 \tag{2}$$

übergeht. Durch die Tschapliginsche Transformation des Geschwindigkeitsbetrags

$$\omega = \int \sqrt{1 - M^2} \frac{dw}{w} \tag{3}$$

folgt hieraus nach kurzer Rechnung

$$\boxed{\psi_{\omega\omega} + \psi_{\vartheta\vartheta} + 4\,N(\omega)\,\psi_\omega = 0} \tag{4}$$

mit

$$4\,N = H^2 \frac{d}{d\omega}\left(\frac{1}{H^2}\right) = -2\,\frac{d}{d\omega}\,(\ln H)\,, \quad H^2 = \frac{\rho}{\sqrt{1-M^2}}. \tag{5}$$

Führt man mittels

$$\psi = H(\omega)\cdot\psi^* \tag{6}$$

die „reduzierte Stromfunktion" $\psi^*(\omega, \vartheta)$ ein, so erhält man aus Gl. (4)

$$\boxed{\psi^*_{\omega\omega} + \psi^*_{\vartheta\vartheta} + 4\,F(\omega)\cdot\psi^* = 0} \tag{4*}$$

mit

$$4\,F = H\,\frac{d}{d\omega}\left(\frac{dH}{d\omega}\Big/H^2\right). \tag{5*}$$

2. Grundgedanke des Näherungsverfahrens

Wir suchen Druck-Dichte-Beziehungen, für die entweder $N = 0$ oder $F = 0$ wird. Dann erfüllt ψ bzw. ψ^* die Potentialgleichung der inkompressiblen Strömung. Nimmt man dann für ψ bzw. ψ^* die Stromfunktion einer inkompressiblen Profilströmung, so liefert der Übergang von w zu ω nach Gl. (3) ebenso wie beim Karman-Tsienschen Verfahren und wie bei der Bergmanschen Operatorenmethode eine kompressible Unterschallströmung, und zwar unter gewissen Bedingungen wieder eine Profilströmung.

Die erste Annahme, $N = 0$, ist gleichbedeutend mit $H = \text{const}$ und führt mit

$$H^2 = \frac{\rho}{\sqrt{1-M^2}} = \frac{a\rho}{\sqrt{a^2-w^2}} = \text{const}, \quad \text{also}$$

$$\frac{da}{a} + \frac{d\rho}{\rho} - \frac{a\,da - w\,dw}{a^2-w^2} = \frac{M^2}{1-M^2}\,(w\,dw - a\,da) = 0$$

auf $a^2 = A_0^2 + w^2$, woraus sich lediglich die Karman-Tsiensche Druck-Dichte-Beziehung $p = A + \frac{B}{\rho}$ ergibt.

Die zweite Annahme, $F = 0$, ist gleichbedeutend mit $\frac{dH}{d\omega} = \text{const} \cdot H^2$, also

$$\boxed{H = \frac{n}{\omega}, \quad n = \text{const}, \quad N = \frac{2}{\omega},} \tag{7}$$

und führt, wie sich in Ziff. 3 zeigen wird, auf eine Druck-Dichte-Beziehung mit 3 Parametern, durch die eine gegebene Kurve $p = p(\rho)$ quadratisch approximiert werden kann.

3. Quadratisch approximierende Druck-Dichte-Beziehungen

Aus Gl. (7), d. h. $\frac{a\rho}{\sqrt{a^2 - w^2}} = \frac{n^2}{\omega^2}$, folgt durch logarithmische Differentiation

$$\frac{d\rho}{\rho} = -\frac{2\,d\omega}{\omega} - \frac{da}{a} + \frac{a\,da - w\,dw}{a^2 - w^2} = -2\frac{d\omega}{\omega} - \frac{w\,dw}{a^2 - w^2} + \frac{w^2\,da}{a(a^2 - w^2)}.$$

Durch Einsetzen in die Bernoullische Gleichung

$$\frac{dp}{\rho} + w\,dw = a^2\frac{d\rho}{\rho} + w\,dw = 0$$

kommt mit Rücksicht auf Gl. (3) nach kurzer Rechnung

$$\boxed{\frac{da}{d\omega} = \frac{w^2}{\sqrt{a^2 - w^2}} + \frac{2a}{\omega}\,\frac{a^2 - w^2}{w^2} = f(a, w, \omega).} \tag{8}$$

Diese Gleichung und Gl. (3), die wir jetzt in der Form

$$\boxed{\frac{dw}{d\omega} = \frac{aw}{\sqrt{a^2 - w^2}} = g(a, w)} \tag{9}$$

schreiben, legt $a(\omega)$ und $w(\omega)$ für gegebene Anfangswerte $\bar{a}$, $\bar{w} < \bar{a}$, $\bar{\omega}$ fest. Nach Gl. (8) und Gl. (9) ist

$$\frac{da}{dw} = \frac{w}{a} + \frac{2(a^2 - w^2)^{3/2}}{\omega\, w^3}. \tag{10}$$

Demnach kann man als Anfangsdaten auch $\bar{a}$, $\bar{w}$ und $\left(\overline{\frac{da}{dw}}\right)$ vorgeben, indem man den zugehörigen Anfangswert $\omega = \bar{\omega}$ aus Gl. (10) bestimmt. Dabei ergibt sich stets ein endlicher Wert $\bar{\omega}$, wenn $\left(\frac{\overline{da}}{dw}\right) \neq \frac{\overline{w}}{\bar{a}}$ ist. Weiter folgt, daß sich auch $\bar{M}$, $\bar{\rho}$, $\bar{p}$, $\left(\frac{\overline{dp}}{d\rho}\right)$ und $\left(\frac{\overline{d^2p}}{d\rho^2}\right)$ als Anfangsdaten im wesentlichen willkürlich vorschreiben lassen, daß man also eine beliebige Druck-Dichte-Beziehung für eine gegebene Mach-Zahl $\bar{M}$ $(0 < \bar{M} < 1)$ quadratisch approximieren kann. Zunächst nämlich legen $\bar{M} = \frac{\overline{w}}{\bar{a}}$ und $\left(\frac{\overline{dp}}{d\rho}\right) = \bar{a}^2$ die Anfangswerte $\overline{w}$ und $\bar{a}$ fest. Aus der Gleichung

$$\frac{d^2p}{d\rho^2} = 2a\,\frac{da}{dw}\,\frac{dw}{d\rho} = -\frac{2a^3}{w\rho}\,\frac{da}{dw} \tag{11}$$

ergibt sich dann der Anfangswert $\left(\frac{\overline{da}}{dw}\right) = -\frac{\overline{w}\bar{\rho}}{2\bar{a}^3}\left(\frac{\overline{d^2p}}{d\rho^2}\right)$, womit nach Gl. (10) der Anfangswert $\bar{\omega}$ fixiert ist. Durch Gl. (7) in der Form

$$\bar{\rho} = \frac{n^2}{\bar{\omega}^2}\,\frac{\sqrt{\bar{a}^2 - \overline{w}^2}}{\bar{a}} \tag{12}$$

ist dann auch die Konstante n bestimmt. Der Anfangswert $\bar{p}$ des Druckes schließlich kann ohnehin beliebig angenommen werden, da nur die Ableitungen von p in die gasdynamischen Gleichungen eingehen.

Im Ausnahmefall $\left(\frac{\overline{da}}{dw}\right) = \frac{\overline{w}}{\bar{a}}$, der bei realen Gasen nicht auftritt, würde bereits die Karman-Tsiensche Druck-Dichte-Beziehung eine quadratische Approximation liefern.

§ 2. Ermittlung von Profilströmungen mittels *Legendre*-Transformation des Potentials

1. Potentialgleichung in der Hodographenebene

Das Geschwindigkeitspotential $\varphi(x, y)$ genügt in der Strömungsebene der nichtlinearen Differentialgleichung

$$(a^2 - u^2)\,\varphi_{xx} - 2uv\,\varphi_{xy} + (a^2 - v^2)\,\varphi_{yy} = 0;$$

dabei sind $u = \varphi_x$ und $v = \varphi_y$ die cartesischen Koordinaten des Geschwindigkeitsvektors. Durch die Legendre-Transformation auf die Hodographenebene (vgl. [3], § 16)

$$u = \varphi_x, \quad v = \varphi_y, \quad f(u, v) = ux + vy - \varphi, \quad x = f_u, \quad y = f_v$$

entsteht die lineare Differentialgleichung

$$(a^2 - v^2) f_{uu} + 2\,uv f_{uv} + (a^2 - u^2) f_{vv} = 0.$$

Durch Übergang von den cartesischen Koordinaten u, v des Geschwindigkeitsvektors zu den in § 1 verwendeten Koordinaten ω, ϑ erhält man nach einigen Rechnungen

$$\boxed{f_{\omega\omega} + f_{\vartheta\vartheta} + 4\,N(\omega) f_\omega = 0 \quad \text{mit} \quad 4\,N = \frac{w - w''}{w'};} \tag{13}$$

dabei ist $w' = \dfrac{dw}{d\omega} = \dfrac{aw}{\sqrt{a^2 - w^2}}$ und $w'' = \dfrac{d^2 w}{d\omega^2}$.

Führt man wie in Gl. (6) eine reduzierte „Potentialfunktion" f^* ein mittels

$$f = H f^* = \frac{n}{\omega} f^*, \tag{14}$$

so erhält man unter der Annahme

$$\boxed{4\,N = \frac{w - w''}{w'} = \frac{2}{\omega}} \tag{15}$$

für f^* die Potentialgleichung der inkompressiblen Strömung

$$\boxed{f^*_{\omega\omega} + f^*_{\vartheta\vartheta} = 0.} \tag{16}$$

2. Grundgedanke des Näherungsverfahrens

Wie in § 1 geht man von dem Potential $f^*(\omega, \vartheta)$ einer inkompressiblen Profilströmung aus und bestimmt dazu die entsprechende kompressible Unterschallströmung. Man wird erwarten können, daß diese unter gewissen Bedingungen wieder eine Profilströmung darstellt.

3. Quadratisch approximierende Druck-Dichte-Beziehungen

Durch Integration der gewöhnlichen Differentialgleichung (15) kommt

$$\boxed{w = \frac{A}{\omega} \cosh (\omega + B)} \tag{17}$$

mit den beiden Integrationskonstanten A, B. Mit Rücksicht auf Gl. (3) ergibt sich dann auch die Schallgeschwindigkeit

$$\boxed{a = \frac{w w'}{\sqrt{w'^2 - w^2}} = a(\omega; A, B)} \tag{18}$$

als Funktion von ω und den beiden Parametern A, B.

Ebenso wie in § 1 haben wir jetzt zu zeigen, daß als Anfangsdaten $\bar{w}$, $\bar{a}$ und $\left(\frac{d\bar{a}}{dw}\right)$ vorgegeben werden können. Nach Gl. (17) ist dies gleichbedeutend mit der Vorgabe der Anfangsdaten $\bar{w}$, $\bar{w}'$ und $\bar{w}''$. Diese lassen sich in der Tat beliebig vorschreiben, da die 3 Gleichungen

$$\begin{aligned} \bar{w}\,\bar{\omega} &= A \cosh (\bar{\omega} + B), \\ \bar{w}'\,\bar{\omega} + \bar{w} &= A \sinh (\bar{\omega} + B), \\ \bar{w}''\,\bar{\omega} + 2\bar{w}' &= A \cosh (\bar{\omega} + B) \end{aligned}$$

nach A, B und $\bar{\omega}$ auflösbar sind, falls $w'' - w \neq 0$ ist. Der Fall $w'' - w = 0$ führt auf $w = A \cosh (\omega + B)$ und $a^2 = - A^2 \cosh^2 (\omega + B) \sinh^2 (\omega + B) \leqq 0$, kann also nicht eintreten.

[1] S. Bergman, Operatorenmethoden in der Gasdynamik. (Vortrag auf der GaMM-Tagung in Freiburg, April 1951, erscheint in der ZaMM.) – R. v. Mises-M. Schiffer, On Bergman's integration method in two-dimensional compressible flow. Advances in Applied Mechanics, vol. 7 (1948), S. 249–285.

[2] Shue-Shen Tsien, J. Aeron. Sci. 6 (1939), S. 399–407.

[3] R. Sauer, Einführung in die theor. Gasdynamik, 2. Aufl. (1951), §§ 16, 17.

[4] H. Poritzky, Polygonal approximation method in the hodograph plane. Proc. Symposia appl. Math., Nr. 1 (Brown University, 2.–4. 8. 1947), S. 94–116 (1949).