Sitzungsberichte

der

mathematisch-naturwissenschaftlichen Klasse

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften zu München

Jahrgang 1951

München 1952

Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften

In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung München

Über einen geometrischen Satz der Kristalloptik

Von Josef Lense in München

Vorgelegt am 1. Juni 1950

Um zu dem Einheitsvektor $\mathfrak{n}$ der Wellennormalen die zugehörigen Richtungen der Vektoren $\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{E}$ der elektrischen Induktion und Feldstärke zu finden, hat man in der Kristalloptik folgende Regel:[1] Man lege durch den Mittelpunkt des Indexellipsoids eine zu $\mathfrak{n}$ senkrechte Ebene. Diese schneidet das Ellipsoid in einer Ellipse, deren Hauptachsenrichtungen die Richtungen der beiden zu $\mathfrak{n}$ gehörigen Vektoren $\mathfrak{D}$ sind. Errichtet man in den Endpunkten dieser Hauptachsen die Normalen auf das Ellipsoid, so erhält man die Richtungen der zugehörigen Vektoren $\mathfrak{E}$. Der Strahlungsvektor $\mathfrak{S}$ schließt mit $\mathfrak{n}$ denselben Winkel ein wie $\mathfrak{D}$ mit $\mathfrak{E}$ und liegt mit $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{n}$ in einer Ebene.

Liefert die zu $\mathfrak{n}$ senkrechte Ebene einen Kreisschnitt des Ellipsoids, so ist $\mathfrak{n}$ eine optische Achse und alle Halbmesser des Kreisschnittes sind zulässige Richtungen von $\mathfrak{D}$, daher auch die in den Punkten des Kreises auf das Ellipsoid errichteten Normalen zulässige Richtungen von $\mathfrak{E}$. Damit ergeben sich ebenso unendlich viele Richtungen von $\mathfrak{S}$, zu denen in diesem Fall auch $\mathfrak{n}$ gehört. Sie bilden einen Kegel, der von allen zu $\mathfrak{n}$ senkrechten Ebenen in Kreisen geschnitten wird, wodurch sich die Erscheinung der sogenannten konischen Refraktion ergibt. Der letzte Satz wird in den Lehrbüchern über Optik[2] unter Heranziehung physikalischer Tatsachen mit einem ziemlichen Aufwand von Rechnung bewiesen.

Nun ist der Satz aber eine rein geometrische Aussage, die gemäß dem Vorhergehenden folgendermaßen lautet: Man lege

[1] Vgl. z. B. G. Joos, Lehrbuch der theoretischen Physik, 7. Auflage, Leipzig 1950, Akad. Verlagsges., S. 319–333.

[2] Siehe z. B. P. Drude, Lehrbuch der Optik, 3. Auflage, Leipzig 1912, S. Hirzel, S. 294–320; M. Planck, Einführung in die theoretische Optik, 2. Auflage, Leipzig 1931, S. Hirzel, S. 104–148; W. Voigt, Theoretische Optik, ausgearbeitet im Auftrag des mathematischen Vereins zu Göttingen 1884, S. 271–333.

durch den Mittelpunkt eines Ellipsoids E eine Ebene ε, welche E in einem Kreis k schneidet. In O wird auf ε die Normale n errichtet. Eine durch n gelegte Ebene η schneidet ε in einem Durchmesser d von k. Man konstruiere in den Endpunkten von d die Normalen e auf E und trage den spitzen Winkel (de) im selben Sinn[1] in der Ebene η an n in O an, so daß der Schenkel d mit n zusammenfällt. Dann erfüllen die zweiten Schenkel s, sobald sich die Ebene η um n dreht, einen Kegel K, der von den zu ε parallelen Ebenen in Kreisen geschnitten wird.

Da die Normalen e gleichzeitig auf dem Zylinder Z senkrecht stehen, der E längs k berührt und dessen Achse der zu ε konjugierte Durchmesser von E ist, läßt sich der Satz folgendermaßen rein geometrisch beweisen:

$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1$ sei die Gleichung des elliptischen Zylinders Z in rechtwinkeligen Koordinaten mit $A > B > 0$. Die Ebene ε mit der Gleichung $z = y \operatorname{tg} \alpha$, wobei $\cos \alpha = \frac{B}{A}$ ist, schneidet den Zylinder im Kreis k. Wir errichten in O auf ε die Normale n; sie schließt mit der Z-Achse, der Zylinderachse, den Winkel α ein. Durch n wird eine Ebene η gelegt, die ε in einem Durchmesser d des Kreises k schneidet; d möge mit der X-Achse den Winkel φ bilden. Da der Kegel K von s zweimal überstrichen wird, wenn die Normale e den ganzen Kreis k durchwandert, können wir φ auf die Werte zwischen 0 und π beschränken. Der Endpunkt von d hat die Koordinaten $A \cos \varphi$, $B \sin \varphi$, $B \operatorname{tg} \alpha \sin \varphi$, wie sich ergibt, wenn man den Kreis k durch Drehung um die X-Achse in die XY-Ebene umklappt. Für die in diesem Endpunkt auf Z errichtete Normale e erhält man die Richtungscosinus

$$\frac{B \cos \varphi}{\sqrt{B^2 \cos^2 \varphi + A^2 \sin^2 \varphi}}, \quad \frac{A \sin \varphi}{\sqrt{B^2 \cos^2 \varphi + A^2 \sin^2 \varphi}}, \; 0,$$

für die Richtung von d die Richtungscosinus $\cos \varphi$, $\frac{B}{A} \sin \varphi$, $\frac{B}{A} \operatorname{tg} \alpha \sin \varphi$, somit für den von beiden Richtungen eingeschlossenen Winkel ω:

$$\cos \omega = \frac{B}{\sqrt{B^2 \cos^2 \varphi + A^2 \sin^2 \varphi}}.$$

[1] e liegt in η, wie später gezeigt wird.

Den Winkel ω haben wir in der Ebene η an n in O gegen die Zylinderachse zu anzutragen. Dadurch erhalten wir in seinem zweiten Schenkel den Strahl s. Wir tragen nun auf n von O aus eine Strecke von der Länge 1 auf, ihr Endpunkt sei C, und legen durch C eine Ebene ν senkrecht zu n. ν schneidet η in einer durch C gehenden Geraden, die von den s im Punkte D getroffen wird. Aus dem rechtwinkeligen Dreieck OCD ergibt sich $CD = \operatorname{tg} \omega = \frac{\sqrt{A^2 - B^2}}{B} \sin \varphi$. Wir ziehen durch C die in ν liegende Parallele g zur X-Achse und die auf g senkrecht stehende Gerade h, die in der YZ-Ebene liegt. CD schließt mit g den Winkel φ, mit h den Winkel $\frac{\pi}{2} - \varphi$ ein. Somit liegen die Punkte D auf einem in ν über dem Durchmesser CH konstruierten Kreis, wobei H auf h liegt und $CH = \frac{\sqrt{A^2 - B^2}}{B}$ ist. Damit ist die Behauptung des Satzes bewiesen.

Gleichzeitig sieht man folgendes: Der von den Strahlen s beschriebene Kegel K hat die YZ-Ebene zur Symmetrieebene. Ist $\varphi = 0$, so ist auch $\omega = 0$, s fällt mit n zusammen. Ist dagegen $\varphi = \frac{\pi}{2}$, liegt also D in der YZ-Ebene, so hat ω seinen größten Wert α, s fällt mit der Zylinderachse zusammen. Aus Symmetriegründen liefern daher die zur Zylinderachse senkrechten Ebenen die zweite Reihe der Kreisschnitte von K. Denn diese Ebenen schließen mit n den Winkel $\frac{\pi}{2} - \alpha$ ein, denselben, welche die zu ν parallelen Ebenen mit der Zylinderachse bilden.

Die Ebene η schneidet die XY-Ebene in einer Geraden f, die zur Normalen e parallel ist, somit liegt e in η. Man erkennt das folgendermaßen: Das Lot auf η hat die Richtungscosinus $\sin \varphi$, $-\cos \varphi \cos \alpha$, $-\cos \varphi \sin \alpha$, wie sich aus dem Polarkoordinatensystem mit der X-Achse als Polarachse ergibt. Somit erhält man für f die Gleichung

$$x \sin \varphi - y \cos \alpha \cos \varphi = 0,$$

daher für ihre Richtung $x : y = \cos \alpha \cos \varphi : \sin \varphi$, was sich aber auch für die Richtung von e ergibt. Man kann also von dem elliptischen Zylinder ganz absehen und folgenden Satz aussprechen:

Man errichte in einem Punkt O der Schnittlinie zweier Ebenen ε_1 und ε_2 die Normalen n_1 und n_2 auf die Ebenen, lege durch n_1 eine Ebene η und drehe diese um n_1. η schneidet ε_1 und ε_2 in zwei Geraden g_1 und g_2. Man trage den spitzen Winkel $(g_1\, g_2)$ im selben Sinne an n_1 in O in der Ebene η an, so daß g_1 mit n_1 zusammenfällt. Dann beschreibt der zweite Schenkel g_2 einen Kegel, der von den zu ε_1 und ε_2 parallelen Ebenen in Kreisen geschnitten wird.

Sind $a > b > c$ die Halbachsen des Ellipsoids E und will man A und B durch sie ausdrücken, so kann man so vorgehen: Wir wählen das Koordinatensystem so, daß die Gleichung von E die Gestalt $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ hat. Um eine durch die Y-Achse gehende Ebene zu erhalten, die E in einem Kreise schneidet, hat man y aus den Gleichungen $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ und $x^2 + y^2 + z^2 = b^2$ zu eliminieren, wodurch sich $\frac{z}{x} = \frac{c}{a}\sqrt{\frac{a^2 - b^2}{b^2 - c^2}}$ ergibt. Die große Halbachse A des Zylinderquerschnittes muß natürlich der mittleren Halbachse b des Ellipsoids gleich sein.

Um auch B zu erhalten, braucht man nur in der XZ-Ebene die Ellipse mit der Gleichung $\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ mit der Geraden $z = \frac{cx}{a}\sqrt{\frac{a^2 - b^2}{b^2 - c^2}}$ zu schneiden, in einem Schnittpunkt die Tangente zu bestimmen und den Abstand dieser Tangente vom Nullpunkt zu berechnen. Für die Koordinaten eines Schnittpunktes ergeben sich

$$x = a\sqrt{\frac{b^2 - c^2}{a^2 - c^2}}, \qquad z = c\sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2 - c^2}},$$

daher für die Tangente die Gleichung

$$\frac{x}{a}\sqrt{\frac{b^2 - c^2}{a^2 - c^2}} + \frac{z}{c}\sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2 - c^2}} = 1$$

und für ihren Abstand vom Nullpunkt

$$B = \frac{ac\sqrt{a^2 - c^2}}{\sqrt{a^2(a^2 - b^2) + c^2(b^2 - c^2)}} = \frac{ac}{\sqrt{a^2 - b^2 + c^2}},$$

also $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sqrt{A^2 - B^2}}{B} = \frac{\sqrt{(a^2 - b^2)(b^2 - c^2)}}{ac}$.