Sitzungsberichte

der

mathematisch-naturwissenschaftlichen

Klasse

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften

zu München

Jahrgang 1950

München 1951

Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften

In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung München

Zur Theorie der topologischen Räume

Von Georg Nöbeling in Erlangen

Vorgelegt von Herrn Otto Haupt am 3. November 1950

Nach C. Kuratowski definiert man einen topologischen Raum R folgendermaßen: R ist eine nicht leere Menge irgendwelcher Dinge $p, q, \ldots$, welche Punkte heißen; jeder Punktmenge A ist eindeutig eine Punktmenge $\bar{A}$ zugeordnet derart, daß die folgenden vier Axiome erfüllt sind:

$$A \subseteq \bar{A}. \ \overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}. \ \bar{\bar{A}} = \bar{A}. \ \bar{O} = O.$$

(Die Menge $\bar{A}$ nennt man die abgeschlossene Hülle von A. Eine Menge A heißt abgeschlossen, wenn $\bar{A} = A$ ist.)

Wir wollen R bereits dann einen topologischen Raum nennen, wenn jeder Punktmenge A eine Punktmenge $\bar{A}$ eindeutig zugeordnet ist derart, daß die folgenden zwei Axiome erfüllt sind:

$$A \subseteq \bar{A}. \text{ Aus } A \subseteq B \text{ folgt } \bar{A} \subseteq \bar{B}.^{1}$$

Die Menge $\bar{A}$ nennen wir die Hülle von A. Eine Menge A heiße abgeschlossen, wenn $\bar{A} = A$ ist. (Eine Hülle braucht nicht abgeschlossen zu sein.) Ist auch das Axiom $\bar{\bar{A}} = \bar{A}$ erfüllt, ist m. a. W. jede Hülle abgeschlossen, so nennen wir R einstufig topologisch, andernfalls mehrstufig topologisch. Sind alle vier Axiome von Kuratowski erfüllt, so nennen wir R Kuratowski-topologisch.

Ein Beispiel eines i. a. mehrstufig topologischen Raumes ist das Folgende. Es sei L ein Limesraum im Sinne von M. Fréchet (d. h. eine nicht leere Menge von Elementen, Punkte genannt, in welcher gewisse Punktfolgen $p_1, p_2, \ldots$ gegen einen Punkt p konvergent heißen und zwar derart, daß jede Teilfolge einer konvergenten Folge gegen denselben Limes konvergiert und für jeden Punkt p die Folge $p, p, \ldots$ gegen p konvergiert).

---

[1] Das zweite Axiom ist eine Abschwächung des zweiten Axioms von Kuratowski.

Nun ordne man jeder Punktmenge A aus L als Hülle $\bar{A}$ die Menge aller Punkte p zu, welche Limiten von Folgen von Punkten aus A sind. (Beispielsweise sei L die Menge aller reellen Funktionen f (x) mit reellem x und die Konvergenz die übliche. Ist dann speziell A die Menge aller stetigen $f(x)$, so ist $\bar{A}$ die erste, $\bar{\bar{A}}$ die zweite, ... Bairesche Funktionenklasse; da bekanntlich die n-te Klasse eine echte Teilmenge der $(n + 1)$-ten Klasse ist, so ist also L ein mehrstufig topologischer Raum. – Übrigens ist dieser Funktionenraum L Hausdorffsch im Sinne der weiter unten angegebenen Definition.)

Es ist nun sehr bemerkenswert, daß man einen erstaunlich großen Teil der Theorie der Kuratowski-topologischen Räume auf die topologischen Räume im obengenannten Sinne verallgemeinern kann und zwar derart, daß man automatisch die übliche Theorie vor sich hat, wenn der Raum speziell Kuratowski-topologisch ist. Hierzu muß man nur alle Definitionen und Sätze, in denen man üblicherweise abgeschlossene Mengen bzw. abgeschlossene Hüllen und offene Mengen verwendet, ausschließlich durch Hüllen ausdrücken. Beispielsweise wird man einen Punkt p als Häufungspunkt einer Punktfolge $p_1, p_2, \ldots$ bezeichnen, wenn für jede Menge A, welche schließlich alle Punkte p_i enthält, die Hülle $\bar{A}$ den Punkt p enthält. Man wird R Hausdorffsch nennen, wenn folgendes gilt: Für jede einpunktige Menge P ist $\bar{P} = P$; sind p_1 und p_2 zwei verschiedene Punkte, so existieren zwei Mengen B_1 und B_2 mit $R = B_1 \cup B_2$ derart, daß weder $p_1 \in \bar{B}_1$, noch $p_2 \in \bar{B}_2$ ist.

Auf diese Weise lassen sich eine Häufungstheorie, eine Theorie der stetigen Abbildungen, eine Trennungstheorie und eine Theorie der Kompaktheit entwickeln, die, wie gesagt, in die üblichen Theorien übergehen, wenn R als Kuratowski-topologisch vorausgesetzt wird.

Eine ausführliche Darstellung (und zwar nicht nur für Räume, sondern allgemeiner für Vereine und Verbände[1]) soll im Rahmen eines Buches über „Analytische Topologie" voraussichtlich 1953 erscheinen.

[1] Vgl. hierzu unsere Note im „Archiv der Mathematik", Bd. 2 (1948) S. 154–159.