Sitzungsberichte

der

mathematisch-naturwissenschaftlichen

Klasse

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften

zu München

Jahrgang 1950

München 1951

Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften

In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung München

Abschätzung einiger trigonometrischer Summen

Von **Hanfried Lenz** in München

Vorgelegt von Herrn Perron am 7. Juli 1950

L. Fejér hat in einer Arbeit über Fouriersche Reihen[1] u. a. bewiesen, daß die trigonometrische Summe

$$\lambda_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(2k-1)x}{k} \tag{1}$$

für reelle x gleichmäßig beschränkt ist. Er hat sie mit Hilfe der Summe

$$\mu_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin kx}{k} = \int_0^{\frac{x}{2}} \frac{\sin(2n+1)t}{\sin t}\, dt - \frac{x}{2} \tag{2}$$

abgeschätzt. Es gelten nämlich die Ungleichungen

$$\begin{aligned} &\left| \mu_{2n}(x) - \mu_n(2x) - \frac{1}{2}\lambda_n(x) \right| = \\ &= \left| \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(2k-1)x}{(2k-1)2k} \right| < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)2k} = \ln 2, \end{aligned} \tag{3}$$

$$|\lambda_n(x)| < 2\ln 2 + 3M, \tag{4}$$

wobei M die obere Grenze des Betrages der Summe (2) ist. Fejér zeigt in seiner Arbeit, daß M kleiner als 3,6 ist. Gronwall[2] hat gezeigt, daß

$$M = \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x}\, dx = 1{,}851936\ldots \tag{5}$$

---

[1] Leopold Fejér: „Lebesgue'sche Konstanten und divergente Fourierreihen". Journal f. d. reine u. angew. Math. 138 (1910), S. 22–53; insbes. S. 40–43.

[2] T. H. Gronwall: „Über die Gibbs'sche Erscheinung und die trigonometrischen Summen $\sin x + (1/2)\sin 2x + \ldots + (1/n)\sin nx$". Math. Ann. 72 (1912), S. 228–243.

ist. Daraus folgt

$$|\lambda_n(x)| < 7. \tag{6}$$

In dieser Note soll gezeigt werden, daß sich gewisse trigonometrische Summen, zu denen auch (1) und (2) gehören, unabhängig von einer Integraldarstellung mit Hilfe der partiellen Summation auf einfache Weise abschätzen lassen.

An Stelle von (6) erhält man so für $|\lambda_n(x)|$ die Schranke 2,1, die sich bei vermehrtem Rechenaufwand noch etwas herunterdrücken läßt. Wir betrachten die Summen

$$\begin{aligned} \sigma_n(x) &= \sum_{k=1}^{n} b_k \sin(2k-1)x = \sum_{k=1}^{n} b_k \cdot a_k, \\ \bar{\sigma}_n(x) &= \sum_{k=1}^{n} \bar{b}_k \sin 2kx = \sum_{k=1}^{n} \bar{b}_k \cdot \bar{a}_k. \end{aligned} \tag{7}$$

Da die Beträge dieser Summen gerade Funktionen mit der Periode π sind, genügt zu ihrer Abschätzung die Betrachtung des Intervalls $0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}$. Setzen wir

$$\begin{aligned} &b_{n+1} = 0; \qquad d_k = b_k - b_{k+1}; \qquad s_k = a_1 + \dots + a_k; \\ &\bar{b}_{n+1} = 0; \qquad \bar{d}_k = \bar{b}_k - \bar{b}_{k+1}; \qquad \bar{s}_k = \bar{a}_1 + \cdots + \bar{a}_k, \end{aligned}$$

so gelten die Formeln der partiellen Summation

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = \sum_{k=1}^{n} s_k d_k; \quad \sum_{k=1}^{n} \bar{a}_k \bar{b}_k = \sum_{k=1}^{n} \bar{s}_k \bar{d}_k. \tag{8}$$

In unserem Fall (7) ist

$$\begin{aligned} s_k &= \sum_{h=1}^{k} \sin(2h-1)x = \frac{\sin^2 kx}{\sin x}, \\ \bar{s}_k &= \sum_{h=1}^{k} \sin 2kx \quad = \frac{\sin kx \sin(k+1)x}{\sin x}. \end{aligned} \tag{9}$$

Wir setzen weiter die Gültigkeit der Ungleichungen

$$\left.\begin{array}{l|l} 0 \leqq d_k \leqq \frac{A}{k^2} \text{ für } k < n & 0 \leqq \bar{d}_k \leqq \frac{\bar{A}}{k(k+1)} \text{ für } k < n \\ 0 \leqq b_k \leqq \frac{A}{k} & 0 \leqq \bar{b}_k \leqq \frac{\bar{A}}{k} \end{array}\right. \tag{10}$$

voraus, wobei A und $\bar{A}$ Konstante seien. In den Beispielen (1) und (2) darf $A = 1$ bzw. $\bar{A} = 1$ gesetzt werden.

Es sei nun α zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$ gegeben.

Fall 1: $\frac{\pi}{2} \geqq x \geqq \alpha$.

Dann wird

$$0 \leqq \sigma_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin^2 kx}{\sin x}\, d_k \leqq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sin\alpha}\, d_k = \frac{1}{\sin\alpha} \sum_{k=1}^{n} d_k = \frac{b_1}{\sin\alpha}, \tag{11}$$

$$|\bar{\sigma}_n(x)| = \left| \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin kx \sin(k+1)x}{\sin x}\, \bar{d}_k \right| \leqq \frac{1}{\sin\alpha} \sum_{k=1}^{n} \bar{d}_k = \frac{\bar{b}_1}{\sin\alpha}.$$

Fall 2: Wir setzen $x = 1/N$; es sei $x < \alpha$, $n > [N]$. Mit Hilfe der leicht zu beweisenden Hilfsungleichung

$$1 > \frac{\sin x}{x} > \frac{\sin\alpha}{\alpha} \quad \text{für } 0 < x < \alpha < \frac{\pi}{2} \tag{12}$$

ergibt sich nach der Zerlegung

$$\sigma_n(x) = \sum_{k=1}^{[N]} \frac{\sin^2 kx}{\sin x}\, d_k + \sum_{k=[N]+1}^{n} \frac{\sin^2 kx}{\sin x}\, d_k = \sum\nolimits_1 + \sum\nolimits_2,$$

$$\bar{\sigma}_n(x) = \sum_{k=1}^{[N]} \frac{\sin kx \sin(k+1)x}{\sin x}\, \bar{d}_k + \sum_{k=[N]+1}^{n} \frac{\sin kx \sin(k+1)x}{\sin x}\, \bar{d}_k$$

$$= \overline{\sum}_1 + \overline{\sum}_2,$$

wobei die Summen Σ_2 und $\bar{\Sigma}_2$ je mindestens ein Glied enthalten:

$$0 \leqq \sum\nolimits_1 = \sum_{k=1}^{[N]} \frac{\sin^2 kx}{\sin x}\, d_k < \sum_{k=1}^{[N]} \frac{\left(\frac{k}{N}\right)^2 \cdot \alpha}{\frac{1}{N} \cdot \sin\alpha} \cdot \frac{A}{k^2}$$

$$= \frac{[N] \cdot A\alpha}{N \cdot \sin\alpha} \leqq \frac{A\alpha}{\sin\alpha},$$

$$\left| \overline{\sum}_1 \right| = \left| \sum_{k=1}^{[N]} \frac{\sin kx \sin(k+1)x}{\sin x}\, \bar{d}_k \right| < \sum_{k=1}^{[N]} \frac{\frac{k(k+1)}{N^2} \cdot \alpha \cdot \bar{A}}{\frac{1}{N} \cdot \sin\alpha \cdot k(k+1)}$$

$$\leqq \frac{\bar{A}\alpha}{\sin\alpha},$$

$$0 \leq \sum_2 = \sum_{k=[N]+1}^{n} \frac{\sin^2 kx}{\sin x} d_k < \sum_{k=[N]+1}^{n} \frac{1 \cdot \alpha}{\frac{1}{N} \cdot \sin \alpha} d_k$$

$$= \frac{N\alpha}{\sin \alpha} \cdot b_{[N]+1} \leq \frac{A\alpha}{\sin \alpha},$$

$$\left|\bar{\sum}_2\right| = \left|\sum_{k=[N]+1}^{n} \frac{\sin kx \sin (k+1)x}{\sin x} \bar{d}_k\right| < \sum_{k=[N]+1}^{n} \frac{1 \cdot \alpha}{\frac{1}{N} \cdot \sin \alpha} \cdot \bar{d}_k$$

$$= \frac{N\alpha}{\sin \alpha} \bar{b}_{[N]+1} \leq \frac{\bar{A}\alpha}{\sin \alpha}.$$

Es wird daher

$$|\sigma_n(x)| < \frac{2A\alpha}{\sin \alpha}; \quad |\bar{\sigma}_n(x)| < \frac{2\bar{A}\alpha}{\sin \alpha}. \tag{13}$$

Fall 3: $x < \alpha$, $n \leq [N]$. Es ist

$$\sigma_n(x) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\sin^2 kx}{\sin x} d_k + \frac{\sin^2 nx}{\sin x} \cdot b_n,$$

$$\bar{\sigma}_n(x) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\sin kx \sin (k+1)x}{\sin x} \bar{d}_k + \frac{\sin nx \sin (n+1)x}{\sin x} \bar{b}_n.$$

Der Betrag des ersten Gliedes ergibt sich wie im Fall 2 kleiner als $\frac{A\alpha}{\sin \alpha}$ bzw. $\frac{\bar{A}\alpha}{\sin \alpha}$. Das zweite Glied ist absolut kleiner als

$$\frac{\frac{n}{N} \cdot 1 \cdot \alpha}{\frac{1}{N} \cdot \sin \alpha} \cdot \frac{A}{n} = \frac{A\alpha}{\sin \alpha},$$

bzw. als

$$\frac{\frac{n}{N} \cdot 1 \cdot \alpha}{\frac{1}{N} \cdot \sin \alpha} \cdot \frac{\bar{A}}{n} = \frac{\bar{A}\alpha}{\sin \alpha}.$$

Die Ungleichung (13) gilt daher auch im Fall 3.

In jedem Fall wird also

$$|\sigma_n(x)| \leq \frac{\operatorname{Max}(b_1, 2A\alpha)}{\sin \alpha}, \quad |\bar{\sigma}_n(x)| \leq \frac{\operatorname{Max}(\bar{b}_1, 2\bar{A}\alpha)}{\sin \alpha}.$$

Dabei darf α ein beliebiger Wert zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$ sein. Die vorteilhafteste Abschätzung erhält man, wenn man $\alpha = \frac{b_1}{2A}$

bzw. $\frac{\bar{b}_1}{2\bar{A}}$ wählt, ein Wert, der nach (10) zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$ liegt. So ergibt sich:

$$|\sigma_n(x)| \leqq \frac{b_1}{\sin \frac{b_1}{2A}}, \qquad |\bar{\sigma}_n(x)| \leqq \frac{\bar{b}_1}{\sin \frac{\bar{b}_1}{2\bar{A}}}. \tag{14}$$

Beispiele:

1. $b_k = 1/k$; $A = 1$; $\alpha = 1/2$,
2. $\bar{b}_k = 1/k$; $\bar{A} = 1$; $\alpha = 1/2$.

Daraus folgen für die Summen (1) und (2) die Abschätzungen:

$$|\lambda_n(x)| = \left|\sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(2k-1)x}{k}\right| \leqq \frac{1}{\sin\frac{1}{2}} < 2{,}1,$$

$$|\mu_n(2x)| = \left|\sum_{k=1}^{n} \frac{\sin 2kx}{k}\right| \leqq \frac{1}{\sin\frac{1}{2}} < 2{,}1.$$

3. $b_k = 1/(k+1)$; $A = 1$; $\alpha = 1/4$;

$$\left|\sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(2k-1)x}{k+1}\right| \leqq \frac{1}{2\sin\frac{1}{4}} < 2{,}03.$$