# Sitzungsberichte

der

# mathematisch-naturwissenschaftlichen Klasse

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften zu München

---

Jahrgang 1950

---

München 1951
Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften
In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung München

# Die Winkeldreiteilung des Herrn Sauerbeck

Von **Josef Lense** in München

Vorgelegt am 9. Juni 1950.

Mit 2 Abbildungen.

Herr Leonhard Sauerbeck hat mir eine Näherungskonstruktion für die Dreiteilung eines Winkels zur Begutachtung vorgelegt. Da diese sehr einfache Konstruktion nicht bekannt zu sein scheint, möchte ich sie hier im Einverständnis mit Herrn Sauerbeck veröffentlichen und einige theoretische Erörterungen daran anknüpfen.

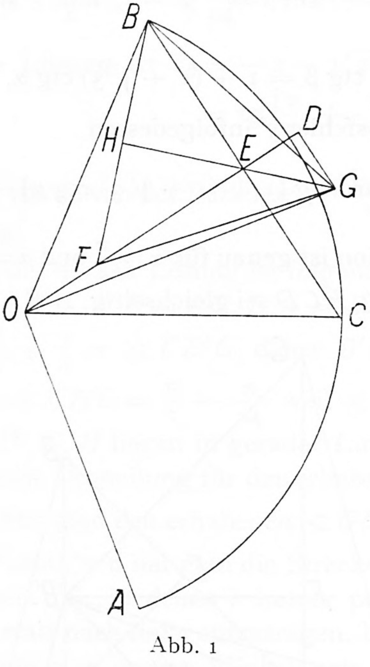


Abb. 1

Das Verfahren besteht in folgendem (Abb. 1): Man halbiere den gegebenen $\sphericalangle AOB$ durch $OC$, $\sphericalangle BOC$ durch $OD$, ziehe $BC \perp OD$, mache $EF = BE$ und konstruiere über $BF$ das gleichseitige $\triangle\, BFG$. Dann ist $\sphericalangle\, BOG$ angenähert der dritte Teil des $\sphericalangle\, AOB$ oder $\sphericalangle\, DOG = \beta$ angenähert der dritte Teil des $\sphericalangle\, DOB = \alpha$.

Untersuchen wir nun die Genauigkeit des Verfahrens. Wir fällen von $G$ das Lot $GH$ auf $BF$ (es enthält als Höhe des gleichseitigen $\triangle\, BFG$ den Punkt $E$) und das Lot $GD$ auf $OD$, bezeichnen $OG$ mit $r$ und setzen $OB = 1$ voraus. Dann ist

$$OE = \cos\alpha,\quad EB = \sin\alpha,\quad BF = \sqrt{2}\,\sin\alpha,\quad EH = \frac{\sin\alpha}{\sqrt{2}},$$

$$GH = \sqrt{\frac{3}{2}}\,\sin\alpha,\ EG = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}\,\sin\alpha,\ ED = DG = \frac{\sqrt{3}-1}{2}\,\sin\alpha,$$

somit

$$\begin{aligned} OD &= r\cos\beta = \cos\alpha + \frac{\sqrt{3}-1}{2}\sin\alpha, \\ DG &= r\sin\beta = \phantom{\cos\alpha +{}} \frac{\sqrt{3}-1}{2}\sin\alpha, \end{aligned} \tag{1}$$

also

$$\operatorname{ctg}\beta = 1 + (1+\sqrt{3})\operatorname{ctg}\alpha, \tag{2}$$

der Konstruktionsfehler $f$ infolgedessen

$$f = \operatorname{arc\,ctg}\,[1 + (1+\sqrt{3})\operatorname{ctg}\alpha] - \frac{\alpha}{3}. \tag{3}$$

Die Konstruktion ist genau für $\alpha = \frac{\pi}{4}$ und $\alpha = \frac{\pi}{8}$. Man erkennt das aus Abb. 2: $\triangle\, BCD$ sei gleichseitig, $AB \perp AC$, $AB = AC$,

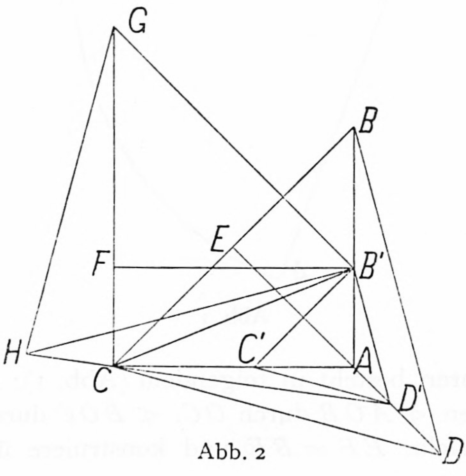


Abb. 2

$DE \perp BC$, $\sphericalangle BCB' = \sphericalangle B'CA = \frac{\pi}{8}$, $B'C' \parallel BC$, $B'D' \parallel BD$. Daraus folgt: $C'D' \parallel CD$, $AC : BC = AB' : B'B = AD' : D'D = AC : CD$, weil $BC = CD$, daher $\sphericalangle ACD' = \sphericalangle D'CD = \frac{\pi}{24}$, weil $\sphericalangle ACD = \sphericalangle BCD - \sphericalangle BCA = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{12}$.

In diesen Fällen ist also $\beta = \frac{\alpha}{3}$, infolgedessen mit $\xi = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{3}$ nach (2)

$$1 + (1 + \sqrt{3}) \frac{1 - 3\xi^2}{3\xi - \xi^3} - \frac{1}{\xi} = 0 \tag{4}$$

oder

$$\xi^3 + (2 + 3\sqrt{3})\, \xi^2 - 3\,\xi + 2 - \sqrt{3} = 0. \tag{5}$$

Diese kubische Gleichung muß demnach die Lösungen

$$\xi_1 = \operatorname{tg} \frac{\pi}{12} = 2 - \sqrt{3} \text{ und } \xi_2 = \operatorname{tg} \frac{\pi}{24} = -2 + \sqrt{2} - \sqrt{3} + \sqrt{6}$$

haben. Die dritte Lösung ist $\xi_3 = -2 - \sqrt{2} - \sqrt{3} - \sqrt{6} =$

$$= \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{24}\right).$$

Bei der Rechnung wurde von der Beziehung $\left(\frac{\sqrt{3} \pm 1}{\sqrt{2}}\right)^2 = 2 \pm \sqrt{3}$ Gebrauch gemacht.

Die Bedeutung der dritten Lösung ist folgende: In Abb. 2 sei $CG \perp AC$, $B'F \perp CG$, $B'F = FG$, $B'G = B'H = GH$. Dann ist $\sphericalangle B'CG = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{4} = \sphericalangle CB'G$, daher $B'G = CG = GH$, somit $\sphericalangle GCH = \sphericalangle CHG = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{24}$ weil $\sphericalangle CGH = \frac{\pi}{12}$ ist, d. h. die Punkte $D'$, $C$, $H$ liegen in gerader Linie.

Macht man nun die Dreiteilung für den erhabenen $\sphericalangle GCB' = \frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{8}$, so erhält man den erhabenen $\sphericalangle GCH = \frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{24}$. Denn für einen Winkel $> \pi$ hat man die Strecke $EF$ von Abb. 1 gemäß den Formeln (1), in denen $r$ immer positiv genommen wird, nach rechts statt nach links aufzutragen. Die Konstruktion liefert also einen um $\pi$ zu großen Winkel; sein Tangens stimmt daher mit dem des richtigen überein und ist gerade die dritte Lösung von (5). Auch für $\alpha = 0$ ergibt sich $f = 0$ entsprechend der Lösung $\xi = 0$ von Gleichung (4).

Aus (3) erhält man durch Differenzieren

$$\frac{df}{d\alpha} = \frac{2\sqrt{3} - (1+\sqrt{3})\,(\cos 2\alpha + \sin 2\alpha)}{3\left\{\sin^2\alpha + [\sin\alpha + (1+\sqrt{3})\cos\alpha]^2\right\}}, \tag{6}$$

daher mit Verwendung der Beziehung

$$(\cos 2\alpha + \sin 2\alpha)^2 = 1 + \sin 4\alpha$$

für die Nullstellen von $\frac{df}{d\alpha}$ als notwendige Bedingung $\sin 4\alpha = 11 - 6\sqrt{3}$. Die Lösungen dieser Gleichung sind $\alpha_1 = 9^\circ\, 21'\, 21''$ und $\alpha_2 = \frac{\pi}{4} - \alpha_1 = 35^\circ\, 38'\, 39''$, vermehrt um Vielfache von $\frac{\pi}{2}$. Doch kommen für die Nullstellen von $\frac{df}{d\alpha}$ nur die geraden Vielfachen in Betracht, da bei Vermehrung um ungerade Vielfache $\cos 2\alpha + \sin 2\alpha$ im Zähler von (6) das Vorzeichen ändern würde. Somit kommen für den Bereich $0 \leqq \alpha \leqq 2\pi$ noch die Lösungen $\alpha_1 + \pi$ und $\alpha_2 + \pi$ hinzu.

$f$ verläuft, als Funktion von $\alpha$ betrachtet, in folgender Weise: Zwischen 0 und $\frac{\pi}{8}$ ist der Fehler positiv und hat seinen größten Wert $8'\, 12''$ bei $\alpha = \alpha_1$. Zwischen $\frac{\pi}{8}$ und $\frac{\pi}{4}$ ist er negativ mit dem größten absoluten Betrag von $8'\, 12''$ bei $\alpha = \alpha_2$. Dann wird er wieder positiv und wächst monoton bis $\frac{2\pi}{3}$ bei $\alpha = \pi$. Für $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ergibt sich $f = \frac{\pi}{12}$. Ist $\alpha > \pi$, so ist nach (1) auch $\beta > \pi$, d. h. man hat dann in Formel (3) für den arcctg den um $\pi$ vermehrten Hauptwert zu nehmen. Es ist daher $f(\alpha + \pi) = f(\alpha) + \frac{2\pi}{3}$ für $0 \leqq \alpha \leqq \pi$.

Der Konstruktionsfehler für den $\sphericalangle\, AOB$ bleibt also dem Betrag nach unterhalb $8'\, 12''$, sobald $\sphericalangle\, AOB \leqq \pi$, wächst aber dann für erhabene Winkel ungemein rasch an.