

Sitzungsberichte

der

mathematisch-naturwissenschaftlichen

Klasse

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften

zu München

Jahrgang 1948

München 1949

Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften

In Kommission beim Biederstein Verlag München

Über die Streckenverzerrung bei konvexen konformen Abbildungen.

Herrn Geheimrat Professor Georg Faber zu seinem 70. Geburtstage gewidmet.

Von Georg Aumann in Regensburg.

Mit 1 Abbildung.

Vorgelegt von Herrn G. Faber am 15. Oktober 1948.

Im folgenden handelt es sich um eine Verallgemeinerung eines von mir von einigen Jahren bewiesenen Satzes¹, in dem der genaue Schrankenbereich (C') des Urbildes C' des Mittelpunktes einer Strecke AB bezüglich der beiden Urbilder A', B' von A, B bei konvexer konformer Abbildung bestimmt wird. In Vervollständigung dieser Problemstellung führe ich nun hier das Entsprechende für einen beliebigen Teilungspunkt der Strecke durch. Der Beweis basiert im wesentlichen auf dem Spezialfall des Mittelpunktes, den ich hier nochmals, leicht verallgemeinert formuliert, behandeln werde. Der fragliche Schrankenbereich wird auch jetzt, wie in manch anderen Problemen bei konvexen konformen Abbildungen, bereits durch die Abbildungen auf Kreise und Halbebenen vollkommen beschrieben.

1. Unter einer konvexen konformen Abbildung $w = f(z)$ verstehe ich eine konforme Abbildung eines Gebietes R der z -Ebene auf ein konvexes Gebiet der w -Ebene. Es seien $z_1 \neq z_2$ zwei Punkte in R , $w_1 = f(z_1)$, $w_2 = f(z_2)$ und $w_3 = h_1 w_1 + h_2 w_2$ mit $h_1 > 0$, $h_2 > 0$, $h_1 + h_2 = 1$, ein Punkt der Verbindungsstrecke von w_1 und w_2 , und $z = g(w)$ die Umkehrung von $w = f(z)$. Es ist unser Ziel, den genauen Wertevorrat $K(R; z_1, z_2; h_1, h_2)$ von $g(w_3)$ bei festen R, z_1, z_2, h_1, h_2 und beliebiger konvexer Abbildung $f(z)$ von R zu bestimmen. Durch eine Abbildung $z = p(s)$ (mit der Umkehrung $q(z) = s$) von R auf den Ein-

¹ Die Mittelpunktsverzerrung bei konvexen konformen Abbildungen. Math. Zeitschr. **46**, 80–82 (1940).

heitskreis U , d. h. $|s| < 1$, wird das Problem reduziert auf den Fall $R = U$. Es ist

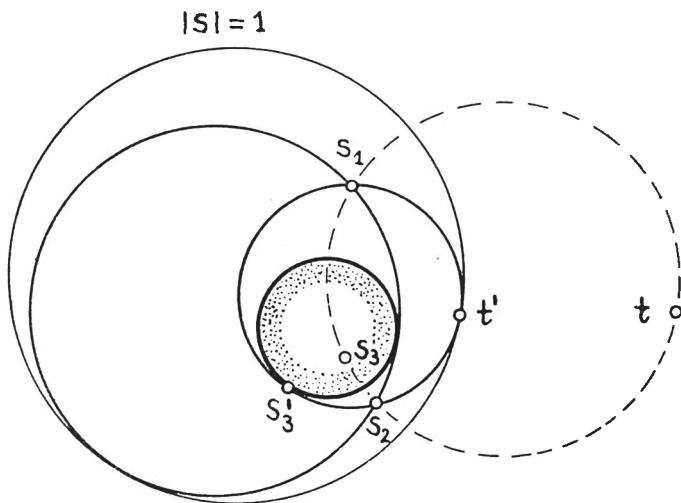
$$K(R; z_1, z_2; h_1, h_2) = p(K(U; q(z_1), q(z_2); h_1, h_2)).$$

Die Willkür, die in der Wahl von $p(s)$ noch besteht, benutzen wir, die Situation in U zu normieren.

2. Um auf den richtigen Weg zu kommen, betrachten wir zunächst jene Teilklasse der fraglichen Abbildungen, durch welche U in einen Kreis oder eine Halbebene übergeführt wird. Es sei daher $w_1 = 0$, $w_2 = 1$, $w_3 = h$, $0 < h < 1$ ($h_1:h_2 = h:(1-h)$), und $s_1 \neq s_2$ mit $|s_j| < 1$, $j = 1, 2$, ferner $|t| \geq 1$. Dann stellt für jedes solche t

$$\frac{s-s_1}{s-s_2} = \frac{t-s_1}{t-s_2} \frac{w}{w-1} \quad (1)$$

eine Abbildung $s = r(w; t)$ dar von $|s| < 1$ in einen Kreis oder eine Halbebene der w -Ebene, die bzw. die Verbindungsstrecke



von w_1 und w_2 enthalten; umgekehrt wird auch jede solche Abbildung damit erfaßt. Sehen wir auf die Bilder s_3 von $w = h$

$$s_3 = r(h; t),$$

wenn sich t in $|t| \geq 1$ bewegt. Die Punkte s_3 erfüllen einen Kreis C in U . Schreiben wir (1) in der Form

$$\frac{s_3 - s_1}{s_3 - s_2} \frac{t - s_2}{t - s_1} = \frac{h}{h-1},$$

so können wir dies folgendermaßen deuten (siehe vorstehende Abbildung): Um zu einem Punkt s_3 von C zu gelangen, nimmt man irgend einen Kreis durch s_1 und s_2 und einen Punkt t außerhalb von U . s_3 ist der vierte Punkt, der das Doppelverhältnis $DV(s_1, s_2; s_3, t)$ gleich dem (reellen) Wert $\frac{h}{h-1}$ macht.

Bezieht man sich auf die Grenzfälle solcher Kreise, nämlich die beiden Orizykeln durch s_1, s_2 , so kann C als derjenige Kreis bezeichnet werden, der in dem von den beiden Orizykeln gebildeten Kreiszwieck enthalten ist und jeden von ihnen in einem Punkte s'_3 berührt, der zusammen mit s_1, s_2 und dem Berührungspunkt t' des entsprechenden Orizykels mit $|s| = 1$

$$DV(s_1, s_2; s'_3, t') = \frac{h}{h-1}$$

liefert.

Setzt man genauer $C = C(s_1, s_2; h)$, so gilt offenbar

$$K(U; s_1, s_2; h, 1-h) \supseteq C(s_1, s_2; h).$$

Wir werden beweisen, daß hier das Gleichheitszeichen steht.

3. Wir normieren die in **2.** beschriebene Konfiguration durch eine Transformation von U in sich, bei der C zu U konzentrisch wird. Dies erreichen wir, wenn wir den Mittelpunkt m von C zu Null machen:

$$m = r\left(h; \frac{1}{u}\right) = 0,$$

wobei u durch $r(h; u) = \infty$ erklärt ist. Es ergibt sich

$$s_1 - k s_2 + s_1 s_2 (\bar{s}_1 k - \bar{s}_2) = 0, \quad k = \frac{h}{h-1}. \quad (2)$$

Sind s_1, s_2 in dieser Weise normiert, so wird aus der Peripherie von C

$$s_3 = \frac{t(s_1 - k s_2) - (1-k)s_1 s_2}{t(1-k) + s_1 k - s_2}, \quad |t| = 1,$$

mit Benutzung von (2)

$$s_3 = -s_1 s_2 \frac{t(\bar{s}_1 k - \bar{s}_2) + (1-k)}{t(1-k) + s_1 k - s_2},$$

oder, da k reell ist,

$$|s_3| = |s_1 s_2|.$$

Schreiben wir (2) in der Form

$$\frac{s_1}{1-|s_1|^2} = k \frac{s_2}{1-|s_2|^2}, \quad (3)$$

so erkennen wir, daß s_1 und s_2 auf derselben Geraden durch den Ursprung liegen und wegen $k < 0$ von ihm getrennt werden. Mit $|t| \geq 1$ erhalten wir für $C(s_1, s_2; k)$ die (normierte) Darstellung

$$|s_3| \leq |s_1| |s_2|.$$

4. Wie schon am Ende von 2. angedeutet, lautet der Verzerrungssatz, den wir nun beweisen wollen:

$$K(U; s_1, s_2; h, 1-h) = C(s_1, s_2; h). \quad (D_h)$$

Dies ist nicht schwer im Falle $h = \frac{1}{2}$ oder $k = -1$, wo sich (3) zu $s_1 = -s_2$ vereinfacht. Die fragliche Behauptung bei der in 3. erklärten Normierung folgt hier unmittelbar aus dem nachfolgenden Satze, der sich auf eine etwas allgemeinere Klasse als die der konvexen konformen Abbildungen bezieht:

Satz. Ist $f(s)$ eine konforme Abbildung von $|s| < 1$ auf ein Gebiet R derart, daß der Punkt $\frac{1}{2}(f(s) + f(-s))$ für jedes s mit $|s| < 1$ zu R gehört, so gilt, wenn $g(w)$ die Umkehrfunktion von $f(s)$, $F(s)$ die Funktion $g(\frac{1}{2}(f(s) + f(-s)))$ bezeichnet:

$$|F(s)| < |s|^2 \quad \text{für} \quad |s| < 1. \quad (5)$$

In der Tat, $F(s)$ ist in $|s| < 1$ definiert und regulär, außerdem absolut kleiner als eins und in der Form $s^2 G(s)$ darstellbar mit in $|s| < 1$ regulärem $G(s)$. Nach Art der Beweisführung beim Schwarzschen Lemma² erhalten wir somit (5). Damit ist (D_1) im normierten Falle, also auch allgemein bewiesen.

² Vgl. C. Carathéodory, Conformal Representation, Cambridge Tracts 1932 S. 39.

5. Im Falle $h \neq \frac{1}{2}$ ist die normierende Relation (3) nicht mehr analytisch, wenn sie auch eine umkehrbar eindeutige Abbildung von $|s_1| < 1$ auf $|s_2| < 1$ vermittelt. Eine der Methode im Falle $h = \frac{1}{2}$ ähnliche ist hier nicht zu erwarten. Überraschenderweise kann aber die ganze Angelegenheit auf den Fall $h = \frac{1}{2}$ zurückgeführt werden.

Es gelten nämlich die Sätze:

- (a) $(D_{\frac{1}{2}})$ ist richtig;
- (b) Mit (D_h) ist auch (D_{1-h}) richtig;
- (c) Mit (D_h) und $(D_{h'})$ ist auch $(D_{hh'})$ richtig;
- (d) Ist (D_{h_n}) richtig für $n = 1, 2, \dots$ und gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} h_n = h$, so ist es auch (D_h) .

In der Tat, (b) folgt aus Symmetriegründen, (d) aus Gründen der Stetigkeit, die in unserem Problem offenbar besteht. Hinsichtlich (c) werden wir beweisen, daß

$$C(s_1, s_2; hh') \supseteq \sum_{s_3 \in C(s_1, s_2; h)} C(s_1, s_3; h'),$$

und dies genügt, denn die Vereinigungsmenge rechts enthält mit Rücksicht auf unsere Annahmen über (D_h) und $(D_{h'})$ sicher die Menge $K(U; s_1, s_2; hh', 1 - hh')$, so daß zusammen mit der Mengenungleichung am Ende von 2. die behauptete Gleichheit $(D_{hh'})$ folgt.

$$\text{Sei nun } DV(s_1, s_2; s_3, t) = \frac{h}{h-1}, \quad |t| \geq 1,$$

$$DV(s_1, s_3; s_4, t') = \frac{h'}{h'-1}, \quad |t'| \geq 1;$$

wir müssen zeigen, daß es ein t'' mit $|t''| \geq 1$ gibt, so daß

$$DV(s_1, s_2; s_4, t'') = \frac{hh'}{hh'-1}.$$

Indem wir die Invarianz dieser Fragestellung bei linearen Transformationen benutzen, können wir annehmen, daß $s_1 = \infty$, $s_2 = 0$ ist; $|t| \geq 1$ ist dabei zu ersetzen durch eine gewisse Kreisscheibe Z , die 0 und ∞ nicht enthält. Wir haben sodann

$$\frac{t}{s_3} = \frac{h}{h-1}, \quad t \in Z; \quad \frac{t'-s_3}{s_4-s_3} = \frac{h'}{h'-1}, \quad t' \in Z; \quad \text{bzw.} \quad \frac{t''}{s_4} = \frac{hh'}{hh'-1}.$$

Elimination von s_3 und s_4 aus diesen drei Gleichungen ergibt

$$t'' = \frac{1}{\frac{1}{hh'} - 1} \left(\left(\frac{1}{h} - \frac{1}{h'} \right) t + \left(\frac{1}{h'} - 1 \right) t' \right),$$

woraus unmittelbar folgt, daß t'' auf der Verbindungsstrecke von t und t' liegt, also wegen der Konvexität von Z mit t und t' auf Z liegt, w. z. z. w.

(a), (b) und (c) zusammen ergeben die Richtigkeit von (D_h) für alle $h = \frac{m}{2^n}$, $m = 1, 2, \dots, 2^n - 1$, $n = 1, 2, \dots$, sodann (d) diese für alle h mit $0 < h < 1$.