Sitzungsberichte

der

mathematisch-naturwissenschaftlichen Abteilung

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften zu München

1933. Heft III

November-Dezember-Sitzung

München 1933

Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften

in Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung

Konvexe Funktionen und die Induktion bei Ungleichungen zwischen Mittelwerten.

Von Georg Aumann in München.

Vorgelegt von Oskar Perron in der Sitzung vom 11. November 1933.

1. Einleitung. Es scheint mir keine müßige Aufgabe zu sein, die vielen verschiedenartigen Ungleichungen, denen man in der Analysis begegnet, systematisch zu ordnen und einzureihen in wenige umfassende Ungleichungstypen. Die folgenden Untersuchungen sollen einen Beitrag zu dieser Aufgabe liefern, und zwar hinsichtlich der Ungleichungen zwischen Mittelwerten.

Durch eine weitgehende Verallgemeinerung des Begriffes der *konvexen Funktion* wird es uns möglich sein, einen Ungleichungstypus (K) aufzustellen, der die hauptsächlich bekannten Ungleichungen zwischen Mittelwerten als Spezialfälle enthält. Beispielsweise ergeben sich durch Spezialisierung der in diesem Ungleichungstypus auftretenden Funktionen die Ungleichung von Cauchy:[1]

$$(1) \qquad \sqrt[n]{x_1 \ldots x_n} \leqq \frac{x_1 + \ldots + x_n}{n},$$

andererseits die der im Jensenschen Sinne konvexen Funktionen:[1]

$$(2) \qquad \varphi\left(\frac{x_1 + \ldots + x_n}{n}\right) \leqq \frac{\varphi(x_1) + \ldots + \varphi(x_n)}{n},$$

aber auch solche wie die von Hölder:[2]

$$(3) \quad x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n \leqq \left(x_1^{\frac{1}{p}} + \ldots + x_n^{\frac{1}{p}}\right)^p \left(y_1^{\frac{1}{q}} + \ldots + y_n^{\frac{1}{q}}\right)^q,$$
$$(p, q > 0,\ p + q = 1),$$

oder die von Minkowski:[2]

---

[1] J. L. W. V. Jensen, Sur les fonctions convexes et les inégalités entre les valeurs moyennes, Acta math. 30 (1906), S. 175.

[2] Siehe z. B. G. H. Hardy, Prolegomena to a chapter on inequalities, Journ. of Lond. M. S. 4 (1929), S. 61.

$$(4) \qquad [(x_1+y_1)^r+\ldots+(x_n+y_n)^r]^{\frac{1}{r}} \leqq (x_1^r+\ldots+x_n^r)^{\frac{1}{r}}+(y_1^r+\ldots+y_n^r)^{\frac{1}{r}}, \quad (r>1).$$

Geht man an den Nachweis der eben aufgezählten Beispiele, so ist der Gedanke naheliegend, die betreffende Ungleichung zunächst für $n=2$ und dann durch den Schluß von $n-1$ auf n $(n>2)$ für beliebiges n zu beweisen. Diese Induktion ist nun tatsächlich möglich, und zwar, wie wir zeigen werden, ganz allgemein für Ungleichungen, welche unter unseren Typus (K) fallen. Besondere Beachtung verdient bei diesen Ungleichungen der „Fall des Kleinerzeichens", d. h. die Frage, wie sich das Kleinerzeichen bei der genannten Induktion mitüberträgt. Ein interessanter Spezialfall unseres Typus (K) gibt Anlaß zu neuartigen Beispielen von Ungleichungen. Der Schluß bringt eine Bemerkung über die Tragweite dieser Untersuchungen.

2. Das Hilfsmittel. Beim Nachweis der in **1.** erwähnten Induktionsmöglichkeit werden wir uns eines von mir untersuchten *iterativen Algorithmus* bedienen, durch welchen jedem „Mittel" $M(x_1, \ldots, x_n)$ von n Argumenten[3] in eindeutiger Weise

[3] Siehe meine Arbeit: Algorithmischer Aufbau der Mittelwerte mehrerer Argumente, I, Math. Ann. 109 (1933), S. 235 (im folgenden mit „A. I." zitiert).

Die Funktion $M(x_1, \ldots, x_n)$ heißt im Intervall $a \leqq x \leqq b$ ein Mittel, wenn

(I) M eindeutig, stetig und symmetrisch ist;

(II) es eine positive Konstante ρ gibt, so daß für $a \leqq x_1 \leqq x_2 \leqq \ldots \leqq x_n \leqq b$ die Funktion M der Ungleichung genügt:

$$x_1+\rho(x_n-x_1) \leqq M(x_1, \ldots, x_n) \leqq x_n-\rho(x_n-x_1);$$

(III) M monoton ist, d. h. für $x_\nu \leqq x'_\nu$ $(\nu=1, \ldots, n)$ stets $M(x_1, \ldots, x_n) \leqq M(x'_1, \ldots, x'_n)$ besteht (s. A. I., Nr. 1).

Im Bedarfsfalle ersetzen wir die Forderung (III) durch eine strengere, nämlich:

(III a) Für $\varepsilon>0$ ist stets $M(x_1, \ldots, x_n) < M(x_1+\varepsilon, x_2, \ldots, x_n)$.

Ein Mittel, welches die Eigenschaft (III a) besitzt, nennen wir ein *streng monotones* Mittel.

In A. I. habe ich bewiesen, daß die Eigenschaften (I), (II), (III) sich auf das Obermittel übertragen. Für die Eigenschaft (III a) gilt das nicht immer. Wenn wir daher diese Eigenschaft bei unseren Untersuchungen benötigen, ein Mittel $M'(y_1, \ldots, y_{n+1})$ von $n+1$ Argumenten zugeordnet wird, das Obermittel M' von M. Dieser „Erhöhungsalgorithmus" besteht darin, daß man, um bei vorgegebenem $M(x_1, \ldots, x_n)$ und vorgegebenen Zahlen $y_1, \ldots, y_{n+1}$ den Funktionswert $M'(y_1, \ldots, y_{n+1})$ zu finden, die Zahlenfolgen bildet:

$$y_\nu^{(0)} = y_\nu, \; y_\nu^{(\lambda+1)} = M(\ldots [y_\nu^{(\lambda)}] \ldots) \quad \begin{pmatrix} \nu = 1, \ldots, n+1 \\ \lambda = 0, 1, 2, \ldots \end{pmatrix},$$

wobei das letztere bedeuten soll, daß in den n Argumentenstellen von M diejenigen n Zahlen einzusetzen sind, die übrig bleiben, wenn man von den $n+1$ Zahlen $y_1^{(\lambda)}, \ldots, y_{n+1}^{(\lambda)}$ gerade die Zahl $y_\nu^{(\lambda)}$ wegstreicht; wegen der Symmetrieeigenschaft von M ist es dabei gleichgültig, an welche Stellen dabei die einzelnen y geraten. Es ist dann

$$M'(y_1, \ldots, y_{n+1}) = \lim_{\lambda \to \infty} y_\nu^{(\lambda)}. \tag{A}$$

Da dieses Verfahren in der unter Anm. 3 zitierten Arbeit ausführlich besprochen ist, so brauche ich mich hier mit seinen Einzelheiten nicht weiter aufzuhalten.

3. Definition. Sei $\xi = \Phi(x_1, \ldots, x_m)$ eine eindeutige Funktion im Bereich $a < x_\mu < b$ $(\mu = 1, \ldots, m)$ und nehme dort nur Werte aus dem Intervall $\alpha \leqq \xi \leqq \beta$ an; außerdem seien $M_1(x_1, \ldots, x_n)$, $\ldots$, $M_m(x_1, \ldots, x_n)$ Mittel im Intervall $a \leqq x \leqq b$, und schließlich $N(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ ein Mittel im Intervall $\alpha \leqq \xi \leqq \beta$. Unter diesen Voraussetzungen definiere ich:

Φ heißt *konvex bezüglich* $\{M_1, \ldots, M_m; N\}$, wenn für jede Matrix

$$\mathfrak{X} = \begin{pmatrix} x_{11}, \ldots, x_{1n} \\ \cdots\cdots\cdots \\ x_{m1}, \ldots, x_{mn} \end{pmatrix} \tag{5}$$

von Zahlen des Intervalls $a < x < b$ stets gilt:

---

so werden wir sie immer ausdrücklich in unsere Voraussetzungen aufnehmen. In den besonderen Fällen allerdings, wo das fragliche Mittel ein reguläres Bildmittel (siehe A. I., Nr. 3) des arithmetischen Mittels ist, besteht die strenge Monotonie für alle „höheren" Obermittel.

$$\text{(K)} \qquad \begin{aligned} &\Phi\left(M_1(x_{11},\ldots,x_{1n}),\ldots,M_m(x_{m1},\ldots,x_{mn})\right) \\ &\leqq N\left(\Phi(x_{11},\ldots,x_{m1}),\ldots,\Phi(x_{1n},\ldots,x_{mn})\right). \end{aligned}$$

Man beachte, daß in den M die Zeilen, in Φ die Spalten stehen. Wir schreiben für (K) abkürzend:

$$\text{(6a)} \qquad \Phi\, M\, \mathfrak{X} \leqq N\, \Phi\, \mathfrak{X}.$$

Entsprechend definiere ich:

Φ heißt *konkav bezüglich* $\{M_1, \ldots, M_m; N\}$, wenn stets

$$\text{(6b)} \qquad \Phi\, M\, \mathfrak{X} \geqq N\, \Phi\, \mathfrak{X}$$

gilt.

In den Ungleichungstypen (6a), (6b) sind die in **1.** angeführten Ungleichungen als Spezialfälle enthalten. Man braucht nur zu setzen

bei (1): $m = 1$, $\Phi = x$ (konvex), $M = \sqrt[n]{x_1 \ldots x_n}$, $N = \dfrac{\xi_1 + \ldots + \xi_n}{n}$;

oder mit einer kleinen Modifikation:

$$m = 1, \Phi = \log x \text{ (konkav)}, M = \frac{x_1 + \ldots + x_n}{n}, N = \frac{\xi_1 + \ldots + \xi_n}{n};$$

bei (2): $m = 1$, $\Phi = \varphi(x)$ (konvex), M und N wie eben;

bei (3): $m = 2$, $\Phi = \sqrt{x_1 x_2}$ (konkav), $N = \left(\dfrac{\xi_1^2 + \ldots + \xi_n^2}{n}\right)^{\frac{1}{2}}$,

$$M_1 = \left(\frac{x_1^p + \ldots + x_n^p}{n}\right)^{\frac{1}{p}}, \qquad M_2 = \left(\frac{x_1^q + \ldots + x_n^q}{n}\right)^{\frac{1}{q}};$$

bei (4): $m = 2$, $\Phi = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$ (konkav),

$$M_1 = M_2 = \left(\frac{x_1^r + \ldots + x_n^r}{n}\right)^{\frac{1}{r}}, \qquad N = \left(\frac{\xi_1^r + \ldots + \xi_n^r}{n}\right)^{\frac{1}{r}}.$$

Man sieht, daß in den Fällen (3) und (4) die Besonderheit vorliegt, daß Φ ein Mittel ist. Auf diesen Sonderfall kommen wir später noch ausführlicher zu sprechen.

4. Der Hauptsatz. Der zu beweisende Induktionssatz besagt, daß aus (K) die Ungleichung

$$(\mathrm{K}')\quad \begin{aligned}&\Phi\left(M_1'(y_{11},\ldots,y_{1,n+1}),\ldots,M_m'(y_{m1},\ldots,y_{m,n+1})\right)\\ &\leqq N'\left(\Phi(y_{11},\ldots,y_{m1}),\ldots,\Phi(y_{1,n+1},\ldots,y_{m,n+1})\right)\end{aligned}$$

folgt, für jede Matrix

$$\mathfrak{Y}=\begin{pmatrix} y_{11},\ldots,y_{1n},y_{1,n+1}\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ y_{m1},\ldots,y_{mn},y_{m,n+1}\end{pmatrix}$$

von Zahlen des Intervalls $a<y<b$. Dabei sind $M_1',\ldots,M_m',N'$ die Obermittel von $M_1,\ldots,M_m,N$ (siehe **2.**). Die Behauptung (K′) und die entsprechende für konkave Funktionen — wir werden im folgenden nur noch von *konvexen* Funktionen reden, und bemerken hier ein für alle Mal, daß die nachfolgenden Behauptungen und Beweise bei entsprechenden Abänderungen auch für *konkave* Funktionen ihre Gültigkeit haben —, formulieren wir im

Induktionssatz I. *Ist die eindeutige Induktion* $\Phi(x_1,\ldots,x_m)$ *konvex bezüglich* $\{M_1,\ldots,M_m;N\}$, *dann ist sie es auch bezüglich* $\{M_1',\ldots,M_m';N'\}$.

5. Stetigkeit. Zum Beweis dieses Induktionssatzes benötigen wir einen Hilfsatz über konvexe Funktionen, welcher im Spezialfall der Jensenschen Konvexität nicht unbekannt ist:[4]

Hilfssatz. *Ist die Funktion* $\Phi(x_1,\ldots,x_m)$ *konvex bezüglich* $\{M_1,\ldots,M_m;N\}$, *dann ist sie stetig.*

Beweis. Angenommen, Φ wäre nicht stetig an der Stelle $(x_1^0,\ldots,x_m^0)$ mit $a<x_\mu^0<b$ $(\mu=1,\ldots,m)$. Dann ist

$$\alpha\leqq l=\varliminf_{x_\mu\to x_\mu^0}\Phi(x_1,\ldots,x_m)<\varlimsup_{x_\mu\to x_\mu^0}\Phi(x_1,\ldots,x_m)=\bar{l}\leqq\beta,$$

und es gibt Folgen $\{(x_1^{(\lambda)},\ldots,x_m^{(\lambda)})\}$, $\{(y_1^{(\lambda)},\ldots,y_m^{(\lambda)})\}$ $(\lambda=1,2,3,\ldots)$, so daß mit $\alpha_\lambda=\Phi(x_1^{(\lambda)},\ldots,x_m^{(\lambda)})$, $\beta_\lambda=\Phi(y_1^{(\lambda)},\ldots,y_m^{(\lambda)})$

$$\lim_{\lambda\to\infty}\alpha_\lambda=\underline{l},\ \lim_{\lambda\to\infty}\beta_\lambda=\bar{l},$$

[4] A. Ostrowski, Über die Funktionalgleichung der Exponentialfunktion und verwandte Funktionalgleichungen, Jahresb. d. D. M. V. 38 (1929), S. 54; hier wird auch auf diesbezügliche frühere Arbeiten verwiesen.

und

$$\lim_{\lambda \to \infty} x_\mu^{(\lambda)} = \lim_{\lambda \to \infty} y_\mu^{(\lambda)} = x_\mu^0 \quad (\mu = 1, \ldots, m).$$

Ich setze

$$\tfrac{1}{2} \cdot \operatorname*{Min}_{\mu = 1, \ldots, m} (x_\mu^0 - a,\ b - x_\mu^0) = \delta > 0,$$

und wähle λ_0 so groß, daß für $\lambda > \lambda_0$

$$(7) \qquad \left| x_\mu^{(\lambda)} - x_\mu^0 \right| < \frac{\rho\,\delta}{2\,(1 - \rho)}, \qquad \left| y_\mu^{(\lambda)} - x_\mu^0 \right| < \frac{\rho\,\delta}{2},$$

wobei ρ jene positive Konstante ist, die in der Mitteleigenschaft (II) auftritt.[5] Für $\lambda > \lambda_0$ hat dann die Gleichung

$$h\,(z) = M_\mu\,(x_\mu^{(\lambda)}, \ldots, x_\mu^{(\lambda)},\ z) = y_\mu^{(\lambda)}$$

mindestens eine Lösung. In der Tat, $h(z)$ ist wegen (III) nicht fallend und außerdem stetig. Weiter ist nach (II) und (7)

$$\begin{aligned} h\,(x_\mu^0 - \delta) &\leqq x_\mu^{(\lambda)} - \rho\,\left(x_\mu^{(\lambda)} - (x_\mu^0 - \delta)\right) \\ &= x_\mu^0 + (1 - \rho)\,(x_\mu^{(\lambda)} - x_\mu^0) - \rho\,\delta \\ &\leqq x_\mu^0 + \frac{\rho\,\delta}{2} - \rho\,\delta = (x_\mu^0 - y_\mu^{(\lambda)}) + y_\mu^{(\lambda)} - \frac{\rho\,\delta}{2} \\ &\leqq y_\mu^{(\lambda)}. \end{aligned}$$

Ebenso folgt $h\,(x_\mu^0 + \delta) \geqq y_\mu^{(\lambda)}$. Daher liegt im Intervall $\left| z - x_\mu^0 \right| \leqq \delta$, das ist im Innern von $a < z < b$, mindestens eine Wurzel unserer Gleichung; mit $z_\mu^{(\lambda)}$ bezeichne ich eine dieser Wurzeln. Im Falle $z_\mu^{(\lambda)} \leqq x_\mu^{(\lambda)}$ folgt aus (II)

$$y_\mu^{(\lambda)} \leqq x_\mu^{(\lambda)} - \rho\,(x_\mu^{(\lambda)} - z_\mu^{(\lambda)});$$

im Falle $z_\mu^{(\lambda)} > x_\mu^{(\lambda)}$ aber

$$x_\mu^{(\lambda)} + \rho\,(z_\mu^{(\lambda)} - x_\mu^{(\lambda)}) \leqq y_\mu^{(\lambda)},$$

also in beiden Fällen $\left| x_\mu^{(\lambda)} - z_\mu^{(\lambda)} \right| \leqq \dfrac{\left| x_\mu^{(\lambda)} - y_\mu^{(\lambda)} \right|}{\rho}$. Dies besagt wegen obiger Limesbeziehungen, daß $\lim\limits_{\lambda \to \infty} z_\mu^{(\lambda)} = x_\mu^0$.

---

[5] Siehe Anm. 3; wir dürfen und wollen dabei annehmen, daß für die Mittel $M_1, \ldots, M_m$ die Konstante ρ dieselbe ist. Es ist $\rho \leqq \frac{1}{2}$.

Nun setzen wir $x_{\mu\nu} = x_\mu^{(\lambda)}$ $(\nu = 1, \ldots, n-1)$, $x_{\mu n} = z_\mu^{(\lambda)}$, und gehen damit in die vorausgesetzte Ungleichung (K) ein. Man bekommt

$$\beta_\lambda \leqq N\left(\alpha_\lambda, \ldots, \alpha_\lambda, \Phi\left(z_1^{(\lambda)}, \ldots, z_m^{(\lambda)}\right)\right),$$

und hieraus für $\lambda \to \infty$ durch Übergang zum oberen Limes

$$\bar{l} \leqq \overline{\lim_{\lambda \to \infty}} N\left(\alpha_\lambda, \ldots, \alpha_\lambda, \Phi\left(z_1^{(\lambda)}, \ldots, z_m^{(\lambda)}\right)\right).$$

Da die Funktion N im abgeschlossenen Bereich stetig und monoton ist, so kann man mit dem Zeichen $\overline{\lim}$ in die Argumente hineingehen und erhält, wegen $\overline{\lim\limits_{\lambda \to \infty}} \Phi\left(z_1^{(\lambda)}, \ldots, z_m^{(\lambda)}\right) \leqq \bar{l}$ mit Benutzung von (III) und (II)

$$\bar{l} \leqq N(\underline{l}, \ldots, \underline{l}, \bar{l}) < \bar{l} - \rho\,(\bar{l} - \underline{l})$$

einen Widerspruch; der Hilfssatz ist damit bewiesen.

6. Beweis des Induktionssatzes. Sei $y_{\mu\nu}$, $\mu = 1, \ldots, m$; $\nu = 1, \ldots, n+1$ vorgegeben. Man setzt

$$z_\nu^{(0)} = \Phi(y_{1\nu}, \ldots, y_{m\nu}), \quad z_\nu^{(\lambda+1)} = N(\ldots [z_\nu^{(\lambda)}] \ldots), \tag{8}$$

$$y_{\mu\nu}^{(0)} = y_{\mu\nu}, \qquad y_{\mu\nu}^{(\lambda+1)} = M_\mu(\ldots [y_{\mu\nu}^{(\lambda)}] \ldots). \tag{9}$$

Dann ist

$$\lim_{\lambda \to \infty} z_\mu^{(\lambda)} = N'\left(\Phi(y_{11}, \ldots, y_{m1}), \ldots, \Phi(y_{1,n+1}, \ldots, y_{m,n+1})\right),$$

$$\lim_{\lambda \to \infty} y_{\mu\nu}^{(\lambda)} = M'_\mu(y_{\mu 1}, \ldots, y_{\mu, n+1}).$$

Nun folgt aus (K):

$$\Phi\left(y_{1\nu}^{(1)}, \ldots, y_{m\nu}^{(1)}\right) = \Phi\left(M_1(\ldots [y_{1\nu}^{(0)}], \ldots), \ldots, M_m(\ldots [y_{m\nu}^{(0)}], \ldots)\right)$$
$$\leqq N\left(\ldots [\Phi(y_{1\nu}^{(0)}, \ldots, y_{m\nu}^{(0)})] \ldots\right) = N\left(\ldots [z_\nu^{(0)}] \ldots\right) = z_\nu^{(1)}.$$

Angenommen, es sei bereits für ein gewisses $\lambda \geqq 0$ bewiesen, daß

$$\Phi\left(y_{1\nu}^{(\lambda)}, \ldots, y_{m\nu}^{(\lambda)}\right) \leqq z_\nu^{(\lambda)}. \tag{10}$$

Dann ergibt sich mit Benutzung von (K), (III) und (10)

$$\Phi\,(y_{1\nu}^{(\lambda+1)}, \ldots, y_{m\nu}^{(\lambda+1)}) = \Phi\,(M_1(\ldots[y_{1\nu}^{(\lambda)}]\ldots), \ldots, M_m(\ldots[y_{m\nu}^{(\lambda)}]\ldots))$$
$$\leqq N(\ldots[\Phi\,(y_{1\nu}^{(\lambda)}, \ldots, y_{m\nu}^{(\lambda)})]\ldots) \leqq N(\ldots[z_\nu^{(\lambda)}]\ldots) = z_\nu^{(\lambda+1)}.$$

Also gilt (10) für alle λ; durch Grenzübergang $\lambda \to \infty$ folgt daraus mit der in **5.** bewiesenen Stetigkeit von $\Phi\,(x_1, \ldots, x_m)$ die Behauptung (K').

7. Alte Beispiele. Mit Hilfe des eben gewonnenen Induktionssatzes lassen sich nun die vier Ungleichungen von **1.** für beliebiges ganzes $n > 2$ bewiesen, sobald sie für $n = 2$ als richtig erkannt sind. Das Obermittel eines Mittels der Form

$$\left(\frac{x_1^r + \ldots + x_n^r}{n}\right)^{\frac{1}{r}}$$

ist nämlich nach dem Abbildungssatz[6] gegeben durch

$$\left(\frac{y_1^r + \ldots + y_{n+1}^r}{n+1}\right)^{\frac{1}{r}}.$$

Ausgehend von den Ungleichungen in **1.** für $n = 2$ erhält man durch wiederholte Anwendung unseres Induktionssatzes diese Ungleichungen für beliebiges n.

8. Das Kleinerzeichen. Wir gehen jetzt an eine Verschärfung des Induktionssatzes I und untersuchen, wie sich das Kleinerzeichen bei Anwendung des Erhöhungsalgorithmus benimmt. Wieder haben wir die Voraussetzungen des Anfangs von **3.** Da wir keine allgemeine Regel haben zu entscheiden, wann in (K) das Kleinerzeichen steht — wir wissen zwar, daß für eine Matrix $\mathfrak{X}$ mit lauter gleichen Spalten wegen $M\,(x, \ldots, x) = x$ das Gleichheitszeichen steht —, müssen wir entsprechend allgemein vorgehen.

Sei E eine *Matrizeneigenschaft* von der Art, daß sich bei jeder vorgegebenen Matrix $\mathfrak{X}_0$ entscheiden läßt, ob die Eigenschaft E der Matrix $\mathfrak{X}_0$ zukommt oder nicht. Außerdem soll für die Eigenschaft E noch folgendes gelten:

[6] Siehe A. I., Nr. 7 und 8.

1. Besitzt $\mathfrak{X}_0$ die Eigenschaft E, dann auch jede aus $\mathfrak{X}_0$ durch Vertauschung von Zeilen untereinander und Spalten untereinander hervorgehende Matrix;

2. Wenn E einer Matrix $\mathfrak{X}_0$ mit mehr als zwei Spalten zukommt, so soll sie auch mindestens einer der spaltengekürzten Matrizen von $\mathfrak{X}_0$ zukommen, d. h. einer jener Matrizen, die man aus $\mathfrak{X}_0$ durch Streichen einer einzigen Spalte erhält.

Beispiele von solchen Matrizeneigenschaften sind:

a) Die *Höchstrangigkeit* E_1: Die Matrix $\mathfrak{X}_0$ mit m Zeilen und n Spalten heißt höchstrangig, wenn ihr Rang gleich dem Min (m, n) ist;

b) die *Nicht-Spaltengleichheit* E_2: Die Matrix $\mathfrak{X}_0$ heißt nichtspaltengleich, wenn nicht alle ihre Spalten einander gleich sind.

Ein Matrix $\mathfrak{X}$ mit der Eigenschaft E nenne ich kurz eine *E-Matrix*. Nun verschärfe ich den Begriff „konvexe Funktion" durch die *Definition:*

Die eindeutige Funktion $\Phi\,(x_1, \ldots, x_m)$ heißt *E-konvex bezüglich* $\{M_1, \ldots, M_m; N\}$, wenn 1. Φ bezüglich $\{M_1, \ldots, M_m; N\}$ konvex ist, und 2. für jede E-Matrix $\mathfrak{X}$ von Zahlen des Intervalls $a < x < b$ gilt:

$$\Phi\, M\, \mathfrak{X} < N\, \Phi\, \mathfrak{X}.$$

Nun beweisen wir den

Induktionssatz Ia. *Ist die eindeutige Funktion $\Phi\,(x_1, \ldots, x_m)$ E-konvex bezüglich $\{M_1, \ldots, M_m; N\}$, dann ist sie es auch bezüglich $\{M'_1, \ldots, M'_m; N'\}$, sofern N' streng monoton ist.*

Beweis. Wir setzen wieder (8) und (9) an, wobei jetzt $\mathfrak{Y}$ eine E-Matrix sein soll. Wie vorhin gilt:

$$\Phi\,(y^{(1)}_{1\nu}, \ldots, y^{(1)}_{m\nu}) \leqq z^{(1)}_{\nu}; \tag{11}$$

wesentlich ist, daß hier mindestens für ein ν das Kleinerzeichen steht (unter den spaltengekürzten Matrizen von $\mathfrak{Y}$ ist nämlich eine E-Matrix). Wir setzen:

$$y^{(1)}_{\mu\nu} = t_{\mu\nu};$$

dann ist nach dem Induktionssatz I, nach (11) und der strengen Monotonie von N':

$$\begin{aligned}&\Phi\left(M_1'(t_{11},\ldots,t_{1,n+1}),\ldots,M_m'(t_{m1},\ldots,t_{m,n+1})\right)\\ &\leqq N'\left(\Phi(t_{11},\ldots,t_{m1}),\ldots,\Phi(t_{1,n+1},\ldots,t_{m,n+1})\right)\\ &< N'\left(z_1^{(1)},\ldots,z_{n+1}^{(1)}\right).\end{aligned}$$

Benutzt man jetzt die charakteristische Funktionaleigenschaft des Erhöhungsalgorithmus, daß

$$\begin{aligned}M_\mu'\,(y_{\mu 1}^{(1)},\ldots,y_{\mu,n+1}^{(1)}) &= M_\mu'\,(y_{\mu 1}^{(0)},\ldots,y_{\mu,n+1}^{(0)}),\\ N'\,(z_1^{(1)},\ldots,z_{n+1}^{(1)}) &= N'\,(z_1^{(0)},\ldots,z_{n+1}^{(0)})\end{aligned}$$

ist, dann liefern die letzten vier Gleichungen zusammen mit (8) die Behauptung

$$\Phi\, M'\, \mathfrak{Y} < N'\, \Phi\, \mathfrak{Y}.$$

9. Spezialfall. Im Anschluß an das Beispiel (4) von **1.** betrachten wir noch den besonderen Fall, daß

$$M_1 = M_2 = \ldots = M_m = N,\ \Phi(x_1,\ldots,x_m) = L(x_1,\ldots,x_m)$$

ein Mittel im selben Intervall wie N ($a=\alpha$, $b=\beta$) ist. Ist L bezüglich $\{N,\ldots,N;N\}$ konvex, kurz *L gegen N konvex*, dann hat man

$$\begin{aligned}&L\left(N(x_{11},\ldots,x_{1n}),\ldots,N(x_{m1},\ldots,x_{mn})\right)\\ &\leqq N\left(L(x_{11},\ldots,x_{m1}),\ldots,L(x_{1n},\ldots,x_{mn})\right).\end{aligned}$$

Hier spielen L und N eine gleichartige Rolle; daher sind die Induktionssätze sowohl auf N als auch auf L anwendbar (man deutet die Ungleichung das eine Mal als Konvexität, das andere Mal als Konkavität). Wir haben demnach den

Induktionssatz II. *Ist L gegen N konvex, dann auch L gegen N' und L' gegen N.*

Als Verschärfung hiervon folgt aus I a (Die Eigenschaft E genüge jetzt auch hinsichtlich der Zeilenkürzung der Forderung 2. in **8.**; wir sagen statt „L ist E-konvex bezüglich $\{N,\ldots,N;N\}$“ kurz „L ist E-konvex gegen N“) der

Induktionssatz II a. *Ist L E-konvex gegen N, dann ist es auch L gegen N' und L' gegen N, soferne N' und L' streng monoton sind.*

10. Neue Beispiele. Zum letzten Induktionssatz gebe ich zwei Beispiele, die neu sein dürften. Die x seien positive Zahlen:

1. Die bekannte Ungleichung der Vektorrechnung

$$x_{11}\, x_{12} - x_{21}\, x_{22} \leqq \sqrt{x_{11}^2 + x_{21}^2}\, \sqrt{x_{12}^2 + x_{22}^2}$$

besagt, daß $L = \sqrt{\dfrac{x_1^2 + x_2^2}{2}}$ gegen $N = \sqrt{x_1\, x_2}$ konvex ist. Das Kleinerzeichen steht, wenn $x_{11}\, x_{22} - x_{21}\, x_{12} \neq 0$ ist, was in unserer Sprache heißt: L ist E_1-konvex gegen N. Hieraus ergibt sich mit Bezugnahme auf die Bemerkung in **7.** über die Obermittel durch wiederholte Anwendung von Satz IIa:

$$\begin{aligned}&(x_{11} \ldots x_{1n})^{\frac{2}{n}} + \ldots + (x_{m1} \ldots x_{mn})^{\frac{2}{n}}\\ &\leqq (x_{11}^2 + \ldots + x_{m1}^2)^{\frac{1}{n}} \ldots (x_{1n}^2 + \ldots + x_{mn}^2)^{\frac{1}{n}}\end{aligned}$$

mit dem Kleinerzeichen, wenn die Matrix $\mathfrak{X}$ höchstrangig ist.

2. Es ist $A = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$ E_1-konvex gegen $H = \dfrac{2\, x_1\, x_2}{x_1 + x_2}$; die fragliche Ungleichung läßt sich nämlich durch elementare Umformungen auf die Gestalt $0 \leqq (x_{11}\, x_{22} - x_{21}\, x_{12})^2$ bringen. Nach dem Abbildungssatz [6] haben die Obermittel des harmonischen Mittels $H = \dfrac{2}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}}$ die Form $\dfrac{n}{\frac{1}{x_1} + \ldots + \frac{1}{x_n}}$. Aus IIa folgt daher die Ungleichung:

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\frac{1}{x_{11}} + \ldots + \frac{1}{x_{1n}}} + \ldots + \frac{1}{\frac{1}{x_{m1}} + \ldots + \frac{1}{x_{mn}}}\\ &\leqq \frac{1}{\frac{1}{x_{11} + \ldots + x_{m1}} + \ldots + \frac{1}{x_{1n} + \ldots + x_{mn}}}\end{aligned}$$

mit dem Kleinerzeichen für jede höchstrangige Matrix $\mathfrak{X}$.

11. Schlußbemerkung. Es bedarf keiner besonderen Anstrengung, zu diesen neuen Beispielen weitere hinzuzuerfinden, zumal uns durch die Möglichkeit der Abbildung des arithmetischen Mittels eine unerschöpfliche Fülle von Mittelwerten an die Hand gegeben ist, von welchen wir auch wegen des schon öfter erwähnten Abbildungssatzes die Obermittel kennen.

Anders liegen die Verhältnisse, wenn Mittelwerte weniger einfacher Bauart vorliegen. Nimmt man etwa das Mittel $M(x_1, x_2) = \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1 + x_2}$, das z. B. für $1 \leqq x \leqq 2$ definiert ist, so findet man, daß das zugehörige Obermittel $M'(y_1, y_2, y_3)$ eine transzendente Funktion ist, von der man nicht viel mehr weiß, als daß sie existiert und der Funktionalgleichung

$$(12) \qquad M'(y_1, y_2, y_3) = M'\left(\frac{y_1^2 + y_2^2}{y_1 + y_2}, \frac{y_2^2 + y_3^2}{y_2 + y_3}, \frac{y_3^2 + y_1^2}{y_3 + y_1}\right) \text{ genügt.}$$ [7]

Mit der Bezeichnung von **8.** b) ist die Funktion $\Phi(x) = x$, wie man selbst leicht nachprüft, E_2-konvex bezüglich $\{H; M\}$ (siehe **9.**, 2. Beispiel), daher nach Satz I a auch bezüglich $\{H'; M'\}$, d. h. sofern nicht alle y einander gleich sind, gilt

$$H'(y_1, y_2, y_3) < M'(y_1, y_2, y_3).$$

Es ist klar, daß sich diese Ungleichung auf andere Weise als die hier auseinandergesetzten gar nicht beweisen läßt, da ja die

[7] In manchen Lehrbüchern, so z. B. in „Handbuch der mathematischen Statistik" von H. L. Rietz, (Leipzig 1930), S. 8, werden die Mittelwerte der Form

$$\frac{x_1^2 + \ldots + x_n^2}{x_1 + \ldots + x_n}$$

als kontraharmonisch bezeichnet und zu einer Familie zusammengefaßt. Im Rahmen unserer Theorie haben diese Mittelwerte wegen der Monotonieforderung (III) nur im Intervall $a \leqq x \leqq a(1 + \sqrt{2})$ $(a > 0)$ ihren guten Sinn, im übrigen aber miteinander wenig zu tun; jedenfalls ist $\frac{y_1^2 + y_2^2 + y_3^2}{y_1 + y_2 + y_3}$ nicht das Obermittel von $\frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1 + x_2}$.

transzendente Funktion $M'(y_1, y_2, y_3)$ erst durch die Gleichung (12), oder, was dasselbe ist, durch den Limes (A) des Erhöhungsalgorithmus definiert wird. In diesem Sinne zählen die Beispiele von **1.** und **9.** gewissermaßen zu den elementaren und erscheinen innerhalb des allgemeinen Funktionenbereichs, in dem sich die vorausgegangenen Untersuchungen bewegten, als jene Teilklasse, die sich besonders einfach behandeln läßt.

München, den 28. Juli 1933.