Sitzungsberichte

der

mathematisch-naturwissenschaftlichen Abteilung

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften
zu München

1933. Heft I
Januar-März-Sitzung

München 1933
Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften
in Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung

Über die Proportionalität der aus Punktkoordinaten und der aus Ebenenkoordinaten gebildeten Geradenkoordinaten.

Von Heinrich Tietze in München.

Vorgetragen in der Sitzung vom 4. März 1933.

Einleitung.

1. Genauer gesagt, handelt es sich um einen allgemeineren Proportionalitätssatz (Satz (B) von Nr. **3**), betreffend n Systeme von je n Zahlen ($x_1^{(i)}, \ldots, x_n^{(i)}$ für $1 \leqq i \leqq l$ und $u_1^{(h)}, \ldots, u_n^{(h)}$ für $1 \leqq h \leqq n-l$), von dem der geläufige Sonderfall $n = 4$, $l = 2$ die im Titel genannte Proportionalität liefert. Für diesen Satz wird ein Beweis mitgeteilt, der sich auf reine Identitäten zwischen Polynomen der als n^2 unabhängige Variable aufgefaßten $x_\nu^{(i)}$ und $u_\nu^{(h)}$ stützt. Das Bestehen der fraglichen Identitäten (Satz (A) von Nr. **3**) greift dabei insoferne über jenen Proportionalitätssatz hinaus, als — wie in Nr. **4** besprochen — der letztere aus jenen Identitäten folgt, aber nicht umgekehrt diese aus jenem.

2. Um etwa im eben angeführten Sonderfall $n = 4$, $l = 2$ den Sachverhalt zu skizzieren, so handelt es sich hier um die Größen

$$p_{\nu_1 \nu_2} = \begin{vmatrix} x'_{\nu_1}, & x'_{\nu_2} \\ x''_{\nu_1}, & x''_{\nu_2} \end{vmatrix}, \qquad q_{\nu_1 \nu_2} = \begin{vmatrix} u'_{\nu_1}, & u'_{\nu_2} \\ u''_{\nu_1}, & u''_{\nu_2} \end{vmatrix};$$

von diesen Größen gilt, — und darin spricht sich die erwähnte Proportionalität aus, — daß für jedes Wertsystem der $x_\nu^{(i)}$, $u_\nu^{(h)}$, für das alle vier „Inzidenzrelationen“

$$L_{ih} \equiv \sum_{\nu=1}^{4} x_\nu^{(i)} u_\nu^{(h)} = 0 \qquad (i, h = 1, 2)$$

bestehen, alle zweireihigen Determinanten der Matrix

$$(1) \qquad \begin{Vmatrix} p_{12}, & p_{13}, & p_{14}, & p_{34}, & p_{42}, & p_{23} \\ q_{34}, & q_{42}, & q_{23}, & q_{12}, & q_{13}, & q_{14} \end{Vmatrix}$$

null werden[1]. Es sind das Determinanten wie die folgenden — im Einklang mit der Bezeichnung (6) im allgemeinen Fall — mit $M(1 \mid 2 \mid 3 \mid 4)$ bzw. $M(\cdot \mid \cdot \mid 1, 2 \mid 3, 4)$ bezeichneten

$$M(1 \mid 2 \mid 3 \mid 4) = p_{13}\, q_{23} + p_{14}\, q_{24} = p_{13}\, q_{23} - p_{14}\, q_{42},$$
$$M(\cdot \mid \cdot \mid 1, 2 \mid 3, 4) = p_{12}\, q_{12} - p_{34}\, q_{34},$$

nebst den durch Permutation der Indizes 1, 2, 3, 4 daraus hervorgehenden. Im folgenden wird dann bewiesen, daß jede dieser Determinanten M, aufgefaßt als Polynom in den unabhängigen Variablen $x_\nu^{(i)}$, $u_\nu^{(h)}$, sich durch die Polynome L_{ih} mittels geeigneter Polynome A_{ih} in der Gestalt

$$M = \sum_{i, h = 1}^{2} A_{ih}\, L_{ih}$$

darstellen läßt (vgl. Nr. 3, Satz (A), sowie Nr. 11, 12).

Analoges gilt dann im allgemeinen Fall beliebiger n und l (wo $n \geqq 2$, $1 \leqq l \leqq n-1$) für die aus den Größen

$$p_{\nu_1, \ldots, \nu_l} = \left| x_{\nu_1}^{(i)}, \ldots, x_{\nu_l}^{(i)} \right| \quad (i = 1, \ldots, l) \tag{2}$$

$$q_{\nu_1, \ldots, \nu_{n-l}} = \left| u_{\nu_1}^{(h)}, \ldots, u_{\nu_{n-l}}^{(h)} \right| \quad (h = 1, \ldots, n-l) \tag{3}$$

gebildeten zweireihigen Determinanten M (vgl. Nr. 3): wie im Sonderfall gehören sie dem Polynomideal an, das innerhalb des Ringes aller Polynome in den $x_\nu^{(i)}$, $u_\nu^{(h)}$ (mit beliebigen komplexen Koeffizienten[2]) durch die Polynome

$$L_{ih} = \sum_{\nu=1}^{n} x_\nu^{(i)}\, u_\nu^{(h)} \tag{4}$$

erzeugt wird.

---

[1] Nur wenn weder alle p noch alle q null sind, soll von einer Proportionalität der p zu den q gesprochen werden und nur dann hat man es mit Geradenkoordinaten zu tun. Das Verschwinden aller zweireihigen Determinanten der Matrix (1) gilt aber (in trivialer Weise), auch wenn diese Einschränkung nicht erfüllt ist.

[2] Vgl. übrigens Anm. 3.

Gesprächsweise Bemerkungen der Herren Herglotz und Perron, die im folgenden verwertet wurden, werden an ihrer Stelle erwähnt.

Über andere Beweise des Proportionalitätssatzes vgl. Nr. 5.

§ 1. Formulierung der Behauptung.

3. Es möge jede der beiden Zahlenfolgen $\varkappa_1, \ldots, \varkappa_n$ und $\nu_1, \ldots, \nu_n$ eine gerade (oder auch jede eine ungerade) Permutation der Zahlen $1, \ldots, n$ darstellen. Wir bilden für die durch (2), (3) erklärten Größen p, q die Determinante

$$(5) \qquad M = \begin{vmatrix} p_{\varkappa_1 \ldots \varkappa_l}, & p_{\nu_1 \ldots \nu_l} \\ q_{\varkappa_{l+1} \ldots \varkappa_n}, & q_{\nu_{l+1} \ldots \nu_n} \end{vmatrix}.$$

Nehmen wir an, daß die Zahlensysteme $(\varkappa_1, \ldots, \varkappa_l)$ und $(\nu_1, \ldots, \nu_l)$ genau $l-s$ gemeinsame Zahlen aufweisen. Behalten wir uns dann vor, jedes der vier Zahlensysteme $(\varkappa_1, \ldots, \varkappa_l)$, $(\varkappa_{l+1}, \ldots, \varkappa_n)$, $(\nu_1, \ldots, \nu_l)$, $(\nu_{l+1}, \ldots, \nu_n)$ so umzuordnen, daß nachher $(\varkappa_1, \ldots, \varkappa_n)$ und $(\nu_1, \ldots, \nu_n)$ wieder beide eine gerade oder beide eine ungerade Permutation der Zahlen $1, \ldots, n$ darstellen, so können wir bei geeigneter Anordnung setzen: $(\varkappa_1, \ldots, \varkappa_l) = (\lambda_1, \ldots, \lambda_{l-s}, \alpha_1, \ldots, \alpha_s)$, $(\nu_1, \ldots, \nu_l) = (\lambda_1, \ldots, \lambda_{l-s}, \varrho_1, \ldots, \varrho_s)$, wobei $(\lambda_1, \ldots, \lambda_{l-s}, \alpha_1, \ldots, \alpha_s, \varrho_1, \ldots, \varrho_s)$ ein System von $l+s$ verschiedenen Zahlen aus $1, \ldots, n$ bedeutet. Sind $\mu_1, \ldots, \mu_{n-l-s}$ die noch übrigen $n-l-s$ Zahlen und ist $(\nu_{l+1}, \ldots, \nu_n) = (\mu_1, \ldots, \mu_{n-l-s}, \alpha_1, \ldots, \alpha_s)$, so ist $(\varkappa_{l+1}, \ldots, \varkappa_n)$ bis auf die Anordnung gleich $(\mu_1, \ldots, \mu_{n-l-s}, \varrho_1, \ldots, \varrho_s)$. Da nun die Anordnung $(\lambda_1, \ldots, \lambda_{l-s}, \alpha_1, \ldots, \alpha_s, \mu_1, \ldots, \mu_{n-l-s}, \varrho_1, \ldots, \varrho_s)$ aus $(\lambda_1, \ldots, \lambda_{l-s}, \varrho_1, \ldots, \varrho_s, \mu_1, \ldots, \mu_{n-l-s}, \alpha_1, \ldots, \alpha_s)$ durch s Vertauschungen je zweier Elemente hervorgeht, so läßt sich die Determinante (5) in der Gestalt schreiben:

$$(6) \qquad \begin{aligned} M &= M(\lambda_1, \ldots, \lambda_{l-s} \,|\, \mu_1, \ldots, \mu_{n-l-s} \,|\, \alpha_1, \ldots, \alpha_s \,|\, \varrho_1, \ldots, \varrho_s) = \\ &= p_{\lambda_1, \ldots, \lambda_{l-s}, \alpha_1, \ldots, \alpha_s}\, q_{\mu_1, \ldots, \mu_{n-l-s}, \alpha_1, \ldots, \alpha_s} + \\ &\quad + (-1)^{s+1}\, p_{\lambda_1, \ldots, \lambda_{l-s}, \varrho_1, \ldots, \varrho_s}\, q_{\mu_1, \ldots, \mu_{n-l-s}, \varrho_1, \ldots, \varrho_s}. \end{aligned}$$

Für s kommen nur Werte in Betracht, die $\leqq l$ und $\leqq n-l$ sind, wobei (da für $s=0$ sich M identisch null ergibt) $s \geqq 1$ sei.

Der in § 2 bewiesene Satz lautet dann:

Satz (A): Jede in der unter (6) angegebenen Weise gebildete Determinante M (oder was dasselbe ist, jede Determinante (5)), aufgefaßt als Polynom in den n^2 unabhängigen Veränderlichen $x_\nu^{(i)}$, $u_\nu^{(h)}$, ist darstellbar in der Gestalt

(7) $$M = \sum_{i=1}^{l} \sum_{h=1}^{n-l} A_{ih} L_{ih},$$

wobei

$$L_{ih} = \sum_{\nu=1}^{n} x_\nu^{(i)} u_\nu^{(h)}$$

und die A_{ih} geeignet wählbare Polynome in den $x_\nu^{(i)}$, $u_\nu^{(h)}$ sind[3].

Eine unmittelbare Folge des Satzes (A) ist dann der — hiemit auf eine neue Weise bewiesene —

Satz (B): Bedeuten $x_\nu^{(i)}$, $u_\nu^{(h)}$ solche (reelle oder imaginäre) Zahlen, für welche alle „Inzidenzrelationen"

(8) $$L_{ih} \equiv \sum_{\nu=1}^{n} x_\nu^{(i)} u_\nu^{(h)} = 0 \quad (1 \leqq i \leqq l, \; 1 \leqq h \leqq n-l)$$

erfüllt sind, dann haben für die aus den $x_\nu^{(i)}$, $u_\nu^{(h)}$ gemäß (2), (3) gebildeten p, q sämtliche der oben erklärten Determinanten M den Wert null: in der zweizeiligen Matrix, in der in einer Zeile alle $\binom{n}{l}$ Größen p, in der zweiten Zeile die in geeignete Reihen-

[3] Da sowohl alle M als alle L_{ih} Polynome in den $x_\nu^{(i)}$, $u_\nu^{(h)}$ mit rationalen (sogar speziell ganzen rationalen) Koeffizienten sind, so ist, wenn überhaupt eine Darstellung (7) besteht, leicht zu sehen, daß auch eine solche bestehen muß, in der die A_{ih} ebenfalls lauter rationale Koeffizienten haben, daß also (vgl. den Text bei Anm. 2) jedes M innerhalb des Ringes aller rationalzahligen Polynome dem aus den L_{ih} erzeugten Polynomideal angehört. Tatsächlich wird (vgl. Nr. 8, Satz A*) eine Darstellung mit rationalzahligen A_{ih} aufgestellt werden. Die Frage, ob auch stets eine solche Darstellung mit ganzzahligen A_{ih} besteht, wird hier nicht weiter verfolgt (vgl. übrigens Anm. 15).

folge gebrachten Größen q stehen, sind alle zweireihigen Determinanten null[4].

4. Sei jedoch bemerkt[5], daß umgekehrt aus der Gültigkeit des (durch andere Beweise längst festgestellten) Satzes (B) nicht der Satz (A), sondern — und zwar unter Berufung auf den Hilbert'schen Nullstellensatz — nur soviel erschlossen werden kann, daß eine geeignete Potenz M^k eines jeden M dem durch die Polynome L_{ih} erzeugten Ideal angehört, d. h. daß Gleichungen wie (7) für M^k anstelle von M bestehen müssen. Da mir aber Gleichungen (7) für die erste Potenz von M in gewissen Sonderfällen aus einer gelegentlichen mündlichen Bemerkung von Herrn Herglotz bekannt waren (vgl. Nr. **7**) und sich auch in anderen Einzelfällen aufstellen ließen, so lag es nahe, die Existenz analoger Gleichungen allgemein zu vermuten.

Über Nicht-Eindeutigkeit der A_{ih} für gegebene L_{ih} und gegebenes M vgl. Nr. **12**.

5. Was den üblichsten Beweis des Proportionalitätssatzes (B) anlangt, so wird er unter der zulässigen Voraussetzung, daß die Matrix $\Xi = \| x_1^{(i)}, \ldots, x_n^{(i)} \|$ (für $1 \leq i \leq l$) den Rang l hat (da andernfalls alle p null, die Gleichungen $M = 0$ also eo ipso erfüllt sind) — und zwar unter Heranziehung der Lehre von den Lösungen homogener linearer Gleichungssysteme und eines Determinantensatzes von Jacobi — sehr einfach so erbracht: durch Hinzunahme geeigneter weiterer $n-l$ Zeilen wird Ξ ergänzt zu einer quadratischen Matrix $\| x_\nu^{(i)} \|$ von n^2 Elementen mit einer Determinante $X \neq 0$; die zu den Elementen der letzten $n-l$ Zeilen gehörigen Adjunkten $X_\nu^{(l+h)}$ $(h = 1, \ldots, n-l)$, die eine Matrix vom Rang $n-l$ bilden, erfüllen dann, für die $u_\nu^{(h)}$ genommen, die Inzidenzrelationen $\Sigma\, x_\nu^{(i)}\, u_\nu^{(h)} = 0$ $(i = 1, \ldots, l)$;

[4] Sind also weder alle p noch alle q null, so besteht für die p und q Proportionalität (vgl. Anm. 1).

[5] Die folgende Bemerkung geht auf ein Gespräch mit Herrn Perron zurück. Auf dessen Lehrbuch der Algebra, 1. Bd., 2. Aufl. (1932), kann bezüglich des Hilbert'schen Nullstellensatzes verwiesen werden (l. c., p. 273).

die Größen $q_{\nu_{l+1}\ldots\nu_n}$, die man somit berechnen kann, indem man in (3) die $u_\nu^{(h)}$ gleich $X_\nu^{(l+h)}$ setzt, ergeben sich dann zu[6]

$$q_{\nu_{l+1}\ldots\nu_n} = (\varepsilon X)^{n-i-1}\, p_{\nu_1\ldots\nu_l},$$

wobei $\varepsilon = +1$ oder $= -1$ ist, je nachdem $(\nu_1, \ldots, \nu_n)$ eine gerade oder ungerade Permutation von $1, \ldots, n$ ist. Ersichtlich folgt hieraus das Verschwinden aller Determinanten (5), d. h. die Behauptung. — Der folgende Beweis für die Proportionalität der p zu den q benützt weder den Determinantensatz Jacobi's noch die Lehre von den Lösungen linearer Gleichungssysteme.[7]

§ 2. Beweis von Satz (A).

6. Es mögen $\lambda_1, \ldots, \mu_1, \ldots, \alpha_1, \ldots, \rho_1, \ldots$ eine bestimmte Anordnung der Zahlen $1, \ldots, n$, wie in Nr. **3** erklärt, bedeuten. Im folgenden verwenden wir dann noch gewisse $(l-1)$-reihige Determinanten aus der Matrix der $x_\nu^{(i)}$, nämlich

$$P^{(i)}_{\nu_1,\ldots,\nu_{s-1}} = \left| x^{(j)}_{\lambda_1}, \ldots, x^{(j)}_{\lambda_{l-s}}, x^{(j)}_{\nu_1}, \ldots, x^{(j)}_{\nu_{s-1}} \right| \quad (1 \leqq j \leqq l,\ j \neq i),$$

wobei also der Zeilenindex j alle von i verschiedenen Zahlen der Reihe $1, \ldots, l$ durchlaufe.[8] Analog verwenden wir aus der Matrix der $u_\nu^{(h)}$ die $(n-l-1)$-reihigen Determinanten

$$Q^{(h)}_{\nu_1,\ldots,\nu_{s-1}} = \left| u^{(k)}_{\mu_1}, \ldots, u^{(k)}_{\mu_{n-l-s}}, u^{(k)}_{\nu_1}, \ldots, u^{(k)}_{\nu_{s-1}} \right| \quad (1 \leqq k \leqq n-l,\ k \neq h).$$

[6] Vgl. Jacobi, Crelle's Journal f. Math. 22 (1841), p. 304, § 11, Formel 12 = Werke, Bd. III, p. 377.

[7] Einen Beweis des Proportionalitätssatzes, der ohne den Determinantensatz auskommt und nur die Lehre von den Lösungen linearer Gleichungssysteme heranzieht, findet man bei E. Bertini, Geometria proiettiva degli iperspazi (1907), Cap. 2, No. 15, unter Beschränkung auf den Fall, daß alle p und alle q von null verschieden sind. (Vgl. übrigens in der deutschen Ausgabe von A. Duschek [1924], p. 40, den zwecks Erledigung der übrigen Fälle beigefügten Grenzübergang.)

[8] Im Falle $s = 1$ treten hiebei keine Indizes ν auf; im Falle $l = s = 1$ ist unter $P^{(i)}$ die Zahl 1 zu verstehen, analog auch unter $Q^{(h)}$ (vgl. die Erklärung der $Q^{(h)}_{\nu_1,\ldots,\nu_{s-1}}$ weiter unten) im Falle $n - l = s = 1$.

Dann gilt

$$p_{\lambda_1,\ldots,\lambda_{l-s},\nu_1,\ldots,\nu_s} = \sum_{i=1}^{l} (-1)^{l+i} P^{(i)}_{\nu_1,\ldots,\nu_{s-1}} x^{(i)}_{\nu_s}$$

$$q_{\mu_1,\ldots,\mu_{n-l-s},\nu_1,\ldots,\nu_s} = \sum_{h=1}^{n-l} (-1)^{n-l+h} Q^{(h)}_{\nu_1,\ldots,\nu_{s-1}} u^{(h)}_{\nu_s}.$$

7. Sei zunächst $s = 1$. Multipliziert man dann die Gleichungen (4) mit[9] $(-1)^{l+i} P^{(i)}$ und mit $(-1)^{n-l+h} Q^{(h)}$ und summiert über alle i und h, so erhält man

$$\sum_{i=1}^{l} \sum_{h=1}^{n-l} (-1)^{n+i+h} P^{(i)} Q^{(h)} L_{ih} =$$

$$= \sum_{\nu=1}^{n} \sum_{i=1}^{l} (-1)^{l+i} P^{(i)} x^{(i)}_{\nu} \sum_{h=1}^{n-l} (-1)^{n-l+h} Q^{(h)} u^{(h)}_{\nu} =$$

$$= \sum_{\nu=1}^{n} p_{\lambda_1,\ldots,\lambda_{l-1},\nu}\, q_{\mu_1,\ldots,\mu_{n-l-1},\nu};$$

und wenn man mit α_1, ρ_1 die zwei Zahlen bezeichnet, die weder einem λ noch einem μ gleich sind, so ist das gleich $M(\lambda_1,\ldots,\lambda_{l-1} \mid \mu_1,\ldots,\mu_{n-l-1} \mid \alpha_1 \mid \rho_1)$, da offenbar in der Summe alle Summanden $\nu \neq \alpha_1, \rho_1$ verschwinden. Damit hat man die Identität

$$M(\lambda_1,\ldots,\lambda_{l-1} \mid \mu_1,\ldots,\mu_{n-l-1} \mid \alpha_1 \mid \rho_1) = \tag{9}$$
$$= \sum_{i=1}^{l} \sum_{h=1}^{n-l} (-1)^{n+i+h} P^{(i)} Q^{(h)} L_{ih}$$

die ich einer bereits erwähnten Bemerkung von Herrn Herlotz entnehme.

8. Für beliebiges[10] s behaupten wir:

---

[9] Vgl. bezüglich $P^{(i)}$, $Q^{(h)}$ Anm. 8.

[10] Im folgenden werde $s > 1$ angenommen; für $s = 1$ geht (10) in (9) über, wenn $b_{\nu_1\ldots\nu_{s-1}} = b$ im Einklang mit (11) gleich 1 gesetzt wird.

Bezüglich der Notwendigkeit, außer $s = 1$ auch $s > 1$ in Betracht zu ziehen, sei folgendes bemerkt: Aus dem Bestehen von Gleichungen (7) für die

Satz (A*). Die Relationen (7) sind erfüllt, wenn wir

$$(10)\qquad A_{ih} = (-1)^{n+i+h} \sum_{\nu_1, \ldots, \nu_{s-1} = 1}^{n} b_{\nu_1 \ldots \nu_{s-1}} P^{(i)}_{\nu_1 \ldots \nu_{s-1}} Q^{(h)}_{\nu_1 \ldots \nu_{s-1}}$$

setzen, wobei die Zahlenkoeffizienten $b_{\nu_1 \ldots \nu_{s-1}}$ folgendermaßen bestimmt seien: es sei $b_{\nu_1 \ldots \nu_{s-1}} \neq 0$ nur für solche $\nu_1, \ldots, \nu_{s-1}$, welche $s-1$ verschiedene Zahlen aus den Zahlen $\alpha_1, \ldots, \alpha_s, \rho_1, \ldots, \rho_s$ darstellen; und zwar sei

$$(11)\qquad b_{\nu_1 \ldots \nu_{s-1}} = \frac{c^{(t)}}{(s-1)!} = \frac{1}{(s-1)!} (-1)^t \frac{t!\,(s-t-1)!}{s!},$$

wenn sich unter den Zahlen $\nu_1, \ldots, \nu_{s-1}$ genau t Zahlen aus $\rho_1, \ldots, \rho_s$, also genau $s-1-t$ Zahlen aus $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ befinden. Die durch (11) definierten Zahlen $c^{(t)}$ lassen sich auch kennzeichnen als Lösung des Gleichungssystems

$$(12)\qquad \left\{\begin{array}{ll} s\,c^{(0)} = 1 & \\ t\,c^{(t-1)} + (s-t)\,c^{(t)} = 0 & (1 \leqq t \leqq s-1) \\ s\,c^{(s-1)} = (-1)^{s-1} & \end{array}\right\}$$

---

dem Fall $s = 1$ entsprechenden (in Nr. 7 betrachteten) Größen M folgt natürlich noch nicht das Bestehen derartiger Gleichungen auch für die anderen Größen M, die einem $s > 1$ entsprechen. — Analog sieht man, was den Beweis des Proportionalitätssatzes (B) anlangt: Wenn man für die Größen p und q nur weiß, daß die für $s = 1$ gebildeten (in Nr. 7 betrachteten) Größen M sämtlich null sind, so folgt daraus noch nicht das Verschwinden aller Größen M; das erkennt man etwa im Falle $n = 4$, $l = 2$ der gewöhnlichen Geradenkoordinaten des dreidimensionalen Raumes, wenn man die Matrizen der $x^{(i)}_\nu$ und die der $u^{(h)}_\nu$ beide gleich $\left\| \begin{matrix} 1, 0, 0, 0 \\ 0, 1, 0, 0 \end{matrix} \right\|$ wählt, sodaß außer p_{12} und q_{12} alle p und q verschwinden; dann verschwinden mit Ausnahme der in Nr. 2 genannten (dem Falle $s = 2$ zugehörigen) Größe $M(\,.\,|\,.\,|\,1, 2\,|\,3, 4) = p_{12}\,q_{12} - p_{34}\,q_{34}$ alle anderen Größen M, insbesondere alle mit $s = 1$. — Analog erkennt man allgemein für $n > 2$ (sodaß mehr als eine Größe M vorhanden ist), daß das Verschwinden einer Größe M nicht aus dem aller übrigen M folgt: Man braucht die $x^{(i)}_\nu$ und $u^{(h)}_\nu$ nur so zu wählen, daß $p_{\lambda_1 \ldots \lambda_{l-s} \alpha_1 \ldots \alpha_s} = 1$, $q_{\mu_1 \ldots \mu_{n-l-s} \alpha_1 \ldots \alpha_s} = 1$, alle übrigen p und q aber null werden, so wird $M(\lambda_1 \ldots \lambda_{l-s} \,|\, \mu_1 \ldots \mu_{n-l-s} \,|\, \alpha_1 \ldots \alpha_s \,|\, \rho_1 \ldots \rho_s) = 1$, während alle übrigen M null werden.

9. Wir wollen nun Satz (A*) beweisen. Zunächst sei bemerkt, daß in der Summe auf der rechten Seite von (10) alle jene Summanden untereinander gleich sind, die sich nur in der Anordnung der Indizes $\nu_1, \ldots, \nu_{s-1}$ unterscheiden. Wenn wir dementsprechend je $(s-1)!$ untereinander gleiche Summanden zusammenfassen, können wir (10) auch schreiben:

$$A_{ih} = (-1)^{n+i+h} \sum_{[\nu]} c^{(t)} P^{(i)}_{\nu_1 \ldots \nu_{s-1}} Q^{(h)}_{\nu_1 \ldots \nu_{s-1}},$$

die Summe erstreckt über alle voneinander verschiedenen Kombinationen $\nu_1, \ldots, \nu_{s-1}$ von $s-1$ Zahlen, ausgewählt aus $\alpha_1, \ldots, \alpha_s, \rho_1, \ldots \rho_s$, — hiebei unter t, wie oben, die Anzahl der unter ihnen befindlichen Zahlen ρ verstanden. Setzt man diese Polynome A_{ih} in die rechte Seite von (7) ein, so ergibt sich

$$S = \sum_{[\nu]} \sum_{\nu_s=1}^{n} c^{(t)} \sum_{i=1}^{l} (-1)^{l+i} P^{(i)}_{\nu_1 \ldots \nu_{s-1}} x^{(i)}_{\nu_s} \sum_{h=1}^{n-l} (-1)^{n-l+h} Q^{(h)}_{\nu_1 \ldots \nu_{s-1}} u^{(h)}_{\nu_s} =$$

$$= \sum_{[\nu]} \sum_{\nu_s=1}^{n} c^{(t)} p_{\lambda_1 \ldots \lambda_{l-s} \nu_1 \ldots \nu_s} q_{\mu_1 \ldots \mu_{n-l-s} \nu_1 \ldots \nu_s}$$

Von dieser Summe ist zu zeigen, daß sie gleich

$$M(\lambda_1, \ldots, \lambda_{l-s} \,|\, \mu_1, \ldots, \mu_{n-l-s} \,|\, \alpha_1, \ldots, \alpha_s \,|\, \rho_1, \ldots, \rho_s)$$

ist. Da nun von der inneren Summe $\sum\limits_{\nu_s=1}^{n}$ alle jene Summanden verschwinden, in denen ν_s gleich einem λ, gleich einem μ, oder gleich einer der Zahlen $\nu_1, \ldots, \nu_{s-1}$ ist, so können wir, wenn zur Abkürzung $p_{\lambda_1 \ldots \lambda_{l-s} \nu_1 \ldots \nu_s} q_{\mu_1 \ldots \mu_{n-l-s} \nu_1 \ldots \nu_s} = r_{\nu_1 \ldots \nu_s}$ gesetzt wird, dafür auch schreiben:

$$S = \sum_{(\nu)} c^{(t)} r_{\nu_1 \ldots \nu_s}, \tag{13}$$

die Summe erstreckt über alle möglichen Arten, wie man s verschiedene Zahlen $\nu_1, \ldots, \nu_s$ aus $\alpha_1, \ldots, \alpha_s, \rho_1, \ldots, \rho_s$ auswählen und unter ihnen eine als letzte, ν_s, auszeichnen kann (während es auf die Anordnung der übrigen nicht ankommt). Die Größen $r_{\nu_1 \ldots \nu_s}$ sind von der Anordnung der Indizes völlig unabhängig.

Dieselbe Größe $r_{\varkappa_1 \ldots \varkappa_s}$ kommt nun in (13) in s Summanden vor, die sich dadurch unterscheiden, daß immer wieder ein anderer Index $\varkappa$ als letzter Summationsindex ν_s ausgezeichnet ist. Sind nun genau t^* der Indizes $\varkappa_1, \ldots, \varkappa_s$ gleich einem ρ, die übrigen $s - t^*$ gleich einem α und ist $1 \leqq t^* \leqq s - 1$, so werden sich unter den genannten s Summanden, die $r_{\varkappa_1 \ldots \varkappa_s}$ enthalten, genau t^* finden, wo ν_s gleich einem ρ und somit unter $\nu_1 \ldots \nu_{s-1}$ nur $t^* - 1$ Zahlen ρ sich finden, $c^{(t)}$ also $= c^{(t^* - 1)}$ ist; und es werden sich genau $s - t^*$ solche Summanden finden, wo ν_s gleich einem α, also $c^{(t)} = c^{(t^*)}$ ist. Im ganzen hat $r_{\varkappa_1 \ldots \varkappa_s}$ in der Summe (13) also den Koeffizienten (vgl. (12))

$$t^* c^{(t^* - 1)} + (s - t^*) c^{(t^*)} = 0.$$

Ist jedoch $t^* = 0$, sind also die Indizes $\varkappa_1, \ldots, \varkappa_s$ lauter Zahlen α, so ist für alle s Summanden, die $r_{\varkappa_1 \ldots \varkappa_s} = r_{\alpha_1 \ldots \alpha_s}$ enthalten, $c^{(t)} = c^{(0)} = \frac{1}{s}$, ihre Summe also gleich $r_{\alpha_1 \ldots \alpha_s}$. Ist schließlich $t^* = s$, sind die Indizes $\varkappa_1, \ldots, \varkappa_s$ also lauter Zahlen ρ, so ist für alle s Summanden, die $r_{\varrho_1 \ldots \varrho_s}$ enthalten, $c^{(t)} = c^{(s-1)} = \frac{(-1)^{s-1}}{s}$, ihre Summe also gleich $(-1)^{s-1} r_{\varrho_1 \ldots \varrho_s}$. Sonach hat die Summe S aus (13) den Wert

$$S = r_{\alpha_1 \ldots \alpha_s} + (-1)^{s-1} r_{\varrho_1 \ldots \varrho_s}$$

und das ist gleich der Größe M aus (6), was zu beweisen war.

10. Bekanntlich gilt auch die Umkehrung von Satz (B), welche lautet:

Satz (C). Erfüllen die aus den $x_\nu^{(i)}$, $u_\nu^{(h)}$ gemäß (2), (3) gebildeten Größen p und q alle Gleichungen $M = 0$ (wo M durch (6) erklärt ist), und sind weder alle p noch alle q null, dann bestehen sämtliche Gleichungen (8).

Der Vollständigkeit wegen sei auch hiefür der Beweis beigefügt. Hiezu sei vorweg bemerkt: Während, wie wir gesehen haben, die Größen M dem aus allen L_{ih} erzeugten Polynomideal angehören, gehört für $n > 2$ kein L_{ih} dem aus den Polynomen M

erzeugten Ideal an[11]; denn daß ein L_{ih} (oder eine Potenz davon) nicht als eine lineare Verbindung $\Sigma\, B\, M$ der M mit Polynomen B als Koeffizienten darstellbar ist, erhellt schon daraus, daß (für $n > 2$) es mindestens einen Punkt oder mindestens eine Ebene gibt, sodaß die Koordinaten dieses Punktes, bzw. dieser Ebene nicht in L_{ih} vorkommen, wohl aber linear homogen in jedem M. Tatsächlich gibt es ja für $n > 2$ auch immer Wertsysteme der $x_\nu^{(i)}$, $u_\nu^{(h)}$, für welche nicht alle L_{ih} verschwinden (sogar solche, wo alle $L_{ih} \neq 0$ sind), wohl aber alle M (und entweder alle p, oder alle q oder alle p und q).

Beweis von Satz (C): Das Wesentliche ist, daß die (nach Voraussetzung nicht sämtlich verschwindenden) Größen p den linearen Teilraum l-ter Stufe[12] $X^{(l)}$, dessen Punkte in der Gestalt

$$x_\nu = c'\, x'_\nu + \ldots + c^{(l)}\, x_\nu^{(l)} \quad (\nu = 1, \ldots, n) \tag{14}$$

darstellbar sind, eindeutig bestimmen; denn die Darstellbarkeit eines Punktes (x) in der Gestalt (14) ist gleichbedeutend damit, daß die Matrix $\mathsf{A} = \| x'_\nu, \ldots, x_\nu^{(l)}, x_\nu \|_{\nu = 1, \ldots, n}$ den gleichen Rang l hat, wie (nach Voraussetzung) die Matrix $\| x'_\nu, \ldots, x_\nu^{(l)} \|$; das Nullsetzen aller $(l+1)$-reihigen Determinanten von A liefert aber ein Gleichungssystem Γ für die x_ν, dessen Koeffizienten nur durch die Größen p bestimmt sind[13]. Analog kenn-

[11] Aus dem Hilbert'schen Nullstellensatz (vgl. Anm. 5) bzw. dem aus ihm unmittelbar folgenden Korollar:

„Wenn an allen Stellen (= Wertsystemen der betrachteten unabhängigen Variablen), wo das Polynom H nicht null ist und die Polynome $F_1, \ldots, F_m$ verschwinden, stets auch das Polynom G verschwindet, dann ist GH oder eine Potenz $(GH)^k$ in der Gestalt $\Sigma\, A_\nu F_\nu$ mit Polynomen A_ν darstellbar" läßt sich jedoch schließen (wenn Satz C bereits anderweitig als bewiesen angenommen wird), daß für jedes p und jedes q, wie man es aus der Gesamtheit aller p bzw. q auswählen mag, $p\, q\, L_{ih}$ oder eine Potenz davon dem aus den Polynomen M erzeugten Polynomideal angehört. Doch wird der Aufsuchung entsprechender Darstellungen der $p\, q\, L_{ih}$ durch die M hier nicht weiter nachgegangen.

[12] „Stufe" im Sinne Graßmann's (vgl. E. Study, Geometrie der Dynamen, (1903) p. 310) = Anzahl der (durch keine Relation verbundenen) homogenen Koordinaten.

[13] Daß Γ ein Lösungssystem in den x_ν vom Rang l hat, ist dabei schon klar; auf zwischen den p bestehende Relationen (wie $p_{12}\, p_{34} + p_{13}\, p_{42} + p_{14}$

zeichnen die (nach Voraussetzung nicht sämtlich verschwindenden) Größen q den linearen Ebenenraum $(n-l)$-ter Stufe $U^{(n-l)}$, dessen Ebenen durch

$$u_\nu = \gamma' u'_\nu + \ldots + \gamma^{(n-l)} u_\nu^{(n-l)}$$

gegeben sind. Nun kann man aber den zu $X^{(l)}$ zugehörigen Ebenenraum $\overline{U}^{(n-l)}$ bilden, dessen Ebenen $\bar{u}_1 : \ldots : \bar{u}_n$ durch das Gleichungssystem $\sum_{\nu=1}^{n} x_\nu^{(i)} \bar{u}_\nu = 0$ bestimmt sind; berechnet man aus $n-l$ unabhängigen Ebenen von $\overline{U}^{(n-l)}$ die zugehörigen Größen $\bar{q}_{\nu_1 \ldots \nu_{n-l}}$, so sind sie den zu $X^{(l)}$ gehörigen Größen $p_{\nu_1 \ldots \nu_l}$ (in geeigneter Reihenfolge) proportional und da ihnen, wegen der Gleichungen $M = 0$ auch die Größen $q_{\nu_1 \ldots \nu_{n-l}}$ proportional sind, so sind die $\bar{q}_{\nu_1 \ldots \nu_{n-l}}$ und $q_{\nu_1 \ldots \nu_{n-l}}$ einander proportional, $U^{(n-l)}$ und $\overline{U}^{(n-l)}$ fallen also zusammen, d. h. es gelten die Gleichungen (8).

§ 3. Geradenkoordinaten des dreidimensionalen Raumes.

11. Im besonderen Fall $n = 4$, $l = 2$ der Geradenkoordinaten des dreidimensionalen projektiven Raumes sehen die in Nr. **7** und **8** gegebenen Identitäten, aus denen die Proportionalität der beiden Arten von Geradenkoordinaten geschlossen werden kann, so aus (wobei wir für $s = 1$ den Fall $\lambda_1 = 1$, $\mu_1 = 2$, $\alpha_1 = 3$, $\rho_1 = 4$ und für $s = 2$ den Fall $\alpha_1 = 1$, $\alpha_1 = 2$, $\rho_1 = 3$, $\rho_2 = 4$ herausgreifen):

$$(15) \qquad p_{13} q_{23} + p_{14} q_{24} = x_1'' u_2'' \sum_{\nu=1}^{4} x'_\nu u'_\nu - x_1'' u'_2 \sum_{\nu=1}^{4} x'_\nu u''_\nu -$$

$$- x'_1 u''_2 \sum_{\nu=1}^{4} x''_\nu u'_\nu + x'_1 u'_2 \sum_{\nu=1}^{4} x''_\nu u''_\nu,$$

$p_{23} = 0$ bei den Geradenkoordinaten des $x_1 : x_2 : x_3 : x_4$ Raumes) braucht also gar nicht zurückgegriffen zu werden, um zu sehen, daß die aus den p gebildete Koeffizientenmatrix von Γ den Rang $n-l$ hat.

$$(16)\quad p_{12}\,q_{12}-p_{34}\,q_{34}=\frac{1}{2}\left(\sum_{\alpha=1}^{2}x''_\alpha\,u''_\alpha-\sum_{\varrho=3}^{4}x''_\varrho\,u''_\varrho\right)\sum_{\nu=1}^{4}x'_\nu\,u'_\nu-$$
$$-\frac{1}{2}\left(\sum_{\alpha=1}^{2}x''_\alpha\,u'_\alpha-\sum_{\varrho=3}^{4}x''_\varrho\,u'_\varrho\right)\sum_{\nu=1}^{4}x'_\nu\,u''_\nu-$$
$$-\frac{1}{2}\left(\sum_{\alpha=1}^{2}x'_\alpha\,u''_\alpha-\sum_{\varrho=3}^{4}x'_\varrho\,u''_\varrho\right)\sum_{\nu=1}^{4}x''_\nu\,u'_\nu+$$
$$+\frac{1}{2}\left(\sum_{\alpha=1}^{2}x'_\alpha\,u'_\alpha-\sum_{\varrho=3}^{4}x'_\varrho\,u'_\varrho\right)\sum_{\nu=1}^{4}x''_\nu\,u''_\nu,$$

wozu alle durch Permutationen der Indizes 1, 2, 3, 4 sich ergebenden Formeln hinzutreten; man bestätigt die Richtigkeit dieser Formeln leicht direkt (wobei man bei der zweiten Formel jede Summe $\sum_{\nu=1}^{4}x_\nu^{(i)}\,u_\nu^{(h)}$ gleich $\sum_{\alpha=1}^{2}x_\alpha^{(i)}\,u_\alpha^{(h)}+\sum_{\varrho=3}^{4}x_\varrho^{(i)}\,u_\varrho^{(h)}$ setzt).

12. Schon in diesem Falle $n=4$, $l=2$ kann man sehen, daß die Polynome A_{ih}, mit denen auf den rechten Seiten die Summen $L_{ih}=\sum_{\nu}x_\nu^{(i)}\,u_\nu^{(h)}$ multipliziert sind, nicht nur auf eine einzige Weise gewählt werden können. Es gelten nämlich für beliebige Werte von a und b die Gleichungen:

$$(17)\quad p_{13}\,q_{23}+p_{14}\,q_{24}=(x''_1\,u''_2+a\,L_{22})\,L_{11}+(-x''_1\,u'_2+b\,L_{21})\,L_{12}+$$
$$+(-x'_1\,u''_2-b\,L_{12})\,L_{21}+(x'_1\,u'_2-a\,L_{11})\,L_{22},$$

$$(18)\quad p_{12}\,q_{12}-p_{34}\,q_{34}=\left(\sum_{\alpha=1}^{2}x''_\alpha\,u''_\alpha+a\,L_{22}\right)L_{11}+\left(\sum_{\varrho=3}^{4}x''_\varrho\,u'_\varrho+b\,L_{21}\right)L_{12}+$$
$$+\left(-\sum_{\alpha=1}^{2}x'_\alpha\,u''_\alpha-b\,L_{12}\right)L_{21}+\left(-\sum_{\varrho=3}^{4}x'_\varrho\,u'_\varrho-a\,L_{11}\right)L_{22}.$$

In der ersten dieser Formeln[14] erhält man für $a=0$, $b=0$ die einfachste durch (15) gegebene Darstellung; in der zweiten

[14] Wenn man, wie naturgemäß, nur solche Darstellungen aufsucht, bei denen der Koeffizient A_{11} von L_{11} eine sowohl in den x''_ν wie in den u''_ν

führt $a = -\frac{1}{2}$, $b = -\frac{1}{2}$ auf (16), doch sind hier die Formeln, die sich ergeben, wenn a und ebenso b gleich einem der Werte 0 oder -1 gesetzt wird, noch knapper[15].

---

lineare Form ist, analog A_{12} in den x''_ν und u'_ν, A_{21} in den x'_ν und u''_ν, A_{22} in den x'_ν und u'_ν, dann geben (17) und (18) die allgemeinste Darstellung $\Sigma A_{ih} L_{ih}$ für die linken Seiten, wie sich unter Zugrundelegung des allgemeinen Ansatzes mit unbestimmten Koeffizienten feststellen läßt.

[15] In diesem letzteren Falle bekommen die auftretenden A_{ih} sämtlich ganzzahlige Koeffizienten, was die Vermutung stützen könnte, daß die in Anm. 3 erwähnte Frage zu bejahen sei.