# Sitzungsberichte

der

# mathematisch-naturwissenschaftlichen Abteilung

der

## Bayerischen Akademie der Wissenschaften zu München


1932. Heft II

Mai-Juli-Sitzung



München 1932

Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften

in Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung

# Über mehrfach transzendente Erweiterungen des natürlichen Rationalitätsbereichs.

Von Oskar Perron.

Vorgetragen in der Sitzung am 7. Mai 1932.

## § 1. Die Aufgabe.

Daß es transzendente Zahlen gibt, folgt nach Cantor aus der Abzählbarkeit der Menge der algebraischen Zahlen; etwas ganz anderes ist es aber, wenn man verlangt, transzendente Zahlen wirklich anzugeben, eine Aufgabe, die bekanntlich Liouville zuerst gelöst hat.[1]

Ebenso leicht kann man mengentheoretisch die Existenz einer Folge von Zahlen $\xi_1, \xi_2, \ldots$ nachweisen, die so beschaffen ist, daß für jedes $r$ der Körper $\mathfrak{K}(\xi_1, \ldots, \xi_r)$ eine $r$-fach transzendente Erweiterung des natürlichen Rationalitätsbereiches $\mathfrak{K}(1)$ ist, d. h., daß keine algebraische Beziehung

$$\sum_{l_1 \ldots l_r} A_{l_1 \ldots l_r} \xi_1^{l_1} \ldots \xi_r^{l_r} = 0 \tag{1}$$

mit rationalen Koeffizienten $A_{l_1 \ldots l_r}$, die nicht sämtlich verschwinden, besteht. Denn jedenfalls gibt es eine transzendente Zahl $\xi_1$. Nehmen wir an, wir hätten schon die Existenz von $r (\geq 1)$ Zahlen $\xi_1, \ldots, \xi_r$ erkannt, für welche keine Relation der Form (1) besteht, so bilden die Zahlen des Körpers $\mathfrak{K}(\xi_1, \ldots, \xi_r)$ eine abzählbare Menge. Die algebraischen Gleichungen mit Koeffizienten aus diesem Körper bilden also ebenfalls eine abzählbare Menge, folglich bilden auch die Wurzeln dieser Gleichungen eine abzählbare Menge. Es gibt daher Zahlen, die nicht Wurzeln einer derartigen Gleichung sind; jede solche Zahl läßt sich für $\xi_{r+1}$ verwenden.

Etwas ganz anderes ist es wieder, eine Folge der verlangten Art wirklich anzugeben. Schon zwischen zwei Liouville-

[1] J. Liouville, Sur des classes très-étendues de quantités dont la valeur n'est ni algébrique, ni même réductible à des irrationelles algébriques. Journal de mathématiques pures et appliquées 16 (1851).

schen Zahlen kann sehr wohl eine algebraische Gleichung mit rationalen Koeffizienten bestehen, so daß auch das Liouvillesche Verfahren hier zunächst versagt. Dagegen ergeben sich Folgen der verlangten Art leicht aus dem Lindemannschen Satz. Sei nämlich $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ eine Folge algebraischer Zahlen, zwischen denen keine Beziehung der Form

$$\sum_{\nu=1}^{r} l_\nu \alpha_\nu = 0 \tag{2}$$

mit rationalen nicht sämtlich verschwindenden Koeffizienten $l_\nu$ besteht, etwa $\alpha_\nu = \sqrt{p_\nu}$, wo $p_\nu$ die $\nu^{\text{te}}$ Primzahl ist. Dann bilden die Zahlen

$$\xi_1 = e^{\alpha_1},\ \xi_2 = e^{\alpha_2},\ \ldots$$

eine Folge der verlangten Art. Denn eine algebraische Beziehung der Form (1) geht über in

$$\sum A_{l_1 \ldots l_r}\, e^{l_1\alpha_1 + \ldots + l_r\alpha_r} = 0,$$

und da hier die Exponenten von $e$ wegen der Nichtexistenz einer Beziehung der Form (2) lauter verschiedene algebraische Zahlen sind, müssen nach dem Lindemannschen Satz alle Koeffizienten $A_{l_1 \ldots l_r}$ verschwinden.[1]

Obwohl man hiernach in mannigfacher Weise solche Folgen $\xi_1, \xi_2, \ldots$ bilden kann, so sind doch alle $\xi_\nu$ immer aus ein und derselben abzählbaren Zahlenmenge entnommen, nämlich aus der Menge der Zahlen mit algebraischen Logarithmen. Es fragt sich, ob man nicht umfangreichere Mengen für die $\xi_\nu$ zur Verfügung stellen kann. Das ist in der Tat möglich; wir werden durch geeigneten Ausbau des Liouvilleschen Verfahrens folgendes beweisen:

**Satz 1.** Man kann in mannigfacher Weise eine Folge von Zahlenmengen $M_1, M_2, \ldots$, die sämtlich die Mächtigkeit des Kontinuums haben, wirklich angeben, von der Art, daß, wenn $\xi_\nu$ irgendeine Zahl aus $M_\nu$ bedeutet, für jedes $r$ der Körper $\mathfrak{K}(\xi_1, \ldots, \xi_r)$ stets eine $r$-fach transzendente Erweiterung von $\mathfrak{K}(1)$ ist.

[1] F. Lindemann, Über die Zahl $\pi$. Mathemat. Annalen 20 (1882).

## § 2. Verallgemeinerung des Liouvilleschen Satzes.

**Satz 2.** Wenn die $r$ reellen Zahlen $\xi_1, \ldots, \xi_r$ einer Gleichung $n$ten Grades der Form (1) genügen, so daß in jedem Glied $l_1 + l_2 + \ldots + l_r \leqq n$ ist, und wenn $c$ eine hinreichend kleine (von $\xi_1, \ldots, \xi_r$ und $n$ abhängige) positive Zahl bedeutet, so gibt es kein System von $r+1$ ganzen rationalen Zahlen $q\,(>0)$, $p_1, \ldots, p_r$, für welche die $r$ Ungleichungen gelten:

$$0 < \left|\xi_1 - \frac{p_1}{q}\right| < \frac{c}{q^n},$$

$$0 < \left|\xi_\varrho - \frac{p_\varrho}{q}\right| < \frac{c}{q^n}\left|\xi_{\varrho-1} - \frac{p_{\varrho-1}}{q}\right|^n \qquad (\varrho = 2, 3, \ldots, r).$$

Beweis. Wir nehmen an, es sei doch ein solches System $q$, $p_1, \ldots, p_r$ vorhanden, und definieren dann $r$ Zahlen $\beta_1, \ldots, \beta_r$ durch die Formeln

$$\left|\xi_\varrho - \frac{p_\varrho}{q}\right| = \frac{1}{(2q)^{\beta}} \qquad (\varrho = 1, 2, \ldots, r).$$

Setzen wir dann

$$\xi_\varrho = \frac{p_\varrho}{q} + \frac{\delta_\varrho}{(2q)^{\beta_\varrho}}, \tag{3}$$

so ist also $\delta_\varrho = \pm 1$. Für die (im allgemeinen irrationalen) Exponenten $\beta_\varrho$ gelten auf Grund der Voraussetzungen die Ungleichungen

$$(2q)^{\beta_1} > \frac{q^n}{c} = \frac{(2q)^n}{2^n c},$$

$$(2q)^{\beta_\varrho - n\beta_{\varrho-1}} > \frac{q^n}{c} = \frac{(2q)^n}{2^n c} \qquad (\varrho = 2, 3, \ldots, r);$$

also ist, wenn eine Zahl $\gamma$ durch die Formel

$$(2q)^{\gamma} = \frac{1}{2^n c} \tag{4}$$

definiert wird:

$$\begin{cases} \beta_1 > n + \gamma, \\ \beta_\varrho - n\beta_{\varrho-1} > n + \gamma \qquad (\varrho = 2, 3, \ldots r). \end{cases} \tag{5}$$

Dabei ist $\gamma > 0$, wenn nur $c$ klein genug (es genügt $c < 2^{\;n}$); also sind dann erst recht alle $\beta_\varrho$ positiv, und es ist $\beta_\varrho > \beta_{\varrho-1}$.

In der nach Voraussetzung bestehenden Formel (1) dürfen die rationalen Koeffizienten $A_{l_1 \ldots l_r}$ natürlich ganzzahlig angenommen werden. Schreibt man dann die Gleichung (1) zur Abkürzung in der Form

$$(6) \qquad f(\xi_1, \ldots, \xi_r) = 0,$$

so geht sie durch Einsetzen der Größen (3) und Anwendung des Taylorschen Satzes über in:

$$(7) \qquad \sum_{\lambda_1 \ldots \lambda_r} \frac{1}{\lambda_1! \ldots \lambda_r!} f^{(\lambda_1 + \ldots + \lambda_r)}_{\lambda_1 \ldots \lambda_r} \left( \frac{p_1}{q}, \ldots, \frac{p_r}{q} \right) \frac{\delta_1^{\lambda_1} \ldots \delta_r^{\lambda_r}}{(2q)^{\lambda_1 \beta_1 + \ldots + \lambda_r \beta_r}} = 0$$

$$(\lambda_1 + \ldots + \lambda_r \leqq n).$$

Nun ist, weil alle $\delta_r$ gleich $\pm 1$ sind,

$$\frac{1}{\lambda_1! \ldots \lambda_r!} f^{(\lambda_1 + \ldots + \lambda_r)}_{\lambda_1 \ldots \lambda_r} \left( \frac{p_1}{q}, \ldots, \frac{p_r}{q} \right) \delta_1^{\lambda_1} \ldots \delta_r^{\lambda_r}$$

$$= \pm \sum_{l_1 \ldots l_r} \binom{l_1}{\lambda_1} \cdots \binom{l_r}{\lambda_r} A_{l_1 \ldots l_r} \left( \frac{p_1}{q} \right)^{l_1 - \lambda_1} \cdots \left( \frac{p_r}{q} \right)^{l_r - \lambda_r} = \frac{B_{\lambda_1 \ldots \lambda_r}}{q^n},$$

wobei die $B_{\lambda_1 \ldots \lambda_r}$ ganze rationale Zahlen sind, die nicht sämtlich verschwinden, weil sonst das Polynom $f$ identisch verschwinden würde, also auch alle Koeffizienten $A_{l_1 \ldots l_r}$ verschwinden würden, entgegen der Voraussetzung. Für die $B_{\lambda_1 \ldots \lambda_r}$ ergibt sich aus ihrer Definitionsformel zunächst die Abschätzung

$$|B_{\lambda_1 \ldots \lambda_r}| \leqq q^n \sum_{l_1 \ldots l_r} \binom{l_1}{\lambda_1} \cdots \binom{l_r}{\lambda_r} A \left| \frac{p_1}{q} \right|^{l_1 - \lambda_1} \cdots \left| \frac{p_r}{q} \right|^{l_r - \lambda_r},$$

wobei

$$\operatorname{Max} |A_{l_1 \ldots l_r}| = A$$

gesetzt ist. Setzt man ferner

$$\operatorname*{Max}_{\varrho = 1}^{r} |\xi_\varrho| = G,$$

so folgt aus (3), weil $\delta_\varrho = \pm 1$, weil ferner $2q \geqq 2 > 1$ und weil die Exponenten $\beta_\varrho$ positiv sind,

$$\left| \frac{p_\varrho}{q} \right| < G + 1,$$

so daß sich aus der vorigen Abschätzung weiter ergibt:

$$(8) \qquad |B_{\lambda_1\ldots\lambda_r}| \leqq q^n A \sum_{l_1\ldots l_r} \binom{l_1}{\lambda_1} \cdots \binom{l}{\lambda_r} (G+1)^n \leqq M q^n,$$

wo man für $M$ etwa die Zahl

$$M = A \binom{n+r}{r} (n!)^r (G+1)^n$$

wählen kann, die jedenfalls von $q$ unabhängig ist. Die Gleichung (7) lautet jetzt einfach nach Multiplikation mit $q^n$:

$$(9) \qquad \sum_{\lambda_1\ldots\lambda_r} \frac{B_{\lambda_1\ldots\lambda_r}}{(2q)^{\lambda_1\beta_1+\ldots+\lambda_r\beta_r}} = 0 \qquad (\lambda_1+\ldots+\lambda_r \leqq n).$$

Nun vergleichen wir zwei für $(\lambda_1, \ldots, \lambda_r)$ in Betracht kommende Systeme $(\lambda_1', \ldots, \lambda_r')$ und $(\lambda_1'', \ldots, \lambda_r'')$. Ist dabei $\rho$ der größte unter denjenigen Indizes $\tau$, für welche $\lambda_\tau' \neq \lambda_\tau''$ ist, und ist etwa $\lambda_\varrho' > \lambda_\varrho''$, so ist mit Rücksicht auf (5) für $\rho > 1$:

$$\begin{aligned}(\lambda_1'\beta_1+\ldots+\lambda_r'\beta_r)-(\lambda_1''\beta_1+\ldots+\lambda_r''\beta_r) &\geqq \beta_\varrho-(\lambda_1''\beta_1+\ldots+\lambda_{\varrho-1}''\beta_{\varrho-1}) \\ &\geqq \beta_\varrho-(\lambda_1''+\ldots+\lambda_{\varrho-1}'')\beta_{\varrho-1} \\ &\geqq \beta_\varrho - n\beta_{\varrho-1} > n+\gamma,\end{aligned}$$

und für $\rho = 1$:

$$(\lambda_1'\beta_1+\ldots+\lambda_r'\beta_r)-(\lambda_1''\beta_1+\ldots+\lambda_r''\beta_r) \geqq \beta_1 > n+\gamma.$$

In der Formel (9) sind daher die (im allgemeinen irrationalen) Exponenten von $2q$ alle voneinander verschieden. Bezeichnet man sie, der Größe nach geordnet, mit $h_1, \ldots, h_s$, so ist

$$(10) \qquad h_{\sigma+1} > h_\sigma + n + \gamma \qquad (\sigma = 1, 2, \ldots, s-1)$$

und die Formel (9) geht über in

$$(11) \qquad \sum_{\sigma=1}^{s} \frac{C_\sigma}{(2q)^{h_\sigma}} = 0,$$

wobei die $C_\sigma$ einfach die ganzen Zahlen $B_{\lambda_1\ldots\lambda_r}$ in gewisser Reihenfolge sind. Die $C_\sigma$ können also nicht alle verschwinden und nach (8) ist

$$(12) \qquad |C_\sigma| \leqq M q^n < M (2q)^n.$$

Ist $C_\varrho$ die erste von 0 verschiedene unter den Zahlen $C_1, \ldots, C_s$, so folgt aus (11):

$$C_\varrho = -\sum_{\sigma=\varrho+1}^{s} \frac{C_\sigma}{(2q)^{h_\sigma - h_\varrho}},$$

also mit Rücksicht auf (12) und (10) und weil $2q \geqq 2 > 1$ ist:

$$1 \leqq |C_\varrho| < \sum_{\sigma=\varrho+1}^{s} \frac{M(2q)^n}{(2q)^{(n+\gamma)(\sigma-\varrho)}} < \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{M(2q)^n}{(2q)^{(n+\gamma)\nu}} = \frac{M(2q)^n}{(2q)^{n+\gamma}-1} < \frac{2M}{(2q)^\gamma}.$$

Somit ist $(2q)^\gamma < 2M$, oder also nach (4)

$$\frac{1}{2^n c} < 2M.$$

Wählt man daher die Zahl $c$ kleiner als $\frac{1}{2^{n+1}M}$, so hat man einen Widerspruch, wodurch Satz 2 bewiesen ist.

## § 3. Beweis von Satz 1.

Mit Hilfe von Satz 2 lassen sich nun Mengen von der in Satz 1 behaupteten Art auf mannigfache Weise konstruieren. Seien etwa $g$, $h$ zwei ganze rationale Zahlen, und zwar $g \geqq 2$, $h \geqq 2$. $M_\mu$ sei die Menge aller Zahlen der Form

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{j_\nu}{g^{(\nu\mu)!}},$$

wobei die $j_\nu$ beliebig aus den Zahlen 1, 2, ..., $h$ ausgewählt seien. Jede Menge $M_\mu$ hat dann die Mächtigkeit $h^{\aleph_0}$, also die Mächtigkeit des Kontinuums. Wir wollen zeigen, daß die Mengenfolge $M_1, M_2, \ldots$ die in Satz 1 behauptete Eigenschaft hat. Sei also

$$(13) \qquad \xi_\mu = \frac{j_{\mu 1}}{g^{\mu !}} + \frac{j_{\mu 2}}{g^{(2\mu)!}} + \frac{j_{\mu 3}}{g^{(3\mu)!}} + \cdots$$

eine Zahl aus $M_\mu$. Angenommen, die Zahlen $\xi_1, \ldots, \xi_r$ genügen, entgegen unserer Behauptung, einer algebraischen Gleichung mit rationalen Koeffizienten, etwa vom Grad $n$. Dann gibt es eine positive Zahl $c$ von der in Satz 2 angegebenen Eigenschaft. Ist nun $k$ irgendeine durch 2, 3, ..., $r$ teilbare positive ganze Zahl, so folgt aus (13):

$$\xi_1 = \frac{p_1}{g^{k!}} + \frac{\varphi_1}{g^{(k+1)!}},$$
$$\xi_2 = \frac{p_2}{g^{k!}} + \frac{\varphi_2}{g^{(k+2)!}},$$
$$- - - - - -$$
$$\xi_r = \frac{p_r}{g^{k!}} + \frac{\varphi_r}{g^{(k+r)!}},$$

wobei die $p_\varrho$ ganze Zahlen sind und die $\varphi_\varrho$ den Ungleichungen genügen:

$$1 < \varphi_\varrho < 2h.$$

Setzt man daher

(14) $$g^{k!} = q,$$

(15) $$\frac{(k+\rho)!}{k!} = \sigma_\varrho \qquad (\rho = 1, 2, \ldots, r),$$

so ist

(16) $$\begin{cases} \dfrac{1}{q^{\sigma_1}} < \xi_1 - \dfrac{p_1}{q} < \dfrac{2h}{q^{\sigma_1}}, \\ \dfrac{1}{q^{\sigma_2}} < \xi_2 - \dfrac{p_2}{q} < \dfrac{2h}{q^{\sigma_2}}, \\ - - - - - - \\ \dfrac{1}{q^{\sigma_r}} < \xi_r - \dfrac{p_r}{q} < \dfrac{2h}{q^{\sigma_r}}. \end{cases}$$

Wenn man die durch 2, 3, . . ., $r$ teilbare Zahl $k$ genügend groß gewählt hat, ist aber nach (14) und (15)

$$q > \frac{2h}{c},$$
$$\sigma_1 > n + 1,$$
$$\sigma_\varrho - n\sigma_{\varrho-1} > n + 1 \qquad (\rho = 2, 3, \ldots, r),$$

wo $c$ die Zahl aus Satz 2 bedeuten soll. Aus (16) folgt dann

$$0 < \left| \xi_1 - \frac{p_1}{q} \right| < \frac{2h}{q^{\sigma_1}} < \frac{2h}{q^{n+1}} < \frac{c}{q^n},$$

$$0 < \frac{\left| \xi_\varrho - \dfrac{p_\varrho}{q} \right|}{\left| \xi_{\varrho-1} - \dfrac{p_{\varrho-1}}{q} \right|^n} < \frac{2h}{q^{\sigma_\varrho - n\sigma_{\varrho-1}}} < \frac{2h}{q^{n+1}} < \frac{c}{q^n} \quad (\rho = 2, 3, \ldots, r).$$

Das gleichzeitige Bestehen dieser Ungleichungen widerspricht aber dem Satz 2. Die Annahme, daß die Zahlen $\xi_1, \ldots, \xi_r$ einer algebraischen Gleichung mit rationalen Koeffizienten genügen, war also falsch, und damit ist unsere Behauptung bewiesen.