Sitzungsberichte

der

mathematisch-naturwissenschaftlichen Abteilung

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften zu München

1932. Heft I

Januar-März-Sitzung

München 1932
Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften
in Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung

Über eine allgemeine Methode der speziellen Störungstheorie mit besonderer Berücksichtigung der Jupitergruppe.

Von A. Wilkens.

Vorgelegt in der Sitzung vom 16. Januar 1932.

Im Jahre 1917 habe ich in den Astr. Nachr. Bd. 205 S. 145 usw. eine auf rechtwinklige Koordinaten bezügliche Methode zur Störungstheorie der Jupitergruppe entwickelt, deren Kerngedanke darin besteht, daß die Komponenten der durch Jupiter bedingten störenden Kräfte, die allgemein von der 1. Ordnung der Jupitermasse klein sind, von einer höheren, der 2. Ordnung, klein werden, wenn man von einer ungestörten Bewegung ausgeht, bei der die Zentralmasse aus der Summe der Sonnen- und Jupitermasse zusammengesetzt ist. Alsdann werden auch die entsprechenden Störungen der rechtwinkligen Koordinaten von 2. Ordnung klein. Hier möchte ich nun eine weitere allgemein auf alle Planetoiden übertragbare Vereinfachung und Reduktion in Vorschlag bringen und mit den erforderlichen Formeln belegen.

Nach Transformation auf eine geänderte Zentralmasse im Falle der Jupitergruppe sollen zunächst in diesem speziellen Falle die Koordinaten des Planeten ebenso wie die des Jupiter als hauptsächlich störenden Körpers, indem wir zunächst von der Anziehung durch die übrigen großen Planeten absehen, auf ein um die zu wählende z-Achse rotierendes Koordinatensystem, das sich mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit n', der mittleren Bewegung des Jupiter, dreht, bezogen werden; alsdann sind die neuen Koordinaten ξ, η des Trojaners und die entsprechenden Koordinaten ξ', η' des Jupiter nahe konstant, indem nur die Exzentrizität der Bahnen und die Breitenänderung gegen die Grundebene kleine Schwankungen um die Mittelwerte der neuen Koordinaten bedingt. Folglich sind alsdann auch die Komponenten der störenden Kräfte in bezug auf das bewegliche Koordinatensystem nahe konstant und ändern sich wie die Koordinaten nur unter geringen Schwankungen mit der Zeit, während sie in einem festen System mit der Periode des Jupiterumlaufes und deshalb im doppelten Betrage der resultierenden störenden Kraft veränderlich sind. Die Erzielung einer nahen Konstanz der Störungskomponenten hat im Gaußschen Differenzenschema der mechanischen Quadratur infolge der Kleinheit der Differenzen eine wesentliche Beschränkung der Differenzenreihen zur Folge. Die Störungen selbst haben dann infolge der nahen Konstanz der 2. Ableitungen die Tendenz, wesentlich dem Quadrat der Zeit monoton anzuwachsen, wobei die periodische Änderung im festen Koordinatensystem nach der Integration erst wieder beim Übergange vom beweglichen zum festen System in Erscheinung tritt.

In einem festen System x, y, z, bezogen auf die Jupiterbahn als xy-Ebene und mit deren aufsteigendem Knoten auf der Ekliptik als Richtung der x-Achse, gelten die Differentialgleichungen

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -k^2(1+m)\frac{x}{r^3} + k^2 m' \left(\frac{x'-x}{\Delta^3} - \frac{x'}{r'^3}\right) \tag{1}$$

und analog in y und z. Identische Hinzufügung von

$0 = -\frac{k^2 m' x}{r^3} + \frac{k^2 m' x}{r^3}$ rechter Hand ergibt in neuer Form:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -k^2(1+m+m')\frac{x}{r^3} + k^2 m' X, \tag{2}$$

wo die Komponente X:

$$X = x'\left(\frac{1}{\Delta^3} - \frac{1}{r'^3}\right) - x\left(\frac{1}{\Delta^3} - \frac{1}{r^3}\right) \tag{3}$$

oder auch noch etwas zweckmäßiger:

$$= (x'-x)\left(\frac{1}{\Delta^3} - \frac{1}{r'^3}\right) + x\left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{r'^3}\right),$$

analog für Y und Z, wo die 2. Klammer jedes Summanden bei den Trojanern eine kleine Größe 1. Ordnung ist, fixiert durch die der Abweichung vom Librationspunkte, ferner den Exzentrizitäten und der gegenseitigen Bahnneigung beider Planeten entsprechende kleine Größe ε, so daß die Störungskomponenten $m'X$ und $m'Y$ von der Ordnung $m'\varepsilon$ klein sind, $m'Z$ aber von der Ordnung $m'\varepsilon^2$, weil z und z' allgemein von der Ordnung ε sind.

Statt der Koordinaten x und y werde jetzt in der xy-Ebene das neue um den Anfangspunkt gleichmäßig bewegte Bezugssystem der $\xi\eta$ eingeführt, so daß allgemein:

$$\left.\begin{aligned} \xi &= x\cos\varphi + y\sin\varphi \\ \eta &= -x\sin\varphi + y\cos\varphi \end{aligned}\right\}, \tag{4}$$

also speziell für Jupiter:

$$\left.\begin{aligned} \xi' &= x'\cos\varphi + y'\sin\varphi \\ \eta' &= -x'\sin\varphi + y'\cos\varphi \end{aligned}\right\}, \text{ wo:} \tag{5}$$

$$\varphi = \varphi_0 + n't \text{ und } (\varphi)_{t=0} = \varphi_0 \tag{6}$$

den Winkel fixieren möge, den der Radiusvektor des Jupiter im Zeitpunkt $t = 0$ mit der x-Achse, also am zweckmäßigsten mit der Richtung zum aufsteigenden Knoten der Jupiterbahn auf der Ekliptik als x-Achse bildet, so daß φ_0 die Länge des Jupiter zur Zeit der Epoche $t = 0$, und also die ξ-Achse und der Jupiter-Radiusvektor für $t = 0$ zusammenfallen. Sind dann x_0, y_0 und z_0 die ungestörten, x, y und z die gestörten Koordinaten des Trojaners, so bestehen zwischen den Störungen

$$x - x_0 = \Delta x,\ y - y_0 = \Delta y,\ z - z_0 = \Delta z \tag{7}$$

und den entsprechenden Störungen

$$\xi - \xi_0 = \Delta\xi,\ \eta - \eta_0 = \Delta\eta,\ \zeta - \zeta_0 = \Delta\zeta \tag{8}$$

im $\xi\eta\zeta$-System unter Verwendung der den Formeln (4) entsprechenden Umkehrungen die Beziehungen:

$$\begin{aligned} \Delta x &= \Delta\xi\cos\varphi - \Delta\eta\sin\varphi \\ \Delta y &= \Delta\xi\sin\varphi + \Delta\eta\cos\varphi \\ \Delta z &= \Delta\zeta. \end{aligned} \tag{9}$$

Die Störungen Δx, Δy, Δz genügen nun gemäß (2) den bekannten Differentialgleichungen:

$$(10)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{d^2\Delta x}{dt^2} &= k'^2 N(x) + k^2 m' \; X \\ \frac{d^2\Delta y}{dt^2} &= k'^2 N(y) + k^2 m' \; Y \\ \frac{d^2\Delta z}{dt^2} &= k'^2 N(z) + k^2 m' \; Z \end{aligned}\right\},$$

wo die $N(x)$ etc. die Nebenteile

$$(11)\qquad N(x) = \frac{1}{r_0^3}(qfx - \Delta x)$$

und analog $N(y)$ und $N(z)$ fixieren, ferner $k'^2 = k^2(1 + m + m')$ und schließlich q und f die bekannten noch weiterhin zu transformierenden Koeffizienten sind:

$$(12)\qquad q = \frac{1}{r_0^2}\left[\Delta x\left(x_0 + \frac{1}{2}\Delta x\right) + \Delta y\left(y_0 + \frac{1}{2}\Delta y\right) + \Delta z\left(z_0 + \frac{1}{2}\Delta z\right)\right]$$

$$f = 3\left[1 - \frac{5}{2}q + \frac{35}{6}q^2 - \frac{315}{24}q^3 + \ldots\right].$$

Indem nun die Gleichungen (10) in solche für $\Delta\xi$, $\Delta\eta$ und $\Delta\zeta = \Delta z$ zu transformieren sind, ergeben zunächst die Gleichungen (4) direkt die 2. Ableitungen von $\Delta\xi$ und $\Delta\eta$ als Funktionen von Δx und Δy:

$$(13)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{d^2\Delta\xi}{dt^2} &= \frac{d^2\Delta x}{dt^2}\cos\varphi + \frac{d^2\Delta y}{dt^2}\sin\varphi - 2\frac{d\Delta x}{dt}n'\sin\varphi \\ &\quad + 2\frac{d\Delta y}{dt}n'\cos\varphi - n'^2\Delta x\cos\varphi - n'^2\Delta y\sin\varphi \\ \frac{d^2\Delta\eta}{dt^2} &= -\frac{d^2\Delta x}{dt^2}\sin\varphi + \frac{d^2\Delta y}{dt^2}\cos\varphi - 2\frac{d\Delta x}{dt}n'\cos\varphi \\ &\quad - 2\frac{d\Delta y}{dt}n'\sin\varphi + n'^2\Delta x\sin\varphi - n'^2\Delta y\cos\varphi, \end{aligned}\right.$$

wo die beiden letzten Glieder jeder Gleichung zusammengefaßt gemäß (9) $-n'^2\Delta\xi$ resp. $-n'^2\Delta\eta$ ergeben und ebenfalls nach (9) für die ersten Ableitungen von Δx und Δy zu substituieren ist:

$$(14)\qquad \begin{aligned} \frac{d\Delta x}{dt} &= \frac{d\Delta\xi}{dt}\cos\varphi - \frac{d\Delta\eta}{dt}\sin\varphi - n'\left[\Delta\xi\sin\varphi + \Delta\eta\cos\varphi\right] \\ \frac{d\Delta y}{dt} &= \frac{d\Delta\xi}{dt}\sin\varphi + \frac{d\Delta\eta}{dt}\cos\varphi + n'\left[\Delta\xi\cos\varphi - \Delta\eta\sin\varphi\right]. \end{aligned}$$

Schließlich sind für die 2. Ableitungen von Δx und Δy die Ausdrücke (10) in (13) zu substituieren. Die sich dabei ergebenden Summen $\pm N(x) \begin{smallmatrix}\cos\\ \sin\end{smallmatrix} \varphi + N(y) \begin{smallmatrix}\sin\\ \cos\end{smallmatrix} \varphi$ und $\pm X \begin{smallmatrix}\cos\\ \sin\end{smallmatrix} \varphi + Y \begin{smallmatrix}\sin\\ \cos\end{smallmatrix} \varphi$ werden nach (11) und (3) umgeformt, so daß man erhält:

$$(15)\quad \begin{cases} \Xi = X\cos\varphi + Y\sin\varphi = \left(\frac{1}{\Delta^3} - \frac{1}{r'^3}\right)(\xi' - \xi) + \left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{r'^3}\right)\xi \\ \mathrm{H} = -X\sin\varphi + Y\cos\varphi = \left(\frac{1}{\Delta^3} - \frac{1}{r'^3}\right)(\eta' - \eta) + \left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{r'^3}\right)\eta \\ N(\xi) = N(x)\cos\varphi + N(y)\sin\varphi = \frac{1}{r_0^3}(qf\xi - \Delta\xi) \\ N(\eta) = -N(x)\sin\varphi + N(y)\cos\varphi = \frac{1}{r_0^3}(qf\eta - \Delta\eta). \end{cases}$$

Folglich lauten nun die transformierten Differentialgleichungen (13) für $\Delta\xi$ und $\Delta\eta$ wie folgt:

$$(16)\quad \begin{cases} \frac{d^2\Delta\xi}{dt^2} = k^2 m' \,\Xi + \frac{k'^2}{r_0^3}(qf\xi - \Delta\xi) + 2n' \frac{d\Delta\eta}{dt} + n'^2\Delta\xi \\ \frac{d^2\Delta\eta}{dt^2} = k^2 m' \,\mathrm{H} + \frac{k'^2}{r_0^3}(qf\eta - \Delta\eta) - 2n' \frac{d\Delta\xi}{dt} + n'^2\Delta\eta \\ \frac{d^2\Delta\xi}{dt^2} = k^2 m' \,\mathrm{Z} + \frac{k'^2}{r_0^3}(qf\zeta - \Delta\zeta), \end{cases}$$

wo die 3. Gleichung in $\Delta z = \Delta\zeta$ die unveränderte Ausgangsform behalten hat.

In den beiden ersten Gleichungen von (16) sind die letzten Glieder $n'^2\Delta\xi$ und $n'^2\Delta\eta$ allgemein von der 3. Ordnung in m', weil $n' = 300''\ \sin 1'' = \frac{3}{2}m'$, da $m' = \frac{1}{1000}$, also n' von der 1. Ordnung der Maße m', und $\Delta\xi$ und $\Delta\eta$ allgemein von der 1. Ordnung in m' klein sind, bei der Trojanergruppe aber von noch höherer Ordnung klein, weil hier $\Delta\xi$ und $\Delta\eta$ von höherer als der 1. Ordnung klein erhalten werden; da nämlich ε das Maß der Kleinheit von $\frac{1}{\Delta^3} - \frac{1}{r'^3}$ resp. von $\frac{1}{r^3} - \frac{1}{r'^3}$ fixiert, indem ε die Abweichung vom Librationspunkte resp. eine Größe von der Ordnung der Exzentrizitäten und Neigungen bedeutet, so sind Ξ und H nach (15) von der Ordnung ε, also $m'\Xi$ und m'H, die ersten Glieder der rechten Seiten von (16), von der Ordnung $m'\varepsilon$, so daß die aus den Hauptteilen $m'\Xi$ und m'H hervorgehenden Störungen $\Delta\xi$ und $\Delta\eta$ ebenfalls von der Ordnung $m'\varepsilon$ sind. Folglich sind bei der Trojanergruppe die letzten Glieder der Gleichungen (16) von der Ordnung $m'^3\varepsilon$, allgemein sonst nur von der Ordnung m'^3 und die vorletzten Glieder $n'\frac{d\Delta\xi}{dt}$ und $n'\frac{d\Delta\eta}{dt}$ von der Ordnung $m'^2\varepsilon$, allgemein sonst von der Ordnung m'^2. Ferner sind die Nebenteile, also die 2. Glieder der rechten Seite von (16) von der Ordnung $m'^3\varepsilon$, indem Δx und Δy in 9 (12) ebenso wie $\Delta\xi$ und $\Delta\eta$ von der Ordnung $m'\varepsilon$, und ferner der Koeffizient $\frac{k'^2}{r_0^3}$ nach dem 3. Keplerschen Gesetz nahe n^2, bei den Trojanern also nahe n'^2, also von der Ordnung m'^2 ist. Folglich fixieren die Glieder $m'\Xi$ und m'H bei der Trojanergruppe die Glieder niedrigster Ordnung und sind, was außerdem wesentlich ist, nahe konstant, weil alle vorkommenden Größen, abgesehen von Störungen und periodischen Änderungen infolge der nicht verschwindenden Exzentrizitäten und Bahnneigungen, konstant sind, wobei die Längendifferenz für lange Zeiten ohne Einfluß ist, weil die mittleren Bewegungen des Trojaners und Jupiters sehr nahe gleich sind, so daß insgesamt, wie eingangs schon hervorgehoben, das Differenzenschema schnell abbricht. Beginnt man die Rechnung ein zweites Mal unter Berücksichtigung der auf $m'\Xi$ und m'H folgenden Glieder in (16), so wird die Änderung der rechten Seiten von (16) nur gering sein, da die folgenden Glieder, wie gezeigt, von viel höherer Ordnung klein sind als das erste Glied; zugleich folgt hieraus, daß die Störungen $\Delta\xi$ und $\Delta\eta$ auch dann wesentlich dem Quadrat der Zeit proportional verlaufen werden, da $\Delta\xi$ und $\frac{d\Delta\xi}{dt}$ usw. für die Epoche gemäß dem Prinzip der Oskulation verschwinden, so daß die Glieder der ersten Potenz von t verschwinden müssen.

Bei Anwendung der Theorie auf andere Planeten als solche der Trojanergruppe liegt die Erschwerung naturgemäß in der Verschiedenheit der mittleren Bewegungen der Planeten gegen die des Jupiter, so daß man kein Koordinatensystem zu wählen vermag, in bezug auf das die störenden Kraftkomponenten dauernd konstant bleiben; man kann aber eine Verzögerung in der Änderung der Kraftkomponenten herbeiführen, indem man ein bewegliches Koordinatensystem konstanter Rotationsgeschwindigkeit wählt, so daß sich die Koordinaten und Kraftkomponenten langsamer als bei einem festen Koordinatensystem ändern, so daß die mechanische Quadratur über ein größeres Zeitintervall ausdehnbar ist. In Strenge ist zu fordern, daß Ξ und H sich für das zu wählende Koordinatensystem geringstmöglich ändern. Denken wir uns Ξ und H nach Potenzen der Zeit entwikkelt, so ist:

$$(17) \qquad \Xi = \Xi_0 + t \cdot \left(\frac{d\Xi}{dt}\right)_0 + \ldots \quad \text{und} \quad \mathrm{H} = \mathrm{H}_0 + t \cdot \left(\frac{d\mathrm{H}}{dt}\right)_0 + \ldots$$

Da in dem Winkel φ zwischen dem festen und dem beweglichen System $\varphi = \varphi_0 + \varphi' \cdot t$ nur 2 Unbekannte φ_0 und φ' zu bestimmen sind, so können nur 2 unabhängige Bedingungsgleichungen erfüllt werden, wobei zu beachten ist, daß die Ξ und H an die Beziehung

$$(17\text{a}) \qquad \Xi^2 + \mathrm{H}^2 = R^2 = X^2 + Y^2$$

gebunden sind, wobei die Resultierende R der störenden Kräfte von jedem Koordinatensystem unabhängig ist, und nur von den gegenseitigen Entfernungen resp. den heliozentrischen Entfernungen und dem Zwischenwinkel an der Sonne abhängt. Dementsprechend ist dann in bezug auf die zeitlichen Änderungen:

$$(17\text{b}) \qquad \Xi \cdot \frac{d\Xi}{dt} + \mathrm{H} \frac{d\mathrm{H}}{dt} = R \frac{dR}{dt},$$

wo $\frac{dR}{dt}$ ebenfalls von jedem Koordinatensystem unabhängig ist. Da es allgemein nicht möglich ist, daß die Kraftkomponenten dauernd konstant bleiben, so kann es für unseren Zweck nur darauf ankommen, die der Zeit proportionalen Glieder $\frac{d\Xi}{dt}$ und $\frac{d\mathrm{H}}{dt}$ in ihrem Absolutbetrage möglichst klein zu machen; beide Ableitungen etwa gleichzeitig zum Verschwinden zu bringen, ist nicht möglich, weil wegen der Beziehung (17b) beide

Ableitungen niemals zugleich o sein können, außer in den Extremwerten von R, bei denen $\frac{dR}{dt} = 0$ ist. Es kann also allgemein stets nur eine der beiden Ableitungen verschwinden, z. B. möge $\frac{d\Xi}{dt} = 0$ sein; dann wird $\frac{d\mathrm{H}}{dt} = \frac{R\frac{dR}{dt}}{\mathrm{H}}$, und zwar absolut ein Minimum, wenn $\mathrm{H} = R$ ein absolutes Maximum, also $\Xi = 0$ ein absolutes Minimum gemäß der Beziehung zwischen Ξ, H und R. Das bewegliche Koordinatensystem ist also so zu wählen, daß die Bedingungen $\Xi_0 = 0$ und $\left(\frac{d\Xi}{dt}\right)_0 = 0$ erfüllt werden, aus denen die beiden Unbekannten φ_0 und φ' zu bestimmen sind. Analog könnte natürlich auch $\mathrm{H}_0 = 0$ und $\left(\frac{d\mathrm{H}}{dt}\right)_0 = 0$ gemacht werden. Mit zunehmender Zeit wird die Günstigkeit der Bedingungen natürlich vermindert, so daß alsdann erneut mit einem neuen beweglichen Koordinatensystem angefangen werden müßte. Denn mit zunehmender Zeit macht sich gemäß (17) in Ξ das Glied in t^2, das erste von o verschiedene Glied, geltend, so daß Ξ von seinem absoluten Minimalwert o ab zu steigen beginnt, während deshalb gleichzeitig H gegenüber seinem bisherigen absoluten Maximum absolut kleiner wird; analog beginnt $\frac{d\Xi}{dt}$ von seinem absoluten Minimalwert o ab absolut zu steigen. Das Produkt $\Xi \cdot \frac{d\Xi}{dt}$ wird aber bei Taylorentwicklung von der 3. Ordnung in t, also klein gegen $R \cdot \frac{dR}{dt}$, so daß in erster Näherung $\mathrm{H} \cdot \frac{d\mathrm{H}}{dt} = R \cdot \frac{dR}{dt}$ und somit $\frac{d\mathrm{H}}{dt}$ gegenüber dem früheren absoluten Minimum absolut zu wachsen beginnt, abgesehen von der Änderung von R.

Im allgemeinen Falle genügen X und Y wie auch Ξ und H anderen Ausdrücken, als sie im Falle der Trojanergruppe Verwendung fanden. Allgemein ist nämlich

$$X = \frac{x' - x}{\Delta^3} - \frac{x'}{r'^3} \text{ (siehe (1))} \tag{18}$$

und analog Y, so daß Ξ und H mit Rücksicht auf die Beziehungen (4) und (15) die folgende Form annehmen:

$$
(19) \qquad \left.\begin{aligned}
\Xi &= X \cos\varphi + Y \sin\varphi = \frac{\xi' - \xi}{\Delta^3} - \frac{\xi'}{r'^3} \\
\mathrm{H} &= -X \sin\varphi + Y \cos\varphi = \frac{\eta' - \eta}{\Delta^3} - \frac{\eta'}{r'^3}
\end{aligned}\right\}.
$$

Mithin wird, wenn

(20) $\Xi = \alpha(\xi' - \xi) - \beta\xi'$ gesetzt wird, indem $\alpha = \frac{1}{\Delta^3}$ und $\beta = \frac{1}{r'^3}$:

$$
(21) \qquad \frac{d\Xi}{dt} = \frac{d\alpha}{dt}(\xi' - \xi) + \alpha \frac{d(\xi' - \xi)}{dt} - \beta \frac{d\xi'}{dt},
$$

wobei ich von der Differentiation von β absehe, indem ich von einer Berücksichtigung der Exzentrizität und der Bahnneigungen absehen will, also bei der vorliegenden Aufgabe nur die Änderung der Lage der mittleren Planeten in Rücksicht ziehe, was für die Bestimmung von φ_0 und φ' genügen dürfte. Dann ist, wenn

$$
(22) \qquad \Delta^2 = r^2 + r'^2 - 2rr' \cos(l - l')
$$

gesetzt wird, wobei l und l' die mittleren Längen fixieren:

$$
(23) \qquad \frac{d\alpha}{dt} = (n' - n)\,\alpha_1, \text{ wo } \alpha_1 = -3\,\frac{rr' \sin(l' - l)}{\Delta^5}.
$$

Da nun in Polarkoordinaten: $\left\{\begin{aligned} \xi &= r\cos(l - \varphi), & \xi' &= r'\cos(l' - \varphi) \\ \eta &= r\sin(l - \varphi), & \eta' &= r'\sin(l' - \varphi) \end{aligned}\right\}$,

so geht (21) in die folgende Bedingungsgleichung über, wenn nach der Differentiation die für $t = 0$ geltenden Werte der veränderlichen Größen substituiert werden.

$$
\begin{aligned}
(23\,\mathrm{a}) \qquad \frac{d\Xi}{dt} &= (n' - n)\,\alpha_1 \left[r'_0 \cos(l_0' - \varphi_0) - r_0 \cos(l_0 - \varphi_0)\right] \\
&+ \alpha_0\left[-r_0' \sin(l_0' - \varphi_0)\cdot(n' - \varphi') + r_0 \sin(l_0 - \varphi_0)\cdot(n - \varphi')\right] \\
&+ \beta_0 r_0' \sin(l_0' - \varphi_0)\cdot(n' - \varphi').
\end{aligned}
$$

Diese Gleichung ist mit der 2. Bedingungsgleichung zu kombinieren:

$$
(23\,\mathrm{b}) \qquad \Xi_0 = \frac{r_0' \cos(l_0' - \varphi_0) - r_0 \cos(l_0 - \varphi_0)}{\Delta^3_0} - \frac{\cos(l_0' - \varphi_0)}{r'^2_0} = 0.
$$

Diese letztere Gleichung liefert uns nach Zerlegung der trigonometrischen Funktionen zunächst φ_0 mittels der Beziehung:

$$(24)\quad \operatorname{tg}\varphi_0 = \frac{Z}{N}, \text{ wo } \left\{ \begin{aligned} Z &= -\frac{1}{\Delta_0^3}\left[r_0' \cos l_0' - r_0 \cos l_0\right] + \frac{1}{r_0'^2}\cos l_0' \\ N &= \frac{1}{\Delta_0^3}\left[r_0' \sin l_0' - r_0 \sin l_0\right] - \frac{1}{r_0'^2}\sin l_0' \end{aligned} \right\}.$$

Hiernach ergibt sich φ_0 als Funktion nur zweier Argumente, nach denen φ_0 tabuliert werden kann. Wird nämlich die Jupiterlänge l_0' als Anfangsrichtung der Längenzählung gewählt und dementsprechend die Winkelargumente l_0 und l_0' in den Formeln um l_0' vermindert, so ergibt sich vereinfachend:

$$(25)\qquad \operatorname{tg}(\varphi_0 - l_0') = \frac{\frac{1}{\Delta_0^3}\left[r_0' - r_0 \cos(l_0 - l_0')\right] - \frac{1}{r_0'^2}}{\frac{r_0}{\Delta_0^3}\sin(l_0 - l_0')}.$$

Da wir von einer Berücksichtigung der Exzentrizitäten absehen, wird $r' = a'$ und ebenso $r = a$, ferner $\Delta^2 = a^2 + a'^2 - 2aa' \cos(l_0 - l_0') = a'^2\delta^2$, wo $\delta^2 = 1 + K^2 - 2K\cos(l_0 - l_0')$ und $K = {}^a/_{a'}$, so daß schließlich bei Multiplikation von Zähler und Nenner in (25) mit $\delta^3 a'^2$ die definitive Formel entsteht:

$$(27)\qquad \operatorname{tg}(\varphi_0 - l_0') = \frac{-\delta^3 - K\cos(l_0 - l_0') + 1}{K \sin(l_0 - l_0')}.$$

Hiernach ist $\varphi_0 - l_0' = f(\delta, K, l_0 - l_0')$ oder, da $\delta = \delta(K, l_0 - l_0')$, auch: $\varphi_0 - l_0' = f(K, l_0 - l_0')$, so daß K und $l_0 - l_0'$ als Argumente einer bald erscheinenden Tafel zur Darstellung von $\varphi_0 - l_0'$ dienen. Dabei wird auch n neben K als Argument aufgeführt, da $K = a/a'$ und $n = ka^{-3/2}$, während a' eine feste Größe ist. Die Tabulierung geht von $l_0 - l_0' = 0$ bis 180^0, indem bei $l_0 - l_0' > 180^0$, also $l_0 - l_0' = 180^0 + \psi$ die Funktion $\operatorname{tg}(\varphi_0 - l_0')$ nach (27) den entgegengesetzten Wert wie bei $l_0 - l_0' = 180 - \psi$ annimmt, so daß $\varphi_0 - l_0' = \varphi_2 = -\varphi_1$, wo φ_1 dem der Tafel zugrunde liegenden Falle $\varphi_0 - l_0'$ bei $l_0 - l_0' < 180^0$ entspricht. Die Tabelle gilt also bei $l_0 - l_0' = 180^0 + \psi$, wie im Falle $180^0 - \psi$, nur ist im ersteren Falle das Argument mit $360^0 - (l_0 - l_0')$ anzusetzen und die der Tabelle entnommene Funktion $\varphi_0 - l_0'$ mit $-(\varphi_0 - l_0')$ zu vertauschen. Die Unbekannte φ' folgt nach 23a mittels der Formel:

$$\varphi' = \frac{Z}{N}, \text{ wo} \tag{28}$$

$$Z = (n - n')\,\alpha_1\left[r_0' \cos(l_0' - \varphi_0) - r_0 \cos(l_0 - \varphi_0)\right] \tag{29}$$
$$-\alpha_0\left[-r_0'n' \sin(l_0' - \varphi_0) + r_0 n \sin(l_0 - \varphi_0)\right] + \beta_0 r_0' n' \sin(l_0' - \varphi_0)$$
$$N = \alpha_0\left[r_0' \sin(l_0' - \varphi_0) - r_0 \sin(l_0 - \varphi_0)\right] - \beta_0 r_0' \sin(l_0' - \varphi_0)$$

und wo in Z der Koeffizient $\alpha_1 = 3\,\frac{r_0'\,r_0}{\Delta^5} \sin(l_0 - l'_0)$ und $\alpha_0 = \frac{1}{\Delta_0^3}$. Geht das Argument $l_0 - l_0' = 180^0 - \psi$ über in $180^0 + \psi$, so wechselt α_1 das Vorzeichen und $\varphi_0 - l_0'$ geht, wie bewiesen, über in $-(\varphi_0 - l')$, ferner $l_0 - \varphi_0 = l_0 - l_0' - -(\varphi_0 - l') = 180^0 - \psi - (\varphi_0 - l')$ geht über in $180^0 + \psi + (\varphi_0 - -l')$, so daß also zu vertauschen ist: $\genfrac{}{}{0pt}{}{\cos}{\sin}(l_0' - \varphi_0)$ mit $\genfrac{}{}{0pt}{}{\cos}{-\sin}(l_0' - \varphi_0)$ und $\genfrac{}{}{0pt}{}{\cos}{\sin}(l_0 - \varphi_0) = \genfrac{}{}{0pt}{}{-\cos}{+\sin}(\psi + \varphi_0 - l_0')$ mit $\genfrac{}{}{0pt}{}{-\cos}{-\sin}(\psi + \varphi_0 - l_0')$, so daß im letzteren Falle also keine Änderung eintritt. Folglich ändern Zähler wie Nenner bei der genannten Vertauschung das Zeichen, so daß φ' unverändert bleibt, wenn $l_0 - l_0' = 180^0 - \psi$ in $180^0 + \psi$ übergeht, und man erhält φ' bei $l_0 - l_0' = 180^0 + \psi$ mittels des Tafelargumentes $l_0 - l_0' = 180^0 - \psi$, weshalb sich die beigefügte Tafel nur von $l_0 - l_0' = 0$ bis 180^0 zu erstrecken braucht. Zur bequemen numerischen Rechnung wurden deshalb die oben gegebenen Substitutionen vorgenommen, nach deren Ausführung φ' mittels der folgenden aus (28) sich ergebenden Formel erhalten wird:

$$\varphi' = Z_1/N_1, \text{ wo} \tag{30}$$

$$\left\{\begin{aligned} Z_1 &= 3K(n - n')\sin(l_0 - l_0')\left[\cos(l_0' - \varphi_0) - K\cos(l_0 - \varphi_0)\right] \\ &\quad - \delta^2\left[-n'\sin(l_0' - \varphi_0) + Kn\sin(l_0 - \varphi_0)\right] - \delta^5 n'\sin(l_0' - \varphi_0) \\ N_1 &= \delta^2\left[\sin(l_0' - \varphi_0) - K\sin(l_0 - \varphi_0) - \delta^5\sin(l_0' - \varphi_0)\right]. \end{aligned}\right.$$

Zu bemerken bleibt noch, daß φ' ebenso wie φ_0 nur von $l_0 - l_0'$ als einzigem Winkelargument abhängig ist, indem das in (30) auftretende Argument $l_0 - \varphi_0 = l_0 - l_0' - (\varphi_0 - l')$ ist und die hier auftretende Differenz $\varphi_0 - l_0'$ nach (27) als Funktion von $l_0 - l_0'$ erhalten wird. Ferner folgt nach (30) speziell für $n = n'$, daß $\varphi' = n'$, wie es nach Obigem für die Trojanergruppe zu erwarten ist.

Die Differentialgleichungen des allgemeinen Falles sind denen des Spezialfalles der Trojanergruppe formell sehr nahe gleich, indem nur in die Gleichung (16) an Stelle von k'^2 die Größe k^2 und an Stelle von n' als Rotationswinkel die Größe φ' zu substituieren ist.

Man kann nun die mechanische Quadratur der Differentialgleichungen (16) sowohl im speziellen Falle der Trojanergruppe wie auch im allgemeinen Falle auf Grund des folgenden Gedankens, wenn nicht ganz, so doch teilweise überhaupt umgehen, besonders zu Beginn der Rechnung. Die Störungen $\xi - \xi_0 = \Delta\xi$, analog $\Delta\eta$ und $\Delta\zeta$, erhalten, weil im Oskulationsmoment $t = 0$ die Koordinaten und Geschwindigkeiten in der gestörten wie ungestörten Bewegung einander gleich und deshalb $(\Delta\xi)_0 = (\Delta\eta)_0 = (\Delta\zeta) = 0$ und $\left(\frac{d\Delta\xi}{dt}\right)_0 = \left(\frac{d\Delta\eta}{dt}\right)_0 = \left(\frac{d\Delta\zeta}{dt}\right) = 0$ sind, bei Potenzentwicklung nach t, so daß $\Delta\xi = \xi_0 + \xi_1 . t + \xi_2 . t^2 + \ldots$ und analog in η und ζ, die folgende Form:

$$(31) \qquad \Delta\xi = \xi_2 t^2 + \xi_3 t^3 + \cdots,\ \Delta\eta = \eta_2 t^2 + \eta_3 t^3 + \cdots,$$
$$\Delta\zeta = \zeta_2 t^2 + \zeta_3 t^3 \cdots,$$

wobei der Fall der Trojaner von dem allgemeinen Falle folgendermaßen abweicht. Jm Falle der Trojaner sind Ξ und H nach der Gleichung (15) kleine von Null verschiedene und nahe konstante Größen der Ordnung ε, so daß $\Delta\xi$ und $\Delta\eta$ bei Integration von (16) allein unter Berücksichtigung von $k^2 \cdot m'\Xi$ resp. $k^2 \cdot m'\mathrm{H}$ rechter Hand unmittelbar die genannte Form (31) erhalten, wobei also ξ_2 und η_2 von der Ordnung $m' \cdot \varepsilon$ sind. Im allgemeinen Falle aber, bei einer solchen Wahl der Lage der ξ-Achse, daß $\Xi_0 = 0$ und $\left(\frac{d\Xi}{dt}\right)_0 = 0$, während $\mathrm{H}_0 = R_0$ und $\left(\frac{dH}{dt}\right)_0 = \left(\frac{dR}{dt}\right)_0$ bleiben, folgt, daß gemäß (16) bei Potenzentwicklung von Ξ und H in 1. Näherung die folgende Reduktion der rechten Seite von (16) stattfindet: $\frac{d^2\Delta\xi}{dt^2} = k^2 \cdot m' \cdot \frac{t^2}{2}\left(\frac{d^2\Xi}{dt^2}\right)_0 + \ldots$, so daß folglich (31a) $\Delta\xi = \xi_4 t^4 + \ldots$, während $\Delta\eta = \eta_2 \cdot t^2 + \ldots$ von unveränderter Form bleibt. Es ist also $\Delta\xi$ klein von der 4. Ordnung in t, wobei von den übrigen Nebenzusatzgliedern rechter Hand von (16) nur noch entsprechend kleine Glieder höherer Ordnung hinzukommen. Indem sich allgemein nach (31):

$$(32)\qquad \frac{d^2\Delta\xi}{dt^2} = 2\xi_2 + 6\xi_3 t + \cdots, \quad \frac{d^2\Delta\eta}{dt^2} = 2\eta_2 + 6\eta_3 t + \cdots$$

in 1. Näherung auf $2\xi_2$ resp. $2\eta_2$ beschränkt, wobei, wie soeben gezeigt, hier auch $\xi_2 = \xi_3 = 0$ sein kann, wird gemäß (16):

$$(33)\qquad 2\xi_2 = k^2 m' \Xi + \frac{k'^2}{r_0^3}(qf\xi - \Delta\xi) + R(\xi),$$

analog $2\eta_2$, wo der Rest

$$(34)\qquad R(\xi) = 4n'\eta_2 t + n'^2 \xi_2 t^2$$

ist und in 1. Näherung, weil, wie gezeigt, von höherer Ordnung klein, als verschwindend angenommen werden darf.

Im allgemeinen Falle ist in (33) linker Hand wegen (31 a) $\xi_2 = 0$, ferner noch $k'^2 = k^2$ und in dem Ausdruck für R bei eventueller Berücksichtigung noch φ' statt n' zu setzen. Da ferner: $q \cdot f \cdot \xi$, ebenso $q \cdot f \cdot \eta$ und $q \cdot f \cdot \zeta$ gemäß (12) in 1. Näherung lineare Funktionen von $\Delta\xi$, $\Delta\eta$ und $\Delta\zeta$ sind, die wir sogleich noch explizit aufstellen müssen, also lineare Funktionen von ξ_2, η_2 und ζ_2, so gibt (33) zusammen mit den analogen Gleichungen für η_2 und ζ_2 drei lineare Gleichungen zur Bestimmung von ξ_2, η_2 und ζ_2 resp. von $\Delta\xi$, $\Delta\eta$ und $\Delta\zeta$. Denn dieses Verfahren läßt sich noch zweckmäßig abändern. Bilden wir nämlich die zweiten Ableitungen von $\Delta\xi$, $\Delta\eta$ und $\Delta\zeta$ für $t = 0$, so erhalten wir nach (16):

$$(35)\qquad \left(\frac{d^2\Delta\xi}{dt^2}\right) = k^2 m' (\Xi)_0 = k^2 m' \Xi_0$$

unter Verschwinden aller anderen Glieder neben Ξ_0; andererseits ist streng nach der Reihe (31) auch $\left(\frac{d^2\Delta\xi}{dt^2}\right) = 2\xi_2$, so daß in Verbindung mit (33) die neue Gleichung:

$$(36)\qquad 0 = k^2 m' (\Xi - \Xi_0) + \frac{k'^2}{r_0^3}(qf\xi - \Delta\xi) + R(\xi)$$

entsteht, woraus in Verbindung mit den analogen Gleichungen für η und ζ drei Gleichungen zur Bestimmung von $\Delta\xi$, $\Delta\eta$ und $\Delta\zeta$ für den beliebigen Zeitpunkt $t = t$ entstehen, deren Auflösung wir allgemein vornehmen wollen. Zu diesem Zwecke ist zuerst $q \cdot f$ als lineare Funktion von $\Delta\xi$, $\Delta\eta$ und $\Delta\zeta$ darzustellen. Nach (12) wird:

$$(37) \qquad q \cdot f = 3\left[1 - \frac{5}{2} q + \cdots\right] \cdot \frac{1}{r_0^2}\left[\Delta x\left(x_0 + \frac{1}{2}\Delta x\right) + \Delta y\left(y_0 + \frac{1}{2}\Delta y\right) + \Delta z\left(z_0 + \frac{1}{2}\Delta z\right)\right]$$

worin zu substituieren ist:

$$(38) \qquad \left\{\begin{array}{ll} \Delta x = \Delta\xi \cos\varphi - \Delta\eta \sin\varphi, & x_0 = \xi_0 \cos\varphi - \eta_0 \sin\varphi \\ \Delta y = \Delta\xi \sin\varphi + \Delta\eta \cos\varphi, & y_0 = \xi_0 \sin\varphi + \eta_0 \cos\varphi \\ \Delta z = \Delta\zeta & z_0 = \zeta \end{array}\right\},$$

wo $\Delta z = \Delta\zeta$ bei der Trojanergruppe von der Ordnung $m' \cdot \varepsilon^2$, sonst allgemein von der Ordnung $m' \cdot \varepsilon$, wenn z und z' bei kleinen Bahnneigungen von der ersten Ordnung klein sind. Folglich wird:

$$(39) \qquad q \cdot f = \frac{3}{r_0^2}\left[1 - \frac{5}{2} q + \frac{35}{6} q^2 - \frac{315}{24} q^3 + \cdots\right]\left[\xi_0\Delta\xi + \eta_0\Delta\eta + \zeta_0\Delta\zeta + \frac{1}{2}(\Delta\xi)^2 + \frac{1}{2}(\Delta\eta)^2 + \frac{1}{2}(\Delta\zeta)^2\right]$$

oder bei Beschränkung auf die Glieder erster Ordnung allein:

$$q \cdot f = \frac{3}{r_0^2}\left[\xi_0 \Delta \xi + \eta_0 \Delta \eta + \zeta_0 \Delta \zeta\right].$$

Unter Verwendung dieses Ausdruckes für die Auflösung der Gleichungen lauten diese dann, bei Anordnung nach den Unbekannten auf Normalform gebracht und indem $k^2/k'^2 = 1/(1+m')$ substituiert wird, folgendermaßen:

$$(40) \qquad \left\{\begin{array}{llll} \Delta\xi\left(\dfrac{3\xi\xi_0}{r_0^2} - 1\right) & + \Delta\eta \dfrac{3\xi\eta_0}{r_0^2} & + \Delta\zeta \dfrac{3\xi\zeta_0}{r_0^2} & = \dfrac{m'}{1+m'} r_0^3 \cdot (\Xi_0 - \Xi) = X_1 \\ \Delta\xi \dfrac{3\eta\xi_0}{r_0^2} & + \Delta\eta\left(\dfrac{3\eta\eta_0}{r_0^2} - 1\right) & + \Delta\zeta \dfrac{3\eta\zeta_0}{r_0^2} & = \dfrac{m'}{1+m'} r_0^3 \cdot (\mathrm{H}_0 - \mathrm{H}) = Y_1 \\ \Delta\xi \dfrac{3\zeta\xi_0}{r_0^2} & + \Delta\eta \dfrac{3\zeta\eta_0}{r_0^2} & + \Delta\zeta\left(\dfrac{3\zeta\zeta_0}{r_0^2} - 1\right) & = \dfrac{m'}{1+m'} r_0^3 \cdot (\mathrm{Z}_0 - \mathrm{Z}) = Z_1 \end{array}\right\}$$

wo die veränderlichen Koeffizienten zu ξ, η, ζ zur Wahrung der Korrekturmöglichkeit noch nicht durch ξ_0, η_0, ζ_0 ersetzt worden sind, so daß eventuell nach Ableitung der Störungen $\xi = \xi_0 + \Delta\xi$ usw. gesetzt werden kann. Für $t = 0$ sind $X_1 = Y_1 = Z_1 = 0$ und zugleich $\Delta\xi = \Delta\eta = \Delta\zeta = 0$, wobei nach (40) die Determinante

$$(41) \qquad D = \begin{vmatrix} 3\frac{\xi\xi_0}{r_0^2} - 1, & 3\frac{\xi\eta_0}{r_0^2}, & 3\frac{\xi\zeta_0}{r_0^2} \\ 3\frac{\eta\xi_0}{r_0^2}, & 3\frac{\eta\eta_0}{r_0^2} - 1, & 3\frac{\eta\zeta_0}{r_0^2} \\ 3\frac{\zeta\xi_0}{r_0^2}, & 3\frac{\zeta\eta^0}{r_0^2}, & 3\frac{\zeta\zeta_0}{r_0^2} - 1 \end{vmatrix}$$

allgemein von 0 verschieden ist und ihre Form bereits auch für die praktische Anwendung bequem ist, weil alle Koeffizienten $\frac{\xi}{r_0}, \frac{\eta}{r_0}, \frac{\zeta}{r_0}, \frac{\xi_0}{r_0}$ usw. absolut < 1 sind. Lösen wir die Determinante auf, so ergibt sich unter Wegheben eines Teiles der Glieder:

$$(42) \qquad D = 3\left(\frac{\xi\xi_0}{r_0^2} + \frac{\eta\eta_0}{r_0^2} + \frac{\zeta\zeta_0}{r_0^2}\right) - 1;$$

genähert ist also, wenn $\xi = \xi_0$ usw.: $\underline{D = 2}$; dagegen ist strenge, wenn $\xi = \xi_0 + \Delta\xi$ usw. gesetzt wird:

$$(43) \qquad D = 2 + \frac{3}{r_0^2}(\xi_0\Delta\xi + \eta_0\Delta\eta + \zeta_0\Delta\zeta).$$

Die Auflösung der Gleichungen (40) ergibt nach Zerlegung der Determinanten:

$$(44) \qquad \left\{ \begin{aligned} \Delta\xi &= \frac{1}{D}\left[\left(-3\frac{\zeta\zeta_0}{r_0^2} - 3\frac{\eta\eta_0}{r_0^2} + 1\right)X_1 + 3\frac{\xi\eta_0}{r_0^2}Y_1 + 3\frac{\xi\zeta_0}{r_0^2}Z_1\right] \\ \Delta\eta &= \frac{1}{D}\left[+3\frac{\eta\xi_0}{r_0^2}X_1 + \left(-3\frac{\xi\xi_0}{r_0^2} - 3\frac{\zeta\zeta_0}{r_0^2} + 1\right)Y_1 + 3\frac{\eta\zeta_0}{r_0^2}Z_1\right] \\ \Delta\zeta &= \frac{1}{D}\left[3\frac{\zeta\xi_0}{r_0^2}X_1 + 3\frac{\zeta\eta_0}{r_0^2}Y_1 + \left(-3\frac{\eta\eta_0}{r_0^2} - 3\frac{\xi\xi_0}{r_0^2} + 1\right)Z_1\right]. \end{aligned} \right.$$

Eine erste Auflösung erfolgt unter Substitution von $\xi = \xi_0$, $\eta = \eta_0$, $\zeta = \zeta_0$, alsdann eine zweite Auflösung unter Substitution von $\xi = \xi_0 + \Delta\xi$ usw. Dann erfolgt die Berücksichtigung der Glieder höheren Grades, zuerst durch Vervollständigung von Ξ, H und Z, indem die in ihnen auftretenden Werte von $\Delta^2 = (\xi - \xi')^2 + (\eta - \eta')^2 + (\zeta - \zeta')^2$ und $r^2 = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2$ durch ihre gestörten wahren Werte ersetzt werden, indem alsdann:

$$(45)\begin{cases} \Delta^2 = \Delta_0^2 + 2(\xi_0 - \xi')\Delta\xi + 2(\eta_0 - \eta')\Delta\eta + 2(\zeta_0 - \zeta')\Delta\zeta \\ \qquad + (\Delta\xi)^2 + (\Delta\eta)^2 + (\Delta\zeta)^2 \\ r^2 = r_0^2 + 2\xi_0\Delta\xi + 2\eta_0\Delta\eta + 2\zeta_0\Delta\zeta + (\Delta\xi)^2 + (\Delta\eta)^2 + (\Delta\zeta)^2, \end{cases}$$

$$\text{wo} \begin{Bmatrix} \Delta_0^2 = (\xi_0 - \xi')^2 + (\eta_0 - \eta')^2 + (\zeta_0 - \zeta')^2 \\ r_0^2 = \xi_0^2 + \eta_0^2 + \zeta_0^2 \end{Bmatrix},$$

so daß an Stelle von $k^2m'\Xi$, k^2m'H und k^2m'Z nunmehr die vollständigen unter Berücksichtigung der Störungen erster Näherung berechneten Ausdrücke rechter Hand von (16) treten, wobei man im indirekten Teil der störenden Kräfte auch noch die Glieder zweiter Ordnung in $\Delta\xi$, $\Delta\eta$ und $\Delta\zeta$ hinzufügen kann; entwickelt man q und f bis zu den Gliedern zweiter Ordnung in $\Delta\xi$ usw. und bildet alsdann das Produkt $q \cdot f \cdot \xi$ resp. $qf\eta$ und $q \cdot f \cdot \zeta$, so erhält man die folgenden Ausdrücke für die Zusatzglieder zweiter Ordnung zu $k^2 \cdot m'\Xi$ usw., nachdem diejenigen erster Ordnung bereits berücksichtigt sind, indem diese schon direkt zu den Gleichungen (40) usw. geführt haben.

$$(46)\qquad \left.\begin{aligned} &\text{Zusatz zu } k^2m' \cdot \Xi : + 3\frac{k'^2}{r_0^5} \cdot f \\ &\text{Zusatz zu } k^2m' \cdot \mathrm{H} : + 3\frac{k'^2}{r_0^5} \cdot g \\ &\text{Zusatz zu } k^2m' \cdot \mathrm{Z} : + 3\frac{k'^2}{r_0^5} \cdot h \end{aligned}\right\}, \text{ wo}$$

$$\begin{Bmatrix} f = \frac{1}{2}\xi_0\{(\Delta\xi)^2 + (\Delta\eta)^2 + (\Delta\zeta)^2\} - \frac{5}{2}\frac{\xi_0}{r_0^2}(\xi_0\Delta\xi + \eta_0\Delta\eta + \zeta_0\Delta\zeta)^2 \\ \qquad + \Delta\xi(\xi_0\Delta\xi + \eta_0\Delta\eta + \zeta_0\Delta\zeta) \\ g = \frac{1}{2}\eta_0\{(\Delta\xi)^2 + (\Delta\eta)^2 + (\Delta\zeta)^2\} - \frac{5}{2}\frac{\eta_0}{r_0^2}(\xi_0\Delta\xi + \eta_0\Delta\eta + \zeta_0\Delta\zeta)^2 \\ \qquad + \Delta\eta(\xi_0\Delta\xi + \eta_0\Delta\eta + \zeta_0\Delta\zeta) \\ h = \frac{1}{2}\zeta_0\{(\Delta\xi)^2 + (\Delta\eta)^2 + (\Delta\zeta)^2\} - \frac{5}{2}\frac{\zeta_0}{r_0^2}(\xi_0\Delta\xi + \eta_0\Delta\eta + \zeta_0\Delta\zeta)^2 \\ \qquad + \Delta\zeta(\xi_0\Delta\xi + \eta_0\Delta\eta + \zeta_0\Delta\zeta) \end{Bmatrix}$$

wo im allgemeinen Falle der Faktor k'^2 durch k^2 zu ersetzen bleibt. Um die entsprechenden Zusätze zu X_1, Y_1 und Z_1 in (40) zu erhalten, ist an die Ausdrücke (46) gemäß den in den Ausgangsgleichungen (36) nebst Auflösung nach (40) auftretenden Faktoren der Faktor $-\frac{r_0^3}{k'^2}$ anzubringen, so daß der den drei Ausdrücken (46) gemeinsame Faktor gleich $-\frac{3}{r_0^2}$ wird, so daß wir zu X_1, Y_1 und Z_1 die folgenden Zusatzglieder erhalten:

$$\Delta X_1 = -\frac{3}{r_0^2}\cdot f,\ \Delta Y_1 = -\frac{3}{r_0^2}\cdot g,\ \Delta Z_1 = -\frac{3}{r_0^2}\cdot h, \tag{47}$$

die alsdann in (44), um die zweite Näherung für $\Delta\xi$, $\Delta\eta$ und $\Delta\zeta$ zu erhalten, zu X_1, Y_1 und Z_1 zu addieren sind. Als weitere Zusatzglieder zu X_1 usw. treten gemäß (16) noch hinzu:

$$\begin{aligned} \delta X_1 &= -\frac{r_0^3}{k'^2}\left(2n'\frac{d\Delta\eta}{dt} + n'^2\Delta\xi\right), \\ \delta Y_1 &= -\frac{r_0^3}{k'^2}\left(-2n'\frac{d\Delta\xi}{dt} + n'^2\Delta\eta\right),\quad \delta Z_1 = 0, \end{aligned} \tag{48}$$

worin noch zu substituieren bleibt:

$$\left\{\begin{aligned} \frac{d\Delta\xi}{dt} &= 2\xi_2 t = k^2 m'\,\Xi_0\cdot t \\ \frac{d\Delta\eta}{dt} &= 2\eta_2 t = k^2 m'\,\mathrm{H}_0\cdot t \end{aligned}\right\}, \tag{49}$$

wobei diese Ableitungen (49) auch dem Differenzenschema von $\Delta\xi$ und $\Delta\eta$ entnehmbar sind. Die den Variationen $\Delta X_1 + \delta X_1$ entsprechende Änderung in ξ ist dann nach (44):

$$\begin{aligned} \delta\xi = \frac{1}{D}\Bigg[&\left(-3\frac{\zeta\zeta_0}{r_0^2} - 3\frac{\eta\eta_0}{r_0^2} + 1\right)(\Delta X_1 + \delta X_1) \\ &+ 3\frac{\xi\eta_0}{r_0^2}(\Delta Y_1 + \delta Y_1) + 3\frac{\xi\zeta_0}{r_0^2}(\Delta Z_1 + \delta Z_1)\Bigg] \end{aligned} \tag{50}$$

und analog in $\delta\eta$ und $\delta\zeta$, wobei noch für ξ, η und ζ in den Faktoren $\xi = \xi_0 + \Delta\xi$ usw. auf Grund der ersten Näherung und ferner D nach (43) zu substituieren ist. Würde man hier für ξ,

η und ζ die ungestörten Werte substituieren, so würde man Glieder 2. Ordnung vernachlässigen; zur Vermeidung solcher Vernachlässigungen ist es zweckmäßig, von vorneweg in den Ausgangsgleichungen (40) linker Hand die Substitution $\xi = \xi_0 + \Delta\xi$ usw. zu machen und alle von den Quadraten und Produkten der $\Delta\xi$, $\Delta\eta$ und $\Delta\zeta$ abhängigen Glieder auf die rechte Seite zu schaffen, so daß links nur die Glieder erster Ordnung verbleiben, also die Koeffizienten links nur von den ungestörten Werten ξ_0, η_0 und ζ_0 abhängen, so daß in jeder Näherung die Determinante $D = D_0 = \text{const.} = 2$ verbleibt. Alsdann folgt nach (40):

$$(51)\quad \left\{\begin{aligned} \Delta\xi\left[3\frac{\xi_0^2}{r_0^2} - 1\right] + \Delta\eta\, 3\frac{\xi_0\eta_0}{r_0^2} + \Delta\zeta\, 3\frac{\xi_0\zeta_0}{r_0^2} &= X_1 + K_2(\xi) \\ \Delta\xi\, 3\frac{\eta_0\xi_0}{r_0^2} + \Delta\eta\left[3\frac{\eta_0^2}{r_0^2} - 1\right] + \Delta\zeta\, 3\frac{\eta_0\zeta_0}{r_0^2} &= Y_1 + K_2(\eta) \\ \Delta\xi\, 3\frac{\zeta_0\xi_0}{r_0^2} + \Delta\eta\, 3\frac{\zeta_0\eta_0}{r_0^2} + \Delta\zeta\left[3\frac{\zeta_0^2}{r_0^2} - 1\right] &= Z_1 + K_2(\zeta) \end{aligned}\right\}, \text{ wo}$$

$$\left\{\begin{aligned} K_2(\xi) &= -3\frac{\xi_0}{r_0^2}(\Delta\xi)^2 - 3\frac{\eta_0}{r_0^2}\Delta\eta\Delta\xi - 3\frac{\zeta_0}{r_0^2}\Delta\zeta\Delta\xi \\ K_2(\eta) &= -3\frac{\xi_0}{r_0^2}\Delta\xi\Delta\eta - 3\frac{\eta_0}{r_0^2}(\Delta\eta)^2 - 3\frac{\zeta_0}{r_0^2}\Delta\zeta\Delta\eta \\ K_2(\zeta) &= -3\frac{\xi_0}{r_0^2}\Delta\xi\Delta\zeta - 3\frac{\eta_0}{r_0^2}\Delta\eta\Delta\zeta - 3\frac{\zeta_0}{r_0^2}(\Delta\zeta)^2 \end{aligned}\right\}$$

die Korrektionen 2. Ordnung von X_1, Y_1 und Z_1 sind. Dann ist in der 1. Näherung gemäß dem System (44):

$$(52)\quad \begin{aligned} (\Delta\xi)_1 &= \frac{1}{D_0}\left[\left(-3\frac{\zeta_0^2}{r_0^2} - 3\frac{\eta_0^2}{r_0^2} + 1\right)X_1 + 3\frac{\xi_0\eta_0}{r_0^2}Y_1 + 3\frac{\xi_0\zeta_0}{r_0^2}Z_1\right] \\ (\Delta\eta)_1 &= \frac{1}{D_0}\left[3\frac{\eta_0\xi_0}{r_0^2}X_1 + \left(-3\frac{\xi_0^2}{r_0^2} - 3\frac{\zeta_0^2}{r_0^2} + 1\right)Y_1 + 3\frac{\eta_0\zeta_0}{r_0^2}Z_1\right] \\ (\Delta\zeta)_1 &= \frac{1}{D_0}\left[3\frac{\zeta_0\xi_0}{r_0^2}X_1 + 3\frac{\zeta_0\eta_0}{r_0^2}Y_1 + \left(-3\frac{\eta_0^2}{r_0^2} - 3\frac{\xi_0^2}{r_0^2} + 1\right)Z_1\right]. \end{aligned}$$

Zur Erlangung der 2. Näherung werden diese letzteren Ausdrücke nur in bezug auf die Werte von X_1, Y_1 und Z_1 abgeändert, indem die Komponenten X_1, Y_1 und Z_1 zuerst mit den wegen der Störungen erster Ordnung $(\Delta\xi)_1$, $(\Delta\eta)_1$ und $(\Delta\zeta)_1$ verbesserten Koordinaten nach (19) neuberechnet und dann weiter die Korrektionen $K_2(\xi) + \Delta X_1 + \delta X_1$ zu X_1 usw. analog zu Y_1 und Z_1 hinzugefügt werden. Folglich lauten die Verbesserungen der ersten Näherung nach (52), $D_0 = 2$ gesetzt, wie folgt:

$$
(53)\quad \begin{cases}
(\Delta\xi)_2 = \frac{1}{2}\left(-3\frac{\zeta_0^2}{r_0^3} - 3\frac{\eta_0^2}{r_0^3} + 1\right)(K_2(\xi) + \Delta X_1 + \delta X_1) + \\
+ \frac{3}{2}\frac{\xi_0\eta_0}{r_0^2}(K_2(\eta) + \Delta Y_1 + \delta Y_1) + \frac{3}{2}\frac{\xi_0\zeta_0}{r_0^2}(K_2(\zeta) + \Delta Z_1 + \delta Z_1) \\
(\Delta\eta)_2 = \frac{3}{2}\frac{\eta_0\zeta_0}{r_0^2}(K_2(\xi) + \Delta X_1 + \delta X_1) + \left(-3\frac{\xi_0^2}{r_0^2} - 3\frac{\zeta_0^2}{r_0^2} + 1\right)\cdot \\
\quad (K_2(\eta) + \Delta Y_1 + \delta Y_1) + \frac{3}{2}\frac{\eta_0\zeta_0}{r_0^2}(K_2(\zeta) + \Delta Z_1 + \delta Z_1) \\
(\Delta\zeta)_2 = \frac{3}{2}\frac{\zeta_0\xi_0}{r_0^2}(K_2(\xi) + \Delta X_1 + \delta X_1) + \frac{3}{2}\frac{\zeta_0\eta_0}{r_0^2}(K_2(\eta) + \Delta Y_1 \\
\quad + \delta Y_1) + \left(-3\frac{\eta_0^2}{r_0^2} - 3\frac{\xi_0^2}{r_0^2} + 1\right)(K_2(\zeta) + \Delta Z_1 + \delta Z_1),
\end{cases}
$$

so daß die Ausdrücke $\Delta\xi = (\Delta\xi)_1 + (\Delta\xi)_2$ und analog für $\Delta\eta$ und $\Delta\zeta$ die Koordinatenstörungen bis zur zweiten Ordnung einschließlich fixieren.

Aus den gestörten Beträgen $\xi = \xi_0 + \Delta\xi$, ebenso in η und ζ folgen dann die auf das feste System bezogenen Koordinaten x, y und z mittels der Umkehrungen nach (4):

$$
(54)\qquad \begin{Bmatrix} x = \xi\cos\varphi - \eta\sin\varphi \\ y = \xi\,sin\,\varphi + \eta\cos\varphi \end{Bmatrix}.
$$

Was nun die Anwendung auf einen konkreten Fall betrifft, so soll eine solche baldmöglichst an Beispielen gezeigt werden. Im speziellen Fall der Trojaner hat Herr Drucker im Jahre 1921 in den Astr. Nachr. Bd. 214 S. 17 eine Anwendung meiner in Bd. 205 Nr. 4906 entwickelten Theorie auf den Planeten 617 Patroclus gemacht, insofern es sich um die k'-Theorie allein, d. h. um die Störungstheorie auf Grund der Reduktion der störenden Kräfte auf Größen zweiter Ordnung handelt, indem im Koordinatenanfangspunkt die Summe der Massen von Sonne und Jupiter angenommen wird. Herr **Drucker** hatte damals in dem Planeten Patroclus einen Trojaner verwendet, der neben 588 Achilles die größte Exzentrizität von über 8^0 und die größte aller Bahnneigungen, über 28^0, besitzt, so daß eine starke Änderung der gegenseitigen Abstände des Trojaners von Sonne, Jupiter und Librationspunkt eintritt; deshalb war dieser Fall für meine Theorie einerseits ungünstig, aber andererseits für eine Kritik besonders zweckmäßig und wertvoll. Herr **Drucker** fand (S. 29), daß „das Wilkenssche Elementarsystem für kürzere Zeiträume (7 Jahre) vorteilhafter ist als das gewöhnliche". Bei Berechnung der Jupiterstörungen nach der gewöhnlichen Methode einerseits und der meinigen andererseits fand Herr **Drucker**, daß für Patroclus in der mittleren Länge L und dem Exzentrizitätswinkel φ erheblich geringere Störungen als nach der gewöhnlichen Methode (wieder für 7 Jahre) erhalten werden, in der Perihellänge $\bar{\omega}$ und der mittleren Anomalie M solche von gleicher Ordnung, wobei ich aber ergänzend als wesentlich zu bemerken habe, daß nach meiner Methode die Störungen ΔL, $\Delta\bar{\omega}$ und ΔM während der letzten 4 Jahre (1909—13) nahezu konstant sind, während sie nach der gewöhnlichen Methode ganz erheblich schwanken, und zwar speziell $\Delta\bar{\omega}$ um $36'$, ΔM um $47'$ und $\Delta\varphi$ um $1'$; ferner beträgt bei allen vier Elementen L, $\bar{\omega}$, M und φ die maximale Änderung derselben während des ganzen siebenjährigen Zeitraumes der Störungsermittlung (1906—13) nach meiner Methode nur 50% der nach der gewöhnlichen Methode, bei φ sogar nur 33%, so daß die Störungsrechnung nach meiner Methode zeitlich erheblich weiter als nach der gewöhnlichen Methode fortgesetzt werden kann, was als der springende Punkt meiner Methode zu betrachten ist und den Erfolg der Reduktion fixiert; deshalb ist es zu bedauern, daß Herr **Drucker** den Vergleich der Methoden nicht über 1913 hinaus fortgesetzt hat. Ich habe diese Fortsetzung deshalb in München bereits veranlaßt. In der mittleren Bewegung μ, deren Störung in dem genannten Intervall von 7 Jahren insgesamt nur $0'',3$ beträgt, war der Störungsbetrag nach meiner Methode auffälligerweise größer, im Maximum $0'',2$, und auch hier die letzten 4 Jahre hindurch, von 1909—13, nahe konstant. Diese Dissonanz ist aber nur eine scheinbare und prinzipiell hinfällig, weil die Störung $\delta\mu$ der mittleren Bewegung, wie aus dem dritten Keplerschen Gesetz in der Form $\mu = \frac{k}{a^{3/2}}$ folgt, dem Ausdrucke

$$\delta\mu = -\frac{3}{2}\mu \cdot \frac{\delta a}{a} \tag{55}$$

genügt, so daß, weil $\mu = 300'' \sin 1'' = \frac{3}{2} \cdot 10^{-3} = \frac{3}{2}\, m'$ (m' = Jupitermasse) von der ersten Ordnung der störenden Masse m' klein ist, $\mu\delta a$ und somit nach (55) $\delta\mu$ selbst nach (55) von der zweiten Ordnung der störenden Masse klein ist. Deshalb kann also $\delta\mu$ infolge dieser besonderen Kleinheit nach der Berechnung mittels der gewöhnlichen oder der transformierten Methode um den oben genannten kleinen Betrag natürlicherweise differieren, sogar im Vorzeichen, während die absoluten Beträge immer klein bleiben, so daß die von Herrn Drucker gefundene scheinbare Dissonanz nicht als Kriterium für die Tragweite der Methode herangezogen werden kann. Wenn die Wirkung meiner Reduktionsmethode nach den Rechnungen Herrn Druckers bei seiner Transformation auf die Elementenstörungen ungleichmäßig erscheint, so ist dagegen anzunehmen, daß bei den den Ort unmittelbar darstellenden rechtwinkligen Koordinaten, für die ich die Methode auf Grund der Differentialgleichungen der Koordinatenstörungen ausgearbeitet hatte, eine gleichmäßigere Wirkung auf die drei gleichartigen Variablen x, y, z eintritt; dazu ermöglichen sie wegen der Symmetrie der Ausdrücke für die Störungen eine besonders bequeme numerische Rechnung gegenüber der Variation der Konstanten und müssen bei der von vorneweg theoretisch gesicherten Heraufsetzung der Ordnung resp. entsprechenden Herabsetzung des Betrages der Störungskomponenten zu kleineren Beträgen der Störungen als bei der gewöhnlichen Methode führen, worüber die kommende Anwendung noch berichten wird.

Bei Bezug der Bewegung auf ein rotierendes Koordinatensystem ist eine weitere Verbesserung, d. h. eine beschleunigte Konvergenz des Verfahrens nach der Methode der rechtwinkligen Koordinaten zu erwarten. Die Wahl eines rotierenden Koordinatensystems wird bei der Verwendung von Elementenstörungen hinfällig, weil in den entsprechenden Gleichungen nur Polarkoordinaten als gewissermaßen natürliche Koordinaten auftreten, indem die Elementenstörungen nur von den gegenseitigen Abständen und deren Orientierung gegen ein Grundsystem abhängig sind.

München, Sternwarte, den 16. Januar 1932.

A. Wilkens.