Sitzungsberichte

der

mathematisch-naturwissenschaftlichen Abteilung

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften

zu München

1931. Heft I

Januar-Märzsitzung

München 1931
Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften
in Kommission des Verlags R. Oldenbourg München

Über eine Integraldarstellung von meromorphen Funktionen.

Von **Gustav Doetsch** in Stuttgart.

Vorgelegt von G. Faber in der Sitzung am 10. Januar 1931.

In einer kürzlich erschienenen Arbeit[1]) hat Ugo Broggi eine Integraldarstellung für das Reziproke eines Polynoms

$$p(s) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_0$$

(s = komplexe Variable) angegeben, die in der Halbebene $\Re s > \lambda$ konvergiert, wo λ das Maximum des reellen Teils der Wurzeln von $p(s)$ ist. Wenn ich zu dieser einfachen Aufgabe etwas sage, so liegt das daran, daß einerseits die Broggischen Entwicklungen, die auf der Theorie der Laplace-Transformation beruhen, sich einfacher und durchsichtiger darstellen lassen, was insbesondere für die von Broggi herangezogenen Beziehungen zur Theorie der Differentialgleichungen zu sagen ist, und daß andererseits die betreffende Darstellung so abgeändert werden kann, daß sie außerhalb der konvexen Hülle der Wurzeln von $p(s)$ gilt, wodurch der Geltungsbereich sicher größer wird als der der Potenzreihe nach absteigenden Potenzen von s, in die man $\dfrac{1}{p(s)}$ entwickeln könnte, während die Broggische Darstellung zu dem Konvergenzgebiet der Potenzreihe u. U., nämlich wenn die Wurzel von größtem Absolutbetrag nicht gerade positiv reell ist, ein endliches Stück (Kreissegment) hinzuerobert, dafür aber sicher ein unendlich großes Gebiet (die linke Halbebene $\Re s \leq \lambda$, vermindert um das komplementäre Kreissegment) verliert (Figur 1). Schließlich

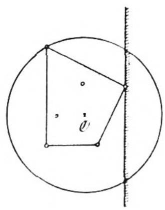

Fig. 1

[1]) U. Broggi, Sullo sviluppo assintotico della reciproca di un polinomio. Rendiconti del R. Istituto Lombardo di scienze e lettere (2) **63** (1930), Fasc. XI—XV.

wird aus dem folgenden deutlich werden, daß man die Darstellung auf eine sehr viel allgemeinere Klasse von meromorphen Funktionen erweitern kann. — Nebenbei ergeben sich einige Resultate über das Borelsche Summabilitätspolygon, die eine Erweiterung der Borelschen Summationsmethode nahelegen.

§ 1. Der Fall einfacher Wurzeln.

1. Ich erinnere zunächst an folgende bekannte Tatsachen: Die Laplace-Transformation

$$\mathfrak{L}(F) \equiv \int_0^\infty e^{-st} F(t)\, dt = f(s)$$

ordnet der „Oberfunktion" F (Element des Oberbereichs) die „Unterfunktion" f (Element des Unterbereichs) zu und konvergiert, wenn überhaupt für ein gewisses s, so stets in einer Halbebene $\Re s > \varkappa$ (reell). Die Zuordnung $F \to f$ ist eindeutig, die Zuordnung $f \to F$ offenbar nicht; sie wird es aber, wenn man von F Stetigkeit verlangt, was im folgenden immer vorausgesetzt wird.

2. Die in Frage stehende Darstellung von $\frac{1}{p(s)}$ läßt sich in wenigen Zeilen unter gänzlicher Vermeidung der Broggischen Rechnungen so ableiten:

Hat $p(s)$ nur die einfachen Wurzeln $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, so ist

$$\frac{1}{p(s)} = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{r_\nu}{s - \alpha_\nu}, \tag{1}$$

wo r_ν das Residuum von $\frac{1}{p(s)}$ im Punkte α_ν, also gleich $\frac{1}{p'(\alpha_\nu)}$ ist. Zu $\frac{1}{s-\alpha_\nu}$ als Unterfunktion gehört die (einzige stetige) Oberfunktion $e^{\alpha_\nu t}$, zu $\frac{1}{p(s)}$ also

$$P(t) = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{e^{\alpha_\nu t}}{p'(\alpha_\nu)}. \tag{2}$$

Folglich läßt sich mit diesem $P(t)$ die Funktion $\frac{1}{p(s)}$ so darstellen:

$$(3)\qquad \frac{1}{p(s)} = \int_0^\infty e^{-st}\, P(t)\, dt,$$

und diese Darstellung konvergiert, wie man dem Ausdruck für $P(t)$ ansieht, für $\Re s > \lambda = \operatorname{Max} \Re \alpha_\nu$.

3. Durch Nachrechnen stellt Broggi fest, daß die Oberfunktion $P(t)$ der linearen homogenen Differentialgleichung, deren Koeffizienten mit denen von $p(s)$ übereinstimmen, also

$$(4)\qquad Y^{(n)} + a_{n-1}\, Y^{(n-1)} + \cdots + a_0\, Y = 0,$$

genügt und die Anfangsbedingungen

$$(5)\qquad Y(0) = Y'(0) = \cdots = Y^{(n-2)}(0) = 0,\quad Y^{(n-1)}(0) = 1$$

erfüllt. Das ist ohne weiteres erkennbar, wenn man die Methode verwendet, die ich früher ausführlich bei partiellen Differentialgleichungen dargestellt und auch für den einfacheren Fall der gewöhnlichen Differentialgleichungen skizziert habe[1]). Diese Methode besteht darin, daß man die gegebene Differentialgleichung in den Unterbereich „übersetzt", wobei man nur zu beachten hat, daß einer Ableitung im Oberbereich folgendes einfache Aggregat im Unterbereich entspricht[2]):

$$\mathfrak{L}(Y^{(\nu)}) = s^\nu\, \mathfrak{L}(Y) - [Y(0)s^{\nu-1} + Y'(0)s^{\nu-2} + \cdots + Y^{(\nu-1)}(0)].$$

Wenn die Oberfunktion Y der Differentialgleichung (4) mit den Anfangsbedingungen (5) genügt, so muß also die zugehörige Unterfunktion y die algebraische Gleichung erfüllen:

$$s^n y - 1 + a_{n-1} s^{n-1} y + a_{n-2} s^{n-2} y + \cdots + a_0 y = 0,$$

d. h. es ist

$$y = \frac{1}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_0} = \frac{1}{p(s)}.$$

Wenn aber die Unterfunktion y mit $\dfrac{1}{p(s)}$ übereinstimmt, so muß die Oberfunktion Y mit $P(t)$ identisch sein.

4. Die Lösungsform $Y(t) = \sum\limits_{\nu=1}^{n} \dfrac{e^{\alpha_\nu t}}{p'(\alpha_\nu)}$, die man auf diese

---

1) G. Doetsch, Überblick über Gegenstand und Methode der Funktionalanalysis. Jahresber. d. dtsch. Math. Vrg. **36** (1927) S. 1—30 [S. 24].

2) G. Doetsch, Die Integrodifferentialgleichungen vom Faltungstypus. Math. Ann. **89** (1923) S. 192—207 [S. 198].

Art für die Differentialgleichung (4) unter den Randbedingungen (5) erhält, ist übrigens gerade diejenige, welche, wenn man zur Integration die symbolische Operatorenrechnung anwendet, durch das Heavisidesche „expansion theorem" geliefert wird[1]). Um dieses Theorem, das sich auf eine inhomogene Differentialgleichung mit durchweg verschwindenden Anfangsbedingungen bezieht, anwenden zu können, brauchen wir nur statt Y die Funktion

$$Z(t) = \int_0^t Y(\tau)\, d\tau$$

einzuführen. Integrieren wir unsere Differentialgleichung unter Beachtung der Anfangsbedingungen von 0 bis t, so ergibt sich:

$$Y^{(n-1)} - 1 + a_{n-1}\, Y^{(n-2)} + \cdots + a_1\, Y + a_0 \int_0^t Y(\tau)\, d\tau = 0$$

oder wegen $Y^{(\nu)} = Z^{(\nu+1)}$ $(\nu = 0, 1, \cdots, n-1)$:

$$Z^{(n)} + a_{n-1}\, Z^{(n-1)} + \cdots + a_1\, Z' + a_0\, Z = 1,$$

wobei jetzt

$$Z(0) = Z'(0) = \cdots = Z^{(n-1)}(0) = 0$$

zu fordern ist. Nach dem Heavisideschen expansion theorem ist dann, wenn die Wurzeln α_ν $(\nu = 1, \cdots, n)$ der Gleichung $s^n + a_{n-1}\, s^{n-1} + \cdots + a_0 \equiv p(s) = 0$ unter sich und von 0 verschieden sind:

$$Z = \frac{1}{p(0)} + \sum_{\nu=1}^{n} \frac{e^{\alpha_\nu t}}{\alpha_\nu\, p'(\alpha_\nu)},$$

folglich

$$Y = \frac{dZ}{dt} = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{e^{\alpha_\nu t}}{p'(\alpha_\nu)}.$$

5. Da $P(t) = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{e^{\alpha_\nu t}}{p'(\alpha_\nu)}$, wie wir unter 3. sahen, die Eigenschaften $P(0) = P'(0) = \cdots = P^{(n-2)}(0) = 0$, $P^{(n-1)}(0) = 1$ hat, so ergeben sich für die Wurzeln α_ν von $p(s)$ die Identitäten:

[1]) Vgl. z. B. J. R. Carson, Elektrische Ausgleichsvorgänge und Operatorenrechnung. Berlin 1929, S. 29. Daß hier der Heaviside-Kalkül hereinspielt, ist kein Zufall; denn die einfachste und umfassendste Begründung für die Operatorenrechnung läßt sich gerade auf dem in 3. zur Integration der Differentialgleichung benutzten Wege über die Laplace-Transformation erbringen. Vgl. hierzu meine Kritik des Carsonschen Buches. Jahresber. d. dtsch. Math. Vrg. **39** (1930) *S. 105–109.*

$$(6)\quad \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{p'(a_\nu)} = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{a_\nu}{p'(a_\nu)} = \cdots = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{a_\nu^{n-2}}{p'(a_\nu)} = 0,\ \sum_{\nu=1}^{n} \frac{a_\nu^{n-1}}{p'(a_\nu)} = 1,$$

die bei Broggi durch asymptotische Betrachtungen abgeleitet werden, um damit umgekehrt zu beweisen, daß die Funktion $P(t)$ die betreffenden Anfangswerte hat. Funktionentheoretisch sind diese Identitäten evident, denn $\sum_{\nu=1}^{n} \frac{a_\nu^q}{p'(a_\nu)}$ ist die Summe der Residuen von $\frac{x^q}{p(x)}$ (im Endlichen), also gleich $\frac{1}{2\pi i}\int \frac{x^q}{p(x)}\,dx$, erstreckt über einen Kreis vom Radius R um den Nullpunkt, der alle Nullstellen von $p(x)$ einschließt. Ist $0 \leq q \leq n-2$, so sieht man in bekannter Weise, indem man das Integral abschätzt und R gegen ∞ wandern läßt, daß die Residuensumme 0 ist. Im Falle $q = n-1$ aber fügen wir zu $\frac{1}{2\pi i}\int \frac{x^{n-1}}{p(x)}\,dx$ eine lineare Kombination der als verschwindend erkannten Integrale $\int \frac{x^q}{p(x)}\,dx$ $(q = 0, 1, \cdots, n-2)$ hinzu und schreiben:

$$\sum_{\nu=1}^{n} \frac{a_\nu^{n-1}}{p'(a_\nu)} = \frac{1}{n}\,\frac{1}{2\pi i}\int \frac{n\,x^{n-1} + a_1(n-1)x^{n-2} + \cdots + a_{n-2}2x + a_{n-1}}{x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n}\,dx$$
$$= \frac{1}{n}\,\frac{1}{2\pi i}\int \frac{p'(x)}{p(x)}\,dx.$$

Das ist aber gleich dem n^{ten} Teil der Nullstellenanzahl von $p(x)$, also gleich 1.

6. Aus der Darstellung $\frac{1}{p(s)} = \int_0^\infty e^{-st} P(t)\,dt$ kann man auch die Potenzreihenentwicklung der Funktion $\frac{1}{p(s)}$ erhalten und ihre Koeffizienten durch $P(t)$ ausdrücken. Wegen $P(0) = P'(0) = \cdots = P^{(n-2)}(0) = 0, \quad P^{(n-1)}(0) = 1$ ist

$$(7)\quad P(t) = \frac{1}{(n-1)!}\,t^{n-1} + \frac{P^{(n)}(0)}{n!}\,t^n + \frac{P^{(n+1)}(0)}{(n+1)!}\,t^{n+1} + \cdots,$$

also zunächst für $\Re s > \lambda = \operatorname{Max} \Re a_\nu$:

$$\frac{1}{p(s)} = \int_0^\infty e^{-st}\left[\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} + \sum_{k=n}^{\infty} \frac{P^{(k)}(0)}{k!}\,t^k\right] dt$$

oder, indem man gliedweise integriert, was sich nach geläufigen Sätzen rechtfertigen läßt:

$$(8) \qquad \frac{1}{p(s)} = \frac{1}{s^n} + \frac{P^{(n)}(0)}{s^{n+1}} + \frac{P^{(n+1)}(0)}{s^{n+2}} + \cdots.$$

Natürlich konvergiert diese Potenzreihe für $|s| > \operatorname{Max} |\alpha_\nu|$.

Daß sich gerade die Werte $P^{(k)}(0)$ als Koeffizienten einstellen, hat einen einfachen funktionentheoretischen Grund. Bekanntlich läßt sich, wenn $\frac{1}{p(s)}$ das Laplace-Integral von $P(t)$ ist, auch umgekehrt unter gewissen Voraussetzungen $P(t)$ als ein Integral über $\frac{1}{p(s)}$ ausdrücken:

$$P(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} e^{ts} \frac{1}{p(s)}\, ds, \quad \text{wo } \gamma > \lambda.$$

Eine derartige Voraussetzung ist z. B., daß das Integral $\mathfrak{L}(P)$ für $\Re s > \lambda$ absolut konvergiert[1]), was in unserem Fall offenbar erfüllt ist. Ist die Unterfunktion im Unendlichen regulär — $\frac{1}{p(s)}$ hat diese Eigenschaft —, so läßt sich der Integrationsweg auf einen Kreis $\mathfrak{C}$ um den Nullpunkt, der die im Endlichen gelegenen Singularitäten von $\frac{1}{p(s)}$ einschließt, zusammenziehen:

$$P(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathfrak{C}} e^{ts} \frac{1}{p(s)}\, ds.$$

Folglich ist

$$P^{(k)}(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathfrak{C}} e^{ts} \frac{s^k}{p(s)}\, ds$$

und

$$P^{(k)}(0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathfrak{C}} \frac{s^k}{p(s)}\, ds.$$

Dieses Integral stellt aber gerade den Koeffizienten von $\frac{1}{s^{k+1}}$

---

[1]) H. Hamburger, Über eine Riemannsche Formel aus der Theorie der Dirichletschen Reihen. Math. Ztschr. **6** (1920) S. 1—10 [S. 6]. Daß die angeführte Bedingung hinreichend ist, folgt übrigens schon unmittelbar aus dem bekanntesten und einfachsten Kriterium für die Gültigkeit der Fourierschen Integralformel, dem von Jordan.

in der Laurent-Entwicklung von $\frac{1}{p(s)}$ dar. — Daß diese Koeffizienten für $k = 0, 1, \cdots, n-2$ verschwinden, während der für $k = n-1$ gleich 1 ist, wurde schon unter 5. bemerkt.

§ 2. Die Beziehung der Integraldarstellung zur Borelschen Summierung der Potenzreihe und über eine Erweiterung des Borelschen Summabilitätspolygons im allgemeinen.

1. In der Arbeit von Broggi wird behauptet, die Integraldarstellung (3) für $\frac{1}{p(s)}$ sei die Borelsche Summe der Potenzreihe (8) für dieselbe Funktion. Daß dies nicht ganz richtig ist, obwohl es formal zu stimmen scheint, sieht man schon daran, daß der Konvergenzbereich von (3) eine Halbebene ist, während der Borelsche Ausdruck für eine Reihe nach aufsteigenden Potenzen $f(x) = \sum\limits_{0}^{\infty} a_n x^n$, nämlich

$$f(x) = \int\limits_0^\infty e^{-u} F(xu)\, du, \tag{9}$$

wo F die zu f assoziierte Funktion

$$F(z) = \sum_0^\infty a_n \frac{z^n}{n!}$$

ist, im Innern eines den Nullpunkt einschließenden Polygons $\mathfrak{B}$[1]) (das im typischen Fall, d. h. wenn es sich nur um endlich viele Singularitäten handelt, geradlinig ist) konvergiert, sodaß also für eine Reihe nach absteigenden Potenzen $f\left(\frac{1}{s}\right) = \sum\limits_0^\infty \frac{a_n}{s^n}$ der Konvergenzbereich des Borelschen Ausdrucks

$$f\left(\frac{1}{s}\right) = \int\limits_0^\infty e^{-u} F\left(\frac{u}{s}\right) du \tag{10}$$

das Äußere des Kreisbogenpolygons $\mathfrak{B}'$ ist, das aus $\mathfrak{B}$ durch die

---

[1]) Bekanntlich bekommt man $\mathfrak{B}$, indem man durch die singulären Punkte von $f(x)$ senkrecht zu deren Verbindungsstrecken mit dem Nullpunkt Geraden zieht und von denjenigen so entstehenden Halbebenen, die den Nullpunkt enthalten, den Durchschnitt bildet (vgl. Figur 4).

Abbildung $x = \frac{1}{s}$ hervorgeht[1]). Das Integral (3) und der Borelsche Ausdruck (10) unterscheiden sich in der Tat wesentlich, und zwar liegt der Unterschied darin, daß, wenn man (10) durch die Substitution $\frac{u}{s} = t$ auf die Form eines Laplace-Integrals bringt, der Integrationsweg komplex wird:

$$(11) \qquad f\left(\frac{1}{s}\right) = s \int_0^{\frac{1}{s}\infty} e^{-st} F(t)\, dt.$$

Man hat also hier, wenn man die Summierung für ein bestimmtes s durchführen will, gerade längs des Strahles zu integrieren, der zu dem Strahl vom Nullpunkt nach s spiegelbildlich hinsichtlich der reellen Achse liegt, während in (3) die Integration stets entlang der reellen Achse zu vollziehen ist.

Nun können wir aber gerade diese Erörterungen zum Anlaß nehmen, um das Konvergenzgebiet von (3) in der in der Einleitung erwähnten Weise zu vergrößern. Hierzu schicken wir drei Bemerkungen voraus:

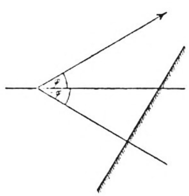

Fig. 2

1) Indem man die bei Laplace-Integralen mit reellem Integrationsweg üblichen Schlüsse sinngemäß abändert, sieht man, daß ein Laplace-Integral, dessen Integrationsweg den Winkel φ mit der reellen Achse bildet, wenn überhaupt irgendwo, so gleich in einer Halbebene konvergiert, deren Begrenzungsgerade (Konvergenzgerade) senkrecht zu dem Strahl unter dem Winkel $-\varphi$ steht (Figur 2), und dort eine analytische Funktion darstellt.

2) Wenn die dargestellte Unterfunktion im Unendlichen regulär ist, so erhält man bei Drehung des Integrationsweges die analytische Fortsetzung der Unterfunktion.

3) Wenn die Unterfunktion im Unendlichen regulär ist, so geht die Konvergenzgerade des Laplace-Integrals (mit beliebiger

[1]) Man erhält es direkt, indem man über den Verbindungsstrecken der singulären Punkte von $f\left(\frac{1}{s}\right)$ mit dem Nullpunkt als Durchmessern die Kreise beschreibt und von dem Äußern dieser Kreise den Durchschnitt nimmt (vgl. Figur 3).

Integrationsrichtung) durch einen singulären Punkt S (was ja im allgemeinen nicht der Fall zu sein braucht). Die Konvergenzgeraden lehnen sich also an die Menge der singulären Punkte der Unterfunktion an und sind die Stützgeraden des kleinsten konvexen Bereichs, der die Singularitäten enthält, d. h. der konvexen Hülle $\mathfrak{K}$ der Singularitäten (Figur 3). Dreht man daher den Integrationsstrahl und läßt ihn alle Winkelrichtungen von 0 bis 2π einnehmen, so fegen die Konvergenzhalbebenen das ganze Komplementärgebiet von $\mathfrak{K}$ aus. Man kann also die Unterfunktion in jedem Punkt außerhalb der konvexen Hülle der Singularitäten durch das Laplace-Integral

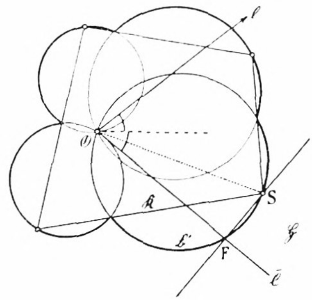

Fig. 3

$$f\left(\frac{1}{s}\right) = s \int_0^{e^{i\varphi}\infty} e^{-st} F(t)\, dt \tag{12}$$

mit einer geeignet gewählten Integrationsrichtung (auf unendlich viele Arten) darstellen[1]).

---

[1]) Diese Tatsachen lassen sich aus den beim Borelschen Summabilitätspolygon geläufigen Schlüssen und aus den Arbeiten von S. Pincherle ablesen, vgl. vor allem: Sull'inversione degl'integrali definiti. Memorie di matematica e di fisica della società italiana delle scienze (3) **15** (1908) S. 3—43 [S. 15]. Der Inhalt von 3) dürfte zum ersten Male in meinem unter Anm.[1]) S. 3 zitierten Bericht [S. 22] ausgesprochen worden sein. Am bequemsten liest man heute die Beweise nach bei G. Pólya, Untersuchungen über Lücken und Singularitäten von Potenzreihen. Math. Ztschr. **29** (1929) S. 549—640, 2. Kapitel. Hier werden 1) und 2) ausführlich dargestellt, anstelle von 3) wird dagegen nur die Konvergenz des Laplace-Integrals in einer Halbebene bewiesen, deren Begrenzungsgerade den Konvergenzkreis der die Unterfunktion darstellenden Reihe nach Potenzen von $\frac{1}{s}$, also den Kreis um den Nullpunkt durch den am weitesten außen liegenden singulären Punkt, berührt (S. 581 ff.). Doch läßt sich auch 3) in vollem Umfang aus der Darstellung von Pólya erschließen, wenn man die dortige Bemerkung unter Abschnitt 29a, S. 590, die sich nur auf einen reellen Integrationsweg bezieht, auf eine beliebige Integrationsrichtung erweitert, oder in Formel (31) S. 582 die dort benutzte grobe Abschätzung für $|F(z)|$ durch die exakte,

Für unser spezielles Laplace-Integral (3) ergibt sich hieraus, daß man diese Darstellung für $\frac{1}{p(s)}$ in das ganze Äußere des kleinsten konvexen Bereichs $\mathfrak{K}$, der die Singularitäten von $\frac{1}{p(s)}$, d. h. die Nullstellen von $p(s)$, enthält, dadurch analytisch fortsetzen kann, daß man den Integrationsweg um den Nullpunkt dreht. $\mathfrak{K}$ ist hier einfach ein geradliniges Polygon. Integriert man in der Richtung φ, so konvergiert das Integral

$$\int_0^{e^{i\varphi}\infty} e^{-st}\, P(t)\, dt$$

in derjenigen Halbebene, deren Begrenzung die Stützgerade von $\mathfrak{K}$ in der Richtung $-\varphi$ ist und die $\mathfrak{K}$ nicht enthält.

2. Da wir alles Nötige zur Hand haben, so wollen wir hier eine Betrachtung über das Borelsche Summabilitätspolygon im allgemeinen anschließen. Man sieht jetzt deutlich, warum der Borelsche Ausdruck (10) für eine Reihe nach absteigenden Potenzen nicht außerhalb des konvexen Bereichs $\mathfrak{K}$, sondern nur außerhalb des Kreisbogenpolygons $\mathfrak{B}'$ konvergiert. Schreibt man ihn nämlich in der Form (11), so zeigt sich, daß (10) die Möglichkeiten, die in dem Laplace-Integral stecken, nicht voll ausnutzt, wird doch hier für jeden Punkt s, wo die Summierung vollzogen werden soll, eine ganz bestimmte Integrationsrichtung, die durch $\frac{1}{s}$ hindurchgehende, vorgeschrieben. Hat man also eine gewisse Integrationsrichtung l gewählt, so darf man bei Borel nur diejenigen s betrachten, die auf dem an der reellen Achse gespiegelten Strahl $\bar{l}$ liegen. Nach den Erörterungen unter 1. erhält man das Konvergenzgebiet des Integrals bei fester Integrationsrichtung l, indem man eine zu $\bar{l}$ senkrechte Gerade von außen her gegen den Nullpunkt O vorschiebt, bis sie durch einen singulären Punkt S der Unterfunktion geht. Von der so erhaltenen

---

welche die Gleichung (48) S. 585 zur Verfügung stellt, ersetzt. (Bei Herübernahme der Darstellung von Pólya ist zu beachten, daß mit der Regularität einer Unterfunktion $\varphi(s)$ im Unendlichen äquivalent ist die Eigenschaft der Oberfunktion $\Phi(t)$, vom „Exponentialtyp" zu sein, d. h. $\Phi(t) = O(e^{a|t|})$, $a > 0$, für alle t.)

Konvergenzhalbebene $\mathfrak{H}$ kommen bei Borel aber nur die Punkte auf $\bar{l}$ in Betracht. Die Punkte von l, wo der Borelsche Ausdruck konvergiert, werden also von den Divergenzpunkten durch den Fußpunkt F des Lotes von S auf $\bar{l}$ getrennt (Figur 3). F liegt aber auf dem Kreis über OS als Durchmesser, und die Gesamtheit aller F erfüllt daher in der Tat das Kreisbogenpolygon $\mathfrak{B}'$ (vgl. dessen Erzeugung in Anm. [1]) S. 8). — Da die Geraden FS die Stützgeraden des konvexen Bereiches $\mathfrak{K}$ in Bezug auf O sind, so läßt sich das Verhältnis von $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{B}'$ leicht beschreiben: $\mathfrak{B}'$ ist die Fußpunktskurve von $\mathfrak{K}$ in Bezug auf O. — Läßt man in (11) die Vorschrift über den Integrationsweg fallen, so kann man durch passende Wahl der Integrationsrichtung Konvergenz in jedem Punkt außerhalb $\mathfrak{K}$ erreichen.

Hieraus ergibt sich, daß man auch für eine Reihe nach aufsteigenden Potenzen von x das Konvergenzgebiet des Borelschen Ausdrucks (9) vergrößern kann, indem man ihn zunächst (für $x \neq 0$) in der Form

$$f(x) = \frac{1}{x}\int_0^{x\infty} e^{-\frac{t}{x}} F(t)\,dt \tag{13}$$

schreibt und nun das Integral statt über den Strahl durch x über einen beliebigen Strahl erstreckt. Hat man einen gewissen Integrationsweg l in der Richtung φ gewählt, so konvergiert das Integral

$$\frac{1}{x}\int_0^{e^{i\varphi}\infty} e^{-\frac{t}{x}} F(t)\,dt \tag{14}$$

in dem Bereich, der aus der oben konstruierten Halbebene $\mathfrak{H}$ durch die Abbildung $x = \frac{1}{s}$ hervorgeht, d. h. in einem Kreis $\mathfrak{C}$ durch O, dessen Mittelpunkt auf l liegt und der im Innern keinen, auf dem Rande mindestens einen singulären Punkt S' von $f(x)$ enthält. (Bei Borel kommt von diesem Kreis nur der Durchmesser in Betracht, die Gesamtheit dieser Durchmesser erfüllt das Polygon $\mathfrak{B}$.) Läßt man φ von 0 bis 2π variieren, so fegen die Kreise $\mathfrak{C}$ ein Gebiet $\mathfrak{K}'$ aus, welches aus dem Äußeren der früher konstruierten konvexen Hülle $\mathfrak{K}$ durch die Abbildung $x = \frac{1}{s}$ hervorgeht und daher im typischen Fall von Stücken der

Kreise durch je zwei singuläre Punkte und O begrenzt wird (Figur 4). Das Borelsche Polygon $\mathfrak{B}$, das ein konvexer Bereich ist, hat offenbar den Rand von $\mathfrak{K}'$ zur Fußpunktkurve bezüglich O. — Die geometrischen Verhältnisse sind also bei aufsteigenden Potenzreihen gegenüber denen bei absteigenden gerade vertauscht: Bei Reihen nach aufsteigenden Potenzen ist der Konvergenzbereich des Borelschen Ausdrucks (9) bzw. (13) das Innere einer konvexen Kurve (Polygons), der des verallgemeinerten Laplace-Integrals (14) (mit beliebiger Integrationsrichtung) das Innere der zugehörigen Fußpunktkurve bezüglich O; bei Reihen nach absteigenden Potenzen ist der Konvergenzbereich des verallgemeinerten Laplace-Integrals (12) das Äußere einer konvexen Kurve, der des Borelschen Ausdrucks (10) bzw. (11) das Äußere der zugehörigen Fußpunktkurve; die Kurvenpaare gehen durch die Abbildung $x = \frac{1}{s}$ ineinander über, und zwar bildet sich die konvexe Kurve in der s-Ebene auf die Fußpunktkurve in der x-Ebene ab und umgekehrt.

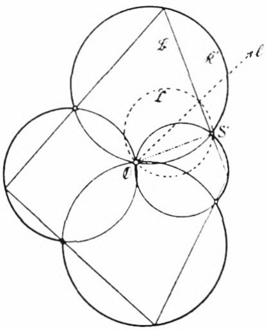

Fig. 4

§ 3. Der Fall mehrfacher Wurzeln.

1. Dieser Fall wird bei Broggi auf den Fall einfacher Wurzeln zurückgeführt, indem $p(s)$ in ein Produkt von Polynomen $p_1(s) \cdots p_r(s)$ mit lauter einfachen Wurzeln zerspalten und dann der (auch von mir früher oft benutzte) „Faltungssatz“ [1]) angewandt wird, der besagt, daß, wenn die Unterfunktionen $\frac{1}{p_1}, \cdots, \frac{1}{p_r}$ die Oberfunktionen $P_1(t), \cdots, P_r(t)$ besitzen, zu $\frac{1}{p_1} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{p_r}$ die Oberfunk-

[1]) Er wird (so auch von Broggi) meist Borel (vgl. dessen Leçons sur les séries divergentes, Paris 1901, S. 104; 2. Aufl. S. 244) zugeschrieben, kommt aber schon in älteren Untersuchungen, z. B. bei Tschebyscheff, vor, was bei seiner Einfachheit nicht zu verwundern ist, stellt er doch nichts anderes als die auf Integrale übertragene Cauchysche Multiplikationsformel für Potenzreihen dar.

tion $P_1 * P_2 * \cdots * P_r$ gehört, wo das Symbol $P_\alpha * P_\beta$ definiert ist durch das „Faltungsintegral“ $\int\limits_0^t P_\alpha(\tau)\, P_\beta(t-\tau)\, d\tau$. Aber auch im Falle mehrfacher Wurzeln ist es einfacher, analog zu § 1, 2 vorzugehen. Wenn $p(s)$ die Nullstellen $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ in der bezüglichen Vielfachheit $k_1, \cdots, k_n$ hat, so gestattet $\dfrac{1}{p(s)}$ die Partialbruchzerlegung

$$\frac{1}{p(s)} = \sum_{\nu=1}^{n} \left[\frac{r_{\nu,k_\nu}}{(s-\alpha_\nu)^{k_\nu}} + \frac{r_{\nu,k_\nu-1}}{(s-\alpha_\nu)^{k_\nu-1}} + \cdots + \frac{r_{\nu,1}}{s-\alpha_\nu}\right],$$

wobei $r_{\nu,i}$ das Residuum von $\dfrac{(s-\alpha_\nu)^{i-1}}{p(s)}$ im Punkte α_ν ist. Zu der Unterfunktion $\dfrac{1}{(s-\alpha_\nu)^i}$ gehört aber, wie man leicht verifiziert, die Oberfunktion $\dfrac{t^{i-1}}{(i-1)!}\, e^{\alpha_\nu t}$, also zu $\dfrac{1}{p(s)}$ die Oberfunktion

$$(15)\quad P(t) = \sum_{\nu=1}^{n} \left[\frac{r_{\nu,k_\nu}}{(k_\nu-1)!}\, t^{k_\nu-1} + \frac{r_{\nu,k_\nu-1}}{(k_\nu-2)!}\, t^{k_\nu-2} + \cdots + r_{\nu,1}\right] e^{\alpha_\nu t},$$

und mit diesem $P(t)$ gilt wieder die Formel (3) für $\dfrac{1}{p(s)}$ in der Halbebene $\Re s > \operatorname{Max} \Re \alpha_\nu$, bzw. bei variabler Integrationsrichtung außerhalb der konvexen Hülle der Wurzeln.

2. Daß $P(t)$ auch in diesem Fall diejenige Lösung der Differentialgleichung (4) ist, die die Anfangsbedingungen (5) erfüllt (was Broggi durch eine längere Überlegung nachweist), ist selbstverständlich, denn die Betrachtung in § 1, 3 setzt über die Vielfachheit der Nullstellen garnichts voraus.

3. Die Form (15) für die Lösung der Differentialgleichung (4) ist auch hier wieder diejenige, die man nach dem Heavisideschen expansion theorem erhalten würde, wenn man dieses auf den Fall erweitert, daß die charakteristische Gleichung mehrfache Wurzeln hat, was allerdings in den meisten Darstellungen des Heaviside-Kalküls übergangen wird.

§ 4. Ausdehnung auf allgemeinere Klassen von meromorphen Funktionen.

1. Man wird bereits bemerkt haben, daß ein wesentlicher Teil der vorhergehenden Erörterungen eigentlich garnichts mit dem Polynom $p(s)$, bzw. mit der gebrochen rationalen Funktion $\frac{1}{p(s)}$ zu tun hat. Eine Darstellung der Form (3) gilt ja für jede Funktion, die eine Unterfunktion ist — nur läßt sich eben zu $\frac{1}{p(s)}$ die zugehörige Oberfunktion, die man für diese Darstellung braucht, besonders leicht durch Partialbruchzerlegung bestimmen. Aber auch diese Möglichkeit der Berechnung der Oberfunktion ist kein Privileg der Funktion $\frac{1}{p(s)}$, sondern läßt sich zunächst in genau gleicher Weise für die allgemeinere gebrochen rationale Funktion $f(s) = \frac{q(s)}{p(s)}$, wo q niedrigeren Grad als p hat (im anderen Fall ist $f(s)$ überhaupt keine Unterfunktion), durchführen; ferner aber ist diese Berechnungsweise bei einer sehr weiten Klasse von meromorphen Funktionen anwendbar. Ist eine solche nämlich in eine Partialbruchreihe

$$f(s) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{a_\nu}{(s - \alpha_\nu)^{m_\nu}}$$

entwickelbar und schreibt man formal die gliedweise entsprechende Reihe

$$F(t) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{a_\nu}{(m_\nu - 1)!} t^{m_\nu - 1} e^{\alpha_\nu t}$$

des Oberbereichs an, so braucht diese allerdings nicht zu konvergieren und, wenn sie es tut, nicht die Oberfunktion von f darzustellen. Man kann aber auf verschiedene Weise sehr allgemeine Klassen abgrenzen, bei denen dies stimmt. Da ich demnächst in größerem Zusammenhang auf diese Dinge zurückkommen werde, so möchte ich mich hier mit diesen Andeutungen begnügen.

2. Daß die verallgemeinerte Darstellung mit vergrößertem Geltungsbereich nicht nur für $\frac{1}{p(s)}$, sondern überhaupt für jede

im Unendlichen reguläre Unterfunktion möglich ist, ging schon aus § 2, 1 deutlich hervor.

3. Anders steht es mit der (eigentlich interessantesten) Beziehung zu der Differentialgleichung (4). Hier liegt die Erweiterungsfähigkeit nicht so auf der Hand, doch lassen sich auch da Verallgemeinerungen vornehmen. Zunächst wollen wir den auch schon unter 1. angeführten einfachen Fall betrachten:

$$f(s) = \frac{q(s)}{p(s)},$$

wo

$$\begin{aligned} p(s) &= s^n + a_{n-1}\, s^{n-1} + \cdots + a_0, \\ q(s) &= b_{n-1}\, s^{n-1} + b_{n-2}\, s^{n-2} + \cdots + b_0 \end{aligned}$$

ist (von den b können beliebig viele bis auf mindestens eines verschwinden, es soll also $q(s) \not\equiv 0$ sein). Wir legen wieder die Differentialgleichung (4) mit den aus $p(s)$ entnommenen Koeffizienten zugrunde. Soll ihre Lösung ganz beliebige Anfangswerte $Y(0)$, $Y'(0), \cdots, Y^{(n-1)}(0)$ annehmen, so lautet die ihr entsprechende Gleichung im Unterbereich:

$$\begin{aligned} & s^n\, y - [\,Y(0)\, s^{n-1} + Y'(0)\, s^{n-2} + \cdots + Y^{(n-1)}(0)] \\ + \; & a_{n-1} \{s^{n-1}\, y - [\,Y(0)\, s^{n-2} + Y'(0)\, s^{n-3} + \cdots + Y^{(n-2)}(0)]\} \\ & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ + \; & a_1 \{s\, y - Y(0)\} \\ + \; & a_0\, y = 0 \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} p(s)\, y = \; & Y(0)\, s^{n-1} \\ + \; & [a_{n-1}\, Y(0) + Y'(0)]\, s^{n-2} \\ + \; & [a_{n-2}\, Y(0) + a_{n-1}\, Y'(0) + Y''(0)]\, s^{n-3} \\ + \; & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ + \; & \quad a_1\, Y(0) + a_2\, Y(0) + \cdots + Y^{(n-1)}(0). \end{aligned}$$

Die rechte Seite dieser Gleichung stimmt mit $q(s)$ überein, wenn man die Anfangswerte $Y(0)$, $Y'(0)$, $\cdots$ so wählt, daß

$$\begin{array}{llll} & Y(0) & & = b_{n-1} \\ a_{n-1} & Y(0) + & Y'(0) & = b_{n-2} \\ a_{n-2} & Y(0) + a_{n-1} & Y'(0) + Y''(0) & = b_{n-3} \\ \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \cdot \\ a_1 & Y(0) + a_2 & Y'(0) + \cdots + Y^{(n-1)}(0) & = b_0 \end{array}$$

wird. Das kann man aber stets und eindeutig erreichen, da dieses Gleichungssystem inhomogen und seine Determinante gleich 1 ist. Die Oberfunktion zu $f(s) = \frac{q(s)}{p(s)}$ ist also diejenige Lösung der Differentialgleichung (4), welche die so bestimmten Anfangswerte hat.

4. Schreitet man wie in 1. zu allgemeineren meromorphen Funktionen fort, so wird man diese jetzt als Quotienten zweier Potenzreihen darstellen:

$$f(s) = \frac{h(s)}{g(s)} = \frac{b_0 + b_1 s + b_2 s^2 + \cdots}{a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + \cdots},$$

die beständig konvergieren, falls es sich um eine in der ganzen Ebene meromorphe Funktion handelt, oder nur in einem Kreise, wenn die Funktion in diesem meromorph ist. Man übersieht, daß man in diesem Fall auf die lineare homogene Differentialgleichung unendlich hoher Ordnung:

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu Y^{(\nu)} = 0$$

geführt wird, deren Anfangswerte die unendlich vielen linearen Gleichungen erfüllen müssen:

$$\sum_{\mu=0}^{\infty} a_{\lambda+\mu+1} \overset{(\mu)}{Y}(0) = b_\lambda \quad (\lambda = 0, 1, \cdots).$$

(Natürlich sind zur Legitimierung der hierbei vorkommenden Umformungen gewisse Konvergenzvoraussetzungen zu machen.) Die Berechnung der Oberfunktion von $\frac{h(s)}{g(s)}$ erweist sich so als äquivalent mit der Auflösung einer linearen Differentialgleichung unendlich hoher Ordnung und eines Systems von unendlich vielen linearen Gleichungen mit unendlich vielen Unbekannten.