# Sitzungsberichte

der

mathematisch-naturwissenschaftlichen Abteilung

der

**Bayerischen Akademie der Wissenschaften**

zu München

1930. Heft II

Mai-Julisitzung

München 1930
Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften
in Kommission des Verlags R. Oldenbourg München

# Zur Klassifikation der räumlichen Kollineationen.

Von **E. A. Weiss**, Bonn.

Vorgelegt von S. Finsterwalder in der Sitzung am 10. Mai 1930.

Die vorliegende Note schließt sich an die in diesen Sitzungsberichten erschienene Abhandlung[1]) von R. Baldus über denselben Gegenstand an. Herr Baldus löst in seiner Abhandlung die Aufgabe, ohne Benutzung der Elementarteilertheorie und ohne der Algebra mehr als den Fundamentalsatz und die Tatsache zu entlehnen, daß eine Kollineation stets mindestens einen Ruhepunkt besitzt, in einem synthetischen, nach vollständigen Disjunktionen fortschreitenden Aufbau alle möglichen Kollineationstypen zu erschöpfen.

Man kann an die Klassifikation die weitergehende Forderung stellen, daß analytische notwendige und hinreichende Kriterien angegeben werden sollen, welche die verschiedenen Kollineationstypen charakterisieren. In diesem Falle kann man Teile der Elementarteilertheorie nicht entbehren. Man ist entweder so vorgegangen, daß man zunächst die Elementarteilertheorie im Zusammenhang dargestellt und dann als Anwendung die Klassifikation der Kollineationen behandelt hat oder so, daß man das zur Klassifikation nötige Rüstzeug aus der Elementarteilertheorie zugleich mit der Reduktion einer vorgegebenen Kollineation auf eine Normal-Form entwickelt hat[2]).

Treibt man Projektive Geometrie, so wird oft nicht nur der Typus einer vorgegebenen Kollineation und die aus ihm folgende gegenseitige Lage der Ruheelemente, sondern auch die Kenntnis der Ruheelemente selbst von Interesse sein. Wollte man in diesem Falle die Klassifizierung einer vorgegebenen Kollineation durch ihre Reduktion auf eine Normalform unter Spezialisierung

[1]) R. Baldus, Zur Klassifikation der ebenen und räumlichen Kollineationen. Sitzber. d. Bayer. Ak. d. Wiss. 1928.

[2]) H. Weyl, Mathematische Analyse des Raumproblems (1923). Anhang 12.

des Koordinatensystems vornehmen, so müßte man, um die Ruheelemente der ursprünglichen Kollineation angeben zu können, diese Spezialisierung nachträglich wieder rückgängig machen. Man vermeidet diesen Umweg, wenn man von vornherein unabhängig von der Lage des Koordinatensystems, also invariant arbeitet. So stellen sich die Aufgaben:

1. Die durch Nullsetzen von Bilinearformen in Punkt- und Ebenenkoordinaten definierten Kollineationen zu klassifizieren und für die einzelnen Kollineationstypen charakteristische Kriterien in invarianter Gestalt (Verschwinden von Invarianten, identisches Verschwinden von Kovarianten der Bilinearform) anzugeben.

2. Die Ruheelemente der Kollineation als Kovarianten der Bilinearform darzustellen und ihre Inzidenzbeziehungen aus den für den Kollineationstypus charakteristischen Kriterien herzuleiten.

Analytische Hilfsmittel, die zur Erledigung dieser Aufgaben dienen können, sind von E. Study entwickelt worden[1]).

In dieser Note beabsichtigen wir nicht, die Klassifikation der Kollineationen selbst nochmals ausführlich durchzuführen. Wir geben lediglich den dazu notwendigen Formelapparat, der in den Gleichungen (29) und (31) enthalten ist.

Nur als Beispiel, an dem wir die Arbeitsweise des Apparates demonstrieren wollen, behandeln wir zum Schluß den von Herrn Baldus besonders hervorgehobenen Fall von Kollineationen, die trotz gleicher Wurzelmultiplizitäten und gleicher Rangzahlen zu verschiedenen Typen gehören.

## 1. Kollineationen.

Durch Nullsetzen einer geordneten[2]) Bilinearform in Punktkoordinaten $X$ und Ebenenkoordinaten $U$ wird eine lineare Punktverwandtschaft im Raume definiert:

---

[1]) E. Study, Einleitung in die Theorie der Invarianten linearer Transformationen . . . Braunschweig (1923) S. 170—172. Auf dieses Buch, § 10, sei auch wegen der hier benutzten Zeichen verwiesen.

[2]) Um eine einfache Zusammensetzung der Formen zu ermöglichen, steht das zu transformierende Element an erster, das variable Element an zweiter Stelle.

$$(XA)(PU) = 0, \tag{1}$$

die eine Geradenverwandtschaft:

$$\frac{1}{2!}(UVAA')(PP'XY) = 0 \tag{2}$$

und eine Ebenenverwandtschaft:

$$\frac{1}{3!}(UAA'A'')(PP'P''X) = 0 \tag{3}$$

sicherlich dann induziert, wenn ihre Determinante von Null verschieden ist:

$$\frac{1}{4!}(AA'A''A''')(PP'P''P''') \neq 0. \tag{4}$$

Nur in diesem Fall sprechen wir von Transformationen und nennen den Inbegriff der Transformationen (1), (2), (3) eine Kollineation. Durch Umordnen der Bilinearformen erhält man die inverse Kollineation.

## 2. Singuläre Punktverwandtschaften.

Als Vorbereitung für die Klassifikation der Kollineationen dienen einige Bemerkungen über singuläre Punktverwandtschaften. Es ist dabei für unsere Zwecke nicht notwendig, diese Verwandtschaften vollständig zu klassifizieren. Nur ihre singulären und ausgezeichneten Elemente (s. u.) und deren Inzidenzbeziehungen sollen untersucht werden.

Die lineare Verwandtschaft:

$$(XB)(QU) = 0 \tag{5}$$

heißt singulär, wenn ihre Determinante verschwindet:

$$\frac{1}{4!}(BB'B''B''')(QQ'Q''Q''') = 0. \tag{6}$$

Die singulären Verwandtschaften verteilen sich nach dem Range ihrer Matrix auf drei Hauptklassen:

Im Falle einer Verwandtschaft vom Range 3:

$$\frac{1}{3!}(UBB'B'')(QQ'Q''X) \neq 0 \quad \{U, X\} \tag{7}$$

existiert ein und nur ein Punkt, dem durch (5) kein Punkt zugeordnet wird. Dieser Punkt, der singuläre Punkt $S$ der Verwandtschaft, wird durch die Gleichung:

5*

$$(8) \qquad \frac{1}{3!}(UBB'B'')(QQ'Q''X) = 0$$

dargestellt, wenn man darin für $X$ einen beliebigen Punkt wählt, der aber (8) nicht identisch befriedigen darf; (dies ist nach Voraussetzung (7) möglich); denn, wenn man:

$$(9) \qquad S = \frac{1}{3!}\overbrace{BB'B''}(QQ'Q''X)$$

für $X$ in (5) einsetzt, so folgt wegen (6):

$$(10) \qquad (SB)(QU) \equiv 0 \quad \{U\}.$$

Da die Gleichung (8) demnach für beliebiges $X$, welches nur (8) nicht identisch befriedigen darf, stets denselben Punkt $S$ darstellt, zerfällt ihre linke Seite in das Produkt einer Linearform in $U$ (die, gleich Null gesetzt, den Punkt $S$ liefert) und einer Linearform in $X$, die, gleich Null gesetzt, eine Ebene $E$ definiert. Diese Ebene:

$$(11) \qquad E = \frac{1}{3!}\overbrace{QQ'Q''}(BB'B''U)$$

enthält alle transformierten Punkte:

$$(12) \qquad (XB)(QE) \equiv 0 \quad \{X\}.$$

Wir nennen sie die ausgezeichnete Ebene der Verwandtschaft.

Analoge Überlegungen gelten für die beiden übrigen Fälle. Man kann also das Resultat folgendermaßen zusammenfassen:

### 1. Verwandtschaften vom Range 3.

$$\frac{1}{3!}(UBB'B'')(QQ'Q''X) \neq 0 \quad \{U, X\}$$

Die Form

$$(13) \qquad \frac{1}{3!}(UBB'B'')(QQ'Q''X)$$

zerfällt in das Produkt einer Linearform in Punkt- und einer Linearform in Ebenenkoordinaten, die, gleich Null gesetzt, die ausgezeichnete Ebene und den singulären Punkt der Verwandtschaft geben. Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß der singuläre Punkt auf der ausgezeichneten Ebene liegt, lautet:

$$(14)\qquad \frac{1}{3!}(B\,B'\,B''\mid Q\,Q'\,Q'')=0.$$

2. Verwandtschaften vom Range 2.

$$\frac{1}{3!}(U\,B\,B'\,B'')(Q\,Q'\,Q''\,X)\equiv 0\{U,X\},$$

$$\frac{1}{2!}(U\,V\,B\,B')(Q\,Q'\,X\,Y)\neq 0\qquad (U,V;\,X\,Y).$$

Die Form:

$$(15)\qquad \frac{1}{2!}(U\,V\,B\,B')(Q\,Q'\,X\,Y)$$

zerfällt in das Produkt zweier Linearformen in Linienkoordinaten, die, gleich Null gesetzt, die singuläre ($XY$ fest) und die ausgezeichnete ($UV$ fest) Gerade der Verwandtschaft geben. Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß die beiden Geraden von einander verschieden sind, lautet:

$$(16)\qquad \frac{1}{2!}(U\,B\,B'\mid Q\,Q'\,X)\neq 0\qquad \{U,\,X\}.$$

Die Schnittbedingung wird:

$$(17)\qquad \frac{1}{2!}(B\,B'\mid Q\,Q')=0.$$

3. Verwandtschaften vom Range 1.

$$\frac{1}{2!}(U\,V\,B\,B')(Q\,Q'\,X\,Y)\equiv 0\qquad \{U,V;\,X,Y\}$$

Die Form

$$(18)\qquad (X\,B)(Q\,U)$$

zerfällt in das Produkt einer Linearform in Punkt- und einer Linearform in Ebenenkoordinaten, die, gleich Null gesetzt, die singuläre Ebene und den ausgezeichneten Punkt der Verwandtschaft geben. Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß der ausgezeichnete Punkt auf der singulären Ebene liegt, lautet:

$$(19)\qquad (B\,Q)=0.$$

## 3. Charakteristische Gleichung und charakteristische Identitäten.

Es sei:

$$(XA)(PU) = 0 \tag{20}$$

eine vorgegebene Transformation, deren Ruhepunkte ermittelt werden sollen. Ist $X$ ein Ruhepunkt, so muß eine Identität von der Gestalt

$$A\,(XU) - (XA)(PU) \equiv 0 \quad \{U\} \tag{21}$$

bestehen. Die Ruhepunkte von (20) sind also singuläre Punkte der Verwandtschaft:

$$(XB)(QU) \equiv A\,(XU) - (XA)(PU) = 0. \tag{22}$$

Damit singuläre Punkte existieren, muß die Verwandtschaft (22) singulär sein:

$$\frac{1}{4!}(BB'B''B''')(QQ'Q''Q''') = 0. \tag{23}$$

Die Gleichung (23) heißt **charakteristische Gleichung** der Transformation (20).

Um die Koeffizienten der charakteristischen Gleichung explizite zu gewinnen, kann man folgendermaßen verfahren. Man setzt:

$$(XB)(QU) = A\,(X\bar{A})(\bar{P}U) - (XA)(PU), \tag{24}$$

wo $(X\bar{A})(\bar{P}U)$ eine andere, nur vorläufige Schreibweise für $(XU)$ sein soll, und bildet:

$$\begin{aligned}(BB'UV)(QQ'XY) &= A^2\,(\bar{A}\bar{A}'UV)(\bar{P}\bar{P}'XY)\\ &\quad - 2\,A\,(\bar{A}AUV)(\bar{P}PXY) + (AA'UV)(PP'XY).\end{aligned} \tag{25}$$

Diesen Ausdruck gestaltet man, indem man nachträglich die Bedeutung des Zeichens $(X\bar{A})(\bar{P}U)$ berücksichtigt, mittels der Formeln:

$$\begin{aligned}(\bar{A}UVW)(\bar{P}XYZ) &= 1.\,(UVW\,|\,XYZ)\\ (\bar{A}VW\,|\,\bar{P}XY) &= 2.\quad (VW\,|\,XY)\\ (\bar{A}W\,|\,\bar{P}X) &= 3.\qquad (WX)\end{aligned} \tag{26}$$

um und erhält:

$$(27)\qquad \begin{aligned}&(BB'UV)(QQ'XY) = 2\,\Lambda^2(UV\,|\,XY)\\ &-2\Lambda(\Lambda UV\,|\,PXY) + (\Lambda\Lambda'UV)(PP'XY).\end{aligned}$$

Fährt man in dieser Weise fort und setzt man:

$$(28)\qquad \begin{aligned}
f_1(\Lambda) &= \frac{1}{1!}(B\,U_3\,U_2\,U_1)(Q\,X_3\,X_2\,X_1),\\
f_2(\Lambda) &= \frac{1}{2!}(B\,B'\,U_2\,U_1)(Q\,Q'\,X_2\,X_1),\\
f_3(\Lambda) &= \frac{1}{3!}(B\,B'\,B''\,U_1)(Q\,Q'\,Q''\,X_1),\\
f_4(\Lambda) &= \frac{1}{4!}(B\,B'\,B''\,B''')(Q\,Q'\,Q''\,Q''');
\end{aligned}$$

so ergibt sich nacheinander:

(29)

$$\boxed{\begin{aligned}
f_1(\Lambda) = \quad * \qquad\qquad & * \qquad\qquad\qquad * \\
+\frac{1}{0!}(U_3\,U_2\,U_1\,|\,X_3X_2X_1)\Lambda &- \frac{1}{1!}(\Lambda\,U_3\,U_2\,U_1)(PX_3\,X_2X_1)\\
f_2(\Lambda) = \quad * \qquad\qquad & * \qquad + \frac{1}{0!}(U_2U_1\,|\,X_2X_1)\,\Lambda^2\\
-\frac{1}{1!}(\Lambda\,U_2U_1\,|\,P\,X_2X_1)\Lambda &+ \frac{1}{2!}(\Lambda\Lambda'U_2\,U_1)(P\,P'\,X_2X_1)\\
f_3(\Lambda) = \quad * \quad + \frac{1}{0!}(U_1X_1)\Lambda^3 &- \frac{1}{1!}(\Lambda\,U_1\,|\,PX_1)\,\Lambda^2\\
+\frac{1}{2!}(\Lambda\,\Lambda'\,U_1\,|\,P\,P'\,X_1)\Lambda &- \frac{1}{3!}(\Lambda\Lambda'\Lambda''U_1)(P\,P'\,P''X_1)\\
f_4(\Lambda) = \frac{1}{0!}\Lambda^4 - \frac{1}{1!}(\Lambda\,P)\,\Lambda^3 &+ \frac{1}{2!}(\Lambda\,\Lambda'\,|\,P\,P')\,\Lambda^2\\
-\frac{1}{3!}(\Lambda\,\Lambda'\,\Lambda''\,|\,P\,P'\,P'')\Lambda &+ \frac{1}{4!}(\Lambda\Lambda'\Lambda''\Lambda''')(P\,P'\,P''\,P''')
\end{aligned}}$$

Die letzte Gleichung gibt die gesuchte, explizite Form der charakteristischen Gleichung[1]). Die Ausdrücke $f_1(\Lambda)$, $f_2(\Lambda)$, $f_3(\Lambda)$ enthalten noch Punkt- und Ebenenkoordinaten. Setzt man sie identisch gleich Null, so entstehen drei charakteristische Identitäten.

[1]) E. Study, a. a. O. S. 172 (3).

Aus den Gleichungen für $f_1(\Lambda)$, $f_2(\Lambda)$, $f_3(\Lambda)$ folgen nun durch ein- oder mehrmalige Anwendung des invarianten Differentialoperators:

$$(30) \qquad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial U_0 \, \partial X_0} + \frac{\partial^2}{\partial U_1 \, \partial X_1} + \frac{\partial^2}{\partial U_2 \, \partial X_2} + \frac{\partial^2}{\partial U_3 \, \partial X_3}$$

die Formeln:

(31)

$$\boxed{\begin{aligned}
&\Delta f_1 = \frac{1!}{1!}(B U_2 U_1 | Q X_2 X_1) = f_2'; \; \Delta^2 f_1 = \frac{2!}{1!}(B U_1 | Q X_1) = f_3''; \; \Delta^3 f_1 = \frac{3!}{1!}(BQ) = f_4'''.\\
&\Delta f_2 = \frac{1!}{2!}(B B' U_1 | Q Q' X_1) = f_3'; \; \Delta^2 f_2 = \frac{2!}{2!}(B B' | Q Q') = f_4'';\\
&\Delta f_3 = \frac{1!}{3!}(B B' B'' | Q Q' Q'') = f_4';
\end{aligned}}$$

Dabei bedeuten die Akzente Ableitungen nach $\Lambda$. Der Wert der Formeln (29) und (31) beruht darauf, daß die durch Nullsetzen aus ihnen entstehenden Gleichungen und Identitäten zugleich einer einfachen geometrischen und analytischen Interpretation fähig sind.

Die geometrische Deutung ist oben unter Nr. 2 gegeben worden. Die analytische Bedeutung ist offenbar: Ebenso wie:

$$(32) \qquad f_4(M) = 0, \quad f_4'(M) = 0$$

bedeutet, daß der Faktor $(\Lambda - M)$ zweimal in der vierreihigen Determinante enthalten ist, bedeutet etwa:

$$(33) \qquad f_3(M) = 0, \quad f_3'(M) = 0,$$

daß dieser Faktor zweimal in allen dreireihigen Determinanten auftritt usw.

## 4. Ruhepunkte und Ruheebenen.

Die Formeln (29) und (31) genügen zur Klassifikation der Kollineationen[1]. Um aber aus den invarianten, für die einzelnen

[1] Bei der Klassifikation ist zu berücksichtigen, daß aus dem Verschwinden eines Ausdruckes das Verschwinden anderer Ausdrücke folgen kann. Z. B. folgt aus der Identität $f_3 = 0$ die Gleichung $f_4' = 0$; denn, wenn $\frac{1}{3!}(B B' B'' U)(Q Q' Q'' X)$ für alle $U$ und $X$ verschwindet, so ver-

Klassen charakteristischen Kriterien die daraus folgenden geometrischen Beziehungen zwischen den Ruheelementen abzuleiten, ist noch eine Vorbemerkung notwendig.

Bisher haben wir nur nach Ruhepunkten gefragt. Die Ruheebenen unserer Kollineation sind zunächst die Ruheebenen der zu (1) kontragredienten Transformation (3). Da aber eine Kollineation die gleichen Ruheelemente besitzt wie die inverse Kollineation, können wir bei der Bestimmung der Ruheebenen (3) durch die inverse Transformation:

$$(UP)(AX) = 0 \tag{34}$$

ersetzen. Eine Ruheebene der Transformation (34) ist eine singuläre Ebene der Verwandtschaft:

$$(UQ)(BX) \equiv A(UX) - (UP)(AX) = 0 \tag{35}$$

und diese besitzt wieder nur dann singuläre Ebenen, wenn ihre Determinante verschwindet:

$$\frac{1}{4!}(Q\,Q'\,Q''\,Q''')(B\,B'\,B''\,B''') = 0\,. \tag{36}$$

Die charakteristische Gleichung der Transformation (34) ist also mit der charakteristischen Gleichung von (1) identisch: Ruhepunkte unserer Kollineation sind daher singuläre Punkte und Ruheebenen ausgezeichnete Ebenen der Punktverwandtschaft (22).

Sind $A_i$ und $A_\varkappa$ Wurzeln der charakteristischen Gleichung und entspricht der Wurzel $A_i$ ein Ruhepunkt $S_i$, der Wurzel $A_\varkappa$ eine Ruheebene $E_\varkappa$, so wird:

$$A_i(S_i\,E_\varkappa) = (S_i\,A)(P\,E_\varkappa) = A_\varkappa(S_i\,E_\varkappa)\,, \tag{37}$$

also:

$$(A_i - A_\varkappa)\cdot(S_i\,E_\varkappa) = 0\,. \tag{38}$$

Gehören also ein Ruhepunkt $S_i$ und eine Ruheebene $E_\varkappa$ zu verschiedenen Wurzeln der charakteristischen Gleichung, so liegt $S_i$ auf $E_\varkappa$.

---

schwindet insbesondere $\frac{1}{3!}(B\,B'\,B''\,A)(Q\,Q'\,Q''\,P) = \frac{1}{3!}(BB'B''\,|\,QQ'Q'')$. Vgl. (26) usw.

## 5. Beispiel: Klassifikation der Kollineationen mit einer vierfach-zählenden charakteristischen Wurzel.

Die Bedingungen, denen eine vierfach-zählende Wurzel $A$ der charakteristischen Gleichung genügt, lauten:

$$f_4(A) = f_4'(A) = f_4''(A) = f_4'''(A) = 0. \tag{39}$$

Es sind folgende Fälle zu unterscheiden:

<u>1. $f_3(A) \neq 0$.</u> vgl. (13).

Ein Ruhepunkt und eine Ruheebene, nämlich:

$$\frac{1}{3!}(UBB'B'')(QQ'Q''X) = 0, \tag{40}$$

die wegen $f_4'(A) = 0$ inzident sind. Vgl. (14).

<u>2. $f_3(A) = 0, \quad f_2(A) \neq 0$.</u> vgl. (15).

Je eine als Ort von Punkten und eine als Ort von Ebenen invariante Gerade:

$$\frac{1}{2!}(UVBB')(QQ'XY) = 0. \tag{41}$$

<u>a) $f_3'(A) \neq 0$.</u> vgl. (16), (17).

Die Geraden sind verschieden, aber schneiden sich wegen $f_4''(A) = 0$.

<u>b) $f_3'(A) = 0$.</u>

Die Geraden sind identisch.

<u>3. $f_2(A) = 0, \quad f_1(A) \neq 0$.</u> vgl. (18).

Eine Ebene die punktweise und ein Punkt der ebenenweise in Ruhe bleibt:

$$(XB)(QU) = 0. \tag{42}$$

Der Punkt liegt wegen $f_4'''(A) = 0$ auf der Ebene. Vgl. (19).

<u>4. $f_1(A) = 0$.</u>

Identische Kollineation.