Sitzungsberichte

der

mathematisch-naturwissenschaftlichen Abteilung

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften

zu München

1929. Heft III
November-Dezembersitzung

München 1929
Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften
in Kommission des Verlags R. Oldenbourg München

Verallgemeinerung und neuer Beweis einiger Sätze Tauberscher Art.

Von **Otto Szász** in Frankfurt a. Main.

Vorgelegt von O. Perron in der Sitzung am 9. November 1929.

Einleitung.

In neueren Untersuchungen spielt der folgende Satz von Hardy und Littlewood [3][1]) eine wichtige Rolle:

Satz D: Die Dirichletsche Reihe $f(s) = \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu e^{-\lambda_\nu s}$, wobei

$$(1) \qquad 0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots, \; \lambda_n \to \infty, \; \frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n} \to 1 \quad \text{für} \quad n \to \infty,$$

sei für $s > 0$ konvergent; ferner sei

$$(2) \qquad a_\nu \geqq 0, \; f(s) \sim A s^{-\alpha} \quad \text{für} \quad s \to 0, \; A > 0, \; \alpha \geqq 0;$$

dann ist

$$(3) \qquad A_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n \sim \frac{A \lambda_n^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} \quad \text{für} \quad n \to \infty.$$

Im folgenden zeige ich, daß man die Bedingung $\frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n} \to 1$ streichen kann; ich beweise gleich den entsprechenden Satz für die Integrale $\int_0^\infty A(x)\, e^{-xs}\, dx$. Hierdurch wird die Beweisanordnung einfacher und durchsichtiger. Die Dirichletschen Reihen sind hierin enthalten, denn es ist zunächst, falls nur die Dirichletsche Reihe für $s > 0$ konvergiert[2]),

[1]) Die Nummern beziehen sich auf die am Schlusse angeführte Literatur.

[2]) Ohne (2) vorauszusetzen.

$$f(s) = s \sum_{1}^{\infty} A_\nu \int_{\lambda_\nu}^{\lambda_{\nu+1}} e^{-xs}\, dx\ ^{1)};$$

die rechte Seite konvergiert sogar absolut für $s > 0$. Setzt man also

(R) $A(x) = 0$ für $0 \leq x < \lambda_1$, $A(x) = A_\nu$ für $\lambda_\nu \leq x < \lambda_{\nu+1}$, $\nu = 1, 2, \ldots$,

so wird

$$f(s) = s \int_0^\infty A(x)\, e^{-xs}\, dx;$$

$A(x)$ ist streckenweise konstant und im Falle der Bedingung (2) nichtnegativ, niemals abnehmend[2]).

Der zu beweisende Hauptsatz lautet nun:

Satz I: Es sei $A(x) \geq 0$, nicht abnehmend, und das Integral

(4) $f(s) = s \int_0^\infty A(u)\, e^{-us}\, du$ sei für $s > 0$ konvergent;

ferner sei

(5) $f(s) \sim A s^{-a}$, $A > 0$, $a \geq 0$, $s \to 0$;

dann ist

$$A(x) \sim \frac{A \cdot x^a}{\Gamma(1+a)}, \quad x \to \infty.$$

Aus diesem Satz ergeben sich dann auf ganz einfache Weise Verallgemeinerungen bekannter „Tauberian theorems"[3]).

Die hier dargestellten Ergebnisse habe ich schon in meinem in der „Mathematischen und physikalischen Gesellschaft" zu Budapest am 18. April 1929 gehaltenen Vortrage erwähnt[4]), und etwas ausführlicher am 17. September 1929 anläßlich der Tagung der „Deutschen Mathematiker-Vereinigung" in Prag vorgetragen. Vor wenigen Wochen erschien eine Arbeit von Hardy und Littlewood [5], mit der sich meine Arbeit berührt[5]).

---

[1]) Dies folgt durch Anwendung der Abelschen Umformung und der bekannten Formel

$$A_n = O(e^{\delta \lambda_n}) \text{ für jedes feste } \delta > 0.$$

[2]) Das heißt $A(x_1) \geq A(x_2)$ für $x_1 > x_2$.

[3]) Der Übergang von der ganzzahligen Veränderlichen ν zur stetigen x gestattet auch eine Verschärfung des Satzes D; vgl. den Schluß des § 1.

[4]) Vgl. O. Szász **11**, insbes. S. 17—22.

[5]) Vgl. ferner Landau, Monatsh. f. Math. u. Phys. 1907, 8—28; Doetsch, Math. Ann. 82 (1920), 68—82.

§ 1. Beweis des Hauptsatzes.

Ich beweise zunächst den

Satz 1. Es sei $A(x) \geqq 0$, nicht abnehmend, und das Integral $f(s) = s\int\limits_0^\infty A(u)\, e^{-us}\, du$ sei für $s > 0$ konvergent; ferner sei $f(s) = O(s^{-\alpha})$; dann ist

$$A(x) = O(x^\alpha) \quad \text{für} \quad x \to \infty. \tag{6}$$

Aus den Voraussetzungen folgt nämlich für jedes $x > 0$

$$f(s) \geqq s\, A(x) \int\limits_x^\infty e^{-us}\, du = A(x)\, e^{-xs},$$

also für $s = \frac{1}{x} \to 0$

$$A(x) < e f\left(\frac{1}{x}\right) = O(x^\alpha). \quad \text{Qu. e. d.}$$

Zur Herleitung weiterer Hilfssätze benutze ich noch ein

Lemma von Littlewood:

Es sei

$$\psi(s) \to c \quad \text{für} \quad s \to +0,$$

und

$$s^r \psi^{(r)}(s) \quad \text{beschränkt bei festem} \quad r = 1, 2, \ldots;$$

dann ist

$$s^r \psi^{(r)}(s) \to 0, \quad s \to 0, \quad r = 1, 2, \ldots$$ [1].

Diesen Satz wende ich auf die Funktion $s^\alpha f(s) = \psi(s)$ an. Setzt man zur Abkürzung

$$(-1)^r \int\limits_0^\infty x^r A(x)\, e^{-xs}\, dx = J_r(s), \quad r = 0, 1, 2, \ldots,$$

so ist offenbar

$$J_0^{(r)}(s) = J_r(s), \quad J_0(s) = s^{-1} f(s) = s^{-(\alpha+1)} \psi(s).$$

Wegen (6) konvergieren diese Integrale für $s > 0$, und es ist

$$J_r(s) = O\left(\int\limits_0^\infty x^{r+\alpha} e^{-xs}\, dx\right) = 0\,(s^{-(r+\alpha+1)}),$$

[1] Littlewood, 8, S. 438.

ferner

$$\frac{d^r}{ds^r}[s^a f(s)] = \frac{d^r}{ds^r}[s^{a+1} J_0(s)] = s^{a+1} J_r(s)$$

$$+ \sum_{\nu=1}^{r} (a+1)\cdots(a-\nu+2)\binom{r}{\nu} s^{a-\nu+1} J_{r-\nu}(s) = O(s^{-r}).$$

Somit ist

(7) $$s^{(r)} \psi^{(r)}(s) \to 0 \quad \text{für} \quad s \to 0,\ r = 1, 2, 3, \ldots.$$

Nun ist

$$J_r(s) = \frac{d^r}{ds^r}[s^{-(a+1)} \psi(s)]$$

$$= \sum_{\nu=0}^{r} \binom{r}{\nu} (-1)^\nu \frac{\Gamma(a+\nu+1)}{\Gamma(a+1)} s^{-(a+\nu+1)} \psi^{(r-\nu)}(s),$$

also mit Rücksicht auf (5) und (7)

$$s^{a+r+1} J_r(s) \to (-1)^r \frac{\Gamma(a+r+1)}{\Gamma(a+1)} \cdot A \quad \text{für} \quad s \to 0$$ [1].

Somit gilt der

Satz 2. Unter den Voraussetzungen des Satzes I ist

(8) $$\int_0^\infty x^r A(x) e^{-xs} dx \sim s^{-(a+r+1)} A \cdot \frac{\Gamma(a+r+1)}{\Gamma(a+1)},$$

$$r = 1, 2, 3, \ldots.$$

Schließlich brauche ich zwei Integral-Ungleichungen, nämlich den

Satz 3. Für $0 < a < 1 < b$, $\varrho > 1$ gilt

(9) $$\int_0^{a\varrho} x^\varrho e^{-x} dx < \left(\frac{a}{1-a}\right)^2 \frac{\Gamma(\varrho+1)}{\varrho-1},$$

(10) $$\int_{b\varrho}^\infty x^\varrho e^{-x} dx < \left(\frac{1}{b-1}\right)^2 \frac{(\varrho+2)\Gamma(\varrho+1)}{\varrho^2}.$$

Es ist nämlich erstens für $\varrho > 1$

[1]) Vgl. auch Hardy und Littlewood, 4, Lemma 7.

$$\int_0^\infty \left(\frac{\varrho}{x}-1\right)^2 x^\varrho e^{-x}\, dx$$

$$= \varrho^2 \int_0^\infty x^{\varrho-2} e^{-x}\, dx - 2\varrho \int_0^\infty x^{\varrho-1} e^{-x}\, dx + \int_0^\infty x^\varrho e^{-x}\, dx$$

$$= \varrho^2 \Gamma(\varrho-1) - 2\varrho\,\Gamma(\varrho) + \Gamma(\varrho+1) = \frac{\Gamma(\varrho+1)}{\varrho-1}$$

$$> \int_0^{a\varrho} \left(\frac{\varrho}{x}-1\right)^2 x^\varrho e^{-x}\, dx > \left(\frac{1}{a}-1\right)^2 \int_0^{a\varrho} x^\varrho e^{-x}\, dx.$$

Zweitens ist

$$\int_0^\infty (x-\varrho)^2 x^\varrho e^{-x}\, dx = \Gamma(\varrho+3) - 2\varrho\,\Gamma(\varrho+2) + \varrho^2\,\Gamma(\varrho+1)$$

$$= (\varrho+2)\,\Gamma(\varrho+1) > \int_{b\varrho}^\infty (x-\varrho)^2 x^\varrho e^{-x}\, dx > \varrho^2 (b-1)^2 \int_{b\varrho}^\infty x^\varrho e^{-x}\, dx.$$

Damit sind die Ungleichungen (9) und (10) bewiesen[1]).

Satz I ergibt sich nun folgendermaßen:

Ich setze für ein positives ε

$$\int_0^\infty u^r A(u)\, e^{-us}\, du = \int_0^{(1+\varepsilon)\frac{r+a}{s}} + \int_{(1+\varepsilon)\frac{r+a}{s}}^\infty = V_1 + V_2;$$

dann ist

$$(11)\quad V_1 \leq A\left((1+\varepsilon)\frac{r+a}{s}\right) \int_0^\infty u^r e^{-us}\, du = \frac{r!}{s^{r+1}} A\left((1+\varepsilon)\frac{r+a}{s}\right).$$

Ferner gibt es nach Satz 1 eine Konstante K, sodaß

$$(12)\qquad A(x) < K \cdot x^a \quad \text{für} \quad x > 1,$$

daher ist für $(1+\varepsilon)\,(r+a) > s$ mit Rücksicht auf (10)

$$V_2 < K \int_{(1+\varepsilon)\frac{r+a}{s}}^\infty u^{r+a} e^{-us}\, du$$

$$= K s^{-(r+a+1)} \int_{(1+\varepsilon)(r+a)}^\infty u^{r+a} e^{-u}\, du < K s^{-(r+a+1)} \frac{\Gamma(r+a+1)}{\varepsilon^2} \cdot \frac{r+a+2}{(r+a)^2},$$

---

[1]) Für $\varrho = 2, 3, \ldots$ vgl. Hardy und Littlewood, 4, Lemma 1 und 3, Lemma D 2.

also

$$(13)\qquad V_2 < \varepsilon\, s^{-(r+\alpha+1)} \frac{\Gamma(r+\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+1)} \quad \text{für} \quad r > r_1(\varepsilon).$$

Aus (11), (8) und (13) folgt nun für $r > r_2 > r_1$

$$A\left((1+\varepsilon)\frac{r+\alpha}{s}\right) \geqq \frac{s^{r+1}}{r!} V_1 > \frac{s^{r+1}}{r!} s^{-(r+\alpha+1)} \frac{\Gamma(r+\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+1)}((1-\varepsilon)A-\varepsilon)$$

$$= \left(\frac{(1+\varepsilon)(r+\alpha)}{s}\right)^{\alpha} \frac{\Gamma(r+\alpha+1)}{r!(r+\alpha)^{\alpha}} \frac{(1+\varepsilon)^{-\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}((1-\varepsilon)A-\varepsilon);$$

hierbei ist

$$\frac{\Gamma(r+\alpha+1)}{r!(r+\alpha)^{\alpha}} > 1-\varepsilon \quad \text{für} \quad r \geqq r_3 > r_2.$$

Hieraus folgt bei festem ε und $r = r_3$ für $s \to 0$

$$\varliminf_{x\to\infty} \frac{A(x)}{x^{\alpha}} \geqq \frac{(1-\varepsilon)((1-\varepsilon)A-\varepsilon)}{(1+\varepsilon)^{\alpha}\,\Gamma(\alpha+1)},$$

also

$$(14)\qquad \varliminf \frac{A(x)}{x^{\alpha}} \geqq \frac{A}{\Gamma(\alpha+1)}.$$

Ich setze ferner für $0 < \varepsilon < 1$

$$(15)\qquad \int_0^{\infty} u^r A(u)\, e^{-us}\, du = \int_0^{(1-\varepsilon)\frac{r+\alpha}{s}} + \int_{(1-\varepsilon)\frac{r+\alpha}{s}}^{\infty} = W_1 + W_2;$$

dann ist

$$W_2 \geqq A\left((1-\varepsilon)\frac{r+\alpha}{s}\right) \int_{(1-\varepsilon)\frac{r+\alpha}{s}}^{\infty} u^r e^{-us}\, du$$

$$= A\left((1-\varepsilon)\frac{r+\alpha}{s}\right) \cdot s^{-(r+1)} \int_{(1-\varepsilon)(r+\alpha)}^{\infty} u^r e^{-u}\, du,$$

und

$$\int_{(1-\varepsilon)(r+\alpha)}^{\infty} u^r e^{-u}\, du = r! - \int_0^{(1-\varepsilon)(r+\alpha)} u^r e^{-u}\, du$$

$$= r! - \int_0^{(1-\varepsilon)r} \tau^r e^{-\tau\left(\frac{\alpha}{r}+1\right)} \left(\frac{r+\alpha}{r}\right)^{r+1} d\tau > r! - e^{(1+\varepsilon)\alpha} \int_0^{(1-\varepsilon)r} \tau^r e^{-\tau}\, d\tau$$

für $r > r_4$, also nach (9)

$$W_2 > A\left((1-\varepsilon)\frac{r+a}{s}\right) s^{-(r+1)}\left[r! - e^{2a}\left(\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}\right)^2 \frac{r!}{r-1}\right],$$

und somit

$$(16)\quad W_2 > A\left((1-\varepsilon)\frac{r+a}{s}\right)\frac{r!}{s^{r+1}}(1-\varepsilon) \quad \text{für} \quad r \geq r_5 > r_4.$$

Aus (8), (15) und (16) folgt nun

$$A\left((1-\varepsilon)\frac{r+a}{s}\right) < \frac{s^{r+1}}{r!}\,\frac{s^{-(r+a+1)}}{1-\varepsilon}\,\frac{\Gamma(a+r+1)}{\Gamma(a+1)}(1+\varepsilon)A$$

$$= \left[(1-\varepsilon)\frac{r+a}{s}\right]^a \frac{\Gamma(a+r+1)}{r!\,\Gamma(a+1)}\,\frac{(1+\varepsilon)A}{(1-\varepsilon)^{a+1}(r+a)^a}$$

$$< \left[(1-\varepsilon)\frac{r+a}{s}\right]^a \frac{(1+\varepsilon)A}{(1-\varepsilon)^{a+2}\Gamma(a+1)},$$

$(r \geq r_6)$, und hieraus wie oben

$$\overline{\lim_{x\to\infty}}\,\frac{A(x)}{x^a} \leq \frac{A}{\Gamma(a+1)}.$$

Dies mit (14) zusammen ergibt aber

$$\lim_{x\to\infty}\frac{A(x)}{x^a} = \frac{A}{\Gamma(a+1)}\cdot \text{Qu. e. d.}$$

An einer Sprungstelle kann $A(x)$ irgend einen Wert bedeuten, der zwischen $A(x-0)$ und $A(x+0)$ liegt.

Sei jetzt speziell

$$(2')\qquad f(s) = \sum a_\nu e^{-\lambda_\nu s} \sim A\, s^{-a},\; a > 0,\; A \neq 0,\; s \to 0,$$

es gelte also (R).

Dann folgt aus Satz I

$$\frac{A_\nu}{\lambda_\nu^a} \sim \frac{A_\nu}{\lambda_{\nu+1}^a}, \quad \text{also} \quad \lambda_\nu \sim \lambda_{\nu+1}.$$

Wenn also

$$\overline{\lim_{\nu \to \infty}} \frac{\lambda_{\nu+1}}{\lambda_\nu} > 1$$

ist, so kann die Beziehung (2′) nicht bestehen.

Der Satz I gilt auch für $A = 0$ in dem Sinne, daß aus $s^\alpha f(s) \to 0$ für $s \to 0$ die Beziehung $A(x) = o(x^\alpha)$ für $x \to \infty$ folgt.

Der Beweis ist sehr einfach, denn es ist wie beim Beweise des Satzes 1

$$A(x) \leqq e f\left(\frac{1}{x}\right) = o(x^\alpha).$$

§ 2. Ein allgemeines „Umkehrtheorem".

Mit Hilfe des Satzes I beweise ich jetzt den

Satz II. Es sei $\int\limits_0^\infty A(u) e^{-us} du$ konvergent für $s > 0$, und sei

$$(17) \qquad f(s) = s \int\limits_0^\infty A(u) e^{-us} du \to A \quad \text{für} \quad s \to +0,$$

ferner sei

$$(18) \qquad \underline{\lim} \, (A(y) - A(x)) \geqq 0 \quad \text{für} \quad y > x \to \infty \quad \text{und} \quad \frac{y}{x} \to 1;$$

dann ist

$$(19) \qquad \lim_{x \to \infty} A(x) = A.$$

Zum Beweise brauche ich nur die beiden folgenden Sätze herzuleiten:

Satz III. Es existiere ein Zahlenpaar $p > 0$, $\mu > 0$, sodaß

$$(20) \qquad A(y) - A(x) > -p \quad \text{für} \quad 0 < x < y \leqq (1+\mu) x;$$

dann folgt aus (17)

$$(21) \qquad \lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} \int\limits_0^x A(u) du = A.$$

Satz IV. Aus (18) und (21) folgt (19).

Der Beweis des Satzes III stützt sich auf folgende Hilfssätze:

Satz a). Es sei zur Abkürzung

$$x\,A(x) - \int_0^x A(u)\,du = v(x),$$

$$x\,v(x) - \int_0^x v(u)\,du = w(x),$$

dann folgt aus (20)

$$(22)\qquad v(y) - v(x) > -p\,y \quad \text{für} \quad 0 < x < y \leqq (1+\mu)\,x,$$

$$(22')\qquad v(t) > -\frac{\mu+1}{\mu}\,p\,t,\ t > 0,$$

$$(23)\qquad w(y) - w(x) > -p\,y^2 \quad \text{für} \quad 0 < x < y \leqq (1+\mu)\,x,$$

$$(23')\qquad w(t) > -p\,\frac{(\mu+1)^2}{\mu^2+2\mu}\,t^2,\ t > 0.$$

Beweis: Es ist

$$v(y) - v(x) = y\,A(y) - x\,A(x) - \int_x^y A(u)\,du = x\,[A(y) - A(x)]$$
$$+\int_x^y [A(y) - A(u)]\,du > -px - p\int_x^y du = -py.$$

Ferner ist

$$w(y) - w(x) = x[v(y) - v(x)] + \int_x^y [v(y) - v(u)]\,du > -pxy - py(y-x) = -py^2.$$

Sodann wird

$$v(t) = \sum_{r=1}^{\infty} [v(t(1+\mu)^{1-r}) - v(t(1+\mu)^{-r})] > -p\,t\sum_1^{\infty}(1+\mu)^{1-r}$$
$$= -p\,t\,\frac{\mu+1}{\mu},$$

$$w(t) = \sum_1^{\infty} [w(t(1+\mu)^{1-r}) - w(t(1+\mu)^{-r})] > -p\,t^2\sum_1^{\infty}(1+\mu)^{2-2r}$$
$$= -p\,t^2\,\frac{(\mu+1)^2}{2\mu+\mu^2}.$$

Satz b). Aus

$$\int_0^{\infty} F(u)\,e^{-us}\,du \to G \quad \text{für} \quad s \to 0$$

und aus

$$u\,F(u) \to 0\,,\quad u \to \infty$$

folgt:

$$\int_0^\infty F(u)\,du \text{ konvergiert und ist } = G\ ^{1)}.$$

Beweis: Es ist

$$\int_0^\infty F(u)\,e^{-us}\,du - \int_0^x F(u)\,du = -\int_0^x (1-e^{-us})\,F(u)\,du$$

$$+\int_x^\infty F(u)\,e^{-us}\,du = H_1 + H_2,$$

und für $s = \frac{1}{x}$, $x \to \infty$ ist

$$|H_1| < \frac{1}{x}\int_0^x u\,|F(u)|\,du = o\,(1),$$

$$H_2 = o\,\left(\int_x^\infty u^{-1}\,e^{-u/x}\,du\right) = o\left(\frac{1}{x}\int_x^\infty e^{-u/x}\,du\right) = o\,(1).$$

Ferner brauche ich folgende Verallgemeinerung des im § 1 zitierten Lemmas von Littlewood:

Es sei

$$\psi\,(s) \to c \quad \text{für} \quad s \to +0\,,$$

und bei passender Wahl von $K > 0$

$$s^2\,\psi''(s) > -K \quad \text{für} \quad s > 0\,,$$

dann ist

$$s\,\psi'(s) \to 0 \quad \text{für} \quad s \to +0\ ^{2)}.$$

Der Satz III ergibt sich nun folgendermaßen:

Setzt man zur Abkürzung

$$\int_0^\infty A\,(u)\,du = B\,(x),$$

so ist

$$f'(s) = \int_0^\infty A\,(u)\,e^{-us}\,du - s\int_0^\infty u\,A\,(u)\,e^{-us}\,du$$

---

[1]) Dies ist das Analogon des Tauberschen o-Satzes.

[2]) Vgl. z. B. Landau, 7, S. 54, Hilfssatz 2; Hardy und Littlewood, 2.

$$= -s\int_0^\infty [u\,A(u) - B(u)]\,e^{-us}\,du = -s\int_0^\infty v(u)\,e^{-us}\,du;$$

ebenso ergibt sich

$$f''(s) = s\int_0^\infty w(u)\,e^{-us}\,du\,.$$

Nach (23′) ist nun

$$f''(s) > -s\,p\,\frac{(1+\mu)^2}{\mu^2+2\mu}\int_0^\infty u^2\,e^{-us}\,du = \frac{-2p}{s^2}\,\frac{(1+\mu)^2}{\mu^2+2\mu},$$

also nach dem eben zitierten Lemma wegen (17)

$$s^2\int_0^\infty v(u)\,e^{-us}\,du \to 0 \quad \text{für} \quad s \to 0. \tag{24}$$

Ferner ist offenbar

$$s^2\int_0^\infty u\,e^{-us}\,du = 1, \tag{25}$$

also mit Rücksicht auf (24)

$$s^2\int_0^\infty \left[v(u) + p\,\frac{1+\mu}{\mu}\,u\right] e^{-us}\,du \sim p\,\frac{1+\mu}{\mu} \quad \text{für} \quad s \to 0;$$

setzt man zur Abkürzung

$$\int_0^x v(u)\,du = E(x),$$

so ergibt nun partielle Integration

$$s^3\int_0^\infty \left[E(u) + p\,\frac{1+\mu}{\mu}\,\frac{u^2}{2}\right] e^{-us}\,du \sim p\,\frac{1+\mu}{\mu}, \quad s \to 0.$$

Hierauf ist wegen (22′) der Satz I mit $a = 2$ anwendbar, und man erhält zunächst

$$E(x) + p\,\frac{1+\mu}{\mu}\,\frac{x^2}{2} \sim p\,\frac{(1+\mu)}{\mu}\,\frac{x^2}{2}, \quad x \to \infty,$$

das heißt

$$E(x) = o(x^2), \quad x \to \infty. \tag{26}$$

Offenbar darf ohne Einschränkung der Allgemeinheit $A(u) \to 0$ und $v(u) = o(u^2)$ für $u \to 0$ angenommen werden; dann ist auch $B(u) = o(u)$, $E(u) = o(u^3)$, $u \to 0$. Nun ergibt partielle Integration mit Rücksicht auf die Definition von $v(x)$

$$\int_0^u v(t)\, t^{-2}\, dt = \frac{1}{u} B(u) \tag{27}$$

und andererseits

$$\int_0^u v(t)\, t^{-2}\, dt = \frac{E(u)}{u^2} + 2\int_0^u E(t)\, t^{-3}\, dt,$$

ferner

$$f(s) = s^2 \int_0^\infty B(u)\, e^{-us}\, du.$$

Somit wird

$$f(s) = s^2 \int_0^\infty \{u \int_0^u v(t)\, t^{-2}\, dt\}\, e^{-us}\, du$$

$$= s^2 \int_0^\infty \left\{\frac{E(u)}{u} + 2u\int_0^u E(t)\, t^{-3}\, dt\right\} e^{-us}\, du \to A.$$

Nun ist offenbar wegen (26) $|E(u)| < \varepsilon u^2$ für $u > u_0$, also

$$s^2 \int_0^\infty \frac{E(u)}{u}\, e^{-us}\, du = s^2 \int_0^{u_0} + s^2 \int_{u_0}^\infty = o(1) \quad \text{[wegen (25)]}.$$

Also ist

$$2\, s^2 \int_0^\infty (u \int_0^u E(t)\, t^{-3}\, dt)\, e^{-us}\, du \to A,$$

oder durch partielle Integration

$$2\, s \int_0^\infty \left\{\int_0^u E(t)\, t^{-3}\, dt + E(u) \cdot u^{-2}\right\} e^{-us}\, du \to A.$$

Hier ist wegen (26)

$$s \int_0^\infty E(u)\, u^{-2}\, e^{-us}\, du = s\int_0^{u_0} + s\int_{u_0}^\infty = o(1),$$

also wird

$$2\, s \int_0^\infty \left(\int_0^u E(t)\, t^{-3}\, dt\right) e^{-us}\, du \to A, \quad s \to 0,$$

oder nach partieller Integration

$$2 \int_0^\infty E(u)\, u^{-3}\, e^{-us}\, du \to A, \quad s \to 0.$$

Hieraus und aus (26) folgt nun nach Satz b)

$$2\int_0^\infty E(u)\, u^{-3}\, du = A,$$

und nach partieller Integration mit Rücksicht auf (26)

$$\int_0^\infty \frac{v(u)}{u^2}\, du = A;$$

dies heißt aber nach (27)

$$\lim_{x\to\infty} \frac{B(x)}{x} = A,$$

oder

$$\lim_{x\to\infty} \sigma(x) = A,$$

wobei zur Abkürzung

$$\frac{1}{x} B(x) = \sigma(x)$$

gesetzt ist.

Dem Beweise des Satzes IV schicke ich folgende Bemerkung voraus:

Aus (18) folgt, daß es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\lambda > 0$, $\xi > 0$ gibt, sodaß

(18′) $\quad A(y) - A(x) > -\varepsilon \quad$ für $\quad \xi < x < y \leqq (1+\lambda)\, x$

ist; denn sonst gäbe es ein ε_0 und zu jeder natürlichen Zahl ν ein Wertepaar x_ν, y_ν, für das

$$A(y_\nu) - A(x_\nu) \leqq -\varepsilon_0 \quad \text{und} \quad \nu < x_\nu < y_\nu \leqq \left(1+\frac{1}{\nu}\right) x_\nu$$

gilt; dies ist aber im Widerspruch zu (18).

Es sei jetzt $\varepsilon > 0$ beliebig gegeben; offenbar ist

$$\frac{1}{\lambda x}\int_x^{(1+\lambda)x} A(y)\, dy = \frac{1}{\lambda x}\left[(1+\lambda)\, x\, \sigma((1+\lambda)\, x) - x\, \sigma(x)\right]$$
$$= \frac{1}{\lambda}\left[\sigma((1+\lambda)\, x) - \sigma(x)\right] + \sigma((1+\lambda)\, x),$$

also

$$A(x) - \sigma((1+\lambda)\, x)$$
$$= \frac{1}{\lambda}\left[\sigma((1+\lambda)\, x) - \sigma(x)\right] - \frac{1}{\lambda x}\int_x^{(1+\lambda)x} \left[A(y) - A(x)\right] dy.$$

Nun ist nach Satz III

$$\sigma((1+\lambda)x)-\sigma(x)<\varepsilon\lambda \quad \text{für} \quad x>x_0(\varepsilon),$$

somit folgt aus (18′)

$$A(x)-\sigma((1+\lambda)x)<2\varepsilon \quad \text{für} \quad x>x_0,$$

also

$$\overline{\lim_{x\to\infty}}\,(A(x)-A)\leq 0.$$

Analog ist

$$\frac{1+\lambda}{\lambda x}\int_{\frac{x}{1+\lambda}}^{x} A(u)\,du=\frac{1+\lambda}{\lambda x}\left[x\,\sigma(x)-\frac{x}{1+\lambda}\,\sigma\left(\frac{x}{1+\lambda}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{\lambda}\left[\sigma(x)-\sigma\left(\frac{x}{1+\lambda}\right)\right]+\sigma(x),$$

also

$$A(x)-\sigma(x)=\frac{1}{\lambda}\left[\sigma(x)-\sigma\left(\frac{x}{1+\lambda}\right)\right]$$

$$+\frac{1+\lambda}{\lambda x}\int_{\frac{x}{1+\lambda}}^{x}[A(x)-A(u)]\,du>-2\varepsilon \quad \text{für} \quad x>x_1(\varepsilon);$$

hieraus folgt

$$\underline{\lim_{x\to\infty}}\,(A(x)-A)\geq 0,$$

also schließlich

$$\lim_{x\to\infty} A(x)=A. \quad \text{Qu. e. d.}$$

A n w e n d u n g a u f D i r i c h l e t s c h e R e i h e n. Im Falle

$$f(s)=\sum_{1}^{\infty} a_\nu\, e^{-\lambda_\nu s}$$

wird aus der Bedingung (18) mit Rücksicht auf (R) $\underline{\lim}\, a_\nu \geq 0$ und

(18″) $$\underline{\lim_{\mu>\nu}}\,(A_\mu-A_\nu)\geq 0 \quad \text{für} \quad \frac{\lambda_\mu}{\lambda_\nu}\to 1.$$

Hierzu genügt z. B. $\underline{\lim}\, a_\nu \geq 0$ und

(28) $$a_\nu>-C\,\frac{\lambda_\nu-\lambda_{\nu-1}}{\lambda_\nu}, \quad \nu=1,2,3,\ldots,$$

denn es ist dann

$$A_\mu-A_\nu>-C\sum_{\varkappa=\nu+1}^{\mu}\frac{\lambda_\varkappa-\lambda_{\varkappa-1}}{\lambda_\varkappa}>-\frac{C}{\lambda_\nu}(\lambda_\mu-\lambda_\nu)$$

$$=-C\left(\frac{\lambda_\mu}{\lambda_\nu}-1\right).$$

Unter der Bedingung (28) haben den Konvergenzsatz im Falle $\frac{\lambda_{\nu+1}}{\lambda_\nu} \to 1$ Hardy und Littlewood [3] bewiesen. Ohne diese Zusatzbedingung, aber mit der engeren Voraussetzung $a_n = O\left(\frac{\lambda_n - \lambda_{n-1}}{\lambda_n}\right)$, hat den Satz Herr K. Ananda-Rau [1] bewiesen.

Auch die Bedingung

$$(29) \qquad \sum_{\nu=2}^{n} \frac{\lambda_\nu^{p+1} |a_\nu|^{p+1}}{(\lambda_\nu - \lambda_{\nu-1})^p} = O(\lambda_n) \quad \text{für ein} \quad p > 0,\ n \to \infty$$

läßt sich auf (18″) zurückführen; denn die Anwendung der Hölderschen Ungleichung ergibt in diesem Falle sogar

$$(30) \qquad \lim_{\mu > \nu} |A_\mu - A_\nu| = 0 \quad \text{für} \quad \frac{\lambda_\mu}{\lambda_\nu} \to 1.$$

Unter der Bedingung (29) habe ich einen verhältnismäßig einfachen, mit den hier angewandten Überlegungen verwandten Konvergenzbeweis in meinem auf dem internationalen Kongreß zu Bologna am 4. September 1928 gehaltenen Vortrag ausgeführt[1]).

Die Bedingung (30) rührt von Herrn Landau [6] her; die von ihm weiterhin eingeführte Voraussetzung $A_n = O(1)$ läßt sich aus den beiden andern auf elementarem Wege herleiten.

Für Potenzreihen ($\lambda_\nu = \nu$) wird aus (18″)

$$\underline{\lim}_{\mu > \nu} (A_\mu - A_\nu) \geq 0 \quad \text{für} \quad \frac{\mu}{\nu} \to 1.$$

Den entsprechenden Satz hat mit recht schwierigen Hilfsmitteln zuerst Herr Robert Schmidt [9] bewiesen; einen einfacheren Beweis gab Herr Vijayaraghavan [12][2]).

---

1) Vgl. hierzu im Falle der Potenzreihen Szász [10].

2) Zusatz bei der Korrektur (3. II. 1930). In einer kürzlich erschienenen Arbeit des Herrn Izumi (A generalization of Taubers theorem, Jap. Journal of Math. VI (1929), 235—243) wird auch unter der Bedingung (28) aber ohne die Einschränkung $\underline{\lim}\, a_\nu \geq 0$ die Konvergenz der Reihe $\sum a_\nu$ behauptet. Der Beweis enthält eine Lücke und der Satz gilt dann nicht mehr, wie aus einem neulich veröffentlichten Beispiel von Herrn Ananda-Rau (An example in the theory of summation of series by Riesz's typical means, Proc. L. M. S. (2), 30 (1930), 367—378) hervorgeht.

Literatur-Nachweis.

1. K. Ananda-Rau, On the converse of Abels theorem, Journal London Math. Soc. 3 (1928), 200—205.
2. G. H. Hardy und J. E. Littlewood, Tauberian theorems concerning power series and Dirichlets series whose coefficients are positive, Proc. London Math. Soc. (2), 13 (1914), 174—191.
3. — —, Some theorems concerning Dirichlets series, Messenger of Math. 43 (1914), 134—147.
4. — —, A further note on the converse of Abels theorem, Proc. London Math. Soc. (2), 25 (1926), 219—236.
5. — —, On Tauberian theorems, Proc. London Math. Soc. (2), 30 (1929), 23—37.
6. E. Landau, Über einen Satz des Herrn Littlewood, Rendic. Circ. Matem. Palermo 35 (1913), 265—276.
7. — —, Darstellung und Begründung einiger neuerer Ergebnisse der Funktionentheorie, 1916. 2. A. 1929.
8. J. E. Littlewood, The converse of Abels theorem on power series, Proc. London Math. Soc. (2), 9 (1911), 434—448.
9. R. Schmidt, Über divergente Folgen und lineare Mittelbildungen, Math. Zeitschrift 22 (1925), 89—152.
10. O. Szász, Verallgemeinerung eines Littlewoodschen Satzes über Potenzreihen, Journal London Math. Soc. 3 (1928), 254—262.
11. — —, Über neuere Untersuchungen im Zusammenhange mit dem Abelschen Potenzreihensatz, Mat. és Fiz. Lapok 36 (1929), 10—22.
12. T. Vijayaraghavan, A Tauberian theorem, Journal London Math. Soc. 1 (1926), 113—120.