Sitzungsberichte

der

mathematisch-naturwissenschaftlichen Abteilung

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften

zu München

1929. Heft III

November-Dezembersitzung

München 1929
Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften
in Kommission des Verlags R. Oldenbourg München

PRUSS. AKADEMIE D. WISSEN

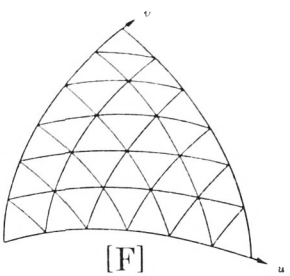
Herleitung differentialgeometrischer Flächeneigenschaften aus Sehnen-Dreiecksflachen.

Von **Robert Sauer** in München.

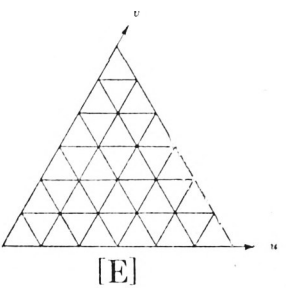
Vorgetragen in der Sitzung am 9. November 1929.

§ 1. Infinitesimale Dreiecksnetze und Dreiecksflache.

Unter einer Fläche $[F]$ verstehen wir im Folgenden das topologische Bild eines ebenen gleichseitig-dreieckigen Bereiches $[E]$ mit der Seitenlänge 1.



Figur 1 a



Figur 1 b

Führt man 2 Seiten von $[E]$ als schiefwinkelige Koordinatenachsen u, v ein, so entsprechen den 3 Systemen seitenparalleler Geraden $u =$ const., $v =$ const., $w \equiv u + v =$ const. des Bereiches $[E]$ auf $[F]$ 3 Systeme von Kurven („Parameterlinien"), denen wir die nämlichen Parameterwerte u, v, w zuordnen wollen. Die Fläche $[F]$ läßt sich analytisch darstellen durch drei Funktionen $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ für die Koordinaten ihrer Punkte. Wir setzen allgemein fest, daß x, y, z im Definitionsbereich $0 \leq u, v, w \leq 1$ dreimal nach u und v stetig differenzierbar seien. Aus den 3 Parametersystemen greifen wir die diskreten Werte $u = \frac{h}{\varrho}$, $v = \frac{i}{\varrho}$, $w = \frac{k}{\varrho}$

(ϱ = positive ganze Zahl, $h, i, k = 0, 1, 2, \ldots (\varrho - 1), \varrho$) heraus und bestimmen dadurch in $[E]$ ein „Dreiecksnetz" von ϱ^2 gleichseitigen Dreiecken der Seitenlänge $\frac{1}{\varrho}$.

Das topologische Bild des „Dreiecksnetzes" von $[E]$ ist auf $[F]$ in der nämlichen Weise ein *„Dreiecksnetz"*. Die ϱ^2 Netzdreiecke sind naturgemäß im allgemeinen nicht kongruent, jedoch sind ebenso wie in $[E]$ alle (krummlinigen) Dreiecksseiten von nicht verschwindender Länge (Figur 1).

Für $\varrho \to \infty$ bekommt man der Reihe nach immer „engere" Dreiecksnetze, d. h. die Zahl der Maschendreiecke wächst unbegrenzt und alle Seitenlängen der Dreiecksmaschen (sowohl in $[E]$ als auch in $[F]$) nehmen unbegrenzt ab. Diese für $\varrho \to \infty$ unbegrenzt enger werdenden Netze sollen *„infinitesimale Dreiecksnetze"* heißen.

Ersetzt man in einem der betrachteten Dreiecksnetze auf $[F]$ die im allgemeinen krummlinigen Dreiecksseiten durch ihre geradlinigen Sehnen, so entsteht — wenn die Netzknotenpunkte nicht zufällig in einer Ebene liegen — ein räumliches, aus lauter geradlinig begrenzten ebenen Dreiecken zusammengesetztes Gebilde, das ich als *„Dreiecksflach"* oder mit Rücksicht auf seine Lage zu $[F]$ als *„Sehnen-Dreiecksflach* $[\Delta_\varrho]$" bezeichnen werde. Dem Grenzübergang $\varrho \to \infty$ des infinitesimalen Dreiecksnetzes ordnet sich das *„infinitesimale Dreiecksflach"* zu, bei dem ebenfalls alle Dreiecksseiten für $\varrho \to \infty$ unbegrenzt abnehmen.

Problemstellung:

Aus solchen elementar-geometrischen (trigonometrischen) Eigenschaften der Sehnendreiecksflache, welche bei dem Grenzübergang $\varrho \to \infty$ erhalten bleiben, können differentialgeometrische Eigenschaften der Fläche $[F]$ selbst hergeleitet werden[1]).

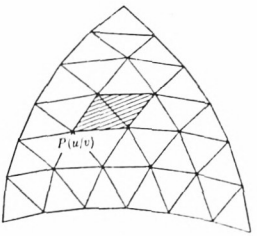
Das Ziel der folgenden Untersuchungen ist es, durch die angegebene Methode (die Fundamentalgrößen der Flächentheorie zu entwickeln und dadurch) zu einem elementaren Be-

[1]) In diesem Zusammenhange sei verwiesen auf die in der Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften III D 6a, Seite 437—440 angegebene Literatur, besonders S. Finsterwalder, Mechanische Beziehungen bei der Flächendeformation, Deutsche Math. Verein. 6 (1899) Seite 45—99.

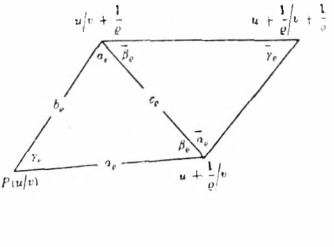
weis der Mainardi-Codazzischen Gleichungen und der Gaußschen Gleichung vom Krümmungsmaß zu gelangen.

In den nächsten beiden Abschnitten werden wir uns lediglich mit den endlichen Sehnendreiecksflachen beschäftigen. In den späteren Abschnitten behandeln wir dann den Übergang zum infinitesimalen Sehnen-Dreiecksflach und zu den differentialgeometrischen Eigenschaften der Fläche $[F]$.

§ 2. Definitionen für das Dreiecksflach $[\Delta_\varrho]$.



Figur 2a



Figur 2b

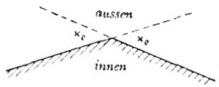
Jedem „Knotenpunkt" $P(u, v;\ w \neq 1)$ des Dreiecksflaches $[\Delta_\varrho]$ ist eindeutig ein Dreieck $u \mid v;\ u + \frac{1}{\varrho} \mid v;\ u \mid v + \frac{1}{\varrho}$ und $\left(\text{wenn } w \neq 1 - \frac{1}{\varrho}\right)$ unter Hinzunahme des Punktes $u + \frac{1}{\varrho} \mid v + \frac{1}{\varrho}$ ein „geknicktes" Viereck zugeordnet. Die 3 Seiten des Dreiecks, die 6 Winkel des geknickten Vierecks und die 3 an den Seiten des Dreiecks liegenden Keilwinkel des Dreiecksflachs (= Winkel der an der betreffenden Seite sich schneidenden Dreiecksebenen) sollen, als „zum Knotenpunkt $P(u, v)$ gehörig", folgendermaßen (vgl. Figur 2b) bezeichnet werden:

3 Dreiecksseiten	$a_\varrho(u, v),\ b_\varrho(u, v),\ c_\varrho(u, v);$
6 Dreieckswinkel	$\alpha_\varrho(u, v),\ \beta_\varrho(u, v),\ \gamma_\varrho(u, v);$
	$\bar{\alpha}_\varrho(u, v),\ \bar{\beta}_\varrho(u, v),\ \bar{\gamma}_\varrho(u, v);$
3 Keilwinkel	$\varkappa_\varrho(u, v),\ \lambda_\varrho(u, v),\ \mu_\varrho(u, v).$

Definitionsgemäß ist

$a_\varrho > 0, \qquad 0 < \alpha_\varrho < \pi$ und analog für $b_\varrho, \beta_\varrho, \bar{\beta}_\varrho;\ c_\varrho, \gamma_\varrho, \bar{\gamma}_\varrho$.

Ferner sollen die Keilwinkel $\varkappa_\varrho$, λ_ϱ, μ_ϱ als Außenwinkel im Normalschnitt zu der betreffenden Kante a_ϱ, b_ϱ, c_ϱ gemessen werden (Figur 3).



Figur 3

Da $[F]$ einfach zusammenhängend ist, kann eine Außen- und Innenseite festgelegt werden. Dadurch läßt sich für das Vorzeichen von $\varkappa_\varrho$ die Bestimmung treffen

$\varkappa_\varrho \gtrless 0$: $[\Delta_\varrho]$ ist bei a_ϱ von außen gesehen $\begin{cases} \text{konvex,} \\ \text{konkav.} \end{cases}$ (Analog $\lambda_\varrho \mu_\varrho$.)

In Figur 3 ist $\varkappa_\varrho > 0$.

Ordnet man jedem Knotenpunkt $P\,(w \neq 1)$ in der angegebenen Weise seine Dreiecksseiten, Dreieckswinkel und Keilwinkel zu, so werden sämtliche Seiten und Winkel von $[\Delta_\varrho]$ erschöpft. (Für $u = 0$ fallen die λ_ϱ, für $v = 0$ die $\varkappa_\varrho$, für $w = 1 - \frac{1}{\varrho}$ die μ_ϱ sowie die $\bar{\alpha}_\varrho$, $\bar{\beta}_\varrho$, $\bar{\gamma}_\varrho$ weg.)

§ 3. Beziehungen zwischen den Seiten und Winkeln des Dreiecksflachs $[\Delta_\varrho]$.

Die Dreiecksseiten, Dreieckswinkel und Keilwinkel sind nicht voneinander unabhängig. Es sollen jetzt alle zwischen ihnen bestehenden Beziehungen aufgefunden werden.

Dabei gehen wir in 3 Schritten vorwärts, indem wir der Reihe nach zuerst die einzelnen Dreiecke, dann die einzelnen Sechskante $[K]$, welche in jedem inneren Knotenpunkt von den 6 dort zusammentreffenden Dreiecken gebildet werden, und schließlich das gesamte Dreiecksflach $[\Delta_\varrho]$ aufzubauen suchen.

I. Einzeldreieck.

Jedes Dreieck ist durch seine 3 Seiten und 3 Winkel festgelegt. Für die Existenz des Dreiecks ist notwendig und hinreichend, daß die Summe von 2 Dreieckseiten größer ist als die 3. Seite. Dies gibt für die in Figur 2b gezeichneten Dreiecke die Ungleichungen

$$\text{(I)}\qquad \boxed{\begin{array}{lll} a_\varrho(u, v) & + b_\varrho(u, v) & > c_\varrho(u, v) \\ a_\varrho(u, v + \frac{1}{\varrho}) & + b_\varrho(u + \frac{1}{\varrho}, v) & > c_\varrho(u, v) \end{array}}$$

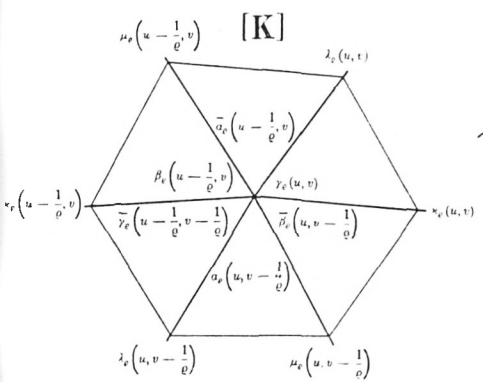
Die Dreieckswinkel lassen sich dann in bekannter Weise trigonometrisch aus den Seiten berechnen; es sei dies symbolisch angedeutet durch

$$\alpha_\varrho = f(a_\varrho, b_\varrho, c_\varrho). \quad \text{(Analog für } \beta_\varrho, \beta_\varrho \text{ u. s. f.)}$$

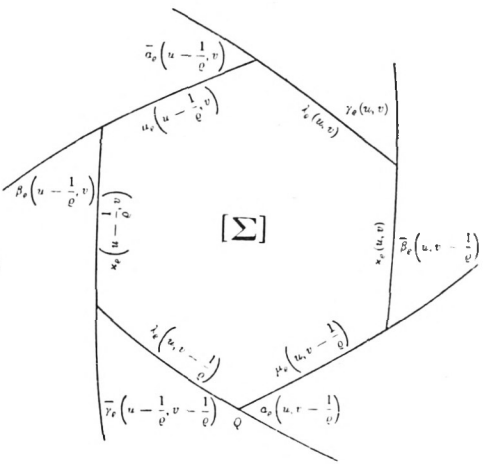
II. Sechskant $[K]$.

Nunmehr sollen die Einzeldreiecke in jedem inneren Knotenpunkt $P(u, v)$ zu einem Sechskant $[K]$ zusammengefaßt werden, so daß die Keilwinkel des Sechskants mit den vorgegebenen Werten $\varkappa_\varrho$, λ_ϱ, μ_ϱ übereinstimmen.

In Figur 4a, b ist dem Sechskant $[K]$ das Kugelsechseck $[\Sigma]$ gegenübergestellt, welches vom Polarsechskant auf der konzentrischen Einheitskugel ausgeschnitten wird.



Figur 4a

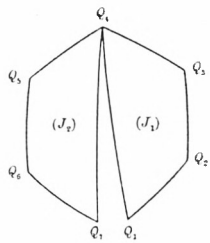


Figur 4b

Die Keilwinkel $\varkappa_\varrho$, λ_ϱ, μ_ϱ und die Dreieckswinkel α_ϱ, α_ϱ u. s. f. des Sechskants $[K]$ sind gleichzeitig die Seiten bzw. die Außenwinkel des Kugelsechsecks $[\Sigma]$.

Die 6 Seiten und 6 Winkel von $[\Sigma]$ sind sämtlich durch die a_ϱ, b_ϱ, c_ϱ und $\varkappa_\varrho$, λ_ϱ, μ_ϱ festgelegt. Es müssen infolgedessen 3 Beziehungen bestehen, wie man folgendermaßen erkennt:

1. Schließungssätze.



Figur 5

Zunächst sehen wir vom Winkel α_ϱ bei Q (Figur 4b) ab und konstruieren aus den übrigen Winkeln und aus allen Seiten von $[\Sigma]$ auf der Einheitskugel den sphärischen Sechszug $Q_1\, Q_2 \ldots Q_7$ (Figur 5). Die Schließungsforderung $Q_1 = Q_7 = Q$ gibt 2 Gleichungen

$$\text{(II 1)} \qquad \boxed{A = 0 \qquad B = 0}$$

zwischen allen Seiten und Winkeln von $[\Sigma]$ ausschließlich $\sphericalangle Q$ (Figur 4b). Für das Folgende ist es nicht nötig, die weitläufigen analytischen Ausdrücke A, B auszuschreiben; es genügt A, B durch ihre geometrische Bedeutung zu fixieren:

$A =$ sphärische Normalprojektion des Sechszuges $Q_1 \ldots Q_7$ auf den Hauptkreis $Q_1\, Q_2$,

$B =$ sphärische Normalprojektion des Sechszuges $Q_1 \ldots Q_7$ auf den zu $Q_1\, Q_2$ mittelsenkrechten Hauptkreis.

2. Flächensatz.

Beim Erfülltsein der Bedingungen $A = 0$, $B = 0$ wird der offene Sechszug $Q_1\, Q_2 \ldots Q_6\, Q_7$ zum geschlossenen Kugelsechseck $Q_1\, Q_2 \ldots Q_6\, Q_1$, welches in allen Seiten und Winkeln, ausgenommen $\sphericalangle Q$ mit $[\Sigma]$ übereinstimmt. Damit nun auch der letzte Winkel $\sphericalangle Q$ von Σ den geforderten Wert annimmt, haben wir noch eine 3. Bedingung hinzuzufügen:

$$\text{(II 2)} \qquad \boxed{C = 0}$$

zwischen allen Seiten und allen Winkeln von $[\Sigma]$ einschließlich $\sphericalangle Q$.

Auch C soll nur durch seine geometrische Bedeutung fixiert werden:

Sei (J_1) = Fläche des Kugelvierecks $Q_1\,Q_2\,Q_3\,Q_4$ } in Figur 5,
(J_2) = Fläche des Kugelvierecks $Q_4\,Q_5\,Q_6\,Q_7$ }
(J) = Fläche des Kugelsechsecks Σ der Figur 4b,

so läßt sich $\sphericalangle Q$, nach Erfülltsein der Gleichungen $A = 0$, $B = 0$, berechnen aus dem Ansatz

$$(J_1) + (J_2) = (J) = 2\pi - \text{Außenwinkelsumme}.$$

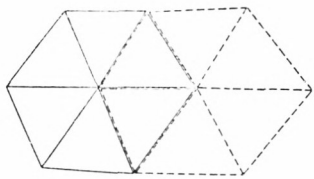
Für $C \equiv (J_1) + (J_2) - 2\pi +$ Außenwinkelsumme folgt daraus (II 2).

(J_1), (J_2) enthalten alle Seiten und Winkel von $[\Sigma]$ ausschließlich $\sphericalangle Q$, die Außenwinkelsumme enthält alle Winkel von $[\Sigma]$ einschließlich $\sphericalangle Q$.

($(J) = 2\pi -$ Außenwinkelsumme hat auch folgende geometrische Bedeutung: Schneidet man das Sechskant $[K]$ an einer Kante auf und breitet es in die Ebene aus, so bleibt in der ebenen Abwickelung an der aufgeschlitzten Kante eine Lücke oder die Abwickelung überdeckt sich teilweise. Der „Lücken- bzw. Überdeckungswinkel" soll positiv bzw. negativ gerecht werden und ist dann gleich der Differenz $2\pi -$ Außenwinkelsumme = Fläche des zugehörigen Kugelsechsecks $[\Sigma]$.)

III. Gesamtes Dreiecksflach $[\Delta_\varrho]$.

Wenn für alle Einzeldreiecke die Ungleichungen (I) und für jeden inneren Knotenpunkt P die 3 Gleichungen (II 1), (II 2) erfüllt sind, so lassen sich aus den angegebenen Bestimmungsstücken die Einzeldreiecke konstruieren und für jeden inneren Knotenpunkt zu den einzelnen Sechskanten zusammenfügen. Die Konstruktionen verlaufen eindeutig, wenn man von vornherein die Vorzeichen der $\varkappa_\varrho$, λ_ϱ, μ_ϱ durch Annahme einer Außenseite von $[\Delta_\varrho]$ definiert. (Bei Vertauschung der Außen- und Innenseite und damit der Vorzeichen von $\varkappa_\varrho$ u.s.f. geht jedes Sechskant $[K]$ in sein Spiegelbild über.)



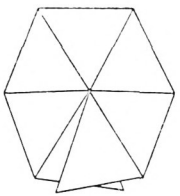
Figur 6

Ihrer Konstruktion nach lassen sich für 2 benachbarte Knotenpunkte die (sechseckig abgegrenzten) Sechskante mit je 2 Dreiecken zur Deckung bringen (vgl. Figur 6). Auf diese Weise fortfahrend, kann man alle Sechskante der Reihe nach

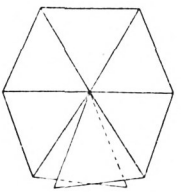
lückenlos zusammenfügen und so das gesamte Dreiecksflach $[\Delta_\varrho]$ aufbauen, abgesehen von gewissen Randdreiecken, die am Schlusse angefügt werden können.

Ergebnis:

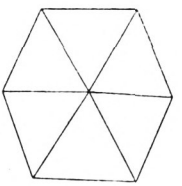
Aus den vorgegebenen Seiten $a_\varrho, b_\varrho, c_\varrho$ und Winkeln $\varkappa_\varrho, \lambda_\varrho, \mu_\varrho$ läßt sich dann und nur dann ein Dreiecksflach Δ_ϱ konstruieren, wenn alle Bedingungen (I), (II 1), (II 2) erfüllt sind. In diesem Falle ist $[\Delta_\varrho]$ (bis auf Spiegelung) eindeutig fest-



Figur 7a



Figur 7b



Figur 7c

gelegt. Sind nur die Ungleichungen (I) erfüllt, dann lassen sich aus den vorgegebenen Seiten und Winkeln zu jedem inneren Knotenpunkt „klaffende" Sechskante konstruieren, bei denen das erste und sechste Dreieck in 2 verschiedenen Ebenen liegen (Figur 7a). Sind die Bedingungen (II 1) erfüllt, so fallen diese beiden Ebenen zusammen, aber das erste und sechste Dreieck sind noch um die Sechskantspitze gegeneinander verdreht (Figur 7b). Sind auch die Bedingungen (II 2) erfüllt, dann kommen das erste und sechste Dreieck miteinander zur Deckung (Figur 7c).

Die vorangehenden Betrachtungen haben alle (notwendigen und hinreichenden) Beziehungen ergeben, welche zwischen den Winkeln und Seiten eines **beliebigen** Dreiecksflaches bestehen müsssen. Davon, daß $[\Delta_\varrho]$ einer Fläche $[F]$ einbeschrieben, also Sehnen-Dreiecksflach sein soll, wurde kein Gebrauch gemacht. Die Forderung, daß $[\Delta_\varrho]$ **Sehnen**dreiecksflach ist und für $\varrho \to \infty$ infinitesimales Sehnendreiecksflach wird, bildet den Gegenstand des nächsten Abschnitts.

§ 4. Berechnung der Seiten und Winkel der Sehnendreiecksflache aus den Koordinaten der Knotenpunkte.

Die Dreiecksseiten, Dreieckswinkel und Keilwinkel eines (zunächst endlichen) Sehnendreieckflachs $[\Delta_\varrho]$ lassen sich mit den Hilfsmitteln der analytischen Geometrie aus den Koordinaten x, y, z der Knotenpunkte berechnen. Setzt man $\frac{1}{\varrho} = \varepsilon$ (= endliche Zahl), so kann man aus Figur 2b, in der bei den Seiten und Winkeln die Argumente u, v weggelassen sind, folgende Gleichungen ablesen:

1. Dreiecksseiten:

$$(1)\quad \begin{cases} a_\varrho(u,v) = [(x(u,v)-x(u+\varepsilon,v))^2+(y(u,v)-y(u+\varepsilon,v))^2+(z(u,v)-z(u+\varepsilon,v))^2]^{\frac{1}{2}} \\ b_\varrho(u,v),\ c_\varrho(u,v) \text{ analog.} \end{cases}$$

2. Dreieckswinkel.

$$(2)\quad \begin{cases} \cos \alpha_\varrho(u,v) = \dfrac{1}{2b_\varrho(u,v)c_\varrho(u,v)}\,(b_\varrho^2(u,v)+c_\varrho^2(u,v)-a_\varrho^2(u,v)) \\ \cos \bar{\alpha}_\varrho(u,v) = \dfrac{1}{2b_\varrho(u+\varepsilon,v)c_\varrho(u,v)}\,(b_\varrho^2(u+\varepsilon,v)+c_\varrho^2(u,v)-a_\varrho^2(u,v+\varepsilon)) \\ \beta_\varrho,\ \bar{\beta}_\varrho \text{ u. s. f. analog.} \end{cases}$$

Setzt man zur Abkürzung:

$f(u,v) = a_\varrho(u,v)\cdot b_\varrho(u,v)\sin\gamma(u,v)$ = doppelter Flächeninhalt des Dreiecks $a_\varrho(u,v)b_\varrho(u,v)c_\varrho(u,v)$;

$\bar{f}(u,v) = a_\varrho(u,v+\varepsilon)\cdot b_\varrho(u+\varepsilon,v)\sin\bar{\gamma}(u,v)$ = doppelter Flächeninhalt des 2. der Seite $c_\varrho(u,v)$ anliegenden Dreiecks (Figur 2b),

so folgt weiterhin:

3. Keilwinkel.

$$(3)\quad \begin{cases} \sin \varkappa_\varrho(u,v) = \dfrac{a_\varrho(u,v)\cdot D_1}{f(u,v)\cdot f(u,v-\varepsilon)}, \\ \sin \lambda_\varrho(u,v) = \dfrac{b_\varrho(u,v)\cdot D_2}{f(u,v)\cdot f(u-\varepsilon,v)}, \\ \sin \mu_\varrho(u,v) = \dfrac{c_\varrho(u,v)\cdot D_3}{f(u,v)\cdot f(u,v)}, \end{cases}$$

wobei

$$\left.\begin{matrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{matrix}\right\} \equiv \begin{vmatrix} x(u,v) & y(u,v) & z(u,v) & 1 \\ x(u+\varepsilon,v) & y(u+\varepsilon,v) & z(u+\varepsilon,v) & 1 \\ x(u,v+\varepsilon) & y(u,v+\varepsilon) & z(u,v+\varepsilon) & 1 \end{vmatrix};$$

in die 1. Zeile ist bzw. einzufügen:

$$\begin{vmatrix} x(u+\varepsilon,v-\varepsilon) & y(u+\varepsilon,v-\varepsilon) & z(u+\varepsilon,v-\varepsilon) & 1 \end{vmatrix}, \text{ oder}$$
$$\begin{vmatrix} x(u-\varepsilon,v+\varepsilon) & y(u-\varepsilon,v+\varepsilon) & z(u-\varepsilon,v+\varepsilon) & 1 \end{vmatrix}, \text{ oder}$$
$$\begin{vmatrix} x(u+\varepsilon,v+\varepsilon) & y(u+\varepsilon,v+\varepsilon) & z(u+\varepsilon,v+\varepsilon) & 1 \end{vmatrix}.$$

Bei Zugrundelegung eines Koordinatensystems mit Rechtsschraubensinn der x, y, z Achsen werden die Determinanten positiv, wenn die Knicke bei a_ϱ, b_ϱ, c_ϱ für den Beschauer der Figur 2 konvex erscheinen. Die Vorzeichen von $\varkappa_\varrho$ u. s. f. stimmen also mit der auf Seite 310 getroffenen Festsetzung überein, wenn die Vorderseite der Figur 2 als Außenseite aufgefaßt wird; d. h. die positive u-Richtung ($v =$ const.), die positive v-Richtung ($u =$ const.) und die Richtung von der Innenseite nach der Außenseite folgen im Sinne einer Rechtsschraube aufeinander.

Die Formeln (1), (2), (3) gelten allgemein für jedes $[\Delta_\varrho]$ bei endlichem ϱ (und endlichem ε).

Der Grenzübergang $\varrho \to \infty$ des infinitesimalen Sehnendreiecksflachs führt wegen der Differenzierbarkeitsvoraussetzungen für x, y, z zu folgender für $\varepsilon \to 0$ geltenden Entwicklung:

$$(1') \qquad a_\varrho(u,v) = \varepsilon\, a(u,v) + \varepsilon^2 a^*(u,v) \quad (b_\varrho, c_\varrho \text{ analog})$$

$$\left.\begin{aligned} \alpha_\varrho(u,v) &= \alpha(u,v) + \varepsilon\, \alpha^*(u,v) + \varepsilon^2 \alpha^{**}(u,v) \\ \alpha_\varrho(u,v) - \alpha_\varrho(u,v) &= \varepsilon\, \varphi(u,v) + \varepsilon^2 \varphi^*(u,v) \end{aligned}\right\} \beta_\varrho, \beta_\varrho, \chi; \gamma_\varrho, \gamma_\varrho, \psi \text{ analog}$$

$$(2') \qquad \begin{aligned} &\alpha + \beta + \gamma = \pi, \\ &\alpha^* + \beta^* + \gamma^* = 0, \qquad \alpha^{**} + \beta^{**} + \gamma^{**} = 0, \\ &\varphi + \chi + \psi = 0, \qquad \varphi^* + \chi^* + \psi^* = 0, \end{aligned}$$

$$(3') \qquad \varkappa_\varrho(u,v) = \varepsilon\, \varkappa(u,v) + \varepsilon^2 \varkappa^*(u,v) \quad (\lambda_\varrho\, \mu_\varrho \text{ analog})$$

Die mit Stern versehenen Funktionen werden in den Ergebnissen nicht vorkommen. Es genügt daher für die übrigen Funktionen den Zusammenhang mit den Koordinaten $x(u,v)$, $y(u,v)$, $z(u,v)$ abzuleiten.

Dabei gebrauchen wir zur Abkürzung die (in der Flächentheorie üblichen) Bezeichnungen:

$$E = x_u^2 + y_u^2 + z_u^2, \quad F = x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v, \quad G = x_v^2 + y_v^2 + z_v^2;$$

$$L = \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}} \cdot \begin{vmatrix} x_{uu} & y_{uu} & z_{uu} \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix},$$

M bzw. N sollen durch dieselbe Formel wie L definiert sein, wenn man die erste Zeile der Determinante ersetzt durch

$$\begin{vmatrix} x_{uv} & y_{uv} & z_{uv} \end{vmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \begin{vmatrix} x_{vv} & y_{vv} & z_{vv} \end{vmatrix}.$$

(Die Zeiger u, v bedeuten hier und im Folgenden partielle Differentiation.)

Die Rechnung verläuft dann folgendermaßen:

1. Dreiecksseiten.

Nach Gleichung (1) Seite 315 ist

$$a_\varrho^2(u, v) = \varepsilon^2 (x_u^2 + y_u^2 + z_u^2).$$

Daraus und aus der analogen Beziehung für b_ϱ, c_ϱ kommt

$$(1'') \quad a(u, v) = \sqrt{E}, \quad b(u, v) = \sqrt{G}, \quad c(u, v) = \sqrt{E + 2F + G}.$$

2. Dreieckswinkel.

Durch Einsetzen der Beziehungen

$$a_\varrho(u, v) = \varepsilon a + \varepsilon^2 a^* \text{ (analog } b_\varrho, c_\varrho),$$

$$a_\varrho(u, v + \varepsilon) = \varepsilon a + \varepsilon^2 (a^* + a_v), \quad b_\varrho(u + \varepsilon, v) = \varepsilon b + \varepsilon^2 (b^* + b_u),$$

ferner

$$\cos \alpha_\varrho(u, v) = \cos(\alpha + \varepsilon \alpha^*) = \cos \alpha + \varepsilon \alpha^* \sin \alpha,$$

$$\cos \alpha_\varrho(u, v) = \cos(\alpha + \varepsilon(\alpha^* + \varphi)) = \cos \alpha + \varepsilon(\alpha^* + \varphi) \sin \alpha,$$

$$\text{(analog } \beta_\varrho, \bar{\beta}_\varrho \text{ u. s. f.)}$$

folgt aus jeder der Gleichungen (2) Seite 315 durch Vergleichung der von ε freien Glieder

$$(2''\text{a})\qquad \left.\begin{aligned} \cos\alpha(u,v) &= \frac{F+G}{\sqrt{G(E+2F+G)}},\\ \cos\beta(u,v) &= \frac{F+E}{\sqrt{E(E+2F+G)}},\\ \cos\gamma(u,v) &= -\frac{F}{\sqrt{EG}}. \end{aligned}\right\}\alpha+\beta+\gamma\equiv\pi.$$

Durch Elimination von $c_\varrho^2(u, v)$ aus den 2 ersten Gleichungen (2) Seite 315 findet man:

$$a_\varrho^2(u,v)-b_\varrho^2(u,v)+2\,b_\varrho(u,v)\,c_\varrho(u,v)\cos a_\varrho(u,v)=$$
$$a_\varrho^2(u,v+\varepsilon)-b_\varrho^2(u+\varepsilon,v)+2\,b_\varrho(u+\varepsilon,v)c_\varrho(u,v)\cos a_\varrho(u,v).$$

Substituiert man hier die Funktionen a, α, φ u. s. f., dann verschwindet das von ε freie Glied identisch. Der Faktor des Gliedes ε, nämlich

$$2\,(a\,a_v-b\,b_u+c\,b_u\cos\alpha-\varphi\,b\,c\sin\alpha)$$

enthält die mit Stern versehenen Funktionen a^*, α^*, φ^* u. s. f. nicht und führt durch Nullsetzung zur Bestimmung der Funktion φ. In analoger Weise lassen sich χ, ψ berechnen und man findet damit folgende Formeln:

$$(2''\text{b})\left\{\begin{aligned} \varphi &= \frac{G\,E_v+F\,G_u}{2\,G\sqrt{EG-F^2}},\\ \chi &= \frac{E\,G_u+F\,E_v}{2\,E\sqrt{EG-F^2}},\\ \psi &= -\frac{G\,E_v\,(E+F)+E\,G_u\,(G+F)}{2\,E\,G\sqrt{EG-F^2}}. \end{aligned}\right\}\varphi+\chi+\psi\equiv 0.$$

3. Keilwinkel.

Zunächst berechnen wir die Seite 316 angegebenen Determinanten:

$$D_1=\varepsilon^4\,(N-M\sqrt{EG-F^2},$$
$$D_2=\varepsilon^4\,(L-M\sqrt{EG-F^2},$$
$$D_3=\varepsilon^4\,M\sqrt{EG-F^2}.$$

Außerdem hat man nach (2″) für die auf Seite 315 eingeführten Flächengrößen $\left.\begin{matrix} f(u, v) \\ f(u, v) \end{matrix}\right\} = \varepsilon^2 \sqrt{EG - F^2}$; durch Einsetzen in die Gleichungen (3) Seite 315 kommt:

$$(3'') \qquad \left\{ \begin{aligned} \varkappa(u, v) &= \frac{\sqrt{E}(N - M)}{\sqrt{EG - F^2}}, \\ \lambda(u, v) &= \frac{\sqrt{G}(L - M)}{\sqrt{EG - F^2}}, \\ \mu(u, v) &= \frac{\sqrt{E + 2F + G}\, M}{\sqrt{EG - F^2}}. \end{aligned} \right\}$$

Durch die Formeln (1″) und (3″) ist zum Ausdruck gebracht, daß die 6 von uns eingeführten Funktionen a, b, c; $\varkappa, \lambda, \mu$ in einfacher Weise mit den 6 Fundamentalgrößen E, F, G; L, M, N zusammenhängen. Dabei haben die a, b, c und $\varkappa, \lambda, \mu$ eine anschauliche Bedeutung, nämlich:

a, b, c = Grenzwerte der ϱ-fachen Dreiecksseiten von Δ_ϱ,
$\varkappa, \lambda, \mu$ = Grenzwerte der ϱ-fachen Keilwinkel von Δ_ϱ,

in dem System der Sehnen-Dreiecksflache Δ_ϱ für $\varrho \to \infty$ (Seite 308).

§ 5. Die Gleichungen von Mainardi-Codazzi und Gauss.

In § 3 sind die notwendigen und hinreichenden Bedingungen (I), (II 1), (II 2) zusammengestellt, welche für ein **beliebiges Dreiecksflach** zwischen den Seiten und Winkeln erfüllt sein müssen. Mit Hilfe der in § 4 abgeleiteten Formeln sollen jetzt die Bedingungen (I), (II 1), (II 2) für **infinitesimale Sehnendreiecksflache** $[\Delta_\varrho]$ berechnet werden ($\varrho \to \infty$).

I. **Ungleichung zwischen den Dreiecksseiten** ((I) Seite 311):

Durch Einsetzen von (1′) folgt aus jeder der beiden Ungleichungen

$$(\mathrm{I}') \qquad \boxed{a + b > c}$$

und durch Einsetzen von (1″) weiter: $\sqrt{E} + \sqrt{G} > \sqrt{E + 2F + G}$, d. h. nach Beseitigung der Quadratwurzeln

$$(\mathrm{I}'') \qquad \boxed{EG - F^2 > 0}.$$

II 1) Schliessungssätze ((II 1) Seite 312):

Um die in § 3 erklärten Ausdrücke A und B für $\varrho \to \infty$ zu berechnen, verfahren wir folgendermaßen:

Das (zunächst endliche) Kugelsechseck $[\Sigma]$ (Figur 4b) wird vom Mittelpunkt der Einheitskugel aus auf die Tangentenebene etwa des Eckpunktes Q projiziert. Dadurch entsteht ein ebenes Sechseck $[\Sigma_e]$, dessen Seiten und Außenwinkel mit $s_1, s_2, \ldots s_6$; $\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_6$ bezeichnet seien (Figur 8).

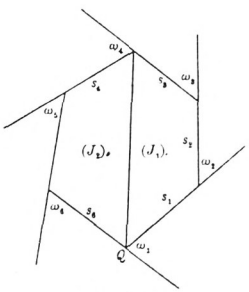
Die Projektion des Sechsecks parallel und senkrecht zur Seite s_1 gibt dann in leicht verständlicher Schreibweise:

$$\left.\begin{matrix} A_e \\ B_e \end{matrix}\right\} = s_1 \cdot \left\{\begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix}\right. + s_2 \left\{\begin{matrix} \cos \\ \sin \end{matrix}\right. \omega_2 + s_3 \left\{\begin{matrix} \cos \\ \sin \end{matrix}\right. (\omega_2 + \omega_3) + \ldots$$
$$+ s_6 \left\{\begin{matrix} \cos \\ \sin \end{matrix}\right. (\omega_2 + \omega_3 + \ldots + \omega_6).$$

Für $\varrho \to \infty$, $\varepsilon \to 0$ unterscheiden sich die Längen der ebenen Figur $[\Sigma_e]$ von den entsprechenden Längen der sphärischen Figur $[\Sigma]$ um Zusätze der Größenordnung ε^3 und dementsprechend die Winkel um Zusätze der Größenordnung ε^2. Die Seiten und Winkel der ebenen Figur $[\Sigma_e]$ werden infolgedessen durch dieselben Gleichungen (1″), (2″) wie für das sphärische Sechseck $[\Sigma]$ bestimmt; ferner wird

$$\frac{A_e}{A} = 1, \qquad \frac{B_e}{B} = 1.$$

$[\Sigma_e]$



Figur 8

Die einzelnen Seiten und Winkel des ebenen Sechsecks $[\Sigma_e]$ berechnen sich (wie der Vergleich der Figuren 4b und 8 zeigt) für $\varepsilon \to 0$ folgendermaßen:

$$\begin{aligned}
s_2 &= \varepsilon \varkappa + \varepsilon^2 \varkappa^*, & \omega_2 &= \beta + \varepsilon (\beta^* + \chi - \beta_v), \\
s_3 &= \varepsilon \lambda + \varepsilon^2 \lambda^*, & \omega_3 &= \gamma + \varepsilon \gamma^*, \\
s_4 &= \varepsilon \mu + \varepsilon^2 (\mu^* - \mu_u), & \omega_4 &= \alpha + \varepsilon (\alpha^* + \varphi - \alpha_u), \\
s_5 &= \varepsilon \varkappa + \varepsilon^2 (\varkappa^* - \varkappa_u), & \omega_5 &= \beta + \varepsilon (\beta^* - \beta_u), \\
s_6 &= \varepsilon \lambda + \varepsilon^2 (\lambda^* - \lambda_v), & \omega_6 &= \gamma + \varepsilon (\gamma^* + \psi - \gamma_u - \gamma_v), \\
s_1 &= \varepsilon \mu + \varepsilon^2 (\mu^* - \mu_v), & \omega_1 &= \alpha + \varepsilon (\alpha^* - \alpha_v).
\end{aligned}$$

Durch Einsetzen in die Gleichungen $A_e = 0$, $B_e = 0$ und unter Berücksichtigung der Bedingungen $\alpha + \beta + \gamma = \pi$, $\alpha^* + \beta^* + \gamma^* = 0$, $\varphi + \chi + \psi = 0$ kommt:

$$
\begin{aligned}
&[\mu + \varepsilon(\mu^* - \mu_v)] \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix} + [\mu + \varepsilon(\mu^* - \mu_u)] \begin{Bmatrix} \cos \\ \sin \end{Bmatrix} (\pi - \varepsilon(\psi + \beta_v + \alpha_u)) \\
&+ [\varkappa + \varepsilon \varkappa^*] \begin{Bmatrix} \cos \\ \sin \end{Bmatrix} (\beta + \varepsilon(\beta^* + \chi - \beta_v)) \\
&+ [\varkappa + \varepsilon(\varkappa^* - \varkappa_u)] \begin{Bmatrix} \cos \\ \sin \end{Bmatrix} (\pi + \beta + \varepsilon(\beta^* - \psi - \beta_v + \gamma_u)) \\
&+ [\lambda + \varepsilon \lambda^*] \begin{Bmatrix} \cos \\ \sin \end{Bmatrix} (\pi - \alpha + \varepsilon(-\alpha^* + \chi - \beta_v)) \\
&+ [\lambda + \varepsilon(\lambda^* - \lambda_v)] \begin{Bmatrix} \cos \\ \sin \end{Bmatrix} (2\pi - \alpha + \varepsilon(-\alpha^* + \alpha_v)) = 0.
\end{aligned}
$$

Entwickelt man den Ausdruck nach Potenzen von ε, so verschwindet das von ε freie Glied identisch und durch Nullsetzen des Faktors von ε ergeben sich bzw. folgende beiden Gleichungen:

$$
\begin{aligned}
&\text{(a)}\ \mu_u - \mu_v + \varkappa_u \cos\beta \\
&+ \varkappa(\varphi + \gamma_u)\sin\beta - \lambda_v \cos\alpha - \lambda(\chi + \gamma_v)\sin\alpha = 0, \\
&\text{(b)}\ \mu(\psi + \alpha_u + \beta_v) \\
&+ \varkappa_u \sin\beta - \varkappa(\varphi + \gamma_u)\cos\beta + \lambda_v \sin\alpha - \lambda(\chi + \gamma_v)\cos\alpha = 0.
\end{aligned}
$$

Durch die Zusammenfassung (a) $\sin\alpha$ + (b) $\cos\alpha = 0$, $-$ (a) $\sin\beta$ + (b) $\cos\beta = 0$ gewinnt man die beiden in u, v symmetrischen Bedingungen:

$$
\text{(II 1')}\quad \boxed{\begin{aligned}
&(\mu_u - \mu_v)\sin\alpha + \varkappa_u \sin\gamma + \varkappa(\varphi + \gamma_u)\cos\gamma - \lambda(\chi + \gamma_v) + \mu(\psi + \alpha_u + \beta_v)\cos\alpha = 0 \\
&(\mu_v - \mu_u)\sin\beta + \lambda_v \sin\gamma + \lambda(\chi + \gamma_v)\cos\gamma - \varkappa(\varphi + \gamma_u) + \mu(\psi + \beta_v + \alpha_u)\cos\beta = 0
\end{aligned}}
$$

Führt man in (II 1') durch die Substitutionen (1''), (2''), (3'') Seite 317, 318, 319 die Fundamentalgrößen E, F, G, L, M, N ein, so gehen aus (II 1'), mit $\sqrt{G}$ bzw. $\sqrt{E}$ multipliziert, die beiden Mainardi-Codazzischen Gleichungen hervor:

$$
(\mathrm{II}\,1'')\quad \boxed{\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{N}{\sqrt{EG-F^2}}\right)-\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{M}{\sqrt{EG-F^2}}\right)-\frac{FG_v-2GF_v+GG_u}{2(EG-F^2)^{3/2}}L\\
&\qquad-\frac{GE_v-FG_u}{(EG-F^2)^{3/2}}M+\frac{GE_u+FE_v-2FF_u}{2(EG-F^2)^{3/2}}N=0,\\
&\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{L}{\sqrt{EG-F^2}}\right)-\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{M}{\sqrt{EG-F^2}}\right)-\frac{FE_u-2EF_u+EE_v}{2(EG-F^2)^{3/2}}N\\
&\qquad-\frac{EG_u-FE_v}{(EG-F^2)^{3/2}}M+\frac{EG_v+FG_u-2FF_v}{2(EG-F^2)^{3/2}}L=0.
\end{aligned}}
$$

II 2) **Flächensatz** ((II 2) Seite 312).

Auch hier gehen wir aus von dem Zentralriß $[\Sigma_e]$ des Kugelsechsecks $[\Sigma]$ in der Berührebene von Q.

Die Kugelvierecke mit den Flächen (J_1), (J_2) (Fig. 5 S. 312) gehen dabei über in ebene Vierecke mit den aus Figur 8 ablesbaren Flächeninhalten

$$(J_1)_e = \tfrac{1}{2}\, s_1 s_2 \sin\omega_2 + \tfrac{1}{2}\, s_2 s_3 \sin\omega_3 + \tfrac{1}{2}\, s_3 s_1 \sin(\omega_2+\omega_3),$$
$$(J_2)_e = \tfrac{1}{2}\, s_4 s_5 \sin\omega_5 + \tfrac{1}{2}\, s_5 s_6 \sin\omega_6 + \tfrac{1}{2}\, s_6 s_4 \sin(\omega_5+\omega_6).$$

Durch die Substitutionen Seite 320 folgt daraus:

$$\left.\begin{matrix}(J_1)_e\\(J_2)_e\end{matrix}\right\} = \frac{\varepsilon^2}{2}\,(\lambda\mu\sin\alpha + \mu\varkappa\sin\beta + \varkappa\lambda\sin\gamma).$$

Weil nun die sphärischen und ebenen Flächeninhalte für $\varepsilon \to 0$ in der Größenordnung ε^2 übereinstimmen, gilt ebenso

$$(J_1) + (J_2) = \varepsilon^2\,(\lambda\mu\sin\alpha + \mu\varkappa\sin\beta + \varkappa\lambda\sin\gamma).$$

Schließlich ist noch die Summe der Außenwinkel im Kugelsechseck $[\Sigma]$ zu berechnen; da wir hierbei die Beträge ε^2 nicht vernachlässigen dürfen, sind die auf Seite 320 angegebenen Werte für die Winkel in folgender Weise (vgl. Seite 316) zu vervollständigen, indem wir die Potenzentwicklungen bis zu den quadratischen Gliedern von ε weiterführen:

$$\begin{aligned}
\omega_1 &= \alpha + \varepsilon(\alpha^* - \alpha_v) && + \varepsilon^2(\alpha^{**} - \alpha_v^* - \tfrac{1}{2}\alpha_{vv}),\\
\omega_2 &= \beta + \varepsilon(\beta^* + \chi - \beta_v) && + \varepsilon^2(\beta^{**} - \beta_v^* + \chi^* - \chi_v - \tfrac{1}{2}\beta_{vv}),\\
\omega_3 &= \gamma + \varepsilon\gamma^* && + \varepsilon^2\gamma^{**},\\
\omega_4 &= \alpha + \varepsilon(\alpha^* + \varphi - \alpha_u) && + \varepsilon^2(\alpha^{**} - \alpha_u^* + \varphi^* - \varphi_u - \tfrac{1}{2}\alpha_{uu}),\\
\omega_5 &= \beta + \varepsilon(\beta^* - \beta_u) && + \varepsilon^2(\beta^{**} - \beta_u^* - \tfrac{1}{2}\beta_{uu}),\\
\omega_6 &= \gamma + \varepsilon(\gamma^* + \psi - \gamma_u - \gamma_v) \\
&\qquad + \varepsilon^2(\gamma^{**} - \gamma_u^* - \gamma_v^* + \psi^* - \psi_u - \psi_v - \tfrac{1}{2}\gamma_{uu} - \tfrac{1}{2}\gamma_{vv} + \gamma_{uv}).
\end{aligned}$$

Die Summation liefert:

$$\omega_1 + \omega_2 + \cdots + \omega_6 = 2\pi + \varepsilon^2(\varphi_v + \chi_u + \gamma_{uv}).$$

Durch Einsetzen in (II 2) Seite 312 folgt somit durch Nullsetzen des Faktors von ε^2 die gesuchte Beziehung:

$$\text{(II 2')} \qquad \boxed{\lambda\mu\sin\alpha + \mu\varkappa\sin\beta + \varkappa\lambda\sin\gamma + \gamma_{uv} + \varphi_v + \chi_u = 0}$$

Durch die Substitutionen (2″), (3″) Seite 318, 319 und Division mit $\sqrt{EG - F^2}$ ergibt sich die Gaußsche Formel für das Krümmungsmaß:

$$\text{(II 2'')} \qquad \boxed{\begin{aligned}
&\frac{LN - M^2}{EG - F^2}\\
&= \frac{1}{2\sqrt{EG - F^2}}\left(\frac{\partial}{\partial u}\frac{FE_v - EG_u}{E\sqrt{EG - F^2}} + \frac{\partial}{\partial v}\frac{2EF_u - EE_v - FE_u}{E\sqrt{EG - F^2}}\right).
\end{aligned}}$$

Die geometrische Entwicklung der Gleichungen (II 1″), (II 2″) steht an Kürze hinter den üblichen analytischen Ableitungen zurück. Dafür gewährt sie einen unmittelbaren Einblick in die rein geometrischen Zusammenhänge und ordnet die Mainardi-Codazzischen und die Gaußsche Gleichung drei allgemeineren, d. h. für beliebige Dreiecksflache geltenden Sätzen unter. Nebenbei ergibt sich auch eine anschauliche Definition des Krümmungsmaßes $K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}$; nach (II 2′) steht nämlich der auf Seite 313 eingeführte Lücken- oder Überdeckungswinkel mit dem Krümmungsmaß in folgender Beziehung:

Bildet man in einem sechskantigen Knotenpunkt P eines Sehnendreiecksflachs $[\Delta_\varrho]$ den Ausdruck

$$K_\varrho = 3 \cdot \frac{\text{Spalt- (oder Überdeckungs-)winkel}}{\text{Fläche der 6 Dreiecke am Knotenpunkt } P},$$

so ist $\lim\limits_{\varrho \to \infty} K_\varrho =$ Krümmungsmaß K im Punkte P.