Sitzungsberichte

der

mathematisch-naturwissenschaftlichen Abteilung

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften

zu München

1929. Heft I

Januar-Märzsitzung

München 1929

Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften

in Kommission des Verlags R. Oldenbourg München

Über spezielle Kreisnetze.

Von **Otto Volk** in Kaunas (Litauen).

Vorgelegt von A. Voss in der Sitzung am 2. März 1929.

Die Frage der rhombischen Einteilung der Flächen durch zwei Scharen von Kurven konstanter geodätischer Krümmung ist von Herrn A. Voss in der inhaltsreichen Arbeit „Über diejenigen Flächen, welche durch zwei Scharen von Kurven konstanter geodätischer Krümmung in infinitesimale Rhomben zerlegt werden“[1]) inauguriert und eingehend untersucht worden. Herr Voss nimmt für alle Kurven einer Schar dieselbe konstante geodätische Krümmung. Man kann aber die Frage dahin erweitern, daß man zwei Scharen von konstanter geodätischer Krümmung betrachtet, die aber für jede Kurve der beiden Scharen sich ändert, die also für die eine Schar eine Funktion von u, für die andere eine solche von v ist. Es lag nahe, zunächst das Problem in der Ebene in Angriff zu nehmen. Doch soll hier noch nicht von den allgemeinsten rhombischen Kreisnetzen die Rede sein; wir beschränken uns vielmehr auf ein spezielles System von Kreisen, das einen Ausnahmefall darstellt und den Vorteil bietet, daß sich sowohl die Rechnungen wie die Konstruktion der rhombischen Kreisnetze leicht durchführen lassen.

Anschließend wird die entsprechende Frage für Kreisdreiecksnetze behandelt, die ebenfalls den Ausnahmefall des allgemeinen Problems betrifft und zu ganz ähnlichem Resultate führt.

§ 1. Rhombische Netze aus Kreisen, deren Mittelpunkte auf Kegelschnitten liegen.

Es seien U_1, U_2, U_3; V_1, V_2, V_3 die Koordinaten der Mittelpunkte bzw. die Radien zweier Kreisscharen u, v; dann sind die Kreise der Scharen bestimmt durch die Gleichungen:

[1]) Sitzungsberichte der Kgl. Bayerischen Akademie der Wissenschaften, math.-phys. Klasse, Bd. XXXVI (1906), S. 247 ff.

$$(1)\qquad \begin{cases} x = U_1 + U_3 \cos\varphi, & y = U_2 + U_3 \sin\varphi; \\ x = V_1 + V_3 \cos\psi, & y = V_2 + V_3 \sin\psi. \end{cases}$$

Sollen die beiden Scharen u, v rhombisch sein, soll also sein:

$$x_u^2 + y_u^2 = x_v^2 + y_v^2,$$

so muß sein:

$$(2)\qquad V_3 \psi_u = U_3 \varphi_v.$$

Aus den Gleichungen (1) kommt nun:

$$(3)\qquad \begin{cases} V_3 \cos\psi - U_3 \cos\varphi = U_1 - V_1, \\ V_3 \sin\psi - U_3 \sin\varphi = U_2 - V_2 \end{cases}$$

und hieraus durch Differentiation nach u bzw. v:

$$\begin{aligned} -V_3 \sin\psi\,\psi_u + U_3 \sin\varphi\,\varphi_u - U_3' \cos\varphi &= U_1', \\ V_3 \cos\psi\,\psi_u - U_3 \cos\varphi\,\varphi_u - U_3' \sin\varphi &= U_2'; \\ -V_3 \sin\psi\,\psi_v + U_3 \sin\varphi\,\varphi_v + V_3' \cos\psi &= -V_1', \\ V_3 \cos\psi\,\psi_v - U_3 \cos\varphi\,\varphi_v + V_3' \sin\psi &= -V_2'. \end{aligned}$$

Durch Multiplikation dieser Gleichungen mit $\cos\varphi$ und $\sin\varphi$, bzw. $\cos\psi$ und $\sin\psi$ und Addition ergibt sich:

$$(4)\qquad \begin{cases} V_3 \sin(\varphi - \psi)\,\psi_u - U_3' = U_1' \cos\varphi + U_2' \sin\varphi, \\ U_3 \sin(\varphi - \psi)\,\varphi_v + V_3' = -V_1' \cos\psi - V_2' \sin\psi, \end{cases}$$

somit unter Beachtung der Gleichung (2):

$$U_3' + V_3' + U_1' \cos\varphi + U_2' \sin\varphi + V_1' \cos\psi + V_2' \sin\psi = 0$$

oder, wenn man für $\cos\psi$ und $\sin\psi$ die Werte aus (3) einsetzt:

$$(5)\qquad \begin{aligned} &\left(\frac{U_1'}{U_3} + \frac{V_1'}{V_3}\right)\cos\varphi + \left(\frac{U_2'}{U_3} + \frac{V_2'}{V_3}\right)\sin\varphi \\ &+ \frac{1}{U_3}\left((U_1 - V_1)\frac{V_1'}{V_3} + (U_2 - V_2)\frac{V_2'}{V_3} + U_3' + V_3'\right) = 0. \end{aligned}$$

Weiterhin erhält man aus den Gleichungen (3) durch Quadrieren und Addieren, nachdem man $U_3 \cos\varphi$ und $U_3 \sin\varphi$ auf die linken Seiten gebracht hat:

$$(6)\qquad \begin{aligned} &2(U_1 - V_1)U_3 \cos\varphi + 2(U_2 - V_2)U_3 \sin\varphi \\ &+ (U_1 - V_1)^2 + (U_2 - V_2)^2 + U_3^2 - V_3^2 = 0. \end{aligned}$$

Aus den beiden Gleichungen (5) und (6) findet man durch Elimination $\cos\varphi$ und $\sin\varphi$; die Beziehung $\cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1$

gibt dann die funktionale Beziehung zwischen U_1, U_2, U_3; V_1, V_2, V_3, durch die alle rhombischen Kreisnetze charakterisiert sind. Es soll aber darauf hier nicht näher eingegangen werden; wir behalten uns die Betrachtung des allgemeinen Falles für später vor. Im folgenden beschränken wir uns vielmehr auf den Fall, daß die Eliminationsdeterminante vom (5) und (6) verschwindet. Schreiben wir du, dv an Stelle von $U_3\,du$, $V_3\,dv$, so gilt für diesen Fall:

$$(U_2 - V_2)(U_1' + V_1') - (U_1 - V_1)(U_2' + V_2') = 0, \tag{7}$$

$$\begin{aligned} &2(U_1 - V_1)((U_1 - V_1)V_1' + (U_2 - V_2)V_2' + U_3U_3' + V_3V_3') \\ &\quad - (U_1' + V_1')((U_1 - V_1)^2 + (U_2 + V_2)^2 + U_3^2 - V_3^2) = 0. \end{aligned} \tag{8}$$

Die Funktionalgleichung (7) läßt sich nun leicht behandeln[1]). Durch Differentiation nach U_1 und V_1 erhält man nämlich:

$$\frac{dV_1'}{dV_1}\,\frac{dU_2}{dU_1} - \frac{dU_1'}{dU_1}\,\frac{dV_2}{dV_1} + \frac{dU_2'}{dU_1} - \frac{dV_2'}{dV_1} = 0, \tag{9}$$

$$\frac{d^2V_1'}{dV_1^2}\,\frac{d^2U_2}{dU_1^2} - \frac{d^2U_1'}{dU_1^2}\,\frac{d^2V_2}{dV_1^2} = 0. \tag{10}$$

Für $\dfrac{d^2U_1'}{dU_1^2} \neq 0$, $\dfrac{d^2V_1'}{dV_1^2} \neq 0$ folgt aus (10) unmittelbar:

$$\begin{cases} \dfrac{d^2U_2}{dU_1^2} = k\,\dfrac{d^2U_1'}{dU_1^2}, & U_2 = k\,U_1' + a_1U_1 + b_1, \\[2ex] \dfrac{d^2V_2}{dV_1^2} = k\,\dfrac{d_2V_1'}{dV_1^2}, & V_2 = k\,V_1' + a_2V_1 + b_2. \end{cases} \tag{11}$$

Setzt man hieraus die entsprechenden Werte in (9) ein, so findet man:

$$\begin{cases} k\dfrac{dU_1''}{dV_1} + (a_1 - a_2)\dfrac{dU_1'}{dU_1} = l, & k\,U_1'' + (a_1 - a_2)\,U_1' = l\,U_1 + c_1, \\[2ex] k\dfrac{dV_1''}{dV_2} + (a_2 - a_1)\dfrac{dV_1'}{dV_2} = l, & k\,V_1'' + (a_2 - a_1)\,V_1' = l\,V_1 + c_2. \end{cases} \tag{12}$$

---

[1]) Die Funktionalgleichung (7) ist die gleiche, die bei den geodätischen rhombischen Netzen auf Flächen konstanter Krümmung auftritt. (Vgl. O. Volk, Über geodätische rhombische Kurvennetze auf krummen Flächen, insbesondere auf Flächen konstanter Krümmung. Sitzungsberichte der Heidelberger Akademie der Wissenschaften, math.-naturwiss. Klasse. Jahrgang 1925. 13. Abhandlung. S. 107, Gl. (30). Die obige Lösung ist erheblich einfacher als die daselbst gegebene.)

Man kann nun, ohne die Allgemeinheit zu beschränken, $b_1 = b_2 = c_1 = c_2 = 0$ setzen, da die Beibehaltung dieser Konstanten nur eine Parallelverschiebung des Koordinatensystems bedeuten würde; dagegen muß $k \neq 0$ sein. Aus (7) kommt dann:

$$\left\{\begin{aligned} k\,U_1'^2 + (a_1 - a_2)\,U_1\,U_1' - l\,U_1^2 &= m, \\ k\,V_1'^2 + (a_2 - a_1)\,V_1\,V_1' - l\,V_1^2 &= m. \end{aligned}\right. \tag{13}$$

Durch Differentiation der ersten Gleichung (13) erhält man:

$$2\,k\,U_1\,U_1'' + (a_1 - a_2)\,U_1\,U_1'' + (a_1 - a_2)\,U_1'^2 - 2\,l\,U_1\,U_1' = 0$$

oder, wenn man für U_1'' seinen Wert aus der ersten Gleichung (12) einsetzt:

$$(a_1 - a_2)\,(k\,U_1'^2 + (a_1 - a_2)\,U_1\,U_1' + l\,U_1^2) = 0.$$

Daraus folgt durch Vergleich mit der ersten Gleichung (13) entweder $m = 0$ oder $a_1 = a_2$. Die erste Möglichkeit $m = 0$ scheidet aus, da sonst U_1' eine lineare Funktion von U_1 wäre und somit $\dfrac{d^2 U_1'}{d U_1^2} = 0$. Somit bleibt nur die Möglichkeit:

$$a_1 = a_2, \tag{14}$$

Wir erhalten also, wenn wir von überflüssigen Konstanten absehen, für $l \neq 0$:

$$\left\{\begin{aligned} U_1 &= C_1 \cos u, & U_2 &= C_2 \sin u, \\ V_1 &= C_1 \cos v, & V_2 &= C_2 \sin v. \end{aligned}\right. \tag{15}$$

Ist aber $l = 0$, so kommt:

$$\left\{\begin{aligned} U_1 &= C_1 u^2, & U_2 &= C_2 u^2 + C_3 u, \\ V_1 &= C_1 v^2, & V_2 &= C_2 v^2 + C_3 v. \end{aligned}\right. \tag{16}$$

Es bleiben noch die Ausnahmefälle zu betrachten.

Ist gleichzeitig:

$$\frac{d^2 U_1'}{d U_1^2} = 0, \frac{d^2 V_1'}{d V_1^2} = 0,$$

so wird:

$$\left\{\begin{aligned} U_1' &= a_1\,U_1 + b_1, \\ V_1' &= a_2\,V_1 + b_2. \end{aligned}\right. \tag{17}$$

Aus (9) kommt dann:

$$\begin{aligned} U_2' + a_2\,U_2 &= c\,U_1 + d_1, \\ V_2' + a_2\,V_2 &= c\,V_1 + d_2. \end{aligned} \tag{18}$$

Hier kann man wieder $b_1 = b_2 = d_1 = d_2 = 0$ setzen. Aus (7) kommt dann:

$$\left\{\begin{array}{l} c\,U_1'^2 - (a_1 + a_2)\,U_1\,U_2 = m, \\ c\,V_1'^2 - (a_1 + a_2)\,V_1\,V_2 = m. \end{array}\right. \tag{19}$$

Durch Differentiation ergibt sich hieraus:

$$2\,c\,U_1\,U_1' - (a_1 + a_2)\,(U_1'\,U_2 + U_1\,U_2') = 0,$$

somit nach (17) und (18):

$$(a_1 - a_2)\,(c\,U_1 - (a_1 + a_2)\,U_2)\,U_1 = 0.$$

Durch Vergleich mit (19) folgt hieraus entweder $m = 0$ oder $a_1 = a_2$. Im ersten Falle $m = 0$ wird für $a_1 + a_2 \neq 0$:

$$U_2 = \frac{c}{a_1 + a_2}\,U_1,$$

$$V_2 = \frac{c}{a_1 + a_2}\,V_1;$$

das führt aber, wie man aus (7) unmittelbar erkennt, auf;

$$U_1' + V_1' = 0,$$

also auf:

$$U_1 = k\,u, \quad V_1 = -k\,v \tag{20}$$

und folglich auch auf:

$$U_2 = l\,u, \quad V_2 = -l\,v. \tag{21}$$

Ist $a_1 + a_2 = 0$, so muß $m = c = 0$ sein; aus (17) und (18) kommt dann:

$$\left\{\begin{array}{ll} U_1 = e^u, & U_2 = C_1\,e^u, \\ V_1 = e^{-v}, & V_2 = C_2\,e^{-v}. \end{array}\right. \tag{22}$$

Der Fall $a_1 = a_2$ ergibt aber:

$$\left\{\begin{array}{ll} U_1 = e^u, & U_2 = C_1\,e^{-u} + C_2\,e^u, \\ V_1 = e^v, & V_2 = C_1\,e^{-v} + C_2\,e^v. \end{array}\right. \tag{23}$$

Ist aber gleichzeitig:

$$\frac{d^2\,U_1'}{d\,U_1^2} = 0, \quad \frac{d^2\,U_2}{d\,U_1^2} = 0,$$

also:

$$\left\{\begin{array}{l} U_1' = a_1\,U_1 + b_1, \\ U_2 = a_2\,U_1 + b_2, \end{array}\right. \tag{24}$$

so kommt man wieder auf die Gleichungen (22).

Es bleiben noch die zugehörigen U_3, V_3 zu berechnen.

Gelten die Gleichungen (15), so erhält man aus (8) eine Gleichung von der Form:

$$(25)\qquad \begin{aligned} &P_1(u) - Q_1(v) - P_2(u)\cos v + Q_2(u)\cos u \\ &\quad + P_3(u)\sin v - Q_3(v)\sin u = 0, \end{aligned}$$

wo ist:

$$(26)\quad \begin{cases} P_1(u) = U_3^2 \sin u + 2\,U_3 U_1' \cos u + (C_1^2 - C_2^2)\sin u \cos^2 u, \\ P_2(u) = 2\,U_3 U_3' + (C_1^2 - C_2^2)\sin 2u,\;\; P_3(u) = U_3^2 - (C_1^2 - C_2^3)\cos^2 u; \\ Q_1(v) = V_3^2 \sin v + 2\,V_3 V_3' \cos v + (C_1^2 - C_2^2)\sin v \cos^2 v, \\ Q_2(v) = 2\,V_3 V_3' + (C_1^2 - C_2^2)\sin 2v,\;\; Q_3(v) = V_3^2 - (C_1^2 - C_2^2)\cos^2 v. \end{cases}$$

Durch Differentiation nach u und v kommt aus (25):

$$(27)\qquad P_2'(u)\sin v - Q_2'(v)\sin u + P_3'(u)\cos v - Q_3'(v)\cos u = 0.$$

Dividiert man diese Gleichung mit $\sin u \cdot \sin v$ und differentiert nochmals nach u und v, so ergibt sich:

$$\frac{1}{\sin^2 v}\left(\frac{P_3'(u)}{\sin u}\right)' - \frac{1}{\sin^2 u}\left(\frac{Q_3'(v)}{\sin v}\right)' = 0,$$

woraus folgt:

$$(28)\begin{cases} P_3'(u) = k\cos u - l_1 \sin u, & P_3(u) = k\sin u + l_1\cos u + m_1, \\ Q_3(v) = k\cos v - l_2\sin v, & Q_3(v) = k\sin v + l_2\cos v + m_2. \end{cases}$$

Aus (27) kommt dann:

$$(29)\begin{cases} P_2'(u) + l_2\cos u = n\sin u, & P_2(u) = -l_2\sin u - n\cos u + p_1, \\ P_2'(v) + l_1\cos v = n\sin v, & Q_2(v) = -l_1\sin v - n\cos v + p_2. \end{cases}$$

Aus (25) ergibt sich schließlich:

$$(30)\qquad \begin{cases} P_1(u) = -p_2\cos u + m_2\sin u + q, \\ Q_1(v) = -p_1\cos v + m_1\sin v + q. \end{cases}$$

Man erkennt leicht, daß die Gleichungen (28) — (30) dann und nur dann miteinander verträglich sind, wenn ist:

$$l_1 = l_2 = l,\quad m_1 = m_2 = m,\quad q = k,\quad n = -k,\quad p_1 = p_2 = 0,$$

sodaß man also erhält:

$$(31)\qquad \begin{cases} U_3^2 = (C_1^2 - C_2^2)\cos^2 u + k\sin u + l\cos u + m, \\ V_3^2 = (C_1^2 - C_2^2)\cos^2 v + k\sin v + l\cos v + m, \end{cases}$$

wo k, l, m beliebige Konstante bedeuten.

In analoger Weise führen die Gleichungen (16) auf:

$$(32)\qquad \begin{cases} U_3^2 = (C_1^2 + C_2^2)\, u^4 + k\, u^2 + l\, u + m, \\ V_3^2 = (C_1^2 + C_2^2)\, v^4 + k\, v^2 + l\, v + m. \end{cases}$$

Die Gleichungen (23) liefern:

$$(33)\qquad \begin{cases} U_3^2 = (1 + C_2^2)\, e^{2u} + C_1^2\, e^{-2u} + k\, e^{u} + m\, e^{-u} + l, \\ V_3^2 = (1 + C_2^2)\, e^{3v} + C_1^2\, e^{-2v} + k\, e^{v} + m\, e^{-v} + l. \end{cases}$$

Für die Gleichungen (22) ergibt sich:

$$(34)\qquad \begin{cases} U_3^2 = (1 + C_1^2)\, e^{\ 2u} + k\, e^{u} + l, \\ V_3^2 = (1 + C_2^2)\, e^{-2v} + m\, e^{v} + l. \end{cases}$$

Endlich erhält man bei Annahme der Gleichungen (20) und (21):

$$(35)\qquad \begin{cases} U_3^2 = (1 + k^2)\, u^2 + m\, u + l, \\ V_3^2 = (1 + k^2)\, v^2 + m\, u + n. \end{cases}$$

Bei der Ableitung der Gleichungen (9) und (10) wird vorausgesetzt, daß U_1, V_1 nicht konstant seien. Sei nun:

$$(36)\qquad U_1 = C_1, \quad V_1 = C_2.$$

Aus (7) folgt dann unmittelbar für $C_1 \neq C_2$.

$$(37)\qquad U_2 = k\, u, \quad V_2 = -k\, v$$

und aus (8):

$$(38)\qquad \begin{cases} U_3^2 = k^2\, u^2 + l\, u + m, \\ V_3^2 = k^2\, v^2 + l\, v + n. \end{cases}$$

Ist aber $C_1 = C_2$, so muß man auf die Gleichungen (5) und (6) zurückgehen.

Man findet aus ihnen:

$$(U_2' + V_2')\, U_3 \sin\varphi + (U_2 - V_2)\, V_2' + U_3\, U_3' + V_3\, V_3' = 0;$$
$$2\,(U_2 - V_2)\, U_3 \sin\varphi + (U_2 - V_2)^2 + U_3^2 - V_3^2 = 0;$$

die Elimination von sin φ ergibt die Funktionalgleichung:

$$(39)\qquad \begin{aligned} P_1(u) - Q_1(v) + 2\, P_2(u)\, V_2 - 2\, Q_2(v)\, U_2 \\ + P_3(u)\, V_2' - Q_3(v)\, U_2' = 0, \end{aligned}$$

wo ist:

$$(40)\qquad \begin{cases} P_1(u) = (U_2^2 + U_3^2)\, U_2' - 2\, U_2\, U_3\, U_3', \\ P_2(u) = U_3\, U_3' - U_2\, U_2', \quad P_3(u) = U_3^2 - U_2^2; \\ Q_1(v) = (V_2^2 + V_3^2)\, V_2' - 2\, V_2\, V_3\, V_3', \\ Q_2(v) = V_3\, V_3' - V_2\, V_2', \quad Q_3(v) = V_3^2 - V_2^2. \end{cases}$$

Durch Differentiation nach U_2, V_2 findet man hieraus in der gleichen Weise wie oben:

$$\text{(41)} \qquad \begin{cases} P_3(u) = k\,U_2' + l_1\,U_2, \\ Q_3(v) = k\,V_2' + l_2\,V_2; \end{cases}$$

$$\text{(42)} \qquad \begin{cases} 2\,P_2(u) = l_2\,U_2' + p\,U_2 + q_1, \\ 2\,Q_2(v) = l_1\,V_2' + p\,V_2 + q_2; \end{cases}$$

$$\text{(43)} \qquad \begin{cases} P_1(u) = q_2\,U_2 + r, \\ Q_1(v) = q_1\,V_2 + r. \end{cases}$$

Diese Gleichungen führen auf die Beziehung:

$$\text{(44)} \qquad U_3^2 = U_2^2 + a\,U_2 + b, \quad V_3^2 = V_2^2 + a\,V_2 + b.$$

wo a, b beliebige Konstante bedenken.

Aus den vorstehenden Ausführungen folgt der Satz:

Liegen die Mittelpunkte zweier Kreisscharen auf einem Kegelschnitt, der auch in ein Geradenpaar ausarten kann, und sind die Radien der Kreise bestimmt durch $r^2 = (x - a)^2 + (y - b)^2 + c$, wo x, y die Koordinaten der Mittelpunkte und a, b, c beliebige Konstante bedeuten, so lassen sie sich rhombisch anordnen.

§ 2. Dreiecksnetze aus Kreisen, deren Mittelpunkte auf einer Kurve dritter Ordnung liegen.

Ein Dreiecksnetz aus Kreisen ist durch die drei Gleichungen bestimmt:

$$\text{(1)} \qquad \begin{cases} x^2 + y^2 + 2\,U_1\,x + 2\,U_2\,y = U_3, \\ x^2 + y^2 + 2\,V_1\,x + 2\,V_2\,y = V_3, \\ x^2 + y^2 + 2\,\varphi_1\,x + 2\,\varphi_2\,y = \varphi_3, \end{cases}$$

wo U_1, U_2, U_3 Funktionen von u, V_1, V_2, V_3 solche von v und φ_1, φ_2, φ_3 solche von $u + v$ bedeuten.

Die Elimination von x und y aus den Gleichungen (1) führt auf eine Funktionalgleichung, auf die wir an anderer Stelle zurückzukommen hoffen. Hier beschränken wir uns auf die Betrachtung des Falles, der sich ergibt, wenn die Eliminationsdeterminanten von je zwei linearen Gleichungen, die man durch Subtraktion der Gleichungen (1) von einander erhält, verschwinden, d. h. wenn gleichzeitig ist:

$$
(2)\qquad \begin{cases} (U_1 - V_1)(V_2 - \varphi_2) - (U_2 - V_2)(V_1 - \varphi_1) = 0, \\ (U_3 - V_3)(V_1 - \varphi_1) - (U_1 - V_1)(V_3 - \varphi_3) = 0. \end{cases}
$$

Diese Gleichungen lassen sich in der Form schreiben:

$$
(3)\qquad \begin{cases} (U_2 - V_2)\varphi_1 - (U_1 - V_1)\varphi_2 + U_1 V_2 - U_2 V_1 = 0, \\ (U_3 - V_3)\varphi_1 - (U_1 - V_1)\varphi_3 + U_1 V_3 - U_3 V_1 = 0; \end{cases}
$$

sie haben die Form der Funktionalgleichung, die bei den geodätischen Dreiecksnetzen auf Flächen konstanter Krümmung auftritt; diese hat, unter Weglassung aller Konstanten, die nur eine Parallelverschiebung der Koordinaten bedeuten, in den Bezeichnungen der ersten Gleichung (3) die Lösung[1]):

$$
(4)\qquad \begin{cases} U_1 = p(u), & U_2 = p'(u), \\ V_1 = p(v), & V_2 = p'(v), \\ \varphi_1 = p(u+v), & \varphi_2 = -p'(u+v), \end{cases}
$$

wo p die Weierstraß'sche p — Funktion bedeutet;

oder:

$$
(5)\qquad \begin{cases} V_1 = 0, \quad V_2' = \alpha + \beta V_2 + \gamma V_2^2, \\ U_1' = U_1 \sqrt{a + 2\,b\,U_1 + c\,U_1^2}, \\ U_2 = -\dfrac{\beta}{2\gamma} + \dfrac{\delta}{2\gamma} U_1 - \dfrac{1}{2\gamma}\sqrt{a + 2\,b\,U_1 + c\,U_1^2}, \\ \varphi_1' = \varphi_1 \sqrt{a + 2\,b\,\varphi_1 + c\,\varphi_1^2}, \\ \varphi_2 = -\dfrac{\beta}{2\gamma} + \dfrac{\delta}{2\gamma}\varphi_1 - \dfrac{1}{2\gamma}\sqrt{a + 2\,b\,\varphi_1 + c\,\varphi_1^2}; \end{cases}
$$

oder:

$$
(6)\qquad \begin{cases} U_1 - \varkappa U_2 = 0, & U_2 \text{ beliebig}, \\ V_1 - \varkappa V_2 = 0, & V_2 \text{ beliebig}, \\ \varphi_1 - \varkappa \varphi_2 = 0, & \varphi_2 \text{ beliebig}, \end{cases}
$$

oder:

$$
(7)\qquad \begin{cases} U_1 = u^2, \quad U_2 = u, \\ V_1 = v^2, \quad V_2 = v, \\ \varphi_1,\ \varphi_2 \text{ unendlich}, \ \dfrac{\varphi_1}{\varphi_2} = u + v. \end{cases}
$$

[1]) Vgl. O. Volk, Über geodätische Dreiecksnetze auf Flächen konstanten Krümmungsmaßes. Sitzungsberichte der Heidelberger Akademie der Wissenschaften, math.-naturwiss. Klasse. Jahrgang 1927. 3. Abhandlung. S. 6 ff. In der Gleichung (34) ist im Nenner 2γ weggeblieben.

Aus der zweiten Funktionalgleichung (3), die aus der ersten durch Vertauschung von U_2, V_2, φ_2 mit U_3, V_3, φ_3 hervorgeht, folgt dann:

$$\text{(8)} \qquad U_3 = a\,p(u) + b\,p'(u), \quad V_3 = a\,p(v) + b\,p'(v), \\ \varphi_3 = a\,p(u+v) + b\,p'(u+v);$$

oder:

$$\text{(9)} \quad \begin{cases} V_3' = \alpha' + \beta' V_3 + \gamma' V_3^2, \\ U_3 = -\dfrac{\beta'}{2\gamma'} + \dfrac{\delta'}{2\gamma'} U_1 - \dfrac{1}{2\gamma'} \sqrt{a + 2b\,U_1 + c\,U_1^2}, \\ \varphi_3 = -\dfrac{\beta'}{2\gamma'} + \dfrac{\delta'}{2\gamma'} \varphi_1 - \dfrac{1}{2\gamma'} \sqrt{a + 2b\,\varphi_1 + c\,\varphi_1^2}; \end{cases}$$

oder:

$$\text{(10)} \quad \begin{cases} U_1 - \varkappa' U_3 = 0, & U_3 \text{ beliebig}, \\ V_1 - \varkappa' V_3 = 0, & V_3 \text{ beliebig}, \\ \varphi_1 - \varkappa' \varphi_3 = 0, & \varphi_3 \text{ beliebig}, \end{cases}$$

oder:

$$\text{(11)} \quad \begin{cases} U_3 = a u^2 + 2 b u + c, \\ V_3 = a v^2 + 2 b v + c, \\ \varphi_3 \text{ unendlich}, \dfrac{\varphi_1}{\varphi_3} = \dfrac{u+v}{a(u+v) + 2b}. \end{cases}$$

Daraus folgt der Satz:

Liegen die Mittelpunkte dreier Kreisscharen auf ein und derselben Kurve dritter Ordnung:

$$x = p(u), \quad y = p'(u),$$

die in eine Gerade und einen Kegelschnitt oder in drei Gerade ausarten kann, und sind die Radien der Kreise bestimmt durch die Gleichung:

$$r^2 = (x-a)^2 + (y-b)^2 + c,$$

wo x, y die Koordinaten der Kreismittelpunkte und a, b, c beliebige Konstante bedeuten, so lassen sie sich zu einem Dreiecksnetz anordnen. In dem besonderen Falle, daß die Kurve dritter Ordnung in eine Parabel ausartet, arten die Kreise $u + v = \text{const.}$ in Geraden aus.