

Sitzungsberichte

der

mathematisch-naturwissenschaftlichen
Abteilung

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften

zu München

1928. Heft III

November-Dezembersitzung

München 1928

Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften
in Kommission des Verlags R. Oldenbourg München



Über Geflechte kongruenter oder ähnlicher Kurven.

Von **Heinrich Graf**, Karlsruhe.

Mit 5 Tafeln und 9 Textfiguren.

Vorgelegt von S. Finsterwalder in der Sitzung am 10. November 1928.

Inhaltsverzeichnis.

Einleitung.

	Seite
§ 1. Definition und Veranschaulichung der Kurvengeflechte .	206—207

I. Kapitel: Kurvengeflechte in der Ebene.

§ 2. Geflechte aus systemweise kongruenten Kurven	208—218
§ 3. Geflechte aus systemweise ähnlichen Kurven	218—223
§ 4. Geflechte aus lauter kongruenten Kurven	223—237
§ 5. Geflechte aus lauter ähnlichen Kurven	237—238

II. Kapitel: Kurvengeflechte auf krummen Flächen.

§ 6. Geflechte systemweise kongruenter Kurven auf Zylinder-, Dreh- und Schraubenflächen	239
§ 7. Geflechte systemweise ähnlicher Kurven auf Kegel- und Lie'schen Spiralfächen	239
§ 8. Definition besonderer Dreh-, Schrauben- und Spiralfächen durch Eigenschaften daraufliegender Kurvengeflechte .	240—245

Einleitung.

§ 1. Definition und Veranschaulichung der Kurvengeflechte.

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit reellen Kurvengeflechten auf reellen Flächen. Für das Folgende verstehen wir unter „Kurven“ und „Flächen“ nur reelle Gebilde und definieren sie in folgender Weise:

„Fläche“ = umkehrbar eindeutiges, stetiges Bild eines einfach zusammenhängenden ebenen Bereiches B einschließlich der Berandung.

„Kurve“ = Bild einer Geraden, soweit sie dem Bereich B und seiner Berandung angehört; der Kürze halber wollen wir weiterhin solche „Geradenstrecken“ des Bereiches B einfach als Gerade bezeichnen.

„Kurvensystem“ = Bild sämtlicher Geraden des Bereiches B , welche parallel zu irgend einer Richtung sind.

„Kurvengeflecht“ = Bild aller Geraden des Bereiches B .

In der Ebene des Bereiches B wählen wir ein rechtwinkliges Koordinatensystem (u, v) und wollen die Bilder aller „Geraden“ (= Geradenstrecken) dieses Bereiches, welche den Achsen u und v parallel sind, als „Parameterkurven“ der Fläche einführen. Die Kurven der beiden Parametersysteme haben auf Grund der Definition folgende Eigenschaften:

1. Durch jeden Punkt der Fläche geht genau je eine Parameterkurve der beiden Systeme.
2. Irgend zwei Parameterkurven des gleichen Systemes schneiden sich nicht.

Analytisch stellt sich irgend eine Gerade der (u, v) -Ebene durch die Gleichung $u \cos \lambda + v \sin \lambda = \omega$ dar; die reellen Parameter λ und ω der Geraden müssen in deren Variabilitätsbereich $0 \leq \lambda < 2\pi$ und $\omega > 0$ so beschaffen sein, daß die Gerade den Bereich B schneidet.

Während also ein Kurvengeflecht von 2 Parametern λ und ω abhängt, erhält man ein Kurvensystem durch Festhaltung von λ bis auf Vielfache von π und durch Variierung von ω ; bei Fixierung von λ und ω wird eine Einzelkurve des Geflechts festgelegt.

Um uns eine anschauliche Vorstellung von einem „Kurvengeflecht“ zu verschaffen, überziehen wir den Bereich B der Ebene mit Hilfe einer diskreten Anzahl achsenparalleler äquidistanter Geraden mit einem Rechtecksnetz (das längs der Berandung von B natürlich keine geschlossenen Rechtecksfelder mehr aufweisen wird). Als Bild dieses Rechtecksnetzes erhalten wir definitionsgemäß auf der Fläche ein aus Parameterkurven bestehendes Vierecksnetz, das keine überschlagenen Vierecke aufweist. Vermittels dieses Parameternetzes sind wir in der Lage, sofort den Verlauf weiterer „Kurven“ des Geflechts auf der Fläche zu verfolgen; denn die Bilder irgendwelcher Geraden des Bereiches B , welche Knotenpunkte des Rechtecksnetzes verbinden, sind auf der Fläche Kurven des Geflechts, welche die entsprechenden Knotenpunkte des Vierecksnetzes enthalten. Es ist klar, daß man bei Zugrundelegung genügend engmaschiger Rechtecksnetze auf der Fläche eine beliebig weitgehende Veranschaulichung des Kurvengeflechtes erhält.

I. Kapitel: Kurvengeflechte in der Ebene.

§ 2. Geflechte aus systemweise kongruenten Kurven.

A. Welches sind die allgemeinsten Kurvengeflechte in der Ebene von der Eigenschaft, daß jedes darin enthaltene Kurvensystem aus kongruenten Kurven besteht, die durch Parallelverschiebung in einer festen Richtung auseinander hervorgehen?

Die Kurven verschiedener Systeme brauchen dabei nicht kongruent zu sein.

Wir können die Frage auch so formulieren: Welches ist die allgemeinste, bereichsweise umkehrbar eindeutige, stetige Abbildung der (u, v) -Ebene in die (x, y) -Ebene derart, daß alle parallelen Geraden eines Bereiches B der (u, v) -Ebene in kongruente Kurven eines

Bereiches R der (x, y) -Ebene übergeführt werden, welche durch Parallelverschiebung in der x -Richtung zur Deckung kommen?

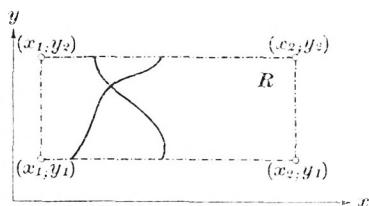


Fig. 1

Wir greifen in der (x, y) -Ebene ein Rechteck R heraus, dessen Seiten paarweise zu den Koordinatenachsen parallel sind (Fig. 1);

das ebene Rechteck R tritt an die Stelle der in § 1 eingeführten „Fläche“ und stellt demgemäß das Bild des Bereiches B der (u, v) -Ebene dar.

Unserer Forderung gemäß heißen die Abbildungsgleichungen der (u, v) -Ebene auf die (x, y) -Ebene:

$$(1) \quad \begin{aligned} u &= F_1(x + f_1(y)) \\ v &= F_2(x + f_2(y)) \end{aligned}$$

Die Parameterkurven gehen durch Parallelverschiebung in der x -Richtung aus zwei Ausgangskurven $x + f_1(y) = 0$ und $x + f_2(y) = 0$ hervor.

Hinsichtlich der Funktionen f_1 , f_2 und F_1 , F_2 treffen wir folgende Voraussetzungen:

- I. $f_1(y)$ und $f_2(y)$ seien im endlichen Intervall $y_1 \leq y \leq y_2$ reell, eindeutig, endlich und zweimal differenzierbar.
- II. $\varphi(y) \equiv f_1(y) - f_2(y)$ soll im gleichen Intervall genau eine Nullstelle besitzen und ferner soll die zu φ inverse Funktion $\bar{\varphi}$ im Definitionsbereich eindeutig sein.

Aus (1) folgt, daß jedem Wertepaar x, y genau ein Wert $\mu = x + f_1(y)$ bzw. $\nu = x + f_2(y)$ entspricht, d. h. sämtlichen Wertepaaren des Rechtecksbereichs entspricht ein bestimmter μ - bzw. ν -Bereich.

- III. $F_1(\mu)$ und $F_2(\nu)$ sollen für den μ - bzw. ν -Bereich reell, eindeutig, endlich und zweimal differenzierbar sein.
- IV. Die zu $u = F_1(\mu)$ bzw. $v = F_2(\nu)$ inversen Funktionen sollen in ihrem Definitionsbereich ebenfalls eindeutig sein.

Diese 4 Voraussetzungen umfassen jedenfalls die Forderung, die in § 1 an unsere Abbildung gestellt wurde.

In § 2 wird von dem Geflecht weiter verlangt, daß irgend ein System paralleler Geraden des Bereiches B der (u, v) -Ebene sich in ein System von kongruenten Kurven der (x, y) -Ebene abbildet, welche durch Parallelverschiebung in Richtung der x -Achse ineinander überführbar sind. Für die achsenparallelen Geraden der (u, v) -Ebene ist diese Forderung durch die unter (1) angegebene Form der Abbildungsgleichungen bereits erfüllt.

Wir werden nun zunächst nicht darnach trachten, dieselbe Forderung zugleich für alle Parallelensysteme der (u, v) -Ebene zu stellen, sondern wir erheben sie nur für ein bestimmtes λ , z. B. $\lambda = +\pi/4$ (vgl. S. 206, unten); das zu diesem Parallelensystem $u + v = +\sqrt{2} \cdot \omega$ gehörige Kurvensystem in der (x, y) -Ebene muß dann notwendig die Parameterform $\omega = F_*(x + f_3(y))$ haben; aus den drei Gleichungen folgt aber, wenn wir noch für $\sqrt{2} \cdot F_* \equiv F_3$ schreiben, die Funktionalgleichung:

$$(2) \quad F_1(x + f_1(y)) + F_2(x + f_2(y)) \equiv F_3(x + f_3(y)),$$

welche im ganzen Bereich R für jedes x und y identisch zu erfüllen ist.

Die Identität (2) muß notwendig für jedes Geflecht von den Eigenschaften des § 2, A erfüllt werden.

Wir führen neue Veränderliche ein:

$$\begin{aligned}\mu &= x + f_1(y) \\ \nu &= x + f_2(y);\end{aligned}$$

auf Grund der Voraussetzungen I. und II. von S. 209, welche $\mu \equiv \nu$ ausschließen, ergeben sich x und y eindeutig:

$$\begin{aligned}x &= \frac{1}{2}(\mu + \nu - f_1(\bar{\nu}) - f_2(\bar{\nu})) \\ y &= \bar{\nu}(\mu - \nu),\end{aligned}$$

folglich:

$$x + f_3(y) = \frac{1}{2}(\mu + \nu + \chi(\mu - \nu)),$$

wobei

$$\frac{1}{2}\chi(\mu - \nu) \equiv f_3(\bar{\nu}) - \frac{1}{2}(f_1(\bar{\nu}) + f_2(\bar{\nu}));$$

$\chi(\mu - \nu)$ ist dann wegen (2) gleichfalls im Definitionsbereich reell und zweimal differenzierbar.

Die Identität (2) nimmt nunmehr die Form an:

$$(3) \quad F_1(\mu) + F_2(\nu) \equiv F_3\left[\frac{1}{2}(\mu + \nu + \chi(\mu - \nu))\right].$$

Wir differenzieren (3) nach μ bzw. nach ν und erhalten, wenn wir die Ableitungen der Funktionen nach ihren Argumenten mit ' bezeichnen:

$$\begin{aligned}F'_1 &\equiv \frac{1}{2}(1 + \chi') F'_3 \\ F'_2 &\equiv \frac{1}{2}(1 - \chi') F'_3;\end{aligned}$$

F'_3 existiert wegen (2) S. 209; daraus folgt:

$$(4) \quad (1 - \chi') F'_1 \equiv (1 + \chi') F'_2;$$

(4) nach μ bzw. ν differenziert gibt:

$$\begin{aligned}(1 - \chi') F''_1 - \chi'' F'_1 &\equiv \chi'' F'_2 \\ \chi'' F'_1 &\equiv (1 + \chi') F''_2 - \chi'' F'_2,\end{aligned}$$

folglich:

$$(5) \quad (1 - \chi') F''_1 \equiv (1 + \chi') F''_2.$$

Da wir von $F'_1 \equiv 0$ bzw. $F'_2 \equiv 0$ absehen müssen, was $F_1 = \text{const.}$, $F_2 = \text{const.}$ ergibt und folglich keine Abbildung mehr

liefert, sind damit wegen (4) auch die beiden Fälle $\chi' \equiv -1$ bzw. $\chi' \equiv +1$ ausgeschlossen; aus (4) und (5) folgt somit immer:

$$\frac{F_1''(\mu)}{F_1'(\mu)} \equiv \frac{F_2''(\nu)}{F_2'(\nu)} \equiv a = \text{const.};$$

a ist dabei irgend eine reelle Zahl.

1. $a \neq 0$:

$$\begin{aligned} F_1'(\mu) &\equiv b_1 e^{a\mu} + c_1 \\ F_2'(\nu) &\equiv b_2 e^{a\nu} + c_2; \end{aligned}$$

a ; b_1 , b_2 ; c_1 , c_2 sind beliebige, reelle Konstante. Führt man an Stelle von μ und ν die ursprünglichen Veränderlichen x , y ein, so schreiben sich die Abbildungsformeln:

$$(6) \quad \begin{cases} u = b_1 e^{a(x+f_1(y))} + c_1 \\ v = b_2 e^{a(x+f_2(y))} + c_2. \end{cases}$$

Beide Abbildungsfunktionen F_1 und F_2 sind Exponentialfunktionen mit der gleichen Basis e^a . Das Bild irgend eines Parallelsystems $\lambda = \text{const.}$ der (u, v) -Ebene: $u \cos \lambda + v \sin \lambda = \omega$ ergibt in der (x, y) -Ebene das Kurvensystem mit dem Parameter ω :

$$\omega = e^{a(x+f(\lambda)(y))} + c_1 \cos \lambda + c_2 \sin \lambda,$$

wobei

$$(6a) \quad f(\lambda)(y) \equiv \frac{1}{a} \ln (b_1 e^{a f_1(y)} \cdot \cos \lambda + b_2 e^{a f_2(y)} \cdot \sin \lambda).$$

Das Kurvensystem enthält also nicht nur, wie die Funktionalgleichung (2) forderte, parallel in der x -Richtung verschobene Kurven für $\lambda = \pi/4$, sondern für jeden Wert λ . Die Kurvenfunktion $f(\lambda)(y)$ ändert sich entsprechend der Identität (6a), während die Funktion F_3 die Exponentialfunktion mit derselben Basis e^a ist wie F_1 und F_2 .

2. $a = 0$:

$$\begin{aligned} F_1'(\mu) &\equiv b_1 \mu + c_1 \\ F_2'(\nu) &\equiv b_2 \nu + c_2; \end{aligned}$$

b_1 , b_2 ; c_1 , c_2 sind beliebige, reelle Konstante. Wenn man anstelle von μ und ν die Koordinaten x und y einführt, ergeben sich die Abbildungsformeln:

$$(7) \quad \begin{cases} u = b_1(x + f_1(y)) + c_1 \\ v = b_2(x + f_2(y)) + c_2. \end{cases}$$

Beide Funktionen F_1 und F_2 sind lineare Funktionen.

Auch hier besteht wie im Falle (1) die Abbildung irgend eines Systemes paralleler Geraden $\lambda = \text{const.}$ der (u, v) -Ebene aus Kurven, die durch Parallelverschiebung in Richtung der x -Achse auseinander hervorgehen. Die Gleichung des Systems lautet:

$$w = (b_1 \cos \lambda + b_2 \sin \lambda) (x + f_{(\lambda)}(y)) + c_1 \cos \lambda + c_2 \sin \lambda,$$

wobei

$$(7a) \quad (b_1 \cos \lambda + b_2 \sin \lambda) f_{(\lambda)}(y) \equiv b_1 f_1(y) \cos \lambda + b_2 f_2(y) \sin \lambda.$$

Die Funktion F_3 ist ebenfalls linear.

Unter der Voraussetzung, daß sich die zuletzt unter 1. und 2. gewonnenen Abbildungsgleichungen (6) und (7) realisieren lassen und Geflechte liefern, was anschließend gezeigt werden wird, haben wir zunächst als Ergebnis den

Satz 1: Enthält ein ebenes Kurvengeflecht 3 verschiedene Kurvensysteme mit der Eigenschaft, daß jedes einzelne System aus kongruenten und in einer festen x -Richtung parallel verschobenen Kurven besteht, dann haben alle Kurvensysteme des Geflechtes die gleiche Eigenschaft.

Aus den 3 Kurvensystemen lassen sich aber immer 3 diskrete Folgen von Kurven so herausgreifen, daß sie zu einem beliebig engmaschigen, unterteilbaren „Dreiecksnetz“ zusammengefügt werden können. Das Dreiecksnetz der Kurven in der (x, y) -Ebene ist dann gemäß § 1 das Bild eines Dreiecksnetzes aus 3 Parallelbüscheln gerader Linien der (u, v) -Ebene.

Es gilt also auch der

Satz 2: Das allgemeinste ebene Dreiecksnetz, das sich aus 3 verschiedenen Kurvensystemen von der Eigenschaft aufbauen läßt, daß die Kurven jedes der 3 Systeme durch Parallelverschiebung in einer festen Richtung ineinander übergehen, ist Bestandteil eines Kurvengeflechtes, dessen sämtliche Systeme die gleiche Eigenschaft besitzen, also eines Geflechtes vom Typus A des § 2.

Wir werden jetzt die Abbildungsgleichungen (6) und (7), welche sich in den beiden Fällen 1. $a \neq 0$ und 2. $a = 0$ ergaben, dadurch vereinfachen, daß wir die unwesentlichen Konstanten der Lösung spezialisieren. Wir setzen $c_1 = c_2 = 0$ und $b_1 = b_2 = 1$ und sehen dadurch lediglich von einer trivialen Parallelverschiebung bzw. affinen Deformation der (u, v) -Ebene in der u - und v -Richtung (eventuell mit Spiegelung) ab. Ferner sei im 1. Falle $a = 1$; das bedeutet nur eine affine Deformation der Geflechtsebene (x, y) in der Richtung der x -Achse.

Unter diesen Voraussetzungen treten an Stelle der Gleichungen (6) und (7) die folgenden:

1. Logarithmisches Geflecht:

$$(8) \quad \begin{aligned} \ln u &= x + f_1(y) \\ \ln v &= x + f_2(y) \\ \ln \omega &= x + f_{(\lambda)}(y); \\ f_{(\lambda)}(y) &\equiv \ln (e^{f_1(y)} \cos \lambda + e^{f_2(y)} \sin \lambda). \end{aligned}$$

2. Lineares Geflecht:

$$(9) \quad \begin{aligned} u &= x + f_1(y) \\ v &= x + f_2(y) \\ \omega &= [x + f_{(\lambda)}(y)] [\cos \lambda + \sin \lambda]; \\ f_{(\lambda)}(y) &\equiv \frac{f_1(y) \cos \lambda + f_2(y) \sin \lambda}{\cos \lambda + \sin \lambda}. \end{aligned}$$

Die Gleichungen (8) und (9) stellen unter den Voraussetzungen I—IV des § 2 die allgemeinsten Abbildungsgleichungen dar, welche für die unter A. geforderten Geflechte notwendig sind. Inwieweit diese Abbildungsgleichungen auch dazu hinreichen, um Geflechte zu liefern, die kongruente und durch Parallelverschiebung in der x -Richtung ineinander überführbare Kurven enthalten, wird die folgende Betrachtung zeigen.

Die Abbildungsfunktionen F_1 und F_2 sind für beide Fälle 1. und 2. derart, daß gemäß den Voraussetzungen III und IV in § 2 für das x -Intervall $\{x_2 - x_1\}$ keine Grenzen vorgeschrieben sind; nur die Endlichkeit des Intervalls ist wegen III vorausgesetzt.

Wir wählen daher an Stelle des Rechtecks R der (x, y) -Ebene (Fig. 1) den ganzen Parallelstreifen der Euklidischen Ebene zwischen den Geraden $y = y_1$ und $y = y_2$ als Geflechtbereich (Fig. 2).

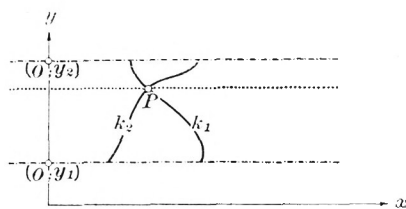


Fig. 2

Folgendes besagen:

I. Die beiden Ausgangskurven k_1 und k_2 und alle zu ihnen in der x -Richtung parallel verschobenen Kurven haben an jeder Stelle ihres Definitionsbereichs $\{y_2 - y_1\}$ eine Tangente und Krümmung und verlaufen ganz im Endlichen. Zu jeder y -Koordinate gehört eine x -Koordinate.

II. Die beiden Ausgangskurven k_1 und k_2 schneiden sich in genau einem Punkt P , da $\varphi(y) \equiv f_1(y) - f_2(y)$ genau eine Nullstelle besitzen soll. Irgend zwei zu den beiden Ausgangskurven parallel in der x -Richtung um die beliebigen Beträge c_1 und c_2 verschobene Kurven schneiden sich in einem oder keinen Punkt, weil $\overline{\varphi}(c_1 - c_2)$ eindeutig sein soll im ganzen Definitionsbereich.

1. Diskussion der durch die Gleichung (8) vermittelten Abbildung (logarithmisches Geflecht):

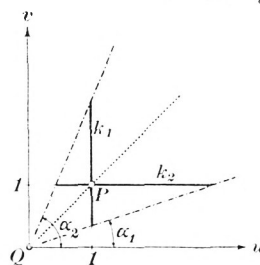


Fig. 3

Den beiden Ausgangskurven k_1 und k_2 des Streifenbereiches entsprechen in der (u, v) -Ebene die Achsenparallelen im Abstand 1 (Fig. 3). Irgend einer Parallelen zur x -Achse des Streifenbereiches entspricht ein Halbstrahl von Q aus, der gegen die u -Achse die Neigung

$$(10) \quad \operatorname{tg} a = \frac{v}{u} = e^{f_2(y) - f_1(y)}$$

besitzt. Dem „Streifenbereich“ $\{y_2 - y_1\}$ der (x, y) -Ebene entspricht ein „Fächerbereich“ (Winkelraum) der (u, v) -Ebene, welcher ganz im 1. Quadranten verläuft; die Neigungswinkel α_1 und α_2 seiner Randstrahlen gegen die u -Achse rechnen sich aus (10) durch Einsetzen von y_1 und y_2 . Dem Unendlichfernen des Streifen-

bereiches in der Richtung der positiven x -Achse ist das Unendlichferne des Fächerbereiches zugeordnet, dem Unendlichfernen in der Richtung der negativen x -Achse hingegen nur der Ursprung Q^1). Wegen der Voraussetzungen I. und II. in § 2 ist die Zuordnung des Streifenbereiches $\{y_2 - y_1\}$ der (x, y) -Ebene und des Fächerbereiches $\{a_2 - a_1\}$ der (u, v) -Ebene einschließlich der Berandungen und mit Ausnahme von Punkt Q eine stetige und umkehrbar eindeutige und zwar ist keine der beiden Halbachsen u und v Randstrahl für den Fächerbereich.

Für den λ -Bereich des Geflechtes (vgl. § 1) hat man, $a_2 > a_1$ vorausgesetzt, die Ungleichung:

$$(11) \quad a_2 + \frac{\pi}{2} > \lambda > a_1 - \frac{\pi}{2}.$$

Jetzt, nachdem die umkehrbar eindeutige Zuordnung der Punkte des Fächerbereiches und des Streifenbereiches gezeigt ist, werden wir nach den Bildern irgend welcher Geraden des Fächerbereiches fragen.

Zunächst betrachten wir Gerade eines Parallelensystems, welche beide Randstrahlen des Fächerbereiches treffen. Die Bilder dieser Geraden sind Kurven, welche dann ebenfalls die Randgeraden des Streifenbereiches schneiden und ganz im Endlichen verlaufen. Das ganze Kurvensystem besteht aus kongruenten Kurven, welche durch Parallelverschiebung in der x -Richtung auseinander hervorgehen. Zu den Kurvensystemen dieser Art gehören auch die Bilder der achsenparallelen Geraden, nämlich die Parametersysteme $\lambda = 0$ und $\lambda = \pi/2$.

Die Geraden eines Parallelensystems, welche jeweils nur einen der beiden Randstrahlen des Fächers treffen, schließen mit der u -Achse Winkel α ein im Intervall zwischen a_1 und a_2 . Jede derartige Gerade g bildet sich als Kurve ab, welche nur einen Rand des parallelen Streifens trifft und den Streifen nicht ganz überquert, sondern in Richtung der positiven x -Achse asymptotisch ins Unendliche verläuft; die zur x -Achse parallele Asymptote der Kurve ist das Bild der Parallelen zu g durch den Ursprung Q des Koordinatensystems (u, v) . Das ganze Parallelensystem zu g hat als Bild ein System von Kurven, welche

¹⁾ Genauer gesagt: Der Grenzübergang $x \rightarrow +\infty$ bzw. $x \rightarrow -\infty$ zieht den Grenzübergang $u \rightarrow +\infty$, $v \rightarrow +\infty$ bzw. $u \rightarrow 0$, $v \rightarrow 0$ nach sich.

die gleiche Asymptote besitzen; der eine Teil des Kurvensystems verläuft oberhalb, der andere unterhalb der Asymptote. Jedes der beiden Teilsysteme besteht einzeln aus kongruenten, durch Parallelverschiebung in der x -Richtung ineinander übergehenden Kurven.

2. Diskussion der durch die Gleichung (9) vermittelten Abbildung (lineares Geflecht):

Den Ausgangskurven k_1 und k_2 entsprechen die Achsen der (u, v) -Ebene (Fig. 4). Einer Parallelen zur x -Achse des Streifenbereiches entspricht eine Parallele zur Winkelhalbierenden des ersten und dritten Quadranten der (u, v) -Ebene:

$$(v - u) = f_2(y) - f_1(y).$$

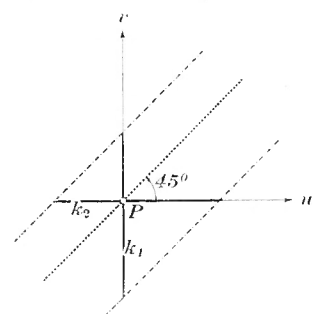


Fig. 4

Dem Streifenbereich $\{y_2 - y_1\}$ der (x, y) -Ebene entspricht in der (u, v) -Ebene ebenfalls ein Streifenbereich, der sich über alle 4 Quadranten erstreckt und den Ursprung P im Innern enthält; dem Unendlichfernen des Parallelstreifens in der

(x, y) -Ebene in Richtung der positiven und negativen x -Achse entspricht das Unendlichferne des Parallelstreifens in der (u, v) -Ebene im ersten und dritten Quadranten. Wegen der in § 2 unter I. und II. getroffenen Voraussetzungen ist auch hier die Zuordnung der beiden Streifenbereiche einschließlich ihrer Randgeraden eine stetige und umkehrbar eindeutige.

Der λ -Bereich des Geflechts ist hier

$$(12) \quad 0 < \lambda < 2\pi.$$

Die Bilder aller Geraden des Streifenbereiches der (u, v) -Ebene, welche nicht parallel sind zu den Randgeraden, sind durchwegs Kurven, die beide Ränder des Parallelstreifens der (x, y) -Ebene treffen und dort ganz im Endlichen verlaufen. Alle Kurven sind systemweise kongruent und gehen durch Parallelverschiebung in der x -Richtung ineinander über.

Ergebnis: Die Diskussion der Gleichungen (8) und (9) hat gezeigt, daß sie nicht nur die notwendigen (vgl. S. 213), sondern auch die hinreichenden Geflechtsbedingungen darstellen.

B. Welches sind die allgemeinsten Kurvengeflechte in der Ebene von der Eigenschaft, daß jedes darin enthaltene Kurvensystem aus kongruenten Kurven besteht, die durch **Drehung** um ein festes Zentrum auseinander hervorgehen?

Auch hier brauchen die Kurven verschiedener Systeme nicht kongruent zu sein.

Die Beantwortung dieser Frage läßt sich unmittelbar aus den Ergebnissen des vorigen Paragraphen ableiten. Wir setzen in den erhaltenen Formeln überall anstelle der Cartesischen Koordinaten x und y die Polarkoordinaten φ und r und deuten die Resultate in der Ebene des Polarkoordinatensystems; $r = 0$ ist das feste Zentrum O . Anstelle des Parallelstreifens der (x, y) -Ebene, worin das ganze Geflecht eingebettet ist und sich nach beiden Seiten hin beliebig ausdehnt, tritt nunmehr ein Ringstreifen zwischen zwei zu O konzentrischen Kreisen als Berandung. Natürlich kann sich, wenn die Eindeutigkeit der Abbildung nicht gestört sein soll, das Geflecht nicht über einen Vollring hinaus ausbreiten, ebenso darf O nicht innerhalb des Streifens liegen. Die im vorigen Abschnitt A. unter den Kurven des Geflechts enthaltenen Geraden und Asymptoten parallel zu der x -Achse sind in der Ebene des Ringstreifens konzentrische Kreise um O (Fig. 5).

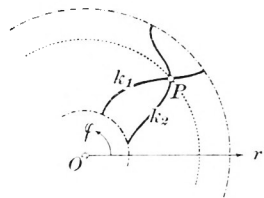


Fig. 5

Zusammenfassung: Wir definieren das Kurvengeflecht durch die in § 1 beschriebene Abbildung eines (u, v) -Bereichs auf einen (x, y) -Bereich.

A. Das allgemeinste Kurvengeflecht in der Ebene, welches aus systemweise kongruenten Kurven besteht, die durch Parallelverschiebung in einer festen Richtung, der x -Richtung, ineinander übergehen, hat dann die folgende Eigenschaft:

Zwei Systeme von Kurven, aus denen wir ein Geflecht aufbauen können, sind ganz willkürlich wählbar bis auf die Voraussetzungen I–II, S. 209 oder S. 214. In jedem System des Geflechtes sind die Kurven, welche gleichabständigen Geraden der (u, v) -Ebene als Bilder entsprechen, nach Abständen x angeordnet

entweder 1. einer logarithmischen Skala mit der gleichen beliebigen Basis, oder 2. einer linearen (regulären) Skala.

Ein Geflecht der ersten Art (logarithmisches Geflecht) enthält Kurvensysteme, deren Kurven jeweils einer einzigen Kurve kongruent sind, und Kurvensysteme, deren Kurven jeweils zwei Kurven kongruent sind; letztere haben eine dem System zugeordnete asymptotische Gerade parallel zur x -Achse als ausgeartete Einzelkurve gemeinsam.

Ein Geflecht der zweiten Art (lineares Geflecht) enthält nur Kurvensysteme, deren Kurven jeweils einer Kurve kongruent sind; unter den Kurvensystemen ist ein spezielles System vorhanden, dessen Kurven in Parallele zur x -Achse ausarten.

B. Das allgemeinste Kurvengeflecht in der Ebene, das aus systemweise kongruenten und durch Drehung um ein festes Zentrum O auseinander hervorgehenden Kurven besteht, hat dann wörtlich dieselben Eigenschaften wie das unter A. angeführte, wenn wir nur an die Stelle der Abstandsfolge x die Drehwinkelfolge φ und an die Stelle der parallelen Geraden zur x -Achse konzentrische Kreise um O setzen.

§ 3. Geflechte aus systemweise ähnlichen Kurven.

A. Welches sind die allgemeinsten Kurvengeflechte in der Ebene von der Eigenschaft, daß jedes darin enthaltene System aus ähnlichen Kurven besteht, welche durch „Strahlung“ von einem festen Punkt O aus ineinander überführbar sind?

Für die Kurven verschiedener Systeme wird keine Ähnlichkeit gefordert.

Wir bezeichnen hierbei Kurven eines Systems, welche ähnlich und zum Punkt O ähnlich gelegen sind, als durch „Strahlung“¹⁾ ineinander überführbar; homologe Punkte der Kurven liegen auf Strahlen durch O .

In § 2 untersuchten wir Kurvengeflechte in der (x, y) -Ebene, welche Systeme kongruenter und durch Parallelverschiebung ineinander überführbarer Kurven enthielten.

¹⁾ Auch als „Streckung“ oder „perspektive Dehnung“ bezeichnet (vgl. H. Beck, Koordinatengeometrie, 1919, 1. Bd., S. 53).

Wir bilden ein derartiges Geflecht der (x, y) -Ebene reell auf eine neue (φ, r) -Ebene ab durch folgende Gleichungen:

$$(13) \quad \begin{cases} x = a \ln r \\ y = b \varphi; \end{cases}$$

φ und r sind Polarkoordinaten, $r = 0$ ist der Koordinatenursprung O . a, b sind beliebige reelle Konstante. Irgend einer Parallelen $y = \text{const.}$ zur x -Achse entspricht in der neuen Ebene ein Strahl $\varphi = \text{const.}$

Der Parallelstreifenbereich $\{y_2 - y_1\}$ in der (x, y) -Ebene, worin das ursprüngliche Geflecht gelegen ist, kann (bei entsprechender Wahl von b) immer auf einen Fächerbereich $\{b(\varphi_2 - \varphi_1)\}$ der neuen Ebene umkehrbar eindeutig abgebildet werden und zwar einschließlich der Berandung ohne den Ausnahmepunkt O (Fig. 6).

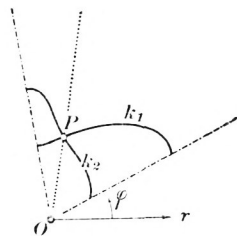


Fig. 6

Irgend ein Kurvensystem eines Geflechtes in der (x, y) -Ebene, welches aus kongruenten und in der x -Richtung parallel verschobenen Kurven besteht, stellt sich, als Bild eines Parallelen-systemes $\lambda = \text{const.}$ der Geraden $\omega = u \cos \lambda + v \sin \lambda$ der (u, v) -Ebene aufgefaßt, durch die Gleichung dar:

$$\omega = F(x + f_{(\lambda)}(y)).$$

Wenn wir nun ein solches Kurvensystem mit Hilfe der Gleichungen (13) in die neue Ebene abbilden, dann lautet dort die Gleichung des Kurvensystems:

$$(14) \quad \omega = G(r \cdot g_{(\lambda)}(\varphi));$$

hierbei ist

$$F(a \ln t) \equiv G(t) \quad \text{und} \quad e^{\frac{f_{(\lambda)}(b \varphi)}{a}} \equiv g_{(\lambda)}(\varphi).$$

Die Gleichung (14) zeigt, daß alle Kurven dieses Systems ähnlich und zu O ähnlich gelegen sind, also durch „Strahlung“ auseinander hervorgehen.

Den Nachweis, daß es keine anderen Geflechte dieser Art mit ähnlichen Kurven gibt, liefert folgende Überlegung: Man kann ein Kurvensystem mit dieser Eigenschaft immer in der Form (14) schreiben. Sucht man ein ganzes Geflecht, dann

hat man — den Überlegungen von § 2 gemäß — als notwendige Bedingung eine Funktionalgleichung für die 3 (unbekannten) Funktionen G_1 , G_2 und G_3 dreier Kurvensysteme identisch für jeden Wert r und φ zu erfüllen; ersetzen wir r und φ gemäß den Gleichungen (13) durch x und y , dann tritt anstelle der letztgenannten Funktionalgleichung (14) die bereits S. 209 erwähnte Gleichung (2), welche für jeden Wert x und y zu befriedigen ist. Für F ergab sich aber als allgemeinste Lösung die Exponentialfunktion bzw. die lineare Funktion, folglich für G als allgemeinste Lösung die Potenz- bzw. logarithmische Funktion.

Das allgemeinste Geflecht, welches aus systemweise ähnlichen Kurven besteht, die durch Strahlung von O aus ineinander übergehen, gehört daher einem der beiden folgenden Typen an; dabei sind die Geflechte als Bilder der Geraden der (u, v) -Ebene aufgefaßt:

1. Potenz-Geflecht.

$$\overset{1}{u^a} = r \cdot g_1(\varphi)$$

$$\overset{1}{v^a} = r \cdot g_2(\varphi)$$

$$\overset{1}{\omega^a} = r \cdot g_{(\lambda)}(\varphi) \equiv r \cdot \left((g_1(\varphi))^a \cos \lambda + (g_2(\varphi))^a \sin \lambda \right)^{\frac{1}{a}}.$$

2. Exponential-Geflecht.

$$\overset{u}{e^a} = r \cdot g_1(\varphi)$$

$$\overset{v}{e^a} = r \cdot g_2(\varphi)$$

$$\overset{\omega}{e^{a(\cos \lambda + \sin \lambda)}} = r \cdot g_{(\lambda)}(\varphi) \equiv r \cdot \left((g_1(\varphi))^{\cos \lambda} \cdot (g_2(\varphi))^{\sin \lambda} \right)^{\frac{1}{\cos \lambda + \sin \lambda}}.$$

Sowohl bei 1. wie bei 2. ist a eine beliebige, reelle, von Null verschiedene Zahl.

B. Welches sind die allgemeinsten Geflechte in der Ebene von der Eigenschaft, daß jedes darin enthaltene System aus ähnlichen Kurven besteht, welche durch „Spiralung“ um ein festes Zentrum O ineinander überführbar sind?

Für die Kurven verschiedener Systeme wird keine Ähnlichkeit gefordert.

Wir bezeichnen hierbei die unter sich ähnlichen Kurven eines Systems, deren homologe Punkte auf kongruenten und zum Punkt

O konzentrischen logarithmischen Spiralen gelegen sind, als durch „Spiralung“ in einander überführbar¹⁾).

Ebenso wie unter A. dieses Paragraphen werden wir die Kurvengeflechte in der (x, y) -Ebene, welche Systeme kongruenter und durch Parallelverschiebung in einander überführbarer Kurven enthielten, auf eine neue Ebene abbilden; die Abbildungsgleichungen sollen nunmehr lauten:

$$(15) \quad \begin{cases} x = a \varphi \\ y = b (k \varphi - \ln r). \end{cases}$$

Hierbei sind φ, r Polarkoordinaten in der neuen Ebene; $r = 0$ ist der Ursprung O . a, b, k sind beliebige, reelle und von Null verschiedene Konstante. Allen Parallelen $y = \text{const.}$ der (x, y) -Ebene entsprechen in der neuen (φ, r) -Ebene kongruente, konzentrische logarithmische Spiralen $r = e^{k(\varphi + \text{const.})}$. Der Parallelstreifenbereich $\{y_2 - y_1\}$ in der (x, y) -Ebene kann (bei entsprechender Wahl von b) auf einen Spiralstreifenbereich der neuen Ebene einschließlich der Berandungen ohne den Ausnahmepunkt O umkehrbar eindeutig abgebildet werden. Die Ränder des Spiralbereiches sind zwei kongruente, bezügl. O konzentrische logarithmische Spiralen (Fig. 7).

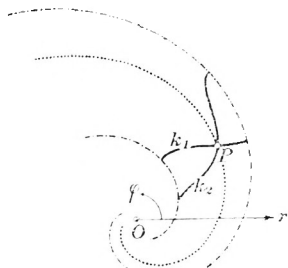


Fig. 7

Irgend ein Kurvensystem in dem Geflecht der (x, y) -Ebene, dessen Gleichung $\omega = F(x + f(y))$ lautet, bildet sich in die neue Ebene durch die Gleichungen (15) als folgendes Kurvensystem ab:

$$(16) \quad \omega = F(a \varphi + f(b(k \varphi - \ln r))).$$

Aus der Darstellung (16) ist ersichtlich, daß alle Kurven dieses Systemes unter einander ähnlich sind; die homologen Punkte der ähnlichen Kurven liegen auf konzentrischen logarithmischen Spiralen, den Bildern der Parallelen zur x -Achse.

¹⁾ „Spiralung“ ist daher die Gesamtheit der „Drehstreckungen“ oder „Dehnungen“ (vergl. Anmerkung auf Seite 218) mit gemeinsamem Festpunkt, bei welchen zwischen dem Streckungsfaktor K und dem Drehwinkel φ der Zusammenhang $K = e^{k\varphi}$ besteht.

Wir suchen nun ein ganzes Kurvengeflecht auf, dessen Kurven systemweise ähnlich sind und durch Spiraltung auseinander hervorgehen.

Die Überlegungen sind die gleichen wie die unter A. Anstelle der notwendigen Funktionalgleichung (2) S. 209, welche dort für jeden Wert x und y identisch zu erfüllen war, tritt nunmehr vermöge der Substitution (15) eine in φ und r identisch zu erfüllende Funktionalgleichung. Die allgemeinste Lösung der Funktionalgleichung ergab für F die Exponential- bzw. lineare Funktion.

Folglich ergibt sich als allgemeinstes Geflecht, das aus systemweise ähnlichen Kurven besteht, welche durch Spiraltung bezügl. O ineinander übergehen, einer der beiden folgenden Typen; die Geflechte sind die Bilder der Geraden der (u, v) -Ebene und haben die Gleichungen:

1. Logarithmisches Geflecht:

$$\ln u = a\varphi + f_1(b(k\varphi - \ln r))$$

$$\ln v = a\varphi + f_2(b(k\varphi - \ln r))$$

$$\ln \omega = a\varphi + f_{(\lambda)}(b(k\varphi - \ln r)),$$

$$\text{wobei } f_{(\lambda)} \equiv \ln(e^{f_1} \cos \lambda + e^{f_2} \sin \lambda).$$

2. Lineares Geflecht:

$$u = a\varphi + f_1(b(k\varphi - \ln r))$$

$$v = a\varphi + f_2(b(k\varphi - \ln r))$$

$$\omega = [a\varphi + f_{(\lambda)}(b(k\varphi - \ln r))] \cdot (\cos \lambda + \sin \lambda),$$

$$\text{wobei } (\cos \lambda + \sin \lambda) \cdot f_{(\lambda)} \equiv \cos \lambda \cdot f_1 + \sin \lambda \cdot f_2.$$

Sowohl bei 1. wie bei 2. sind die beiden wesentlichen Konstanten a und k beliebige, reelle, von Null verschiedene Zahlen.

Zusammenfassung: Wir definieren ein Kurvengeflecht nach § 1 durch Abbildung eines (u, v) -Bereiches auf einen (φ, r) -Bereich.

A. Das allgemeinste Kurvengeflecht in der Ebene, welches aus systemweise ähnlichen Kurven besteht, die durch Strahlung von O aus ineinander übergehen, hat ganz analoge Eigenschaften wie das unter A. des vorigen Paragraphen angeführte Geflecht aus kongruenten Kurven in der (x, y) -Ebene. Die Abstandsfolge r vom Punkte O aus ist für homologe Punkte der ähnlich und ähnlich gelegenen Kurven eines Systems, welche äquidistanten Parallelen der (u, v) -Ebene entsprechen,

entweder 1. eine Potenzskala mit beliebigem gleichem Exponenten, oder 2. eine Exponentialskala mit beliebiger Basis.

Die Rolle der Parallelen zur x -Achse des vorigen Paragraphen übernehmen in dem Geflecht dieses Paragraphen die Strahlen durch O .

B. Das allgemeinste Kurvengeflecht in der Ebene, welches aus systemweise ähnlichen Kurven besteht, die durch Spiraltung um O ineinander übergehen, hat wörtlich die gleichen Eigenschaften wie das unter B. angeführte Geflecht des vorigen Paragraphen, wenn wir an Stelle der konzentrischen Kreise um O konzentrische logarithmische Spiralen des Geflechtes setzen.

§ 4. Geflechte aus lauter kongruenten Kurven.

In § 2 wurden die allgemeinsten ebenen Geflechte bestimmt, welche Kurvensysteme aus kongruenten Kurven enthielten; die Kurven jedes einzelnen Systems gingen entweder A. durch Parallelverschiebung in einer festen x -Richtung oder B. durch Drehung um einen festen Punkt O ineinander über.

Wir werden in § 4 die allgemeinsten ebenen Geflechte der Art A. untersuchen, worin die Kongruenz nicht nur für die Kurven jedes Einzelsystems, sondern für alle Kurven des Geflechtes gefordert wird; dabei sollen irgend zwei verschiedenen Systemen angehörende Kurven des Geflechtes ebenfalls durch reine Translation gegenseitig zur Deckung gebracht werden können; wir heißen deshalb alle Kurven des Geflechtes „zueinander parallelgestellt“.

Es ist unmittelbar einleuchtend, daß eine Affin- oder Ähnlichkeitstransformation eines ebenen Geflechtes, das lauter kongruente und parallelgestellte Kurven enthält, diese Eigenschaft nicht zerstört. Wir könnten daher den nachfolgenden Untersuchungen an Stelle eines rechtwinkligen Koordinatensystems (x, y) auch ein schiefwinkeliges zugrunde legen, ohne die wesentliche Geflechtseigenschaft zu verändern. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit dürfen wir die auf S. 213 vereinfachten Abbildungsgleichungen (8) und (9) für unsere Rechnung benutzen.

Analytisch ist die Bedingung dafür, daß alle Kurven

$$x + f_{(i)}(y) = F(\omega)$$

verschiedener Systeme λ kongruent und parallelgestellt sind, die Identität in x, y, λ und ω :

$$(17) \quad \begin{aligned} x - F(\omega) + f_{(\lambda)}(y) &\equiv x - \bar{F}(\omega) + p(\lambda) + h(y + q(\lambda)) \\ \text{d. h. } f_{(\lambda)}(y) &\equiv p(\lambda) + h(y + q(\lambda)); \end{aligned}$$

hiebei sind die Verschiebungsgrößen $p(\lambda)$ und $q(\lambda)$ der Kurve $x + h(y) = 0$ in Richtung der x - bzw. y -Achse Funktionen von λ und sollen für den ganzen λ -Bereich des Geflechts (vgl. S. 215, (11) und S. 216, (12)) endlich und zweimal differenzierbar sein!

Wir schreiben für die Ausgangskurven $x + f_1(y) = 0$ und $x + f_2(y) = 0$ der beiden Parametersysteme $u = \text{const.}$ und $v = \text{const.}$

$$(18) \quad \begin{cases} x + f_1(y) \equiv x + p_1 + h(y + q_1) = 0 \\ x + f_2(y) \equiv x + p_2 + h(y + q_2) = 0, \end{cases}$$

worin jetzt p_1, p_2 und q_1, q_2 feste reelle Zahlen sind und wegen Voraus. II § 2 $q_1 \neq q_2$ sein darf. Je nachdem wir es mit einem logarithmischen Geflecht (1. Typus) oder linearen Geflecht (2. Typus) zu tun haben, ergibt sich die Funktion $f_{(\lambda)}(y)$ eines entsprechend der Wahl des Parameters λ herausgegriffenen Systems auf Grund der Identitäten (8) und (9) auf S. 213 und (17) und (18):

$$(19) \quad 1. \quad e^{p(\lambda) + h(y + q(\lambda))} \equiv \cos \lambda \cdot e^{p_1 + h(y + q_1)} + \sin \lambda \cdot e^{p_2 + h(y + q_2)}$$

$$(20) \quad 2. \quad \begin{aligned} [p(\lambda) + h(y + q(\lambda))] &(\cos \lambda + \sin \lambda) \\ &\equiv [p_1 + h(y + q_1)] \cos \lambda + [p_2 + h(y + q_2)] \sin \lambda. \end{aligned}$$

Diese beiden Funktionalgleichungen müssen notwendig für jeden λ - und y -Wert der betreffenden Bereiche erfüllt sein, wenn wir ein Geflecht vom 1. bzw. 2. Typus erhalten wollen, das lauter kongruente parallelgestellte Kurven umfaßt.

Wir werden die beiden Fälle 1. und 2. getrennt behandeln.

1. Logarithmisches Geflecht aus lauter kongruenten parallelgestellten Kurven.

Die Funktionalgleichung (19) läßt sich vermittels der Substitutionen

$$(21) \quad \begin{aligned} e^{h(y)} &\equiv H(y) \\ e^{p(\lambda)} &\equiv a(\lambda) \\ e^{p_1} &= a_1 \\ e^{p_2} &= a_2 \end{aligned}$$

auch schreiben:

$$(22) \quad \alpha(\lambda) \cdot \underline{H(y + q(\lambda))} \equiv \alpha_1 \cos \lambda \cdot H(y + q_1) + \alpha_2 \sin \lambda \cdot H(y + q_2) \\ \equiv R(y, \lambda).$$

Bezeichnen wir mit H' und H'' die Ableitungen nach dem jeweiligen Argument von H , dann ist auch die nachfolgende Beziehung in λ und y identisch erfüllt, welche sich aus (22) durch zweimaliges Differenzieren nach λ ergibt:

$$\alpha(\lambda) \cdot q'^2(\lambda) \cdot \underline{H''(y + q(\lambda))} + [\alpha(\lambda)q''(\lambda) + 2\alpha'(\lambda)q'(\lambda)] \underline{H'(y + q(\lambda))} \\ + \alpha''(\lambda) \cdot \underline{H(y + q(\lambda))} \equiv -R(y, \lambda).$$

Durch Addition folgt die in λ und y identisch zu erfüllende Gleichung:

$$(23) \quad A(\lambda) \cdot H''(y + q(\lambda)) + 2B(\lambda) \cdot H'(y + q(\lambda)) \\ + C(\lambda) \cdot H(y + q(\lambda)) \equiv 0.$$

Die Koeffizienten A, B, C hängen nur von λ ab und sind reell;

$$A(\lambda) \neq 0 \quad (A(\lambda) \equiv 0 \text{ führt auf } B(\lambda) \equiv 0 \text{ und } H(y + q(\lambda)) \equiv 0).$$

Suchen wir diese Identität für irgend einen bestimmten Wert $\lambda = \lambda_0$ zu erfüllen, so muß H notwendig die Lösung einer reduzierten linearen Differentialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten sein. Für die unabhängige Veränderliche $y + q(\lambda_0)$ schreiben wir kurz y . Die allgemeinsten Lösungen der Differentialgleichung sind je nach dem Wert ihrer Diskriminante:

$$\left. \begin{array}{ll} \text{a)} & B^2 - AC < 0 : H(y) \equiv n_1 e^{m_1 y} \cos(m_2 y + n_2) \\ \text{b)} & B^2 - AC > 0 : H(y) \equiv n_1 e^{m_1 y} \cos(m_2 y + n_2) \\ & H(y) \equiv n_1 e^{m_1 y} \sin(m_2 y + n_2) \\ \text{c)} & B^2 - AC = 0 : H(y) \equiv n_1 e^{m y} (y + n_2). \end{array} \right\} m_2 \neq 0$$

Die sämtlichen reellen Lösungen für die Funktion H werden durch reelle Wahl der Konstanten $m_1, m_2, m; n_1, n_2$ erfaßt.

Jede Funktion H , welche die Funktionalgleichung (22) erfüllt, muß notwendig die Form einer der angegebenen Lösungen der Differentialgleichung (23) haben. Es läßt sich durch Einsetzen dieser Lösungen in die Funktionalgleichung zeigen, daß diese formal erfüllt wird. Die aus der Differentialgleichung ge-

wonnenen Lösungen für $H(y)$ und damit gemäß (21) für $h(y)$ sind folglich die allgemeinsten.

In jedem Einzelfalle vereinfachen wir die Gleichung der reellen Kurve $x + h(y) = \text{const.}$ durch Einführung eines passend gewählten schiefwinkligen Koordinatensystems (ξ, η) , dessen ξ -Achse in Richtung und Maßeinheit mit der alten x -Achse übereinstimmt. Die Transformationsformeln lauten:

$$\begin{aligned} \text{für a) und b): } & \begin{cases} \xi = x + m_1 y + \ln |n_1| \\ \eta = m_2 y + n_2; \end{cases} \\ \text{für c): } & \begin{cases} \xi = x + m_1 y + \ln |n_1| \\ \eta = y + n_2. \end{cases} \end{aligned}$$

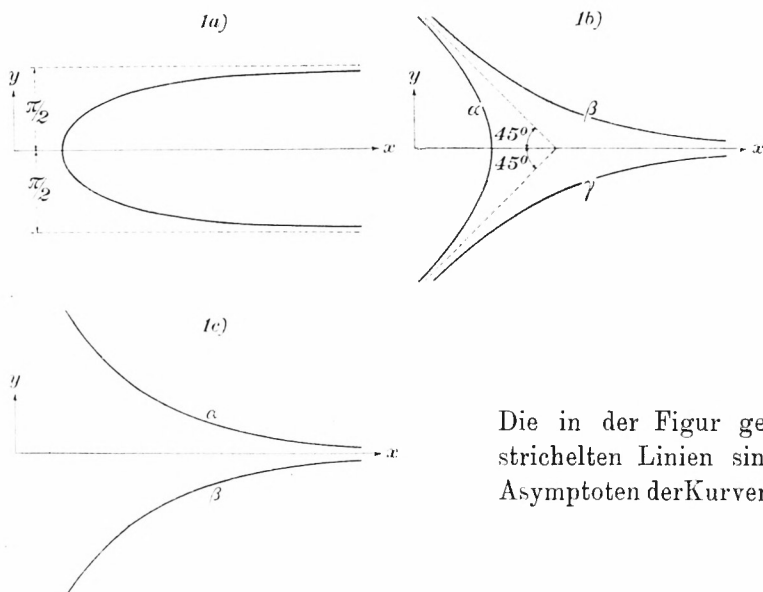
Diese unter a), b) und c) angegebene Transformation bewirkt, daß die reelle Gleichung der Kurve im (ξ, η) -Koordinatensystem eine der nachfolgenden Formen annimmt:

$$(24) \quad 1. \quad \begin{cases} \text{a) } \xi + \ln(\cos \eta) = \text{const.} \\ \text{b) } \alpha) \xi + \ln(\cos \eta) = \text{const.} \\ \quad \beta) \xi + \ln(\sin \eta) = \text{const.} \\ \quad \gamma) \xi + \ln(\sin(-\eta)) = \text{const.} \\ \text{c) } \alpha) \xi + \ln \eta = \text{const.} \\ \quad \beta) \xi + \ln(-\eta) = \text{const.} \end{cases}$$

Unseren weiteren Untersuchungen wollen wir diese zuletzt angeschriebenen einfacheren Kurvengleichungen zu Grunde legen und können dabei ohne Beschränkung der wesentlichen Geflechtseigenschaft das (ξ, η) -Koordinatensystem wieder als rechtwinkliges auffassen und dafür (x, y) schreiben; die unter a), b) und c) angeführten Gleichungen ergeben dann Kurven von der in Fig. 8 dargestellten Form.

Der Streifenbereich $\{y_2 - y_1\}$ des Geflechts der (x, y) -Ebene, in dem die an die Funktionen $f_1(y)$ und $f_2(y)$ gestellten Voraussetzungen I. und II. § 2 erfüllt sind, ist in Unterscheidung der einzelnen Fälle:

- a) der Streifenbereich der Euklidischen Ebene von der Breite kleiner als π ;
- b) und c) die Euklidische Vollebene.



Die in der Figur gestrichelten Linien sind Asymptoten der Kurven.

Fig. 8

Schließlich ist noch festzustellen inwieweit die Zusatzbedingung auf S. 224, nämlich daß die Verschiebungsgrößen $p(\lambda)$ und $q(\lambda)$ für den ganzen Geflechtsbereich von λ reell und endlich werden, in jedem einzelnen der aufgezählten Fälle erfüllt ist. Die Verschiebungsgrößen ergeben sich aus der Identität (19) S. 224 als Funktion von λ :

$$\begin{aligned}
 \text{a) } \left\{ \begin{array}{l} p(\lambda) = \frac{1}{2} \ln(r_1^2 + r_2^2) \\ q(\lambda) = \operatorname{arc} \cot g\left(\frac{r_1}{r_2}\right); \end{array} \right. & \text{ hierbei ist: } \begin{array}{l} r_1 = e^{p_1} \cos q_1 \cos \lambda + e^{p_2} \cos q_2 \sin \lambda \\ r_2 = e^{p_1} \sin q_1 \cos \lambda + e^{p_2} \sin q_2 \sin \lambda; \end{array} \\
 \text{b) } \left\{ \begin{array}{l} p(\lambda) = \frac{1}{2} \ln(r_1 \cdot r_2) \\ q(\lambda) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{r_1}{r_2}\right); \end{array} \right. & \text{ " } \begin{array}{l} r_1 = e^{p_1 + q_1} \cos \lambda + e^{p_2 + q_2} \sin \lambda \\ r_2 = e^{p_1 - q_1} \cos \lambda + e^{p_2 - q_2} \sin \lambda; \end{array} \\
 \text{c) } \left\{ \begin{array}{l} p(\lambda) = \ln r_2 \\ q(\lambda) = \frac{r_1}{r_2}; \end{array} \right. & \text{ " } \begin{array}{l} r_1 = e^{p_1} q_1 \cos \lambda + e^{p_2} q_2 \sin \lambda \\ r_2 = e^{p_1} \cos \lambda + e^{p_2} \sin \lambda. \end{array}
 \end{aligned}$$

Aus den Formeln erkennt man, daß die Verschiebungsgrößen nicht in jedem Fall für den ganzen λ -Bereich reell und endlich sind. Wir können von vornherein die unter a), b) und c) mög-

lichen Fälle $r_1 = 0$ und $r_2 = 0$ ausschließen, denn sie fordern bei a) $q_1 = q_2 + k\pi$, bei b) und c) $q_1 = q_2$ und scheiden deshalb wegen der Voraussetzung II. § 2 aus. Der Reihe nach erhalten wir folgende Ergebnisse:

a) Für jeden Wert λ des ganzen λ -Bereiches sind die Verschiebungsgrößen $p(\lambda)$ und $q(\lambda)$ reell und endlich, d. h. das Geflecht besteht aus lauter kongruenten parallelgestellten Kurven vom Typus $x + \ln(\cos y) = \text{const.}$

Das Geflecht bezeichnen wir als „vollkongruent“; abgesehen von den zur x -Achse parallelen Geraden, in welche ∞^1 Kurven des Geflechtes (jeden logarithmischen Geflechtes! vgl. S. 215) ausarten, enthält das Geflecht ∞^2 kongruente und parallel gestellte Kurven einerlei Art.

b) Ist r_1 oder r_2 gleich Null, dann sind $p(\lambda)$ und $q(\lambda)$ nicht mehr endlich, sodaß die Funktionalbeziehung (17) ihren Sinn verliert. Für die beiden zugehörigen speziellen λ -Werte arten die Kurvensysteme in die beiden Geradensysteme $x + y = \text{const.}$ und $x - y = \text{const.}$ parallel zu den Kurvenasymptoten aus. Die Geraden gehören nicht zu den kongruenten parallelgestellten Kurven des Geflechtes.

Erhalten r_1 und r_2 verschiedene Vorzeichen, so werden $p(\lambda)$ und $q(\lambda)$ beide nicht mehr reell. Zu dem Realteil von $p(\lambda)$ und $q(\lambda)$ tritt jeweils noch die additive Größe $\pm \ln \sqrt{-1}$ so hinzu, daß trotzdem die Geflechtskurve reell wird. Bauen wir beispielsweise ein Geflecht aus Kurven vom Typus $\alpha)$ $x + \ln(\cos y) = \text{const.}$ auf, so liefert nur ein Teilbereich von λ kongruente und parallelgestellte Kurven; für einen zweiten und dritten Teilbereich erhalten wir Kurven vom Typus $\beta)$ $x + \ln(\sin y) = \text{const.}$ und $\gamma)$ $x + \ln(\sin(-y)) = \text{const.}$ Beginnen wir mit Kurven vom Typus $\beta)$ oder $\gamma)$, dann ergibt sich im wesentlichen das gleiche Geflecht.

Das Geflecht bezeichnen wir als „teilkongruent“, d. h. es besteht, abgesehen von insgesamt 3 Parallelbüscheln gerader Linien, in welche ∞^1 Kurven degenerieren, aus dreierlei Kurvenarten; je ∞^2 Kurven einer Art sind kongruent und parallelgestellt.

c) Ist $r_2 = 0$, so erhält man für $p(\lambda)$ und $q(\lambda)$ keine endlichen Werte mehr. Das zugehörige Kurvensystem des Geflechtesartet in das Geradensystem $x = \text{const.}$ aus; die Geraden gehören

nicht zu den kongruenten parallelgestellten Kurven des Geflechts.

Ist r_2 negativ, dann wird $p(\lambda)$ nicht mehr reell; zu dem Realteil von $p(\lambda)$ tritt noch die additive Größe $\ln(-1)$ so hinzu, daß trotzdem die Geflechtkurve reell wird. Erzeugen wir z. B. das Geflecht durch Kurven vom Typus $\alpha) x + \ln y = \text{const.}$, so sind die Kurven eines Teilbereichs von λ dazu kongruent und parallelgestellt, die Kurven eines zweiten Teilbereichs von λ hingegen vom Typus $\beta) x + \ln(-y) = \text{const.}$ Das Geflecht ist teilkongruent; es enthält, von den beiden Parallelbüscheln gerader Linien abgesehen, in welche ∞^1 Kurven degenerieren, zweierlei Kurvenarten; die ∞^2 Kurven einer Art sind kongruent und parallelgestellt.

Die drei eben besprochenen Geflechtstypen 1a), 1b) und 1c) sind auf S. 233 und 234 dargestellt (vgl. auch Erklärung der Figuren S. 235).

2. Lineares Geflecht aus lauter kongruenten parallelgestellten Kurven.

Die notwendige Bedingung für die Funktion h einer Kurve $x + h(y) = \text{const.}$ eines linearen Geflechts, das die geforderte Eigenschaft besitzt, ist die bereits S. 224 unter (20) angegebene in λ und y identisch zu erfüllende Funktionalgleichung für h :

$$\begin{aligned} & [p(\lambda) + h(y + q(\lambda))] (\cos \lambda + \sin \lambda) \\ & \equiv [p_1 + h(y + q_1)] \cos \lambda + [p_2 + h(y + q_2)] \sin \lambda \equiv R(\lambda, y). \end{aligned}$$

Durch zweimaliges Differenzieren nach λ ergibt sich die ebenfalls in λ und y identisch zu erfüllende Gleichung, worin h' bzw. h'' die Ableitungen nach den jeweiligen Argumenten von h bedeuten.

$$\begin{aligned} & [q'^2(\lambda) (\cos \lambda + \sin \lambda)] h''(y + q(\lambda)) + [q''(\lambda) (\cos \lambda + \sin \lambda) \\ & + 2 q'(\lambda) (\cos \lambda - \sin \lambda)] h'(y + q(\lambda)) + p''(\lambda) (\cos \lambda + \sin \lambda) \\ & + 2 p'(\lambda) (\cos \lambda - \sin \lambda) - [p(\lambda) + h(y + q(\lambda))] (\cos \lambda + \sin \lambda) \\ & \equiv -R(\lambda, y). \end{aligned}$$

Die Addition der beiden Beziehungen liefert die nachfolgende in λ und y identisch zu befriedigende Funktionalgleichung:

$$A(\lambda) \cdot h''(y + q(\lambda)) + B(\lambda) \cdot h'(y + q(\lambda)) + C(\lambda) \equiv 0.$$

Für einen festen Wert $\lambda = \lambda_0$ muß h notwendig die Lösung

oberer linearen Differentialgleichung 2. Ordnung mit reellen konstanten Koeffizienten sein. Wir setzen für die unabhängige Veränderliche $y + p(\lambda_0)$ einfach y . Die allgemeinsten Lösungen der Differentialgleichung sind:

a) $B = 0$: $\pm h(y) \equiv (m y + n_1)^2 + n_2$:

b) $B \neq 0$: $\pm h(y) \equiv e^{m_1 y + n_1} + m_2 y + n_2$; wobei $m_1 \neq 0$.

$A \neq 0$ ($A = 0$ würde $B = 0$ bedeuten, ist also ausgeschlossen).

Die Konstanten m_1 , m_2 und m sind, da sie nur von Koeffizienten der Gleichung abhängen, reell; folglich auch die Integrationskonstanten n_1 und n_2 , wenn die Geflechtskurven $x + h(y) = \text{const.}$ selbst reell werden sollen. Wir können — ganz analog wie bei den logarithmischen Geflechten — die Gleichungen der Kurven $x + h(y) = \text{const.}$ auf ein passend gewähltes neues schiefwinkliges Koordinatensystem (ξ, η) beziehen:

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & \begin{cases} \pm \xi = x + n_2 \\ \eta = m y + n_1; \end{cases} \\ \text{b)} \quad & \begin{cases} \pm \xi = x + m_2 y + n_2 \\ \eta = m_1 y + n_1. \end{cases} \end{aligned}$$

Die zwei Vorzeichen bedeuten lediglich die für lineare Geflechte triviale Gleichwertigkeit der positiven und negativen Abszissenachse.

Im neuen Koordinatensystem ausgedrückt, heißen dann die Gleichungen der Geflechtskurven:

$$(25) \quad 2. \quad \begin{cases} \text{a)} \quad \xi + \eta^2 = \text{const.} \\ \text{b)} \quad \xi + e^\eta = \text{const.} \end{cases}$$

Wir fassen das schiefwinklige Koordinatensystem (ξ, η) wieder als rechtwinkliges auf und schreiben (x, y) statt (ξ, η) .

Die Bilder der Kurven sind:

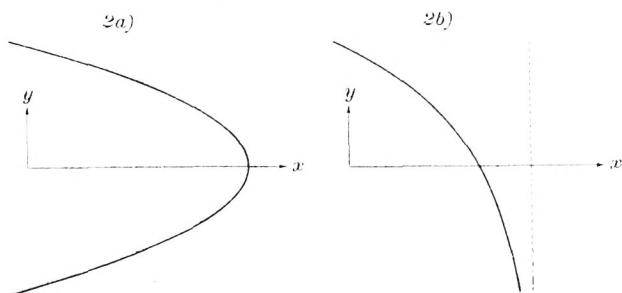


Fig. 9

Der Streifenbereich $\{y_2 - y_1\}$ des Geflechts, in welchem die Voraussetzungen I. und II. § 2 für die unter (25) a) bzw. b) angegebenen Kurventypen erfüllt sind, umfaßt beidesmal die Euklidische Vollebene.

Die Verschiebungsgrößen $p(\lambda)$ und $q(\lambda)$ ergeben sich aus der Identität (20) S. 224:

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & \begin{cases} p(\lambda) = \frac{(p_1 + q_1^2) \cos \lambda + (p_2 + q_2^2) \sin \lambda}{\cos \lambda + \sin \lambda} - q^2(\lambda) \\ q(\lambda) = \frac{q_1 \cos \lambda + q_2 \sin \lambda}{\cos \lambda + \sin \lambda}; \end{cases} \\ \text{b)} \quad & \begin{cases} p(\lambda) = \frac{p_1 \cos \lambda + p_2 \sin \lambda}{\cos \lambda + \sin \lambda} \\ q(\lambda) = \ln \left(\frac{e^{q_1} \cos \lambda + e^{q_2} \sin \lambda}{\cos \lambda + \sin \lambda} \right). \end{cases} \end{aligned}$$

Der Fall $\operatorname{tg} \lambda = -1$ sei gleich vorweggenommen; das Kurvensystem des Geflechts artet hier in das System gerader Linien parallel zur x -Achse aus, welches in jedem linearen Geflecht enthalten ist (vgl. S. 216).

a) Für alle übrigen λ -Werte $0 < \lambda < 2\pi$ des Geflechtsbereiches sind $p(\lambda)$ und $q(\lambda)$ reell und endlich. Das Geflecht ist vollkongruent; es besteht — von dem System der ∞^1 Geraden $y = \text{const.}$ parallel zur x -Achse abgesehen — aus ∞^2 kongruenten und parallelgestellten Parabeln von der Form $x + y^2 = \text{const.}$

b) Für $\operatorname{tg} \lambda = -e^{q_1 - q_2}$ artet das Kurvensystem des Geflechts in ein Parallelsystem zur y -Achse (= Asymptotenrichtung) aus. Bauen wir das Geflecht aus Kurven vom Typus $x + e^y = \text{const.}$ auf, dann erhält man für einen Teilbereich von λ , für den $q(\lambda)$ reell bleibt, dazu kongruente parallelgestellte Kurven, für einen zweiten Teilbereich, für den $q(\lambda)$ imaginär wird, Kurven vom Typus $x - e^y = \text{const.}$

Das Geflecht ist teilkongruent und enthält — abgesehen von den beiden Systemen der ∞^1 achsenparallelen Geraden $x = \text{const.}$ und $y = \text{const.}$ — insgesamt zweierlei Kurvenarten; die ∞^2 Kurven einer Art sind kongruent und parallelgestellt.

Darstellung der Geflechtstypen 2a) und 2b), sowie Figurenerklärung siehe S. 234 und 235.

Zusammenfassung: Wenn wir fordern, daß in einem Geflecht die Kurven nicht nur systemweise unter sich kongruent sind und durch Parallelverschiebung in der x -Richtung auseinander hervorgehen, sondern daß auch die Kurven der verschiedenen Systeme kongruent und parallelgestellt sind, dann ergeben sich allgemein folgende Geflechtstypen, wieder in Unterscheidung des logarithmischen und linearen Geflechtes:

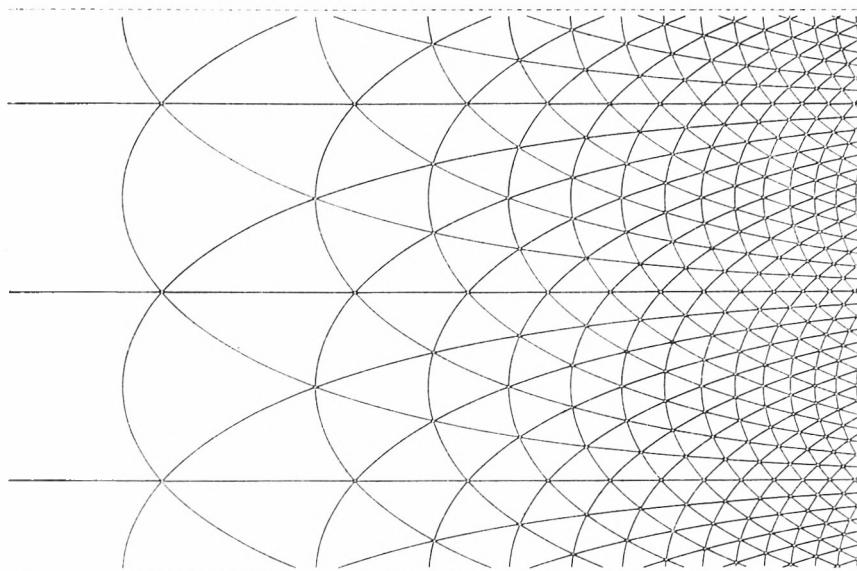
1. Logarithmisches Geflecht:

- a) Das Geflecht ist vollkongruent. Es enthält nur einerlei Kurven vom Typus $x + \ln(\cos y) = \text{const.}$, außerdem nur die zur x -Achse parallelen Geraden $y = \text{const.}$
- b) Das Geflecht ist teilkongruent. Es enthält dreierlei Kurventypen: $\alpha) x + \ln(\cos y) = \text{const.}$, $\beta) x + \ln(\sin y) = \text{const.}$ und $\gamma) x + \ln(\sin(-y)) = \text{const.}$ Außerdem zwei verschiedene Geradensysteme $x + y = \text{const.}$ und $x - y = \text{const.}$ als ausgeartete Kurvensysteme und die zur x -Achse parallelen Geraden $y = \text{const.}$
- c) Das Geflecht ist teilkongruent. Es enthält zweierlei Kurven vom Typus $\alpha) x + \ln y = \text{const.}$ und $\beta) x + \ln(-y) = \text{const.}$, außerdem ein Geradensystem $x = \text{const.}$ als ausgeartetes Kurvensystem und die zur x -Achse parallelen Geraden $y = \text{const.}$

2. Lineares Geflecht:

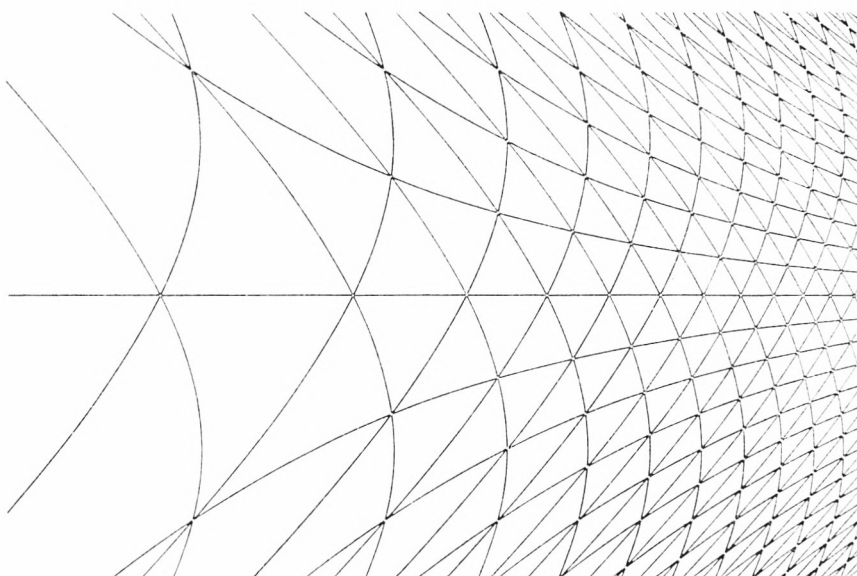
- a) Das Geflecht ist vollkongruent. Es enthält nur einerlei Kurven vom Typus $x + y^2 = \text{const.}$, außerdem das System der zur x -Achse parallelen Geraden $y = \text{const.}$
- b) Das Geflecht ist teilkongruent. Es enthält zweierlei Kurven vom Typus $x + e^y = \text{const.}$, $x - e^y = \text{const.}$, außerdem die beiden Systeme der zur y - und x -Achse parallelen Geraden $x = \text{const.}$ und $y = \text{const.}$

(Vgl. Darstellung der fünf Geflechtstypen in den Figuren S. 233—235, sowie Figurenerklärung S. 235.)



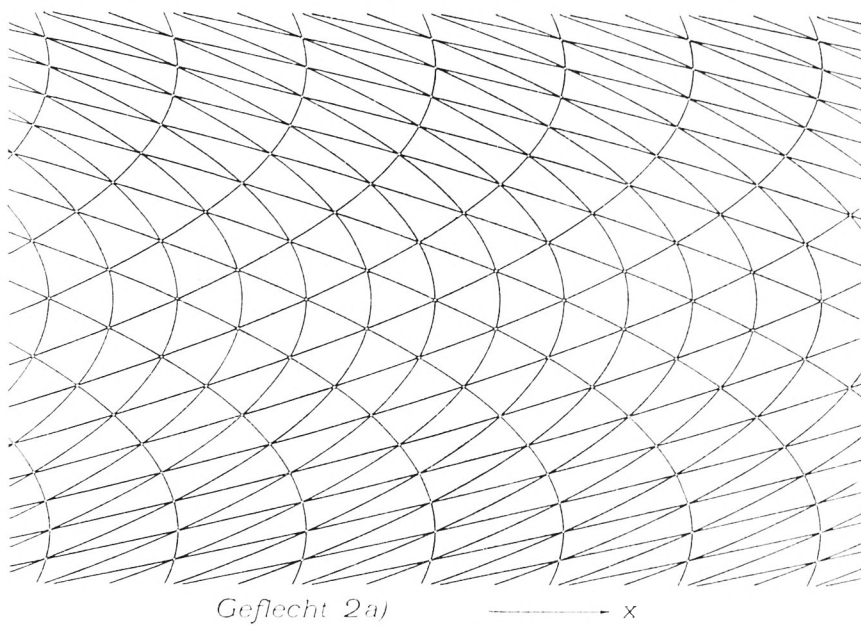
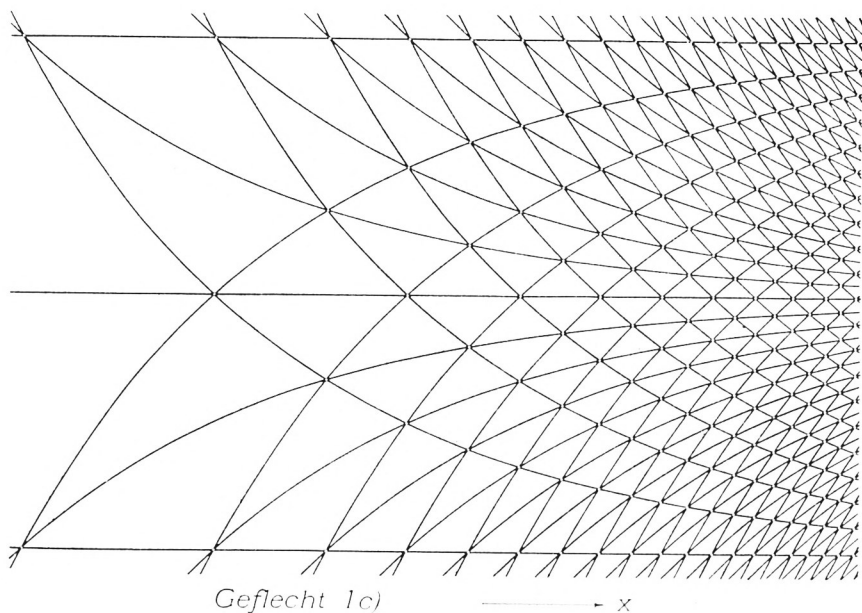
Geflecht 1a)

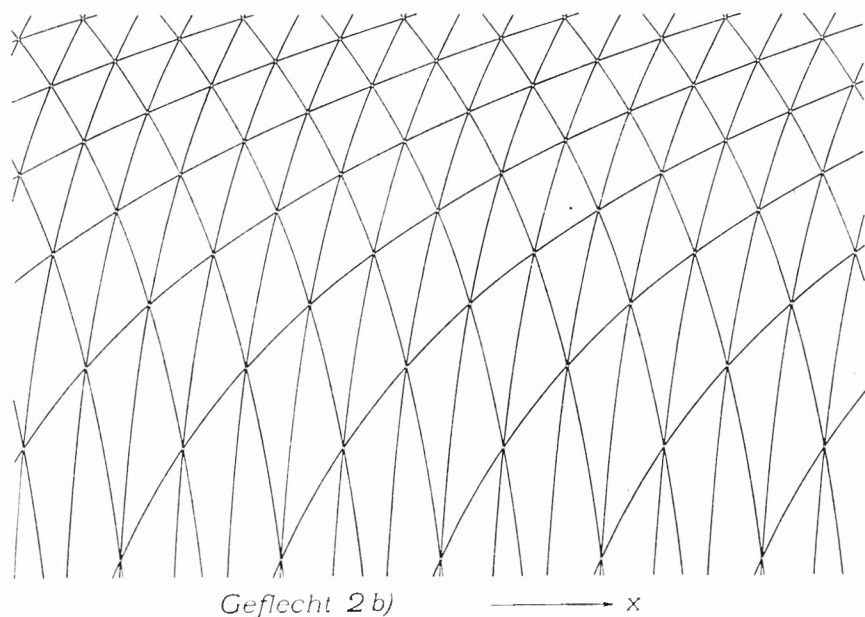
————— $\rightarrow x$



Geflecht 1b)

————— $\rightarrow x$





Erklärung der Figuren S. 233 bis 235.

In den Figurentafeln S. 233 bis 235 sind alle 5 möglichen voll- und teilkongruenten Geflechtstypen durch je ein endliches dem Geflecht angehöriges Dreiecksnetz veranschaulicht; jedes der 5 aus Geflechtskurven bestehenden Dreiecksnetze kann gemäß § 1 als das Bild eines Dreiecksnetzes gerader Linien aufgefaßt werden, welches durch 3 Parallelbüschel äquidistanter Geraden gebildet wird. Die dargestellten Dreiecksnetze bzw. die durch sie veranschaulichten Geflechte breiten sich über die ganze Ebene aus; wenn wir jedoch die ein-eindeutige Zuordnung von Geraden und Kurven des Geflechtes fordern, ist der Geflechtsbereich im Falle 1 a) höchstens der Streifenbereich der Euklidischen Ebene zwischen den 2 strichpunktiierten Randparallelen ausschließlich derselben. Durch besondere Auswahl der 3 Systeme von Netzkurven aus dem Geflecht wurde dabei erreicht, daß die dargestellten Netze folgende Eigenschaften besitzen:

In allen 5 Typen sind sämtliche für das betreffende Geflecht charakteristischen Kurven unter den gezeichneten Netzkurven vorhanden (bei 1 a), 2 a) je eine Kurve, bei 1 c), 2 b) je zwei ver-

schiedene Kurven und bei 1b) drei verschiedene Kurven). Jedes Geflecht enthält also nur Kurven, welche zu seinen charakteristischen Kurven kongruent und parallelgestellt sind. Der Verlauf von weiteren Kurven des Geflechts läßt sich dadurch verfolgen, daß man gleichviele Netzdreiecke systematisch zu einem weitermaschigen Vierecksnetz zusammenfaßt und die „Diagonalkurven“ einfügt. Man erhält so beliebige weitere Kurvensysteme des Geflechts als Diagonalsysteme des Dreiecksnetzes.

In allen fünf Typen sind die dem betreffenden Geflecht charakteristischen Ausartungen der Geflechtsskurven in Gerade unter den Diagonalsystemen der gezeichneten Dreiecksnetze vorhanden (bei allen fünf Typen die Parallelen zur x -Richtung, außerdem bei 1a), 2a) keine weiteren Geraden, bei 1c), 2b) je ein weiteres Parallelsystem senkrecht zur x -Richtung, bei 1b) zwei weitere Parallelsysteme unter $\pm 45^\circ$ zur x -Richtung geneigt).

Bemerkung: Die ebenen Geflechte, bei denen nur drei Systeme aus lauter kongruenten und parallelgestellten Kurven bestehen, haben als notwendige Bedingung die bereits S. 224 angeführten Funktionalgleichungen (19) bzw. (20), je nachdem man 1. ein logarithmisches oder 2. ein lineares Geflecht zu Grunde legt; λ ist jedoch jetzt in den Gleichungen eine feste Zahl. Wir können somit an Stelle von (19) und (20) einheitlich die in y identisch zu erfüllende Funktionalgleichung schreiben:

$$\psi(y + q_0) \equiv c_0 + c_1 \psi(y + q_1) + c_2 \psi(y + q_2).$$

Darin bedeuten: q_0, q_1, q_2 ; c_0, c_1, c_2 reelle vorgegebene Zahlen, wobei $q_0 < q_1 < q_2$ sei und ferner $c_1 \neq 0, c_2 \neq 0$. Die gesuchte Funktion ψ hat die Bedeutung:

1. Logarithmisches Geflecht: $c_0 = 0$; Gleichung einer Geflechtsskurve: $x + \ln(\psi(y)) = \text{const.}$

2. Lineares Geflecht: $c_0 \neq 0$; Gleichung einer Geflechtsskurve: $x + \psi(y) = \text{const.}$

Es läßt sich leicht einsehen, daß ψ in dem Intervall $q_0 \leq y < q_2$ als beliebige reelle stetige Funktion gewählt werden kann, wenn nur $\psi(q_0) \equiv c_0 + c_1 \psi(q_1) + c_2 \psi(q_2)$. Im ganzen übrigen Bereich von y ist dann $\psi(y)$ eindeutig bestimmt.

Ergebnis: Ein Dreiecksnetz aus drei Kurvensystemen, welches lauter kongruente parallel gestellte Kurven enthält, die systemweise durch Parallelverschiebung in der x -Richtung auseinander hervorgehen, kann aus Kurven aufgebaut werden, die noch in weitem Maße willkürlich sind.

§ 5. Geflechte aus lauter ähnlichen Kurven.

In § 4 wurde die Frage untersucht, inwieweit es möglich ist, Geflechte aus lauter kongruenten Kurven aufzubauen; dabei sollten nicht nur die Kurven eines Systems, sondern auch zwei beliebige Kurven verschiedener Systeme kongruent sein und durch Parallelverschiebung auseinander hervorgehen.

Wir wollen nun die analoge Frage für ähnliche Kurven stellen: Kann man aus lauter ähnlichen Kurven Geflechte aufbauen, bei denen nicht nur die Kurven eines Systems ähnlich sind und A. durch Strahlung oder B. durch Spiralung hinsichtlich eines festen Zentrums O auseinander hervorgehen, sondern bei denen auch die Kurven verschiedener Systeme durch Drehstreckung hinsichtlich O ineinander überführbar sind?

Ebenso wie wir in § 3 Geflechte mit systemweise ähnlichen Kurven dadurch erhalten haben, daß wir die Geflechte mit systemweise kongruenten Kurven transformierten, werden wir in diesem Paragraphen Geflechte aus lauter ähnlichen Kurven dadurch ableiten, daß wir die gleichen Transformationen auf die Geflechte mit lauter kongruenten Kurven anwenden. Die notwendige Bedingung dafür, daß alle Kurven eines Geflechts kongruent und parallelgestellt sind, war folgende Gleichungsform für irgend eine Kurve eines beliebigen Systems λ des Geflechts (vgl. S. 224, (17)):

$$(26) \quad x + p(\lambda) + h(y + q(\lambda)) = \text{const.}$$

Wir transformieren die (x, y) -Ebene in die (φ, r) -Ebene (φ und r sind Polarkoordinaten) mittels der in § 3 unter A. bzw. B. angegebenen Formeln (13) bzw. (15). Ein Kurvengeflecht in der (x, y) -Ebene, das aus lauter kongruenten parallelgestellten Kurven von der Gleichung (26) besteht, verwandelt sich durch diese Transformation in ein Kurvengeflecht, dessen Kurven die Gleichungen haben:

$$A. \quad a \ln \left(r \cdot e^{\frac{p(\lambda)}{a}} \right) + h \left[b \left(\varphi + \frac{q(\lambda)}{b} \right) \right] = \text{const.},$$

$$B. \quad a \left(\varphi + \frac{p(\lambda)}{a} \right) + h \left[b k \left(\varphi + \frac{p(\lambda)}{a} \right) - b \ln \left(r \cdot e^{k \frac{p(\lambda)}{a} - \frac{q(\lambda)}{b}} \right) \right] = \text{const.}$$

Die Kurven verschiedener Systeme λ sind in beiden Fällen ähnlich und gehen durch Drehstreckung hinsichtlich $O(r=0)$ auseinander hervor. Die Größe der Drehung und Streckung einer Kurve bezüglich der Ausgangslage $p(\lambda) = 0, q(\lambda) = 0$ drückt sich aus:

$$A. \quad \text{Drehung} = \frac{q(\lambda)}{b}; \quad \text{Streckung} = e^{\frac{p(\lambda)}{a}}.$$

$$B. \quad \text{„} = \frac{p(\lambda)}{a}; \quad \text{„} = e^{k \frac{p(\lambda)}{a} - \frac{q(\lambda)}{b}}.$$

Die Gleichungen der Kurven, aus denen wir ein voll- oder teil- „ähnliches“ Geflecht aufbauen können, ergeben sich durch Transformation der Kurvengleichungen (24) S. 226 und (25) S. 230 gemäß den Beziehungen (13) S. 219 und (15) S. 221.

Zusammenfassung:

Wenn wir fordern, daß in einem Geflecht nicht nur die Kurven eines Systems ähnlich sind und A. durch Strahlung oder B. durch Spiralisierung hinsichtlich O auseinander hervorgehen, sondern daß auch die Kurven der verschiedenen Systeme unter sich ähnlich sind und durch Drehstreckung bezüglich O ineinander übergeführt werden können, dann erhalten wir besondere Geflechte bzw. Geflechtsskurven ganz analog denjenigen von § 4 (24) und (25). Die allgemeinste Lösung des Problems ergibt sich durch die Transformation der in § 4 angeführten voll- oder teilkongruenten Geflechte vermittels der Gleichungen (13) bzw. (15):

$$A. \quad \begin{aligned} x &= a \ln r \\ y &= b \varphi \end{aligned} \quad \text{bzw.} \quad B. \quad \begin{aligned} x &= a \varphi \\ y &= b (k \varphi - \ln r). \end{aligned}$$

Dabei sind x, y Cartesische Koordinaten, r, φ Polarkoordinaten. Die Klassifizierung der Geflechte erfolgt wieder nach den Gesichtspunkten des vorigen Paragraphen und zwar ergeben sich „voll- oder teilähnliche“ Geflechte im analogen Sinn definiert wie die voll- und teilkongruenten Geflechte des vorigen Paragraphen. Als Ausartung enthalten die Geflechte von O ausgehende Gerade bzw. logarithmische Spiralen.

2. Kapitel: Kurvengeflechte auf krummen Flächen.

§ 6. Geflechte systemweise kongruenter Kurven auf Zylinder-, Dreh- und Schraubenflächen.

A. Welches sind auf einem beliebigen Zylinder die allgemeinsten Kurvengeflechte derart, daß jedes darin enthaltene Kurvensystem aus kongruenten (Raum-)Kurven besteht, welche alle durch Parallelverschiebung in Richtung der Zylindererzeugenden auseinander hervorgehen?

Die Antwort auf die Frage ist nach Vorliegen der Resultate in der Ebene trivial. Wir biegen den Streifenbereich eines ebenen Geflechtes vom Typus § 2 A. so auf den Zylinder auf, daß die Parallelen zur x -Achse Zylindererzeugende werden.

Das entstehende Kurvengeflecht auf dem Zylinder ist das allgemeinste von der geforderten Eigenschaft.

B. Welches sind auf einer beliebigen Drehfläche bzw. Schraubenfläche die allgemeinsten Kurvengeflechte derart, daß jedes darin enthaltene Kurvensystem aus kongruenten Kurven besteht, welche durch Drehung bzw. Schraubung um die Achse auseinander hervorgehen?

Auch hier können wir durch Abbildung eines ebenen Geflechtes vom Typus § 2 B. auf die Dreh- oder Schraubenfläche ein Geflecht erzeugen, welches die geforderte Eigenschaft besitzt. An die Stelle des Drehwinkels φ im ebenen Geflecht tritt der Meridianwinkel, den Radius r deuten wir als Bogenlänge des Meridians. Die Rolle der konzentrischen Kreise übernehmen hier die Breitenkreise oder Schraubenlinien der Fläche. Dem Ringbereich des ebenen Geflechtes entspricht ein Zonenbereich der Dreh- oder Schraubenfläche. *Die damit gewonnene Lösung ist die allgemeinste.*

§ 7. Geflechte systemweise ähnlicher Kurven auf Kegel- und Spiralfächen.

A. Welches sind auf einem beliebigen Kegel die allgemeinsten Kurvengeflechte derart, daß jedes darin enthaltene Kurvensystem aus ähnlichen Kurven besteht, welche alle durch „Strahlung“ von der Kegelspitze O aus ineinander übergehen (d. h. ähnlich und zu O ähnlich gelegen sind)?

Wir biegen den Fächerbereich eines ebenen Geflechts vom Typus § 3 A. so auf den Kegelmantel auf, daß die Strahlen Kegel-erzeugende werden. *Auf solche Weise kann jedes mögliche Kurvengeflecht mit der geforderten Eigenschaft erzeugt werden.*

B. Welches sind auf einer beliebigen Lie'schen Spiralfäche¹⁾ die allgemeinsten Kurvengeflechte derart, daß jedes darin enthaltene Kurvensystem aus ähnlichen Kurven besteht, welche alle durch „Spiralung“ bezüglich der z -Achse der Spiralfäche und des darauf gelegenen festen Punktes O ineinander übergehen?

Wir bilden ein ebenes Geflecht vom Typus § 3 B. auf die Spiralfäche ab; den Winkel φ deuten wir als den Meridianwinkel, den Radiusvektor r als die Bogenlänge des Meridians, von homologen Punkten aus gezählt. Dem Parallelstreifenbereich des ebenen Geflechts entspricht eindeutig ein Zonenbereich der Spiralfäche zwischen zwei Flächenspiralen. *Die so gewonnenen Geflechte sind die allgemeinsten ihrer Art.*

§ 8. Definition besonderer Drehflächen, Schraubenflächen und Spiralfächen durch Eigenschaften daraufliegender Kurvengeflechte.

Im vorigen Paragraphen wurden Kurvengeflechte auf Dreh-, Schrauben- und Spiralfächen angegeben, deren Kurven systemweise durch Drehung, Schraubung, Spiralung auseinander hervorgingen. Dabei waren sowohl der Flächenmeridian als auch die beiden ein Geflecht bestimmenden Kurven der Ausgangssysteme auf der Fläche in weitem Maße willkürlich.

¹⁾ Eine Lie'sche Spiralfäche entsteht dadurch, daß sich eine Raumkurve um eine feste Achse z dreht und in bezug auf einen festen Punkt O der Achse gleichzeitig mit der Drehung φ ähnlich verändert: jeder Punkt P der Kurve mit dem Radiusvektor OP beschreibt bei seiner Drehung φ um die z -Achse und gleichzeitiger Streckung $OP = e^{k\varphi}$ eine Kegelloxodrome (Spirale) auf je einem besonderen Drehkegel, dessen Achse z und dessen Spitze O ist. Jede Kurve der Spiralfäche erzeugt die Fläche durch die gleiche (mit der Konstanten k festgelegten) Drehstreckung, die wir als „Spiralung“ bezeichnen wollen.

Ich werde in diesem Paragraphen Beispiele dafür anführen, daß sich spezielle Flächen oben bezeichneter Klasse dadurch definieren lassen, daß man dem daraufliegenden Kurvengeflecht systemweise kongruenter bzw. ähnlicher Kurven besondere Eigenschaften hinsichtlich der Fläche zuweist.

1. Beispiel: Von dem Kurvengeflecht auf der Fläche sollen sowohl die beiden Ausgangssysteme u und v , welche das Geflecht definieren, als auch noch ein spezielles weiteres Kurvensystem $\omega = u \cos \lambda + v \sin \lambda$, etwa $\lambda = \pi/4$, aus geodätischen Linien der Fläche bestehen. Die drei Systeme geodätischer Linien können zu einem „infinitesimalen Dreiecksnetz“ zusammengefügt werden. Je nachdem man dem geodätischen Dreiecksnetz ein logarithmisches oder lineares Geflecht zu Grunde legt, kommt man zu besonderen Dreh-, Schrauben- oder Spiralfächen. Nur der Fall, daß die Kurven u und v eines linearen Geflechtes bezüglich der Meridianebene einer Drehfläche symmetrisch liegen, liefert keine bestimmten Meridiankurven, d. h. auf jeder Drehfläche (und Schraubenfläche) gibt es solche triviale geodätische Dreiecksnetze. Dreh-, (Schrauben-) und Spiralfächen mit nicht-trivialen geodätischen Dreiecksnetzen sind von Herrn R. Sauer¹⁾ in seiner Habilitationsschrift untersucht. Die Tatsache, daß die dort als Beispiele für Flächen mit geodätischen Dreiecksnetzen angeführten Dreh- und Spiralfächen die allgemeinsten sind, bei welchen die geodätischen Netzlinien durch Drehung bzw. Spiralisierung ineinander übergehen, folgt aus § 2, S. 212 Satz 1, sowie § 6, S. 239 B. und § 7, S. 240 B. ohne weiteres; denn die logarithmische bzw. lineare Anordnungsfunktion für die Parametersysteme u und v ergibt sich (unabhängig davon, ob geodätisch oder nicht) bereits aus der Forderung, daß außer u und v noch irgend ein weiteres (durch λ bestimmtes) Kurvensystem ω aus Kurven bestehen soll, die durch Drehung bzw. Spiralisierung auseinander hervorgehen.

Herr O. Volk²⁾ hat diese Frage der Allgemeinheit bereits in anderem Zusammenhang geklärt.

¹⁾ R. Sauer, „Flächen mit drei ausgezeichneten Systemen geodätischer Linien, die sich zu einem Dreiecksnetz verknüpfen lassen“. Sitzungsber. der bayr. Akad. d. Wiss., math.-naturw. Abt., 1926. S. 365 ff.

²⁾ O. Volk, „Über diejenigen Rotationsflächen, auf denen drei Systeme geodätischer Linien ein Dreiecksnetz bilden“. Ebenda 1927, S. 261 ff.

2. Beispiel: Von dem Kurvengeflecht auf einer Dreh-, Schrauben- oder Spiralfäche sollen die beiden Ausgangssysteme u und v ein Orthogonalsystem bilden; außerdem fordern wir, daß die beiden mit $\omega_1 = u + v$ und $\omega_2 = u - v$ bezeichneten Kurvensysteme (nach unserer Schreibweise von § 1 sind die zugehörigen λ -Werte bis auf Vielfache von π die Werte $\frac{1}{4}\pi$ und $\frac{3}{4}\pi$) aus geodätischen Linien der Fläche bestehen.

Die Geraden $\omega_1, \omega_2; u, v$ lassen sich dann bei diskreter Anordnung in der (u, v) -Ebene als Quadratnetz mit Diagonalgeraden deuten, das beliebig verfeinert werden kann; der Grenzprozeß der Verfeinerung definiert auf der Fläche ein „infinitesimales“ Rhombennetz aus geodätischen Linien ω_1 und ω_2 . Da die Existenz eines infinitesimalen geodätischen Rhombennetzes notwendig und hinreichend ist für die sog. Liouville'schen Flächen¹⁾, liefert unsere Forderung Dreh-, Schrauben-, bzw. Spiralfächen, die zugleich Liouville'sche Flächen sind. Nun ist aber jede Drehfläche und Schraubenfläche Liouville'sche Fläche; es enthält nämlich jede Drehfläche infinitesimale Rhombennetze aus geodätischen Linien, die zu den Meridianen der Drehfläche symmetrisch gelegen sind und deren Diagonalsysteme aus Meridianen und Breitenkreisen bestehen; letztere gehören einem linearen Geflecht als Ausartung an. Sehen wir bei Dreh- bzw. Schraubenflächen davon ab, als eines der zwei Ausgangssysteme u oder v die Breitenkreise bzw. Schraubenlinien zu wählen, dann gelangt man je nach Zugrundelegung eines logarithmischen oder linearen Geflechtes sowohl bei Drehflächen und Schraubenflächen als auch bei Spiralfächen zu bestimmten Meridiankurven. Speziell die so erhaltenen Dreh- und Schraubenflächen tragen dann neben den vorher erwähnten trivialen geodätischen Rhombennetzen noch weitere davon verschiedene, müssen folglich nach Darboux²⁾ Dreh- und Schraubenflächen sein, die ∞^2 infinitesimale geodätische Rhombennetze enthalten.

1) A. Voss, „Über diejenigen Flächen, welche durch zwei Scharen von Kurven konstanter geodätischer Krümmung in infinitesimale Rhomben zerlegt werden.“ Sitzungsber. der bayr. Akad. d. Wiss., math.-naturw. Abt., 1906, S. 247 ff.

2) Darboux, „leçons sur la théorie générale des surfaces“, Paris 1894, III. Bd., S. 34.

Als Koordinaten der Fläche führen wir die Bogenlänge σ des Meridians und den Winkel φ der Meridianebene ein. Das Linienelement ds schreibt sich dann immer:

A. Für Schrauben- und Drehflächen:

$$ds^2 = d\sigma^2 + 2F_0(\sigma) d\sigma d\varphi + G_0(\sigma) d\varphi^2;$$

bei Drehflächen ist $F_0(\sigma) \equiv 0$.

B. Für Spiralfächen¹⁾:

$$ds^2 = e^{2k\varphi} [d\sigma^2 + 2B_0(\sigma) d\sigma d\varphi + C_0(\sigma) d\varphi^2];$$

$k \neq 0$ ist die Konstante der Spiralfäche. Die Parametersysteme u und v der Fläche, welche 1. einem logarithmischen oder 2. einem linearen Geflecht angehören und dort nicht Ausartungen in Breitenkreise, Schraubenlinien bzw. Spiralen sein sollen, müssen sich dann für beide Flächenklassen A. bzw. B. darstellen:

$$(27) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{entweder 1. } \begin{cases} a \ln u = \varphi + f_1(\sigma) \\ a \ln v = \varphi + f_2(\sigma) \end{cases} \\ \text{oder 2. } \begin{cases} b_1 u = \varphi + f_1(\sigma) \\ b_2 v = \varphi + f_2(\sigma) \end{cases} \end{array} \right.$$

a, b_1, b_2 , sind beliebige, reelle, von Null verschiedene Konstante.

Wie eine kurze Rechnung zeigt, erhalten wir in Unterscheidung der einzelnen Fälle für die Fundamentalgrößen 1. Ordnung folgende Funktionen:

A. Dreh- und Schraubenflächen.

$$(28) \quad \left\{ \begin{array}{l} E, F, G \text{ sind entweder:} \\ 1. \text{ homogene Funktionen von } u \text{ und } v \text{ vom Grade } (-2), \text{ oder:} \\ 2. \text{ Funktionen von } (b_1 u - b_2 v) \text{ allein.} \end{array} \right.$$

B. Spiralfächen.

$$(29) \quad \left\{ \begin{array}{l} E, F, G \text{ sind entweder:} \\ 1. \text{ homogene Funktionen von } u \text{ und } v \text{ vom Grade } 2(ak - 1), \text{ oder:} \\ 2. \text{ Funktionen von } (b_1 u - b_2 v) \text{ mal dem Faktor } e^{k(b_1 u + b_2 v)}. \end{array} \right.$$

¹⁾ Darboux, „leçons sur la théorie générale des surfaces“, Paris 1887, Bd. I, S. 109.

Nach Darboux¹⁾ ist diese Form der Fundamentalgrößen E, F, G charakteristisch für Dreh-, Schrauben- bzw. Spiralfächen, deren Parameterlinien u und v in der durch die Gleichungen (27) angegebenen Weise angeordnet sind.

Die beiden Kurvensysteme u und v der Fläche sollten nach unserer Forderung die beiden zueinander orthogonalen Diagonalsysteme eines infinitesimalen geodätischen Rhombennetzes vorstellen. Das Linienelement für eine beliebige Liouville'sche Fläche kann man immer in der Form $ds^2 = (U + V)(U du^2 + V dv^2)$ schreiben, wobei U bzw. V nur Funktionen von u bzw. v allein sind:

Die geodätischen Linien der Liouville'schen Fläche, welche irgend eine Kurve $u = \text{const.}$ oder $v = \text{const.}$ umhüllen, lassen sich zu einem infinitesimalen geodätischen Rhombennetz verknüpfen, welches stets die beiden Systeme u und v als Diagonalkurvensysteme hat.

Die Fundamentalgrößen 1. Ordnung der Liouville'schen Flächen, als Funktion von u und v , sind:

$$E \equiv (U + V) U; \quad F \equiv 0; \quad G \equiv (U + V) V.$$

Daraus:
$$U \equiv \frac{E}{V E + G}, \quad V \equiv \frac{G}{V E + G}, \quad E + G \neq 0.$$

Speziell für die Parameterlinien u und v einer Dreh-, Schrauben- bzw. Spiralfäche, die systemweise durch Drehung, Schraubung bzw. Spirallung ineinander übergehen, ergab sich aber S. 243 (28) und (29), also:

$$\begin{aligned} \text{A. 1. } U(u) &\equiv u^{-1} \cdot \Phi\left(\frac{u}{v}\right), & \text{B. 1. } U(u) &\equiv u^{k-1} \cdot \Phi\left(\frac{u}{v}\right), \\ 2. \quad U(u) &\equiv \Phi(b_1 u - b_2 v), & 2. \quad U(u) &\equiv e^{k b_1 u} \cdot \Phi(b_1 u - b_2 v), \end{aligned}$$

d. h. Φ ist überall eine Konstante. Analoges folgt für $V(v)$. Das Linienelement $ds^2 = (U + V)(U du^2 + V dv^2)$ der zu bestimmenden Dreh-, Schrauben- bzw. Spiralfäche hat folglich eine der beiden folgenden Formen:

$$\begin{aligned} 1. \quad U(u) &\equiv c_1 u^{m-1}, \\ V(v) &\equiv c_2 v^{m-1}; \\ 2. \quad U(u) &\equiv c_1 e^{m u}, \\ V(v) &\equiv c_2 e^{m v}; \end{aligned}$$

¹⁾ Darboux, „leçons sur la théorie générale des surfaces“. Paris 1894, III. Bd., S. 73, 74.

dabei sind c_1, c_2 beliebige reelle von Null verschiedene Zahlen und zwar ist:

A. bei Drehflächen und Schraubenflächen: $m = 0$,

B. bei Spiralfächen: $m \neq 0$ und beliebig.

Im Fall 2. ergibt sich also für Drehflächen der Drehzylinder.

Zum Schlusse will ich noch erwähnen, wie sich der Meridian einer Drehfläche im Fall 1. bestimmen läßt. Schreiben wir für das Linienelement der Drehfläche

$$ds^2 = d\sigma^2 + r^2(\sigma) d^2\varphi,$$

wobei $r(\sigma)$ den Achsenabstand des Flächenpunktes bedeutet, dann erhält man die Bedingung für die Orthogonalität der Kurvensysteme u und v

$$a \ln u = \varphi + f_1(\sigma)$$

$$a \ln v = \varphi + f_2(\sigma)$$

in folgender Form:

$$(30) \quad r^2(\sigma) \cdot f_1'(\sigma) \cdot f_2'(\sigma) + 1 = 0.$$

Da die Kurvensysteme $\omega_1 = u + v$ und $\omega_2 = u - v$ geodätisch sein sollen, müssen ihre Kurven $\varphi + g_1(\sigma) = \text{const.}$ und $\varphi + g_2(\sigma) = \text{const.}$ den Clairautschen Gleichungen genügen:

$$(31) \quad g_1'(\sigma) = \frac{\varrho_1}{r(\sigma) \sqrt{r^2(\sigma) - \varrho_1^2}}; \quad g_2'(\sigma) = \frac{\varrho_2}{r(\sigma) \sqrt{r^2(\sigma) - \varrho_2^2}};$$

wobei ϱ_1 und ϱ_2 die Konstanten sind, welche die geodätischen Linien auf der Fläche bestimmen; hierbei ist

$$(32) \quad g_1(\sigma) = a \ln \left(e^{\frac{f_1(\sigma)}{a}} + e^{\frac{f_2(\sigma)}{a}} \right); \quad g_2(\sigma) = a \ln \left(e^{\frac{f_1(\sigma)}{a}} - e^{\frac{f_2(\sigma)}{a}} \right).$$

Aus den drei Beziehungen (30), (31) und (32) folgt dann schließlich:

$$a \frac{dr}{d\sigma} = \frac{\varrho_1(r^2 - \varrho_2^2) \sqrt{r^2 - \varrho_1^2} - \varrho_2(r^2 - \varrho_1^2) \sqrt{r^2 - \varrho_2^2}}{(\varrho_1^2 - \varrho_2^2) r^2}.$$

Nach Ausführung der Quadraturen drückt sich σ in r durch elementare Funktionen aus.

Speziell für $\varrho_2 = 0$ besteht das eine System der geodätischen Netzklinien aus Meridianen, die Quadratur ergibt $\frac{r}{\varrho_1} = \text{Cv} \left(\frac{\sigma}{a \varrho_1} \right)$, d. h. wir erhalten eine Drehfläche von konstantem negativem Krümmungsmaß des hyperbolischen Typus; ϱ_1 ist der Kehlkreisradius, σ wird vom Kehlkreis aus gezählt.

Karlsruhe, Juli 1927.