

Sitzungsberichte

der

mathematisch-naturwissenschaftlichen
Abteilung

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften

zu München

1928. Heft II

Mai- bis Julisitzung

München 1928

Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften

in Kommission des Verlags R. Oldenbourg München



Über die Struktur von Fourierreihen fastperiodischer Funktionen.

Von **Salomon Bochner** in München.

Vorgelegt von O. Perron in der Sitzung am 7. Juli 1928.

§ 1.

Es ist eine der interessantesten Fragestellungen in der Theorie der Fourierreihen von periodischen Funktionen,

$$f(x) \sim \sum_{-\infty}^{+\infty} a_\nu e^{i\nu x}, \quad \left(a_\nu = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\xi) e^{-i\nu \xi} d\xi \right),$$

allgemeine funktionale Eigenschaften der vorgelegten Funktion (etwa: gleichmäßige Stetigkeit, beschränkte Variation, Differenzierbarkeit, Integrierbarkeit im Riemannschen Sinne, Integrierbarkeit nur im Lebesgueschen Sinne etc.) durch möglichst durchsichtige (arithmetische) Eigenschaften der Folge der Fourierkoeffizienten a_ν , ($\nu = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$), zu kennzeichnen¹⁾.

Das Problem wird gestaltreicher und in einer wichtigen Hinsicht viel dringender, wenn man Fourierreihen nicht von reinperiodischen, sondern allgemeiner von fastperiodischen Funktionen zur Untersuchung stellt²⁾. Eine fastperiodische Funktion besitzt gleichfalls eine Fourierreihe

¹⁾ Man kennt in diesem Fragenkreis eigentlich nur einen einzigen endgültigen Satz, nämlich den Riesz-Fischerschen über die eineindeutige Korrespondenz zwischen den Funktionen $f(x)$, deren Quadrat im Lebesgueschen Sinne integrierbar ist, und den Zahlenfolgen a_ν , für welche die Summe $\sum |a_\nu|^2$ einen endlichen Wert hat.

²⁾ Für alle im folgenden angeführten Eigenschaften von fastperiodischen Funktionen vgl. des Verfassers: „Über Fourierreihen von fastperiodischen Funktionen“, Sitzungsberichte d. Berliner Math. Ges., XXVI, 49–64.

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} a_{\lambda_n} e^{i\lambda_n x},$$

auf welche sich viele Eigenschaften der reinperiodischen Fourierreihe übertragen. Aber diese allgemeinen Fourierreihen besitzen die Eigenart, daß die Fourierexponenten $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots$ ganz beliebige reelle Zahlen sein können, insbesondere solche, die sich in der Umgebung irgendwelcher endlicher Zahlen häufen können, ganz im Gegensatz zum reinperiodischen Fall, wo die Exponenten ganzzahlige Multipla einer gemeinsamen Basis $\frac{2\pi}{p}$ sein müssen.

Die fastperiodischen Funktionen in der ursprünglichen Bohrschen Definition sind Verallgemeinerungen der durchweg stetigen reinperiodischen Funktionen. Ein jedes arithmetische Kriterium, welches notwendige und hinreichende Bedingungen dafür angeben würde, wie bei beliebig verteilten, aber festvorliegenden Fourierexponenten λ_n die Zahlen a_{λ_n} beschaffen sein müssen, damit sie die Fourierkoeffizienten einer Bohrschen fastperiodischen Funktion sein können, würde als Spezialfall ein Kriterium dafür abgeben, wann Zahlen a_n die Fourierkoeffizienten einer reinperiodischen stetigen Funktion sind. Da aber das spezielle Problem bisher allen Lösungsversuchen getrotzt hat, dürfte es umso aussichtsloser sein, den allgemeinen Fall zu behandeln.

Beschränkt man sich für reinperiodische Funktionen auf den Sonderfall, daß alle tatsächlich auftretenden Fourierexponenten unterhalb einer festen Schranke liegen, also

$$f(x) \sim \sum_{\nu=-N}^N a_{\nu} e^{i\nu x},$$

dann wird unser Problem trivial. Jede (von selbst endliche) Anzahl von Zahlen a_{ν} , $|\nu| \leq N$, stellt in diesem Fall die Fourierkoeffizienten einer Funktion dar, nämlich der Funktion

$$f(x) = \sum_{\nu=-N}^N a_{\nu} e^{i\nu x}.$$

Anders aber bei fastperiodischen Funktionen. Beschränkt man sich jetzt auf solche Funktionen, deren Fourierexponenten alle unterhalb einer festen Schranke liegen,

$$-A < \lambda_n < +A, \quad n = 1, 2, 3, 4, \dots$$

sonst aber keiner Einengung unterliegen, sich also in $-A < \lambda < +A$ in beliebiger Weise häufen können, dann hat man es mit Funktionen zu tun, die zwar sehr viele funktionale Regularitäten aufweisen, sich aber als Reihen noch sehr kompliziert verhalten. Z. B. kann für eine solche Reihe die Summe $\sum |a_{\lambda_n}|$ sehr wohl divergieren. Es dürfte daher auch jetzt noch sehr schwierig sein, die arithmetische Struktur der Fourierreihe genügend zu kennzeichnen, aber immerhin verdient das Problem erhöhte Aufmerksamkeit, und zwar aus folgendem Grunde.

Die fastperiodischen Funktionen in der ursprünglichen Bohrschen Definition sind gleichmäßig stetig. Eine sehr naturgemäße Erweiterung ins Unstetige hat W. Stepanoff gegeben. Auf Grund der Stepanoffschen Fassung der Fastperiodizität entspricht jeder „Klasse“ der reinperiodischen Funktionen eine ganz analog gebaute Klasse von fastperiodischen Funktionen. Insbesondere entspricht der Gesamtheit der reinperiodischen Funktionen, welche nur im Lebesgueschen Sinne (in der ersten Potenz) integrierbar sind, eine analoge Klasse von fastperiodischen Funktionen, von denen, was Integrierbarkeit anbetrifft, nur ausgesagt werden kann, daß sie auf jedem endlichen Intervall ein Lebesguesches Integral besitzen. — Wenn aber eine solche allgemeinste fastperiodische Funktion beschränkte Exponenten hat, dann ist sie von selbst eine stetige Funktion im Bohrschen Sinne. Sie besitzt weiterhin Ableitungen beliebig hoher Ordnung, von denen jede fastperiodisch ist, und ist sogar in einem wohlpräzisierten Sinne eine analytische Funktion. Für fastperiodische Funktionen mit beschränkten Exponenten gibt es also keine Aufteilung in Klassen, sie bilden eine einzige Klasse. Und unser Problem, von dem wir ausgingen, hat jetzt die „objektive“ Form: wie müssen die Koeffizienten a_{λ_n} beschaffen sein, damit sie die Fourierkoeffizienten einer fastperiodischen Funktion (schlechthin) sein können. Wir können nicht irgendeine Lösung zu diesem Problem selbst geben, wir wollen aber zu einem verwandten, aber sehr viel leichteren Problem einen Beitrag liefern.

§ 2.

Im reinperiodischen Falle versteht man unter einer klassenerhaltenden Faktorenfolge eine Folge von Zahlen

$$\gamma_r, (r = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots),$$

von der folgenden Beschaffenheit. Es sei die Reihe

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} a_r e^{i r x}$$

die Fourierreihe irgend einer Funktion einer bestimmten Klasse. Die Reihe

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} \gamma_r a_r e^{i r x}$$

ist wiederum eine Fourierreihe, und zwar einer Funktion derselben Klasse. Über derartige Faktorenfolgen kennt man sehr schöne Sätze¹⁾.

Für die Gesamtheit der fastperiodischen Funktionen, deren Exponenten absolut unter einer festen Schranke Λ liegen, lautet das analoge Problem folgendermaßen: wie muß eine für alle Werte λ aus dem Intervall $-\Lambda < \lambda < \Lambda$ definierte Funktion $\gamma(\lambda)$ beschaffen sein, damit die aus einer Fourierreihe

$$\sum a_{\lambda_n} e^{i \lambda_n x}, \quad |\lambda_n| < \Lambda$$

hervorgegangene Reihe

$$\sum \gamma(\lambda_n) a_{\lambda_n} e^{i \lambda_n x}$$

wiederum eine Fourierreihe ist.

Man erkennt leicht, daß die Funktion $\gamma(\lambda)$ beschränkt sein muß. Angenommen, es gibt eine Folge von Zahlen λ_n , so daß

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |\gamma(\lambda_n)| = \infty.$$

Wir können, eventuell erst nach Wahl einer Teilfolge der ursprünglichen Folge λ_n , voraussetzen, daß

$$|\gamma(\lambda_n)| \geq n^2.$$

Die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} e^{i \lambda_n x}$$

ist absolut konvergent und daher eine Fourierreihe (nämlich der durch ihre Summe definierten Funktion). Die Reihe

¹⁾ Vgl. die zusammenfassende Arbeit von M. Fekete: „Über Faktorenfolgen, welche die Klasse einer Fourierschen Reihe unverändert lassen.“ Acta Szeged, 1 (1923), 148—166.

$$\sum \frac{\gamma(\lambda_n)}{n^2} e^{i\lambda_n x}$$

kann aber keine Fourierreihe sein, weil

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\gamma(\lambda_n)}{n^2} \right|^2$$

divergent ist. Also muß die Funktion $\gamma(\lambda)$ beschränkt sein, wenn sie als „Multiplikator“ in Frage kommen soll. Wir können nicht weitere notwendige Bedingungen für $\gamma(\lambda)$ angeben, obwohl die bloße Beschränktheit von $\gamma(\lambda)$ sicherlich nicht hinreicht. Wir wollen sogar eine stetige Funktion $\gamma(\lambda)$ konstruieren, die kein Multiplikator ist. Dazu gehen wir von irgendeiner Fourierreihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{\lambda_n} e^{i\lambda_n x}, \quad (|\lambda_n| < A),$$

mit reellen Koeffizienten aus, deren Exponenten $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots$ sich nur in einem Punkte, nennen wir ihn λ_0 , häufen und für welche $\sum |a_{\lambda_n}|$ divergiert¹⁾. Wir bestimmen jetzt eine Folge von Zahlen

$$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \dots$$

für welche

$$\operatorname{sign} \varepsilon_n = \operatorname{sign} a_{\lambda_n}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0$$

und

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n a_{\lambda_n}$$

divergiert. Auf der abgeschlossenen Punktmenge $(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots)$ definieren wir $\gamma(\lambda)$ wie folgt:

$$\begin{aligned} \gamma(\lambda_0) &= 0 \\ \gamma(\lambda_n) &= \varepsilon_n \text{ für } n \geq 1. \end{aligned}$$

Wegen $\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0$ ist diese Werteverteilung eine stetige. Wir können sie daher zu einer für alle Punkte $-A \leq \lambda \leq +A$ stetigen Funktion $\gamma(\lambda)$ erweitern²⁾. Wenn wir mit dieser Funktion

¹⁾ Vgl. des Verfassers: „Konvergenzsätze für Fourierreihen grenzperiodischer Funktionen“, Math. Zeitschr., 27 (1927), p. 187, § 3; das dortige Beispiel 1 kann durch eine geringfügige Modifikation in ein solches mit beschränkten Exponenten abgeändert werden.

²⁾ Etwa durch eine Folge von Strecken, die sich im Punkte λ_0 häufen.

$\gamma(\lambda)$ unsere Fourierreihe (1) „multiplizieren“, entsteht die Reihe

$$\sum \varepsilon_n a_{\lambda_n} e^{i\lambda_n x},$$

deren Fourierkoeffizienten alle positiv sind. Eine solche Reihe kann aber nur dann eine Fourierreihe sein, falls sie absolut konvergiert. Die Reihe $\sum \varepsilon_n a_{\lambda_n}$ sollte aber divergieren.

Also braucht eine Funktion $\gamma(\lambda)$, von der die Stetigkeit bekannt ist, noch kein Multiplikator zu sein. Aber etwas schärfere Bedingungen sind bereits hinreichend. Z. B. gilt folgendes: jede Funktion, die eine beschränkte Ableitung besitzt, ist ein Multiplikator. Dieses und noch allgemeinere Kriterien wollen wir nunmehr beweisen.

§ 3.

Es sei $K(t)$ eine nach Lebesgue integrierbare Funktion, für welche

$$(2) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} |K(t)| dt$$

endlich ist. Wir führen die Funktion

$$(3) \quad \gamma(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda t} K(t) dt$$

ein. Ist die Fourierreihe der Funktion

$$f(x) \sim \sum a_{\lambda} e^{i\lambda_n x}$$

eine Summe von nur endlich vielen Gliedern, so ist die Funktion

$$(4) \quad \varphi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x+t) K(t) dt,$$

wie unmittelbar zu sehen ist, wiederum fastperiodisch mit der Fourierreihe

$$(5) \quad \varphi(x) \sim \sum \gamma(\lambda_n) a_{\lambda_n} e^{i\lambda_n x}.$$

Davon ausgehend kann man schließen¹⁾, daß auch für die allgemeinste fastperiodische Funktion $f(x)$ die durch (4) definierte

¹⁾ Vgl. des Verfassers: „Properties of Fourier series of almost periodic functions“, London Math. Soc. Proc., 26 (1927), p. 437.

Funktion (existiert und) fastperiodisch ist und die Reihe (5) zur Fourierreihe hat. Damit also eine in $-A < \lambda < +A$ definierte Funktion $\gamma(\lambda)$ ein Multiplikator ist, ist es hinreichend, daß sich für sie daselbst das „Momentenproblem“ (3) lösen läßt, d. h. ihr eine Funktion $K(t)$ mit endlichem Integral (2) zuordnen läßt, für welche (3) besteht.

Betrachten wir die Funktion

$$(6) \quad G(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-A}^A e^{-it\alpha} \Gamma(\alpha) d\alpha,$$

wo $\Gamma(\alpha)$ eine im endlichen Intervall $(-A, A)$ nach Lebesgue integrierbare Funktion ist. Der Ausdruck

$$\int_{-T}^T e^{i\lambda t} G(t) dt, \quad -A < \lambda < +A$$

hat, wenn man unter dem von (6) herrührenden Integralzeichen nach t integriert, den Wert

$$\frac{1}{\pi} \int_{-A}^A \frac{\sin(\lambda - \alpha)T}{\lambda - \alpha} \Gamma(\alpha) d\alpha,$$

und konvergiert daher für $T \rightarrow \infty$ gegen den Wert $\Gamma(\lambda)$, sofern nur die Funktion $\Gamma(\alpha)$ im Punkte λ eines der aus der Konvergenztheorie der (periodischen) Fourierreihen bekannten Kriterien erfüllt. Damit also eine Funktion $\gamma(\lambda)$, welche für jeden Punkt des Intervalls $-A < \lambda < +A$ „Konvergenzverhalten“ aufweist, daselbst ein Multiplikator ist, ist es hinreichend, daß sie sich in einem das Intervall $-A < \lambda < +A$ umfassenden Intervall $-A \leq \lambda \leq A$ zu einer Funktion $\Gamma(\lambda)$ erweitern läßt, für welche das mit der Funktion

$$G(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-A}^A e^{-it\lambda} \Gamma(\lambda) d\lambda$$

gebildete Integral

$$(7) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} |G(t)| dt$$

einen endlichen Wert hat.

Für den speziellen Fall

$$\begin{aligned} \Gamma_0(\lambda) &= 1 & \text{für } |\lambda| \leq 1 \\ \Gamma_0(\lambda) &= 0 & \text{für } |\lambda| > 1 \end{aligned}$$

ist

$$G_0(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^{+1} e^{-it\lambda} d\lambda = \frac{\sin t}{\pi t},$$

und demnach

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |G_0(t)| dt$$

nicht endlich; woraus zu ersehen ist, daß aus bloßem „Konvergenzverhalten“ von $\Gamma(\lambda)$ noch nicht die Endlichkeit von (7) folgt. Wir wollen daher Kriterien dafür angeben, wann eine Funktion $\Gamma(\lambda)$ für uns in Frage kommt.

§ 4.

Wir erweitern $\Gamma(\lambda)$ zu einer im ganzen Intervall $-\infty < \lambda < +\infty$ definierten Funktion durch die Festsetzung

$$\Gamma(\lambda) = 0, \quad |\lambda| > A.$$

Nehmen wir an, daß unsere Funktion $\Gamma(\lambda)$ im Gesamtverlauf einer Lipschitz-Bedingung von der Ordnung $\sigma > \frac{1}{2}$ genügt¹⁾

$$(8) \quad \Gamma(\lambda + h) - \Gamma(\lambda) = O(h^\sigma).$$

Es ist

$$G(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-it\lambda} \Gamma(\lambda) d\lambda = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-it(\lambda+h)} \Gamma(\lambda+h) d\lambda,$$

also

$$e^{ith} G(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-it\lambda} \Gamma(\lambda+h) d\lambda,$$

und daher

$$(e^{ith} - 1) G(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-it\lambda} [\Gamma(\lambda+h) - \Gamma(\lambda)] d\lambda.$$

¹⁾ Diese Bedingung hat zum ersten Mal S. Bernstein für die absolute Konvergenz periodischer Fourierreihen aufgestellt. Vgl. O. Szasz: „Über den Konvergenzexponenten der Fourierschen Reihen gewisser Funktionsklassen“, Diese Sitzungsberichte, 1922, 135–150.

Nach der Theorie der Fouriertransformierten¹⁾ ist nunmehr

$$(9) \int_{-\infty}^{+\infty} |e^{ith} - 1|^2 |G(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |\Gamma(\lambda + h) - \Gamma(\lambda)|^2 d\lambda.$$

Die Voraussetzung (8) benutzen wir in der „integrierten Form“

$$(10) \int_{-\infty}^{+\infty} |\Gamma(\lambda + h) - \Gamma(\lambda)|^2 d\lambda = 0 \quad (h^{2\sigma}).$$

Das Integral links in (9) nehmen wir nur von $-1/h$ bis $+1/h$ und berücksichtigen, daß in diesem Intervall der Faktor $|e^{ith} - 1|^2$ oberhalb einer positiven von Null verschiedenen Zahl liegt. Wir erhalten dann, wenn wir T statt $1/h$ schreiben:

$$\int_{-T}^T |G(t)|^2 dt = 0 \quad (T^{-2\sigma}).$$

Durch Anwendung der Schwarzschen Ungleichung

$$\left(\int_{-T}^T |G(t)| dt \right)^2 \leq \int_{-T}^T dt \int_{-T}^T |G(t)|^2 dt$$

ergibt sich

$$\int_{-T}^T |G(t)| dt = 0 \quad (T^{1/2-\sigma}),$$

und daraus folgt, daß für $\sigma > 1/2$ das Integral (7) konvergiert. Die Bedingung (8) ist immer dann, und sogar mit $\sigma = 1$, erfüllt, falls die Funktion $\Gamma(\lambda)$ eine beschränkte Ableitung hat. Da nun eine jede Funktion $\gamma(\lambda)$, welche (fast überall) in $-A < \lambda < +A$ eine beschränkte Ableitung hat, daselbst „Konvergenzverhalten“ aufweist, und, wie sehr leicht zu sehen ist, zu einer Funktion $\Gamma(\lambda)$ erweitert werden kann, welche in $-\infty < \lambda < \infty$ differenzierbar mit beschränkter Ableitung ist, ist jede derartige Funktion $\gamma(\lambda)$ ein Multiplikator.

Von der Lipschitz-Bedingung (8) haben wir nur in der integrierten Form (10) Gebrauch gemacht. Letztere ist aber bereits

¹⁾ Vgl. E. W. Hobson: Theory of functions of a real variable, 2. Auflage, Bd. II., p. 742ff.

dann (wiederum mit $\sigma = 1$) erfüllt, wenn von der Ableitung von $\Gamma(\lambda)$ nur vorausgesetzt wird, daß

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\Gamma'(\lambda)|^2 d\lambda = \int_{-A}^A |\Gamma'(\lambda)|^2 d\lambda$$

einen endlichen Wert hat. Das folgt aus der Relation

$$|\Gamma(\lambda + h) - \Gamma(\lambda)| \leq \frac{1}{h} \int_0^h |\Gamma'(\lambda + \xi)| d\xi$$

wenn man auf sie den folgenden Minkowskischen Satz¹⁾ anwendet:

Aus

$$|\varphi(\lambda)| \leq \frac{1}{h_2 - h_1} \int_{h_1}^{h_2} |g(\lambda, \xi)| d\xi$$

folgt

$$\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} |\varphi(\lambda)|^2 d\lambda \leq \frac{1}{h_2 - h_1} \int_{h_1}^{h_2} d\xi \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} |g(\lambda, \xi)|^2 d\lambda.$$

Wir können daher behaupten:

Damit die Funktion $\gamma(\lambda)$ in $-A < \lambda < A$ ein Multiplikator ist, ist es hinreichend, daß sie absolut stetig ist und daß für ihre Ableitung das (Lebesguesche) Integral

$$\int_{-A}^A |\gamma'(\lambda)|^2 d\lambda$$

einen endlichen Wert hat.

Auf demselben Wege kann man zeigen, daß es allgemeiner hinreicht, wenn für irgendein $p > 1$

$$\int_{-A}^A |\gamma'(\lambda)|^p d\lambda$$

endlich ist.

¹⁾ Er folgt aus der Minkowskischen Relation

$$\frac{1}{k} \sum_1^{\mu} |a_{\nu 1} + a_{\nu 2} + \dots + a_{\nu k}|^2 \leq \sum_1^{\mu} (|a_{\nu 1}|^2 + |a_{\nu 2}|^2 + \dots + |a_{\nu k}|^2).$$