

Sitzungsberichte

der

mathematisch-naturwissenschaftlichen
Abteilung

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften

zu München

1928. Heft II

Mai- bis Julisitzung

München 1928

Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften

in Kommission des Verlags R. Oldenbourg München



Über eine Klasse irreduzibler Gleichungen.

Von Hermann Schmidt in Jena.

Vorgelegt von O. Perron in der Sitzung am 9. Juni 1928.

Satz: Es seien $f(x)$, $\varphi(x)$ Polynome von den Graden m , n mit Koeffizienten aus einem vollkommenen Körper $\mathfrak{f}$; beide seien in $\mathfrak{f}$ irreduzibel. In einem und demselben Erweiterungskörper habe $f(x) = 0$ die Wurzeln $x_1, x_2 \dots x_m$ und $\varphi(x) = 0$ die Wurzeln $y_1, y_2 \dots y_n$. Der Durchschnitt $\mathfrak{b} = (\mathfrak{f}_1, \mathfrak{f}_2)$ der beiden Wurzelkörper

$$\mathfrak{f}_1 = \mathfrak{R}(\mathfrak{f}, x_1, x_2, \dots x_m) \text{ und } \mathfrak{f}_2 = \mathfrak{R}(\mathfrak{f}, y_1, y_2 \dots y_n)$$

sei mit $\mathfrak{f}$ identisch und die Produkte

$$u_{\mu\nu} = x_\mu y_\nu \left\{ \begin{array}{l} \mu = 1, 2, \dots m \\ \nu = 1, 2, \dots n \end{array} \right\}$$

sämtlich voneinander verschieden. Dann ist das Polynom $\psi(x) = \prod_{\mu, \nu} (x - u_{\mu\nu})$ in $\mathfrak{f}$ irreduzibel.

Beweis: Man hat

$$\psi(x) = \prod_{\mu=1}^m \psi_\mu(x), \text{ wo } \psi_\mu(x) = \prod_{\nu=1}^n (x - x_\mu y_\nu).$$

$\psi_\mu(x)$ hat offenbar Koeffizienten aus $\mathfrak{R}(\mathfrak{f}, x_\mu)$ und entsprechend $\psi(x)$ solche aus $\mathfrak{f}$. Sei $\mathfrak{G}$ die Gruppe von $\psi(x) = 0$ in $\mathfrak{f}$ und

$$\omega(u_{11} u_{12}, \dots u_{1n}; u_{21}, \dots u_{2n}; \dots u_{m1}, u_{m2}, \dots u_{mn}) = 0$$

eine Relation zwischen den Wurzeln von $\psi(x) = 0$ mit Koeffizienten aus $\mathfrak{f}$.

Schreibt man sie in der Form

$$\begin{aligned} \omega(x_1 y_1, \dots x_1 y_n; x_2 y_1, \dots x_2 y_n; \dots x_m y_1, \dots x_m y_n) \\ = \Omega(x_1, x_2, \dots x_m) = 0, \end{aligned}$$

so hat Ω Koeffizienten aus $\mathfrak{f}_2$. Nun reduziert sich wegen $(\mathfrak{f}_1, \mathfrak{f}_2) = \mathfrak{f}$ die Gruppe $\mathfrak{G}_1$ von $f(x) = 0$ in $\mathfrak{f}$ bei Adjunktion von $\mathfrak{f}_2$ nicht¹⁾; daher bleibt $\Omega = 0$ richtig bei allen in $\mathfrak{G}_1$ enthaltenen Substitutionen der x_μ . Wegen der Irreduzibilität von $f(x)$ gibt es aber, wenn k eine beliebige der Zahlen $1, 2, \dots, m$ bedeutet, in $\mathfrak{G}_1$ sicher eine Substitution S_k der Gestalt

$$S_k = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_m \\ x_{i_1, k} & x_{i_2, k} & \dots & x_{i_m, k} \end{pmatrix} \quad \text{mit } i_{l, k} = k.$$

Daher bleibt $\omega = 0$ richtig bei den Substitutionen

$$U_k = \begin{pmatrix} u_{\mu v} \\ u_{i_{\mu, k} v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_\mu & y_v \\ x_{i_{\mu, k}} & y_v \end{pmatrix},$$

die somit $\mathfrak{G}$ angehören.

Ebenso muß es in der Gruppe $\mathfrak{G}_2$ von $\varphi(x) = 0$ zu jedem l aus der Reihe $1, 2, 3, \dots, n$ eine Substitution T_l geben

$$T_l = \begin{pmatrix} y_v \\ y_{j_v, l} \end{pmatrix} \quad \text{mit } j_{v, l} = l,$$

sodaß in $\mathfrak{G}$

$$V_l = \begin{pmatrix} u_{\mu v} \\ u_{\mu j_v, l} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_\mu y_v \\ x_\mu y_{j_v, l} \end{pmatrix}$$

vorkommt.

Deshalb gehören zu $\mathfrak{G}$ auch die mn Substitutionen der $u_{\mu v}$

$$U_k V_l = \begin{pmatrix} u_{\mu v} \\ u_{i_{\mu, k} v} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{i_{\mu, k} v} \\ u_{i_{\mu, k} j_v, l} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{\mu v} \\ u_{i_{\mu, k} j_v, l} \end{pmatrix}.$$

Diese sind sämtlich voneinander verschieden, da u_{11} in die mn nach Annahme verschiedenen Elemente $u_{i_{1, k} j_{1, l}} = u_{kl}$ übergeführt wird. Daher ist $\mathfrak{G}$ transitiv und also $\varphi(x)$ irreduzibel, w. z. b. w.

Allgemeiner seien $f_\varrho(x) = 0$ ($\varrho = 1, 2, \dots, r$) r in $\mathfrak{f}$ irreduzible Gleichungen von den Graden n_ϱ mit den Wurzelsystemen $x_{\varrho v}$ ($v = 1, 2, \dots, n_\varrho$), die wieder in einem gemeinsamen Erweiterungskörper liegen sollen, ferner $u_{r_1 r_2 \dots r_r} = x_1 r_1 x_2 r_2 \dots x_r r_r$, und $u_{r_1 r_2 \dots r_r} - u_{\kappa_1 \kappa_2 \dots \kappa_r} \neq 0$ für $\sum_{\varrho=1}^r (v_\varrho - \kappa_\varrho)^2 \neq 0$.

Wir setzen

$$F_\sigma(x) = \prod_{v_1 \dots v_\sigma} (x - x_1 v_1 x_2 v_2 \dots x_\sigma v_\sigma) \\ (\sigma = 1, 2, \dots, r; F_1(x) = f_1(x)).$$

¹⁾ Vgl. etwa Hasse, Höhere Algebra II 1927, S. 126, 3.)

Sei ferner

$$\begin{aligned} f_\sigma &= \text{Wurzelkörper von } f_\sigma(x) = 0 \text{ über } f \\ \mathfrak{R}_\sigma &= \text{„ „ „ } F_\sigma(x) = 0 \text{ „ „ } f. (\mathfrak{R}_1 = \mathfrak{f}_1). \end{aligned}$$

Wenn dann $(\mathfrak{R}_1, f_2) = (\mathfrak{R}_2, f_3) = \dots (\mathfrak{R}_{r-1}, f_r) = \mathfrak{f}$, dann ist $F_r(x)$ irreduzibel in f .

Das ergibt sich leicht durch sukzessive Anwendung obiger Schlußweise auf die Polynompaare

$$(F_1, f_2); (F_2, f_3); \dots (F_{r-1}, f_r),$$

wobei zu beachten ist, daß auch $u_{r_1 r_2} \dots r_\sigma - u_{\kappa_1 \kappa_2} \dots \kappa_\sigma \neq 0$ für

$$\sum_1^\sigma (v_\sigma - \kappa_\sigma)^2 \neq 0, \text{ da andernfalls auch eine Beziehung}$$

$$u_{r_1 r_2} \dots r_\sigma r_{\sigma+1} \dots r_r - u_{\kappa_1 \kappa_2} \dots \kappa_\sigma \kappa_{\sigma+1} \dots \kappa_r = 0$$

mit

$$\sum_1^r (v_\sigma - \kappa_\sigma)^2 \neq 0$$

gälte, wie sie nach Voraussetzung unmöglich ist; man bräuchte ja nur $r_{\sigma+1} = \dots r_r = \kappa_{\sigma+1} = \dots \kappa_r = 1$ zu setzen.

Im Falle $\mathfrak{f} = \mathfrak{R}(1)$ sei auf die Verwandtschaft des obigen Satzes mit Satz 87 des Hilbertschen Zahlberichts hingewiesen (aus der Annahme $(d_1, d_2) = 1$ für die Diskriminanten von k_1, k_2 folgt nach Satz 86, 39, 44 a. a. O. $(k_1, k_2) = \mathfrak{R}(1)$, also unsere Voraussetzung). Indessen braucht bei uns weder n_σ der Grad von f_σ , noch $\mathfrak{R}_r$ mit $\mathfrak{R}(\mathfrak{f}, \mathfrak{f}_1, \mathfrak{f}_2, \dots, \mathfrak{f}_r)$ identisch zu sein. Andererseits sind dort k_1, k_2 nicht notwendig Galoissche Körper. Ist aber z. B. $f_\sigma(x) = 0$ die Gleichung für die primitiven $p_\sigma^{\alpha_\sigma}$ -ten Einheitswurzeln ($p_1, p_2, \dots, p_r$ verschiedene Primzahlen), so sind die Voraussetzungen beider Sätze erfüllt, wie man aus der Kenntnis der Körper f_σ und ihrer Diskriminanten leicht entnimmt, und hieraus folgt sodann die Irreduzibilität der Kreisteilungsgleichung für zusammengesetztes n .