Sitzungsberichte

der

mathematisch-naturwissenschaftlichen Abteilung

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften

zu München

1928. Heft II

Mai- bis Julisitzung

München 1928
Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften
in Kommission des Verlags R. Oldenbourg München

Zur Differentiation uneigentlicher Integrale nach einem Parameter.

Von **Hermann Schmidt** in Jena.

Vorgelegt von O. Perron in der Sitzung am 9. Juni 1928.

Unter bekannten Voraussetzungen über die reellen Funktionen $f(t, x)$ und $t_0(x)$ ist das Integral $F(x) = \int\limits_a^{t_0(x)} f(t, x)\, dt$ nach x differenzierbar und es gilt für die Ableitung

$$F'(x) = \int\limits_a^{t_0(x)} \frac{\partial f(t, x)}{\partial x}\, dt + f(t_0(x), x)\, \frac{d t_0(x)}{d x}.$$

Diese Formel wird sinnlos, wenn $F(x)$ ein uneigentliches Integral ist, bei dem $f(t, x)$ für $t \to t_0(x)$ nicht beschränkt bleibt. Im folgenden soll für einen ziemlich allgemeinen Fall dieser Art ebenfalls eine Differentiationsformel entwickelt werden, und zwar ohne vorherige Umtransformation der Grenzen in feste, sodaß der Hauptbestandteil wieder ein konvergentes Integral der ersten Form mit den gleichen Grenzen ist. Ein auch funktionentheoretisch interessantes Beispiel soll schließlich die praktische Brauchbarkeit des Ergebnisses erläutern.

Es seien $\varphi(t, x)$ und $\psi(t, x)$ im abgeschlossenen Bereich B

$$\alpha \leq x \leq \beta$$
$$a \leq t \leq t_0(x)$$

stetig und mit stetigen ersten partiellen Ableitungen versehen, von denen $\psi'_t(t, x)$ in B von Null verschieden sei. Ferner sei $\psi(t_0(x), x) = 0$, dagegen $\psi(t, x) > 0$ für $a \leq t < t_0(x)$[1]) und

[1]) Hierin liegt, daß $t_0(x) \neq a$ für alle x.

$$\int_a^{t_0(x)} \frac{dt}{(\psi(t, x))^\mu} \quad \text{in } \alpha \leqq x \leqq \beta$$

gleichmäßig konvergent, unter μ eine in $0 < \mu < 1$ gelegene Konstante verstanden. Endlich soll noch eine in B stetige Ableitung

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\psi'_x(t, x)}{\psi'_t(t, x)}$$

vorhanden sein. Dann gilt für

$$F(x) = \int_a^{t_0(x)} \frac{\varphi(t, x)\, dt}{(\psi(t, x))^\mu}$$

die Formel

$$(1) \quad F'(x) = \int_a^{t_0(x)} \frac{1}{(\psi(t, x))^\mu} \left\{ \varphi'_x(t, x) - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\varphi(t, x)\, \psi'_x(t, x)}{\psi'_t(t, x)} \right\} dt$$

$$- \frac{\varphi(a, x)}{(\psi(a, x))^\mu} \cdot \frac{\psi'_x(a, x)}{\psi'_t(a, x)}.$$

Zum Beweis werde zunächst festgestellt, daß $F(x)$ existiert. Wegen der Stetigkeit von $\varphi(t, x)$ in B ist nämlich dort $|\varphi(t, x)| \leqq M$, also, sobald die positive Zahl δ klein genug und $0 < \delta' < \delta$ ist,

$$(2) \qquad \left| \int_{t_0(x)-\delta}^{t_0(x)-\delta'} \frac{\varphi(t, x)}{(\psi(t, x))^\mu}\, dt \right| \leqq M \int_{t_0(x)-\delta}^{t_0(x)-\delta'} \frac{dt}{(\psi(t, x))^\mu} < \varepsilon$$

wegen Annahme über

$$\int_a^{t_0(x)} \frac{dt}{(\psi(t, x))^\mu}.$$

Bedeutet nun σ eine beliebige Zahl des Intervalls

$$0 < \sigma < \text{Min.}\,(t_0(x) - a),$$

so setzen wir

$$F_\sigma(x) = \int_a^{t_0(x)-\sigma} \frac{\varphi(t, x)}{(\psi(t, x))^\mu}\, dt. \quad \text{In } \begin{array}{l} \alpha \leqq x \leqq \beta \\ a \leqq t \leqq t_0(x) - \sigma \end{array}$$

sind die Voraussetzungen für die Anwendbarkeit der bekannten

Differentiationsregel erfüllt und man hat daher

$$(3)\quad F'_\sigma(x) = \int_a^{t_0(x)-\sigma} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\varphi(t, x)}{(\psi(t, x))^\mu}\, dt + \frac{\varphi(t_0 - \sigma, x)}{(\psi(t_0 - \sigma, x))^\mu} \frac{d}{dx}(t_0 - \sigma).$$

Nach den Annahmen über $\psi(t, x)$ ist aber

$$\frac{d(t_0 - \sigma)}{dx} = \frac{d t_0(x)}{dx} = -\frac{\psi'_x(t_0, x)}{\psi'_t(t_0, x)},$$

sonach

$$(4)\quad F'_\sigma(x) = \int_a^{t_0(x)-\sigma} \frac{\varphi'_x(t, x)\, dt}{(\psi(t, x))^\mu} + \int_a^{t_0(x)-\sigma} \frac{\varphi(t, x)}{\psi'_t(t, x)} \cdot \frac{-\mu \psi'_x(t, x)}{(\psi(t, x))^{\mu+1}} \cdot \psi'_t(t, x)\, dt$$
$$- \frac{\varphi(t_0 - \sigma, x)}{(\psi(t_0 - \sigma, x))^\mu} \cdot \frac{\psi'_x(t_0, x)}{\psi'_t(t_0, x)}.$$

Für das mittlere Glied kann geschrieben werden

$$\int_a^{t_0(x)-\sigma} \frac{\varphi(t, x)\, \psi'_x(t, x)}{\psi'_t(t, x)} \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{(\psi(t, x))^\mu}\, dt.$$

Jetzt ergibt partielle Integration aus (4)

$$F'_\sigma(x) =$$

$$(5)\quad \int_a^{t_0(x)-\sigma} \frac{1}{\psi(t, x)^\mu} \left\{ \varphi'_x(t, x) - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\varphi(t, x)\, \psi'_x(t, x)}{\psi'_t(t, x)} \right\} dt - \frac{\varphi(a, x)}{(\psi(a, x))^\mu} \cdot \frac{\psi'_x(a, x)}{\psi'_t(a, x)}$$
$$- \sigma \frac{\varphi(t_0 - \sigma, x)}{(\psi(t_0 - \sigma, x))^\mu} \cdot \frac{-1}{\sigma} \left\{ \frac{\psi'_x(t_0 - \sigma, x)}{\psi'_t(t_0 - \sigma, x)} - \frac{\psi'_x(t_0, x)}{\psi'_t(t_0, x)} \right\}.$$

Das letzte Glied ist nach dem Mittelwertssatz (mit Berücksichtigung von $\psi(t_0, x) = 0$)

$$(6)\quad - \sigma^{1-\mu} \frac{\varphi(t_0 - \sigma, x)}{|\psi'_t(t_0 - \sigma_1, x)|^\mu} \cdot \left(\frac{\partial}{\partial t} \frac{\psi'_x(t, x)}{\psi'_t(t, x)} \right)_{t = t_1}$$

$$0 < \sigma_1 < \sigma; \quad t_0 - \sigma < t_1 < t_0.$$

Wegen der Stetigkeit gilt nun in ganz B

$$|\varphi(t, x)| \leq M; \quad \left| \frac{\partial}{\partial t} \frac{\psi'_x(t, x)}{\psi'_t(t, x)} \right| \leq M'$$

und wegen

$$\psi'_t(t, x) \neq 0 \text{ in B auch } |\psi'_t(t, x)| \geq m > 0.$$

Der Betrag von (6) ist daher

$$\leqq \sigma^{1-\mu} \frac{M M'}{m^{\mu}},$$

und geht daher gleichmäßig gegen Null, wenn wir nunmehr σ gegen Null konvergieren lassen.

Endlich ist nach den Voraussetzungen die erste Klammer in (5) in B stetig, also absolut integrierbar und beschränkt. Das Integral konvergiert daher für $\sigma \to 0$, wie man analog zu (2) beweist, und zwar gleichmäßig, da

$$\left|\int_a^{t_0(x)} - \int_a^{t_0(x)-\sigma}\right| \leqq N \int_{t_0(x)-\sigma}^{t_0(x)} \frac{dt}{(\psi(t, x))^{\mu}} < \varepsilon$$

gleichmäßig in $\alpha \leqq x \leqq \beta$ nach Annahme über $\psi(t, x)$.

Also ist insgesamt in $\alpha \leqq x \leqq \beta$ gleichmäßig

$$\lim_{\sigma \to 0} F'_{\sigma}(x) = \int_a^{t_0(x)} \frac{1}{(\psi(t, x))^{\mu}} \left(\varphi'_x(t, x) - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\varphi(t, x)\, \psi'_x(t, x)}{\psi'_t(t, x)}\right) dt$$

$$- \frac{\varphi(a, x)}{(\psi(a, x))^{\mu}} \frac{\psi'_x(a, x)}{\psi'_t(a, x)} = \Phi(x).$$

Aus $F_{\sigma}(x) \to F(x)$ und $F'_{\sigma}(x) \Rightarrow \Phi(x)$ [1]) folgt aber nach einem bekannten (gewöhnlich für die gliedweise Differentiation unendlicher Reihen formulierten) Satze, daß $F'(x) = \Phi(x)$, wie in (1) behauptet.

Als Beispiel werde angenommen

$$\varphi(t, x) = t^l \ (l \geqq 0, \text{ ganz}); \quad \psi(t, x) = t^n - n x t + n - 1$$
$$(n \geqq 2, \text{ ganz}).$$

Nehmen wir

$$\alpha = \frac{1}{n}\left((1-\delta)^{n-1} + \frac{n-1}{1-\delta}\right) \leqq x \leqq \frac{1}{n}\left(\delta^{n-1} + \frac{n-1}{\delta}\right) = \beta$$

mit $0 < \delta < \frac{1}{2}$, so entspricht jedem x genau eine Wurzel $t_0(x)$ von $\psi(t, x) = 0$ in $1 - \delta \geqq t_0(x) \geqq \delta$; $\quad x = \frac{1}{n}\left(t^{n-1} + \frac{n-1}{t}\right)$

[1]) Bezeichnung $\Rightarrow$ für gleichmäßige Konvergenz wie Hoheisel, Gew. Diff. Gl. 1926, S. 27.

fällt nämlich monoton, wenn t wachsend das Intervall $0 < t < 1$ durchläuft. Jetzt betrachten wir die Funktion

$$\Phi_l(x) = \int_0^{t_0(x)} \frac{t^l\, dt}{(\psi(t, x))^\mu} \quad \cdot \quad \mathrm{B}: \begin{array}{l} \alpha \leqq x \leqq \beta \\ 0 \leqq t \leqq t_0(x) . \end{array}$$

(Für $n = 2$; $\mu = \frac{1}{2}$ ist $\Phi_l(x) = Q_l(x)$ die l-te Legendresche Funktion 2. Art in der gewöhnlichen Bezeichnung; für beliebiges $\begin{cases} n \\ \mu \end{cases}$ handelt es sich um eine durch die allgemeine hypozykloidische Abbildung nahegelegte Verallgemeinerung derselben.)

Man hat

$$\psi'_t(t, x) = n(t^{n-1} - x) \neq 0,$$

also

$$\psi(t, x) = (t - t_0(x))\, \psi_1(t, x),$$

wo $\psi_1(t, x)$ in B nicht Null ist.

Daher ist $|\psi_1(t, x)| \geqq m > 0$ in B und

$$\int_{t_0(x)-\sigma}^{t_0(x)} \frac{dt}{(\psi(t, x))^\mu} \leqq \frac{1}{m^\mu} \int_{t_0(x)-\sigma}^{t_0(x)} \frac{dt}{(t_0(x) - t)^\mu} = \frac{1}{m^\mu} \frac{\sigma^{1-\mu}}{1-\mu} \Rightarrow 0.$$ [1]

Die Voraussetzung der gleichmäßigen Konvergenz von

$$\int_0^{t_0(x)} \frac{dt}{[\psi(t, x)]^\mu}$$

ist also erfüllt und noch leichter beweist man die Gültigkeit der übrigen Voraussetzungen.

Folglich ist

$$\Phi'_l(x) = \int_0^{t_0(x)} \frac{1}{(\psi(t, x))^\mu} \frac{\partial}{\partial t} \frac{t^{l+1}}{t^{n-1} - x}\, dt,$$

da die beiden anderen Glieder der Hauptformel wegfallen.

Hieraus entnimmt man leicht

$$\text{(1)} \qquad \Phi'_{l+n-1}(x) - x\, \Phi'_l(x) = \int_0^{t_0(x)} \frac{1}{(\psi(t, x))^\mu} \frac{\partial}{\partial t} (t^{l+1})\, dt$$
$$= (l+1)\, \Phi_l(x),$$

---

[1]) Siehe Anmerkung auf Seite 154.

sowie

$$(2)\qquad \Phi'_{l+n}(x) - n x \Phi'_{l+1}(x) + (n-1)\Phi'_l(x)$$

$$= n \int_0^{t_0(x)} \frac{1}{(\psi(t,x))^\mu} \frac{\partial}{\partial t} \frac{t^{l+1}\psi(t,x)}{\psi'_t(t,x)}\, dt$$

$$= \frac{n(\psi(t,x))^{1-\mu} t^{l+1}}{\psi'_t(t,x)}\Bigg|_0^{t_0(x)} + n\mu \int_0^{t_0(x)} \frac{t^{l+1}\, dt}{(\psi(t,x))^\mu} = n\mu\, \Phi_{l+1}(x).$$

(1) (2) bleiben übrigens auch im Komplexen richtig, wenn man die Wurzel $t_0(x)$ und den Integrationsweg passend wählt.

Aus (1) (2) lassen sich die für die Funktionen $\Phi_l(x)$ gültigen linearen Differentialgleichungen vom Fuchs'schen Typus gewinnen. Für $n = 3$, $\mu = \frac{1}{2}$ finden sich die beiden Relationen in wenig anderer Bezeichnung bei Pincherle, Memorie Ist. di Bologna (5) 1, 1890, S. 367. Indessen ist dort die unserer Gleichung (1) entsprechende Beziehung (54) (und daher (55)) unrichtig. In der Tat gibt Pincherle auch keinen Beweis, sondern bezieht sich mit den Worten „in ganz analoger Weise findet man" auf eine frühere Entwicklung, die hier wegen der Uneigentlichkeit des Integrals nicht anwendbar ist. Sonach braucht auch die Differentialgleichung (58) a. a. O. nicht richtig zu sein.