Sitzungsberichte

der

mathematisch-naturwissenschaftlichen Abteilung

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften

zu München

1928. Heft II

Mai- bis Julisitzung

München 1928

Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften

in Kommission des Verlags R. Oldenbourg München

Geometrische Überlegungen zu den Grundgleichungen der Flächentheorie.

Von **Robert Sauer.**

Mit 4 Textfiguren.

Vorgelegt von S. Finsterwalder in der Sitzung am 5. Mai 1928.

Die Grundgleichungen der Flächentheorie von Mainardi-Codazzi und von Gauß sind in neuerer Zeit von Herrn A. Voss[1]) und Herrn M. Lagally[2]) sehr kurz und mit den einfachsten analytischen Mitteln abgeleitet worden. Trotzdem dürfte die Mitteilung der nachfolgenden geometrischen Überlegungen nicht überflüssig sein, weil diese anstelle des analytischen Begriffs der Integrabilitätsbedingungen lediglich Begriffe der geometrischen Anschauung verwenden und dadurch in gewissem Sinne einen unmittelbareren Einblick in das Problem gewähren. Soweit es sich um den Gauß'schen Satz handelt, stützen sich die Untersuchungen wesentlich auf Vorlesungen des Herrn Geheimrats S. Finsterwalder[3]).

I. Die Gleichungen von Mainardi-Codazzi.

Wir betrachten ein von Krümmungslinien gebildetes infinitesimales Rechteck. Die Flächennormalen in den Eckpunkten des Rechtecks schneiden sich bis auf Fehler dritter Ordnung in den

[1]) A. Voss, Über die Grundgleichungen der Flächentheorie, Sitzungsberichte der bayer. Akademie der Wissenschaften, math.-naturwissenschaftl. Abt. 1927, p. 1—3.

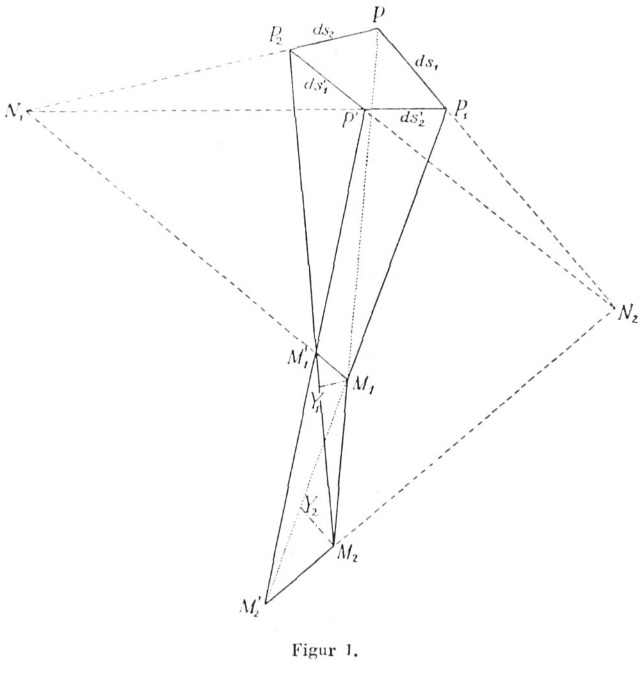
[2]) M. Lagally, Die Verwendung des begleitenden Dreibeins für den Aufbau der natürlichen Geometrie, ebenda 1927, p. 5—16.

[3]) S. Finsterwalder, Mechanische Beziehungen bei der Flächendeformation, Jahresbericht der Deutschen Mathematikervereinigung, 6, 1899, p. 45—90, insbesondere p. 61.

Krümmungsmittelpunkten M_1, M_1', M_2, M_2'. Man kann daher bis auf Fehler 1. Ordnung $\varrho_1 = PM_1 = P_1M_1$, $\varrho_2 = PM_2 = P_2M_2$, $\varrho_1' = P_2M_1' = P'M_1'$, $\varrho_2' = P_1M_2' = P'M_2'$ als Mittelwerte des 1. bzw. des 2. Hauptkrümmungsradius für die Bogenelemente ds_1, ds_2, ds_1', ds_2' ansetzen.

Zieht man $M_1Y_1 \,//\, ds_2$, $M_2Y_2 \,//\, ds_1$, so wird

$$M_1'Y_1 = -(\varrho_1' - \varrho_1) = -d\varrho_1 \text{ und } M_2'Y_2 = \varrho_2' - \varrho_2 = d\varrho_2.$$



Figur 1.

Da die Krümmungslinien auf der Fläche ein konjugiertes Kurvensystem bilden, so schneiden sich, wiederum bis auf Fehler dritter Ordnung, die Sehnen der Bogenelemente ds_1 und ds_1' in N_2 und die Sehnen der Bogenelemente ds_2 und ds_2' in N_1. Weil zudem die Krümmungslinien aufeinander senkrecht stehen, sind dann N_1 und N_2 die geodätischen Krümmungsmittelpunkte für die Bogenelemente ds_1 und ds_2. Die zugehörigen Radien der geodätischen Krümmung sollen mit $\gamma_1 = PN_1$, $\gamma_2 = PN_2$ bezeichnet werden. N_2 muß auf der Schnittlinie der Ebenen $\{M_1, ds_1\}$,

$\{M_1', ds_1'\}$ liegen, d. h. auf der Geraden $M_2' M_2$; ebenso liegt N_1 auf der Schnittlinie der Ebenen $\{M_2, ds_2\}$, $\{M_2', ds_2'\}$, d. h. auf der Geraden M_1', M_1.

Nun ist aber bis auf Abweichungen 1. Ordnung für die Dreieckswinkel

$$\begin{aligned} &1)\ \Delta P M_1 N_1 \sim \Delta Y_1 M_1' M_1, \\ &2)\ \Delta P M_2 N_2 \sim \Delta Y_2 M_2' M_2. \end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$1)\ \frac{PM_1}{PN_1} = \frac{Y_1 M_1'}{Y_1 M_1}, \qquad 2)\ \frac{PM_2}{PN_2} = \frac{Y_2 M_2'}{Y_2 M_2}.$$

Durch Einsetzen der Werte

$$\begin{aligned} &PM_1 = \varrho_1, \qquad PM_2 = \varrho_2, \\ &PN_1 = \gamma_1, \qquad PN_2 = \gamma_2, \\ &Y_1 M_1' = -\, d\varrho_1, \qquad Y_2 M_2' = d\varrho_2, \\ &Y_1 M_1 = \frac{\varrho_2 - \varrho_1}{\varrho_2}\, ds_2, \qquad Y_2 M_2 = \frac{\varrho_2 - \varrho_1}{\varrho_1}\, ds_1 \end{aligned}$$

kommt

$$\begin{aligned} &1)\ \frac{\varrho_1}{\gamma_1} = -\frac{d\varrho_1}{ds_2}\,\frac{\varrho_2}{\varrho_2 - \varrho_1}, \\ &2)\ \frac{\varrho_2}{\gamma_2} = \frac{d\varrho_2}{ds_1}\,\frac{\varrho_1}{\varrho_2 - \varrho_1}. \end{aligned}$$

Diese Gleichungen sind die Mainardi-Codazzi'schen Beziehungen[1]). Schreibt man statt der Zuwächse $d\varrho_1$, $d\varrho_2$ die Ausdrücke

$$d\varrho_1 = \frac{\partial \varrho_1}{\partial s_2}\, ds_2, \qquad d\varrho_2 = \frac{\partial \varrho_2}{\partial s_1}\, ds_1,$$

so erhält man die endgültigen Formeln:

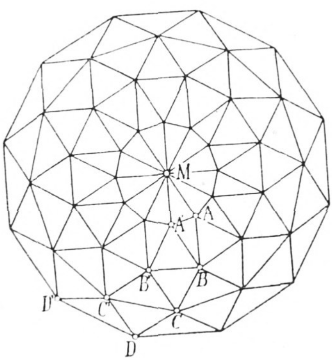
$$\boxed{\begin{aligned} &1)\ \frac{\partial \varrho_1}{\partial s_2} = \frac{(\varrho_1 - \varrho_2)\,\varrho_1}{\varrho_2\,\gamma_1} \\ &2)\ \frac{\partial \varrho_2}{\partial s_1} = \frac{(\varrho_2 - \varrho_1)\,\varrho_2}{\varrho_1\,\gamma_2} \end{aligned}}$$

[1]) Vgl. M. Lagally, a. a. O. p. 14.

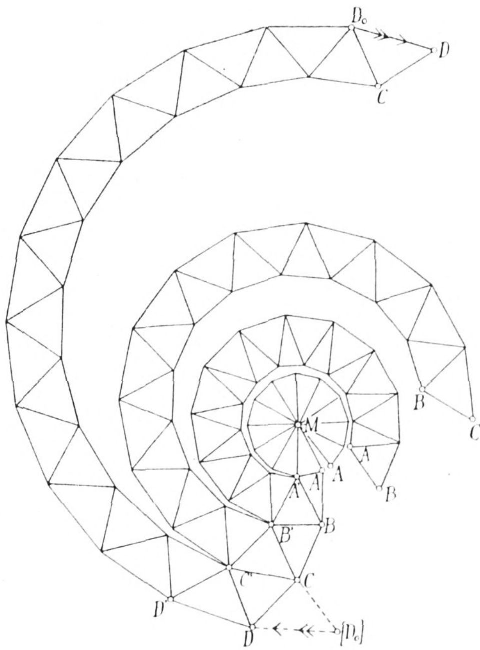
II. Die Gauß'sche Gleichung.

Zunächst gebe ich eine rein geometrische Ableitung des Gauß-Bonnet'schen Integralsatzes an, wie sie in ähnlicher Weise von Herrn S. Finsterwalder in seinen Vorlesungen über Differentialgeometrie vorgetragen wird und wie sie bereits zum Teil in der schon zitierten Finsterwalder'schen Arbeit angedeutet ist. Die Gauß'sche Gleichung in der Liouville'schen Form wird sich dann als naheliegende Folge des Gauß-Bonnet'schen Integralsatzes ergeben.

1. Der Gauß-Bonnet'sche Satz.



Figur 2.



Figur 3.

Ein einfach zusammenhängendes Flächenstück wird durch eine Folge geschlossener, sich nicht schneidender Kurven in eine Reihe ringförmiger Gebiete und in ein einfach zusammenhängendes Gebiet im Inneren des engsten Ringes zerlegt. Auf jeder der geschlossenen Kurven nimmt man n etwa jeweils nach gleichen Bogenlängen aufeinander folgende Punkte an; ferner wird ein

Punkt M im Inneren des von den Ringen umschlossenen einfach zusammenhängenden Bereiches willkürlich gewählt. Es lassen sich dann die sämtlichen festgelegten Punkte durch gerade Linien in der Weise verbinden, daß sich ein aus lauter Dreiecken bestehendes polyedrisches Gefüge ergibt, wie es in Figur 2 angedeutet ist. Und zwar ist M die Spitze eines n-Kantes, die n benachbarten Punkte sind die Spitzen von n 5-Kanten, in den Randpunkten stoßen je 3, in allen übrigen Punkten je 6 Dreiecke zusammen. Wenn man das polyedrische Dreiecksgefüge immer engmaschiger werden läßt, konvergiert es schließlich gegen das vorgegebene Flächenstück.

Es wird nun ein einfacher Satz über die polyedrischen Dreiecksgefüge selbst abgeleitet, der dann beim Grenzübergang zur Fläche unmittelbar auf den Gauß-Bonnet'schen Integralsatz führt.

a) Das polyedrische Dreiecksgefüge kann auf die Einheitskugel durch die zu den Dreiecksebenen senkrechten Kugelradien abgebildet werden. Über den Richtungssinn der Normalen sind die aus der Flächentheorie bekannten Festsetzungen zu treffen. Auf diese Weise werden dem n-Kant mit der Spitze M, den n benachbarten 5-Kanten sowie den 6-Kanten des polyedrischen Dreiecksgefüges ihre Polarkante zugeordnet, welche alle den Mittelpunkt der Einheitskugel als gemeinsame Spitze besitzen. Die Polarkante schneiden auf der Kugeloberfläche ein von Hauptkreisbögen begrenztes Gebiet aus, welches aus 1 sphärischen n-Eck, n sphärischen 5-Ecken und im übrigen aus sphärischen 6-Ecken besteht und welches das „sphärische Bild“ des Dreiecksgefüges genannt werden soll.

Nach elementargeometrischen Sätzen ist der Flächeninhalt eines der genannten sphärischen Vielecke gleich der Differenz ε der Seitenwinkelsumme an der Spitze des zugehörigen Vielkants im polyedrischen Dreiecksgefüge gegenüber dem vollen Winkel 2π. Der Gesamtflächeninhalt F des sphärischen Bildes ist also gleich der algebraischen Summe

$$(1) \quad F = \Sigma \varepsilon,$$

wobei die Summation über das n-Kant, die n 5-Kante und die sämtlichen 6-Kante sich erstreckt.

Aus Formel (1) folgt nebenbei, daß bei jeder Deformation des Dreiecksgefüges, bei der die einzelnen Dreiecke starr bleiben, der Flächeninhalt des sphärischen Bildes sich nicht ändert.

Weiterhin kann man dem Winkel $\Sigma\varepsilon$ eine einfache geometrische Deutung geben:

Wir denken uns zunächst das n-Kant in die Ebene ausgebreitet, hierauf der Reihe nach die einzelnen Ringe von Dreiecken, so daß jeweils eine Dreiecksseite AA', BB', ... gemeinsam ist (Figur 3). Setzt man nun beim äußersten ausgebreiteten Ring das $\Delta CD(D_0) \cong \Delta CDD_0$ an die Seite CD an, so ist aus dem Ausbreitungsprozeß klar, daß der Winkel α, welchen an beiden Enden des äußersten Ringes in der Abwickelung die beiden Strahlen $(D_0)D$ und D_0D miteinander einschließen, gleich ist der Summe der sämtlichen Winkeldifferenzen ε; also

$$(2) \quad \alpha = \Sigma\varepsilon.$$

Wegen (1) folgt dann weiter

$$(3) \quad F = \alpha.$$

Den Figuren 2 und 3 ist ein Glied positiven Krümmungsmaßes zugrunde gelegt, je 2 aneinanderzusetzende Ringe lassen daher bei der Abwickelung einen Spalt.

b) Beim Grenzübergang vom polyedrischen Dreiecksgefüge zur Fläche wird die Abbildung durch senkrechte Radien zu der in der Flächentheorie gebräuchlichen Abbildung durch parallele Normalen und der Flächeninhalt F geht in den Flächeninhalt des sphärischen Bildes des gegebenen Flächenstückes über.

Daß man nun $F = \iint \frac{ds_1\, ds_2}{\varrho_1 \varrho_2}$ setzen kann, wobei ϱ_1, ϱ_2 die Hauptkrümmungsradien ds_1, ds_2 die Bogenelemente der Krümmungslinien sind, ist geometrisch leicht ersichtlich; denn die von den Krümmungslinien ausgehenden Torsen von Flächennormalen durchsetzen sich orthogonal und es entspricht daher bei der Abbildung durch parallele Normen dem System der Krümmungslinien der gegebenen Fläche auf der Kugel wiederum ein Orthogonalsystem. Die Bogenelemente ds_1, ds_2 werden dabei im Maßstab $\frac{1}{\varrho_1}$, $\frac{1}{\varrho_2}$ verändert. Die Gleichung (1) liefert damit den Gauß'-

schen Satz von der Invarianz der Totalkrümmung gegenüber reiner Verbiegung.

Auch der Winkel α läßt sich beim Übergang zur Fläche in einfacher Weise ausdrücken:

$2\pi - \alpha$ ist der Winkel, um den sich die Tangente der abgewickelten Randkurve dreht, also

$$2\pi - \alpha = \oint \frac{ds}{\gamma},$$

wobei ds das Bogenelement, $\frac{1}{\gamma}$ die geodätische Krümmung der Randkurve bedeutet und die Integration über die geschlossene Randkurve zu erstrecken ist.

Falls die Randkurve Knicke mit den Außenwinkeln β hat, ist allgemeiner zu setzen

$$2\pi - \alpha = \oint \frac{ds}{\gamma} + \Sigma\beta.$$

Durch Einsetzen der gefundenen Ausdrücke für F und α in (3) kommt

$$\iint \frac{ds_1\, ds_2}{\varrho_1 \varrho_2} = 2\pi - \oint \frac{ds}{\gamma} - \Sigma\beta.$$

Wenn man für $ds_1\, ds_2$ das Flächenelement df und für das Krümmungsmaß $\frac{1}{\varrho_1 \varrho_2}$ die Bezeichnung K treten läßt, hat man den Gauß-Bonnet'schen Satz in der gebräuchlichen Form

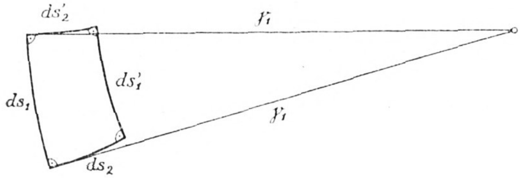
$$\boxed{\int K\, df + \oint \frac{ds}{\gamma} + \Sigma\beta = 2\pi.}$$

Die Festsetzung des Umlaufsinns für das Randintegral ist aus der Flächentheorie bekannt.

2. Die Gauß'sche Gleichung in der Liouville'schen Form.

Wir betrachten irgend ein Orthogonalsystem auf der gegebenen Fläche und greifen ein infinitesimales Rechteck heraus.

Die 4 Seiten des Rechtecks sind ds_1, ds_1', ds_2, ds_2', die zugehörigen geodätischen Krümmungen $\frac{1}{\gamma_1}, \frac{1}{\gamma_1'}, \frac{1}{\gamma_2}, \frac{1}{\gamma_2'}$.



Figur 4.

Durch Anwendung des Gauß-Bonnet'schen Satzes folgt

$$K\, d s_1\, d s_1 + \frac{d s_1}{\gamma_1} + \frac{d s_2}{\gamma_2} - \frac{d s_1'}{\gamma_1'} - \frac{d s_2'}{\gamma_2'} + 2\pi = 2\pi.$$

Unter Vernachlässigung von Fehlern 3. Ordnung für die Bogenelemente ist

$$\frac{d s_1'}{d s_1} = \frac{\gamma_1 - d s_2}{\gamma_1}, \quad \text{also} \quad d s_1' = d s_1 \left(1 - \frac{d s_2}{\gamma_1}\right),$$

$$\text{ebenso} \quad d s_2' = d s_2 \left(1 - \frac{d s_1}{\gamma_2}\right),$$

$$\text{ferner} \quad \frac{1}{\gamma_1'} = \frac{1}{\gamma_1} + d s_2 \frac{\partial}{\partial s_2}\left(\frac{1}{\gamma_1}\right),$$

$$\frac{1}{\gamma_2'} = \frac{1}{\gamma_2} + d s_1 \frac{\partial}{\partial s_1}\left(\frac{1}{\gamma_2}\right).$$

Durch Einsetzen und Vernachlässigen der Glieder 3. Ordnung ergibt sich die Liouville'sche Form des Gauß'schen Satzes:

$$\boxed{K = -\frac{1}{\gamma_1^2} - \frac{1}{\gamma_2^2} + \frac{\partial}{\partial s_2}\left(\frac{1}{\gamma_1}\right) + \frac{\partial}{\partial s_1}\left(\frac{1}{\gamma_2}\right).}$$

Die hier skizzierten geometrischen Überlegungen sollen keineswegs gegenüber den analytischen Ableitungen etwas grundsätzlich Neues bedeuten, sie sind vielmehr nur eine andere Sprechweise für die nämlichen Schlüsse. Der zum mindesten heuristische Wert derartiger Betrachtungen hat sich jedoch schon an verschiedenen Problemen der Flächentheorie gezeigt.