

Sitzungsberichte

der

mathematisch-naturwissenschaftlichen

Klasse

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften

zu München

Jahrgang 1945/46

München 1947

Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften

In Kommission beim Biederstein Verlag München

Published 1947 under Military Government Information Control License No. US-E-178
Druck der C. H Beck'schen Buchdruckerei in Nördlingen
Printed in Germany. Auflage 1000

Würfelspiel und Integralgeometrie.

Von Heinrich Tietze in München.

Vorgelegt am 4. Oktober 1946.

Mit 3 Figuren.

§ 1. Einleitung.

1. Das Werfen eines Würfels ist eines der meist verwendeten Beispiele, um die Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung zu erklären. Dabei wird angenommen, der Würfel sei geometrisch genau aus homogenem Material hergestellt. Dann entsprechen, wie man sich ausdrückt, den 6 Seitenflächen 6 „gleichberechtigte Fälle“.

Analog liegen die Dinge, wenn man irgend ein regelmäßiges Polyeder, z. B. ein Oktaeder, anstelle des Würfels zum „Würfeln“ verwenden würde. Aber auch mit einem aus homogenem Material hergestellten abgeplatteten Rotationsellipsoid könnte man „würfeln“: das Ellipsoid kommt entweder mit dem Nordpol oder mit dem Südpol nach oben zur Ruhelage, und man hat hier (ebenso bei einem von zwei kongruenten Kugelcalotten begrenzten linsenförmigen Körper) 2 „gleichberechtigte Fälle“.

2. Wie steht es, wenn man das „Würfelspiel“ mit anderen Körpern betreibt?¹

Sei P eine Ecke eines aus homogenem Material hergestellten Würfels $PQRSTUVW$ von der Seitenlänge a . Wir gehen auf jeder der drei von P ausgehenden Würfelkanten bis zu deren Mittelpunkt. Wir gelangen so zu den Kantenhalbierungspunkten X, Y, Z mit $PX = PY = PZ = \frac{1}{2}a$. Wenn wir jetzt vom Würfel die dreiseitige Pyramide $PXYZ$ abschneiden (abfeilen)

¹ Nicht in allen Sprachen ist wie im Deutschen für die körperliche Gestalt eines Würfels = Hexaeders (französisch und englisch: „cube“) dasselbe Wort in Gebrauch wie für die zum „Werfen“ beim Würfelspiel benützten Körper von hexaedrischer Gestalt (französisch: „dés“, englisch: „dice“).

und dasselbe bei allen anderen Ecken $Q, R, \dots, W$ machen, erhalten wir ein Polyeder, das von 6 Quadraten (mit der Seitenlänge $\frac{a}{\sqrt{2}}$) und von 8 gleichseitigen Dreiecken (ebenfalls mit der Seitenlänge $\frac{a}{\sqrt{2}}$) begrenzt ist (vgl. Fig. 1), übrigens als Kristall-

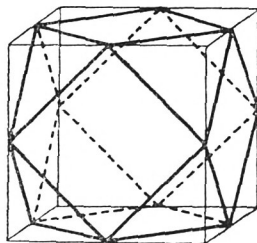


Fig. 1

figur (speziell bei Bleiglanz) vorkommt und gelegentlich als „Kubo-Oktaeder“, auch als „Mittelkristall“ zwischen Oktaeder und Hexaeder bezeichnet wird. Wir „würfeln“ mit diesem Polyeder. Es kann auf irgend einer seiner 14 Seitenflächen liegen bleiben. Aber wie verhalten sich hier die Chancen?

Und wie bei inhomogenem Material?

Schon die gewöhnlich verwendeten Würfel geben Anlaß zu solchen Fragen. Es mag zwar, soweit es irgend praktisch verlangt werden kann, das Material (Holz, Bein) homogen gewählt und der Würfel (mit oder ohne Abrundung der Kanten und Ecken) sorgfältig und genau gearbeitet sein. Würde man nun die sechs Seitenflächen etwa durch verschiedenen farbigen Anstrich unterscheiden, dann könnte man – als Ergebnis von Erfahrungen² – annehmen, daß nach wie vor alle sechs möglichen Würfe gleich wahrscheinlich geblieben sind. In der Praxis werden aber auf den sechs Seitenflächen die „Nummern“ 1 bis 6 gewöhnlich durch (vom übrigen Würfel abweichend gefärbte) eingebohrte

² Vgl. eine Bemerkung von Ernst Mach, Die Mechanik in ihrer Entwicklung historisch-kritisch dargestellt, 4. Aufl., Leipzig 1901 (Internationale wissenschaftliche Bibliothek Bd. 59), S. 12 (bei Besprechung des Hebelgesetzes).

Höhlungen gekennzeichnet³ (im Ganzen $1+2+3+4+5+6=21$ Höhlungen), was eine Verlegung des Schwerpunktes sowie eine Modifikation der Trägheitsmomente mit sich bringt und den sechs möglichen Fällen ihre Gleichberechtigung nimmt. Man hat es gewissermaßen mit einem Würfel aus inhomogenem Material zu tun, da in den Höhlungen nicht die Dichte des übrigen Materials herrscht. (Es ist mir nicht bekannt, daß Überlegungen darüber angestellt wurden, wie die Nummern auf die Seitenflächen zu verteilen wären, um den Einfluß der genannten Ungleichmäßigkeiten auf das Ergebnis des Würfels möglichst zu verringern.)

3. In all den zuletzt genannten Fällen „unregelmäßiger“ Spielwürfel mag von allgemeinen „Wurf-Körpern“ gesprochen werden⁴. Man kann da zur Beurteilung der Chancen folgende drei Wege ins Auge fassen.

1) Man macht gewisse allgemeine Hypothesen über die den verschiedenen möglichen Ruhelagen gemäß der Verteilung der Massen im Würfelkörper zuzuordnende Wahrscheinlichkeit.

2) Man betrachtet die beim Würfeln auftretenden Bewegungsvorgänge und untersucht ihre Auswirkung auf die Statistik der Würfel-Ergebnisse.

³ Diese Beschaffenheit dürfen wir wohl auch annehmen – obwohl vom Autor keine Angaben darüber gemacht sind – bei den beiden Würfeln in dem um 60 Millionen Dollar gehenden Spiel in Jules Verne's Roman „Le Testament d'un Excentrique“, der eine lebendige Schilderung der Geographie der U.S.A. enthält, wobei übrigens beim Verfasser damals ein gewisses Bewußtsein mitschwingt, als Vertreter eines älteren Kontinents über einen jugendlicheren zu erzählen. Einer durchgehend bemerkbaren, wohl noch auf den Krieg 1870/71 zurückgehenden Antipathie gegen alle „Allemands“, die nachmals – man denke an die französische Ausgabe der Encyclopädie oder an die Hochachtung, die bei allen internationalen Congressen Hilbert entgegengebracht wurde – zumindest in unserem Fach glücklich überwunden wurde, ist inzwischen in der fürchterlichsten und unverantwortlichsten Weise Nahrung gegeben worden.

⁴ Vgl. über die besondere Situation für den sprachlichen Ausdruck im Deutschen gegenüber anderen Sprachen die Anm. 1.

3) Man experimentiert und vergleicht gegebenenfalls die Resultate solcher praktischer Experimente mit 1) bzw. 2)⁵.

In der vorliegenden Note beschränken wir uns auf einige Bemerkungen zu 1), wobei eine gewisse Gleichberechtigung aller Richtungen des Raumes zur Geltung kommt in der Weise, daß einer Gesamtheit von Richtungen als Maß ihrer Wahrscheinlichkeit der Flächeninhalt jener Punktmenge auf einer Kugel- fläche zugewiesen wird, deren Punkte vom Kugelmittelpunkt aus in den fraglichen Richtungen liegen. (Insoferne unsere Betrachtungen also auf Inhaltsmessungen hinauslaufen, mag die Bezeichnung „Integralgeometrie“ im Titel dieser Note sich rechtfertigen.)⁶

Wir wollen uns dabei vorstellen, daß der Wurf-Körper in irgend einer Lage auffällt auf eine weiche Unterlage (Sumpf, zähe Flüssigkeit, breiartiger Körper), in die er langsam einsinkt, während seine Drehbewegung so gut wie völlig abgebremst wird; nach einem solchen Einsinken (bei dem er parallel zu sich selbst bleibt) treffe der Wurfkörper auf einen harten ebenen Boden; nun dreht er sich unter dem Einfluß der Schwerkraft, bis er allmählich in eine Ruhelage gelangt. Wenn wir für dieses Auftreffen auf den Boden alle durch den Körper gehenden Richtungen als gleichberechtigt ansehen, dann entsprechen die im Folgenden

⁵ Für den Fall gewöhnlicher Würfel sind tatsächlich Aufzeichnungen über umfangreiche Ergebnisse des Würfeln zwecks Vergleichs mit der theoretischen Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{6}$ für jede Seite gemacht worden. Analog liegen, wie mir mitgeteilt wird, für das Roulettespiel in Monte Carlo ständige Publikationen über die bei einem der Spieltische eingetretenen Ergebnisse vor.

Auf die Möglichkeit von Experimenten bei unregelmäßigen Wurfkörpern wird im folgenden bei verschiedenen Beispielen hingewiesen (Nr. 13, 21, 23, 24).

⁶ Bekanntlich sind immer wieder von angesehenen Autoren Untersuchungen über Grundbegriffe und Wesen der Wahrscheinlichkeitsrechnung angestellt worden. Demgegenüber gehen erste Einführungen in die Wahrscheinlichkeitsrechnung in der Regel von Beispielen aus, in denen eine endliche Anzahl als „gleichberechtigt“ angesehener Fälle unterschieden wird. Natürlich kann man mit gleichem Recht andere Beispiele betrachten, für die mit einer solchen Erklärung nichts anzufangen ist, zumal es sich dabei meist um irrationale Wahrscheinlichkeitswerte handelt. Die Aufsuchung solcher Beispiele hat den Anstoß zu den vorliegenden Überlegungen gegeben.

gegebenen Überlegungen den Chancen, die die verschiedenen möglichen Ruhelagen haben.

Demgegenüber wären bei 2) die Drehbewegungen des Wurfkörpers wesentlich zu berücksichtigen und es wäre sein Kollern und Rollen auf dem Tisch bis zu seinem schließlichen, durch die Reibung bewirkten Zur-Ruhe-Kommen zu verfolgen. Ob sich hierbei bezüglich der Chancen der verschiedenen Ruhelagen gegenüber 1) erhebliche oder nur unerhebliche Abweichungen einstellen, scheint nicht ohne weiteres angebbar. Wie oben gesagt, sind es eben die mit einer bestimmten Hypothese verknüpften mathematischen Gegebenheiten, die wir hier behandeln. Und es ist, wie in allen derartigen Fällen, eine Frage für sich, inwieweit damit physikalische Betrachtungen bzw. empirische Beobachtungen in Einklang stehen.

§ 2. Der zweidimensionale Fall.

4. Anstelle des dreidimensionalen Problems mag zunächst das entsprechende Problem für $n = 2$ Dimensionen behandelt werden. Als „Wurf-Figur“ nehmen wir irgend eine 2-dimensionale konvexe⁷ Figur $\mathfrak{K}$ (eine beschränkte abgeschlossene konvexe Punktmenge) mit einer bestimmten Masse, für die auch eine inhomogene Verteilung zugelassen ist. Praktisch realisierbar ist ein solches zweidimensionales Würfelspiel durch einen Stab, dessen Querschnitt die konvexe Figur $\mathfrak{K}$ ist, also beispielsweise ein Quadrat, eine Ellipse, irgend ein beliebiges Dreieck usw.

Für die Ausführung von Experimenten im Sinne von 3) in Nr. 3 könnte man einen solchen Stab, der an den Enden abgerundet ist, vertikal auf eine ebene Unterlage stellen, ihn dann loslassen, indem man ihm eine rasche Drehung um eine vertikale Achse erteilt, und zusehen, in welcher Lage er schließlich liegen bleibt.*

⁷ Werden auch nicht-konvexe Figuren betrachtet, so braucht man sie nur durch ihre konvexe Hülle zu ersetzen, wobei in dem dadurch hinzutretenden Teil der Figur die Dichte gleich null zu setzen ist.

* In der Akademie-Sitzung wurde ich auf ein neuerdings aufgekommenes Kinderspielzeug aufmerksam gemacht, einen kleinen metallenen Kreisel, bestehend aus einer Blechscheibe in Gestalt eines regelmäßigen 8-Ecks (man

Was die „Abrundung“ der Enden betrifft, so seien x, y, z cartesische Koordinaten und in der xy -Ebene sei durch $f(x, y) \leq 1$ die ebene Figur $\mathfrak{K}$ (durch $f(x, y) = 1$ ihr Rand) gegeben, wobei der Koordinaten-Anfangspunkt O der Schwerpunkt von $\mathfrak{K}$ und r der größte Abstand eines Randpunktes vom Punkt O sei. Für ein genügend großes s erhalten wir dann einen „abgerundeten“ Stab von der Gesamtlänge $2r + 2s$, wenn wir von dem im Raum durch $f(x, y) \leq 1$ dargestellten unendlichen Zylinder alle jene Punkte weglassen, für welche $|z| > s$ und außerdem die beiden Ungleichungen $x^2 + y^2 + (z \mp s) > r^2$ gelten.

5. Sei S der Schwerpunkt von $\mathfrak{K}$ und zugleich der Anfangspunkt eines cartesischen xy -Koordinatensystems. Die Richtung eines von S ausgehenden Halbstrahls γ können wir dann durch den (modulo 2π genommenen) Winkel φ kennzeichnen, den γ mit der positiven x -Richtung bildet. Mit $\sigma(\varphi)$ werde diejenige Stützgerade von $\mathfrak{K}$ bezeichnet, die den Halbstrahl γ senkrecht schneidet. Für alle Winkel φ ist dann die Stützfunktion⁸ $h(\varphi) > 0$ dadurch definiert, daß $h(\varphi)$ den Abstand des Punktes S vom Schnittpunkt $T(\varphi)$ der Stützgeraden $\sigma(\varphi)$ mit dem zu φ gehörigen Halbstrahl $\gamma = \gamma(\varphi)$ angibt. Es ist also⁹

$$x \cos \varphi + y \sin \varphi - h(\varphi) = 0 \quad (1)$$

die Gleichung von $\sigma(\varphi)$. Anders gesagt ist $h(\varphi)$ die kleinste unter allen Zahlen p , so daß kein Punkt x, y mit $x \cos \varphi + y \sin \varphi > p$ zu $\mathfrak{K}$ gehört¹⁰.

Ist $0 < \psi - \varphi < \pi$ und $Z_0 = (x_0, y_0)$ der Schnittpunkt von $\sigma(\varphi)$

könnte statt 8 natürlich auch eine andere Seitenzahl nehmen) und einem senkrecht zu dieser Scheibe durch ihre Mitte gehenden Stab, der in seinem oberhalb der Scheibe liegenden Teil dünner und länger ist und als Griff dient, während der untere etwas zugespitzte kürzere Teil verdickt und dadurch schwerer ist als der obere Teil. Der Kreisel wird auf einer Tischplatte ungefähr vertikal gestellt und in Drehung versetzt; wenn die Kreisbewegung nachläßt, legt sich der Körper um und bleibt in schräger Lage auf einer der Kanten der Blechscheibe liegen. Man hat 8 mögliche Lagen als Ergebnis dieses „Würfelns“.

⁸ Wir nehmen dabei S als inneren Punkt der Punktmenge an. Dagegen ist $h(\varphi) > 0$ durch $h(\varphi) \geq 0$ zu ersetzen, wenn auch der Grenzfall, daß S auf dem Rand von $\mathfrak{K}$ liegt, zugelassen wird.

⁹ Der Formelapparat deckt sich mit dem in § 4 in vektorieller Schreibweise gegebenen.

¹⁰ Jede Gerade $x \cos \varphi + y \sin \varphi - p = 0$, für welche kein Punkt mit $x \cos \varphi + y \sin \varphi - p > 0$ zu $\mathfrak{K}$ gehört, möge eine zur Richtung φ gehörige „Schranke“ von $\mathfrak{K}$ heißen.

und $\sigma(\psi)$, ferner $\varphi < \omega < \psi$, dann ist die durch Z_0 gehende und auf der Richtung ω senkrecht stehende Gerade

$$(x-x_0) \cos \omega + (y-y_0) \sin \omega = 0$$

jedenfalls eine Schranke von $\mathfrak{R}$, woraus sich

$$x_0 \cos \omega + y_0 \sin \omega \geq h(\omega)$$

und unter Berücksichtigung der Werte von x_0, y_0 die Ungleichung

$$h(\omega) \sin(\psi - \varphi) \leq h(\varphi) \sin(\psi - \omega) + h(\psi) \sin(\omega - \varphi) \quad (2)$$

für die Stützfunktion $h(\varphi)$ ergibt.

6. Wir fragen, ob der Wurfkörper $\mathfrak{R}$ unter dem Einfluß der Schwerkraft auf der Stützgeraden $\sigma(\varphi_0)$ nicht-labil ruhen kann, falls durch φ_0 die Richtung der Schwerkraft gegeben ist. Als notwendige Bedingung erhalten wir, daß $h(\varphi)$ an der Stelle $\varphi = \varphi_0$ ein Minimum aufweist im Vergleich zu allen benachbarten Richtungen. Anders gesagt muß es ein $\delta_1 > 0$ und ein $\delta_2 > 0$ geben, sodaß

$$h(\varphi) - h(\varphi_0) \geq 0 \quad (3)$$

ist für alle Winkel φ mit

$$\varphi_0 - \delta_2 < \varphi < \varphi_0 + \delta_1. \quad (4)$$

Mit einer „stabilen Ruhelage φ_0 “ hat man es aber zu tun, wenn ein eigentliches Minimum vorliegt, wenn also für alle Winkel φ , die einer der beiden Ungleichungen

$$\varphi_0 - \delta_2 < \varphi < \varphi_0, \quad \varphi_0 < \varphi < \varphi_0 + \delta_1$$

genügen, nicht nur (3) sondern darüber hinaus

$$h(\varphi) - h(\varphi_0) > 0 \quad (5)$$

gilt.

Übrigens ist es offenbar eine für die Gültigkeit von (3) notwendige (aber nicht hinreichende¹¹) Bedingung, daß der Fußpunkt $T(\varphi_0)$, in dem die von S ausgehende Halbgerade $\gamma(\varphi_0)$ die zugehörige Stützgerade $\sigma(\varphi_0)$ trifft, ein Punkt von $\mathfrak{R}$ und

¹¹ Man denke an das labile Gleichgewicht eines auf einer seiner Ecken stehenden Dreiecks, wenn die fragliche Ecke, gesehen von S aus, in Richtung der Schwerkraft liegt.

damit ein Punkt derjenigen konvexen Figur¹² $\mathfrak{K}(\varphi_0)$ ist, die $\sigma(\varphi_0)$ mit $\mathfrak{K}$ gemein hat.

7. Wir wollen gewisse „spezielle stabile Ruhelagen“ betrachten, gekennzeichnet durch folgende Eigenschaft:

Es gibt zwei positive Zahlen δ_1, δ_2 , sodaß sowohl die Funktion $h(\varphi_0 + \rho)$ im Intervall $0 \leq \rho \leq \delta_1$, als auch die Funktion $h(\varphi_0 - \rho)$ im Intervall $0 \leq \rho \leq \delta_2$ eine monoton-wachsende Funktion von ρ ist.

Wenn dabei λ_1 bzw. λ_2 den größtmöglichen Wert von δ_1 bzw. δ_2 bedeutet, für den diese Aussagen noch gelten, dann soll $\frac{1}{2\pi} (\lambda_1 + \lambda_2)$ als „Maß $m(\varphi_0)$ des Richtungsbereichs“ genommen werden, der zur betrachteten Ruhelage gehört.

8. Als „normale Wurf-Figur“ werde eine solche Figur $\mathfrak{K}$ bezeichnet, für welche alle stabilen Ruhelagen von der in Nr. 7 betrachteten speziellen Art sind und die Summe $\sum m(\varphi_0)$, erstreckt über alle diese Ruhelagen, gleich 1 ist (also gleich dem vollen Maß des Bereiches aller möglichen Richtungen überhaupt).

Für eine normale Wurf-Figur $\mathfrak{K}$ sehen wir das Maß $m(\varphi_0)$ als die Wahrscheinlichkeit derjenigen stabilen Ruhelage an, bei der φ_0 die Richtung der Schwerkraft kennzeichnet.

Wir geben nun noch einige Beispiele.

§ 3. Beispiele zweidimensionaler Wurffiguren.

9. Erstes Beispiel. Die Wurffigur $\mathfrak{K}$ sei ein Dreieck ABC mit homogener Flächendichte; für die Seitenlängen $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$ gelte

$$a \geq b \geq c. \quad (6)$$

Ein cartesisches xy -Koordinatensystem sei so gewählt, daß

¹² In unserem Fall von $n = 2$ Dimensionen besteht diese Berühr-Figur $\mathfrak{K}(\varphi_0)$ allemal entweder aus einer Strecke oder aus einem einzigen Punkt. Für $n > 2$ treten $(n-1)$ -dimensionale Berühr-Figuren auf.

$A = (r, 0)$, $B = (-r, 0)$, $C = (3p, 3q)$ ist mit $p \geq 0$, $q > 0$, wobei $S = (p, q)$ der Schwerpunkt von $\mathfrak{R}$ und wegen $b \geq c$

$$3q^2 + 3p^2 - 2rp - r^2 \geq 0 \quad (7)$$

ist. Mit T_1 , T_2 , T_3 bezeichnen wir die Fußpunkte der von S auf die drei Seiten gefällten Lote. Wir führen noch die Winkel $\psi_1 = \sphericalangle CAS$, $\omega_1 = \sphericalangle SAB$, $\chi_1 = \sphericalangle CSB$ ein¹³, wobei, wenn

$(a + b + c)(a + b - c)(a - b + c)(-a + b + c) = v$,
 $2b^2 + 2c^2 - a^2 = w_1$, $2c^2 + 2a^2 - b^2 = w_2$, $2a^2 + 2b^2 - c^2 = w_3$
 gesetzt wird,

$$\chi_1 = \arccos \frac{b^2 + c^2 - 5a^2}{2\sqrt{w_2 w_3}} = \arcsin \frac{\frac{3}{2}\sqrt{\frac{v}{w_2 w_3}}}{1} \quad (9)$$

ist nebst den analogen Formeln für χ_2 und χ_3 .

Wegen $b \geq c$ bzw. (7) ist notwendig $\psi_1 \leq \omega_1$ und somit jedenfalls $\psi_1 < \frac{1}{2}\pi$. Es liegt also T_2 zwischen C und A (und natürlich T_1 zwischen B und C); dagegen hat man für T_3 die beiden Fälle:

α) T_3 liegt zwischen A und B , wenn $\omega_1 < \frac{\pi}{2}$, $\cos \omega_1 > 0$ ist, was mit

$$p < r \text{ oder } 3c^2 > a^2 - b^2$$

gleichbedeutend ist.

β) T_3 liegt auf der Verlängerung von AB über A hinaus oder fällt mit A zusammen, wenn $\omega_1 \geq \frac{\pi}{2}$, $\cos \omega_1 \leq 0$ und demgemäß

$$p \geq r \text{ und } 3c^2 \leq a^2 - b^2$$

ist¹⁴.

Im Falle α) stellt jede der drei Dreieckseiten eine Stützgerade dar, für welche die Stützfunktion $h(\varphi)$ ein eigentliches Minimum mit dem Wert ST_1 , bzw. ST_2 , bzw. ST_3 aufweist; jede dieser drei Stützgeraden repräsentiert eine spezielle stabile Ruhelage

¹³ Analog mögen die Winkel ABS , SBC , BCS , SCA mit ψ_2 , ω_2 , ψ_3 , ω_3 , ferner ASC , BSA mit χ_2 , χ_3 bezeichnet werden, so daß gilt:

$$\pi = \omega_1 + \psi_2 + \chi_3 = \omega_2 + \psi_3 + \chi_1 = \omega_3 + \psi_1 + \chi_2. \quad (8)$$

(Vgl. die Figur 2 weiter unten.)

¹⁴ Vgl. die Figur 2, wo $a : b : c = 13 : 9 : 5$ gewählt ist.

und das zugehörige Maß des Richtungsbereichs (vgl. Nr. 7) ist der Reihe nach durch

$$m_1 = \frac{\chi_1}{2\pi}, \quad m_2 = \frac{\chi_2}{2\pi}, \quad m_3 = \frac{\chi_3}{2\pi}$$

gegeben (vgl. dazu die Formel (9)).

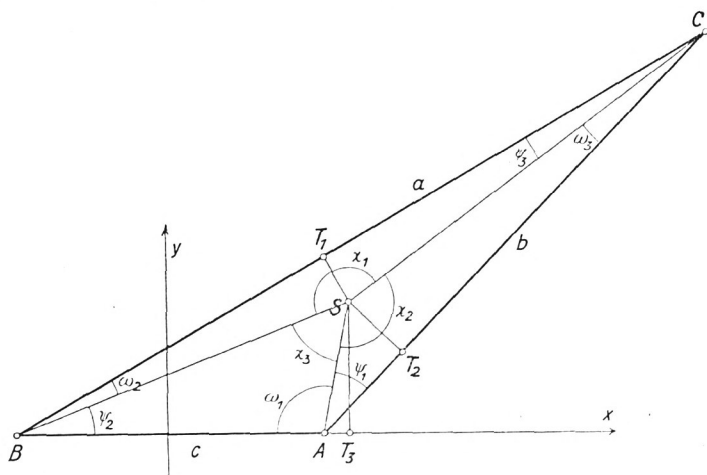


Fig. 2

Im Falle β) repräsentiert die Seite AB als Stützgerade keine stabile Ruhelage¹⁵. Dagegen erhält man eine spezielle stabile Ruhelage für jede der beiden übrigen Seiten BC und CA mit ST_1 bzw. ST_2 als zugehörigem Minimum von $h(\varphi)$; das zugehörige Maß des Richtungsbereiches ist durch

$$m_1^* = m_1 = \frac{\chi_1}{2\pi} \text{ bzw. } m_2^* = m_2 + m_3 = \frac{\chi_2 + \chi_3}{2\pi} = 1 - \frac{\chi_1}{2\pi}$$

gegeben, hat somit für die Seite a einen kleineren Wert als für die kleinere Seite b .

Beispielsweise liegt Fall β) vor für ein Dreieck mit den Seiten $a = 13$, $b = 9$, $c = 5$ (vgl. Fig. 2). Man findet hier (die Winkel im Gradmaß angegeben)

¹⁵ und zwar überhaupt keine Ruhelage, wenn $\omega_1 > \frac{\pi}{2}$ ist, und nur eine labile für $\omega_1 = \frac{\pi}{2}$.

$$\chi_1 = 165^{\circ}22'35'', \chi_2 = 137^{\circ}34'40'', \chi_3 = 57^{\circ}02'44'', \\ m_1 = 0,45937919, \quad m_2 = 0,38216093, \quad m_3 = 0,15845988,$$

und es verhält sich $m_2^* : m_1^* = (m_2 + m_3) : m_1$ rund wie 20 : 17. Gemäß der hier zugrundegelegten Beurteilung der Wahrscheinlichkeiten bliebe also unter 37 Würfeln ein Stab mit dem angegebenen dreieckigen Querschnitt auf der Seite b rund 20mal und auf der (längsten) Seite a nur 17mal liegen¹⁶.

10. Zweites Beispiel. Für $\mathfrak{K}$ wählen wir ein gleichschenkeliges Dreieck mit homogener Flächendichte. Wir können die Bezeichnungen von Nr. 9 übernehmen, wenn wir $a = b$, $p = 0$ setzen und auf die Bedingung (6) bzw. (7) verzichten. Allemal liegen die Verhältnisse wie dort im Fall α) vor, also drei spezielle stabile Ruhelagen. Dabei ist

$$\cos \chi_1 = \cos \chi_2 = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{4b^2 - c^2}{b^2 + 2c^2}}, \quad \cos \chi_3 = \frac{2b^2 - 5c^2}{2(b^2 + 2c^2)}$$

und man hat $\chi_1 > \chi_3$, $\chi_1 = \chi_3 = \frac{2\pi}{3}$ oder $\chi_1 < \chi_3$, je nachdem $b > c$, $b = c$ oder $\frac{c}{2} < b < c$ ist.

11. Drittes Beispiel. Es sei $\mathfrak{K}$ bei homogener Flächendichte ein beliebiges konvexes Polygon mit den Ecken $A_1, \dots, A_m$ und S sein Schwerpunkt. Analog wie in Nr. 9 führen wir die Winkel $\psi_\mu = \sphericalangle A_{\mu-1} A_\mu S$, $\omega_\mu = \sphericalangle S A_\mu A_{\mu+1}$ sowie (in etwas modifizierter Bezeichnung) $\chi_\mu = \sphericalangle A_{\mu+1} S A_\mu$ ein, wobei $a_\mu = A_\mu A_{\mu+1}$ sei (dabei ist A_{m+1} durch A_1 und A_0 durch A_m zu ersetzen). Wegen $\psi_\mu + \omega_\mu < \pi$ kann von den beiden Winkeln ψ_μ , ω_μ stets höchstens einer $\geq \frac{\pi}{2}$ sein.

Hier gilt, analog zu dem in Nr. 9 über Dreiecke Gesagten: Mindestens zwei der Polygonseiten liefern eine stabile Ruhelage; andererseits gibt es zu gegebenem m stets Polygone mit m Seiten, von denen nur zwei eine Ruhelage darstellen. Das erstere folgt

¹⁶ Analog findet man für ein Dreieck mit $a : b : c = 20 : 12 : 9$, daß $m_2^* : m_1^*$ rund = 8 : 7 ist. (Man hat hier $\chi_1 = 167^{\circ}55'16''$, $\chi_2 = 122^{\circ}10'43''$, $\chi_3 = 69^{\circ}54'01''$; $m_1 = 0,4664478$, $m_2 = 0,3393848$, $m_3 = 0,1941674$.)

aus einem allgemeinen Satz, auf den wir noch zurückkommen (Nr. 27 in § 6); das letztere erkennt man, wenn man ein Dreieck ABC der Nr. 9 im Fall β dadurch abändert, daß man zunächst die Seite AB durch einen Kreisbogen k mit hinlänglich großem Radius ersetzt (wobei k zusammen mit den Seiten AC und BC eine vom Dreieck ABC wenig abweichende Figur gibt) und hierauf k ersetzt durch einen eingeschriebenen Polygonzug $A_1 A_2 \dots A_{m-1}$ (wo $A_1 = A$, $A_{m-1} = B$, $A_m = C$ gesetzt ist) mit $m - 2$ Seiten, derart daß nun für alle diese Seiten $A_\mu A_{\mu+1}$ ($1 \leq \mu \leq m - 2$) das von S auf diese Seite gefällte Lot nicht die Seite selbst trifft, sondern deren Verlängerung über A_μ hinaus.

12. Viertes Beispiel. Einen Fall (Grenzfall eines Polygons) mit unendlich vielen stabilen Ruhelagen erhält man folgendermaßen. Es sei S der Mittelpunkt eines Kreises, den wir mit der Flächendichte 1 homogen mit Masse belegt denken. Durch einen Durchmesser AB werde der Kreis in einen „oberen“ und einen „unteren“ Halbkreis zerlegt. Der Teil der Kreisperipherie, der zum Rand der oberen Halbkreisfläche gehört, werde durch eine unendliche Folge von Punkten $A_1, A_2, \dots, A_\mu, \dots$, die sich monoton dem Punkt B beliebig nähern, in eine unendliche Menge von Kreisbogen $A_{\mu-1} A_\mu$ zerlegt ($\mu = 1, 2, \dots$, wobei $A_0 = A$). Ist also χ_μ der (im Bogenmaß gemessene) Winkel $A_{\mu-1} S A_\mu$, so hat die unendliche Reihe $\sum \chi_\mu$ die Summe π . Sei SD_μ der Radius, der den Sektor $A_{\mu-1} S A_\mu$ halbiert; auf der Geraden $d_\mu = SD_\mu$ liegt dann der Halbierungspunkt C_μ der Sehne $A_{\mu-1} A_\mu$, desgleichen der Schnittpunkt T_μ der beiden Kreistangenten in $A_{\mu-1}$ und A_μ . Es sei S_μ der zwischen C_μ und D_μ gelegene Schwerpunkt des Kreissegments $\sigma_\mu = C_\mu A_{\mu-1} D_\mu A_\mu$. Wir nehmen auf d_μ zwischen S_μ und T_μ einen Punkt B_μ und wählen im Dreieck $\Delta_\mu = A_{\mu-1} B_\mu A_\mu$ eine solche Dichteverteilung, die auch inhomogen sein kann, daß der Schwerpunkt des Dreiecks mit S_μ zusammenfällt und seine Gesamtmasse gleich dem Inhalt p_μ des Segments σ_μ ist¹⁷.

¹⁷ Es läßt sich das auf sehr verschiedene Art bewirken und natürlich auch so, daß die Dichte sich stetig ändert und stetig an die Dichte 1 des Dreiecks $S A_{\mu-1} A_\mu$ anschließt. Beispielsweise kann man, wenn $p_\mu = p$, $\chi_\mu = 2\alpha$,

Die aus allen Dreiecken $SA_{\mu-1}A_\mu$ (die homogen mit der Flächendichte 1 versehen seien) und allen Dreiecken $A_{\mu-1}B_\mu A_\mu$ gebildete Figur hat dann die gleiche Masse und den gleichen Schwerpunkt wie der obere Halbkreis.

Verfährt man analog mit dem unteren Halbkreis, z. B. indem man die „obere“ Figur am Durchmesser AB spiegelt, so erhält man eine konvexe Figur $\mathfrak{K}$ mit S als Schwerpunkt, für welche jede der unendlich vielen Seiten $A_{\mu-1}B_\mu$ und $B_\mu A_\mu$ eine stabile

$SS_\mu = \xi$, $C_\mu B_\mu = h$ gesetzt wird, im Dreieck Δ_μ die Flächendichte ρ derart als lineare Funktion des Abstands von der Geraden $A_{\mu-1}A_\mu$ wählen, daß sie auf dieser Geraden den Wert $\rho = 1$ und im Punkt B_μ den (zu-

gleich mit h geeignet zu bestimmenden) Wert ϑ hat: also $\rho = 1 + \frac{x - \cos \alpha}{h}$.

$\cdot (\vartheta - 1)$ für ein xy -Koordinatensystem mit S als Ursprung und D_μ als Einheitspunkt auf der x -Achse. Gemäß $2\dot{p} = 2\alpha - \sin(2\alpha)$, $3\dot{p}\xi = 2\sin^3\alpha$ erhält man dann, wenn $3\dot{p} = 4q \sin \alpha$ und $\sin^2 \alpha - 2q \cos \alpha = r$ gesetzt wird, für h und $\vartheta + 2 = \zeta$ aus den Bedingungen für Masse und Schwerpunkt von Δ_μ die Gleichungen $h\zeta = 4q$, $h^2(\zeta - 1) = 4r$ und daraus

$$\zeta = \frac{2q}{r} (q + \sqrt{q^2 - r}), \quad h = 2 (q - \sqrt{q^2 - r}). \quad (*)$$

Dabei ist bezüglich $q = q(\alpha)$, $r = r(\alpha)$ zu bemerken: Für $0 > \alpha < \frac{\pi}{2}$ ist

$r(\alpha) > 0$, wie aus $r(0) > 0$, $\frac{d}{d\alpha}(r(\alpha) \operatorname{tg} \alpha) = \sin^2 \alpha \operatorname{tg}^2 \alpha > 0$ hervorgeht. Es

ist im gleichen Bereich $q(\alpha) + \cos \alpha - 1 > 0$ und $q^2 - r = (q + \cos \alpha)^2 - 1 > 0$, wie sich aus $f(\alpha) = 0$, $f'(\alpha) = (1 - \cos \alpha)^2 \geq 0$ für $f(\alpha) = 2 \sin \alpha \cdot$

$\cdot (q + \cos \alpha - 1)$ ergibt. Damit $\vartheta > 0$, also $\zeta > 2$ ausfällt, ist notwendig und hinreichend, daß in $(*)$ die Quadratwurzel in der angegebenen Weise ge-

wählt wird. Schließlich wird $h < C_\mu T_\mu = \sin \alpha \operatorname{tg} \alpha$ oder $2 \cos \alpha \sqrt{q^2 - r} -$

$- 2q \cos \alpha + \sin^2 \alpha > 0$ gewährleistet für alle α , für die $g(\alpha) > 0$ bzw.

$\varphi(\alpha) > 0$ ist, wo $g(\alpha) = 4q \cos \alpha (1 + \cos^2 \alpha) - \sin^2 \alpha (1 + 3 \cos^2 \alpha)$,

$\sin \alpha \cdot g(\alpha) = 3\alpha \cos \alpha (1 + \cos^2 \alpha) - \sin \alpha (1 + 5 \cos^2 \alpha) = \cos \alpha (1 + \cos^2 \alpha) \cdot$

$\cdot \varphi(\alpha)$ gesetzt ist; wegen $\varphi(0) = 0$ und $\cos^2 \alpha (1 + \cos^2 \alpha)^2 \varphi'(\alpha) = \sin^4 \alpha (2 -$

$- 3 \cdot \sin^2 \alpha)$ wächst nun $\varphi(\alpha)$ von $\alpha = 0$ bis $\alpha = \arcsin \sqrt{\frac{2}{3}} = \arctg \sqrt{2}$ und

nimmt darüber hinaus ab; bis zu der (noch über $\frac{\pi}{3}$ liegenden) Nullstelle α^*

(im Gradmaß beträgt α^* rund $62^\circ 35'$) ist also $\varphi(\alpha) > 0$; und wenn alle Winkel $\chi_\mu < 2\alpha^*$ genommen werden (z. B. $\chi_\mu = \pi:2^\mu$), wird erreicht, daß die Fußpunkte der Lote von S auf die Seiten $A_{\mu-1}B_\mu$ und $B_\mu A_\mu$ im Innern dieser Seiten liegen, wie es die Herstellung stabiler Ruhelagen auf diesen Seiten erfordert.

Ruhelage mit $m_\mu = \frac{\chi_\mu}{2\pi}$ als zugehörigem Maß liefert, wobei χ_μ die Größe eines jeden der Winkel $A_{\mu-1}SB_\mu$ und $B_\mu SA_\mu$ bedeutet und für die „untere“ Figur entsprechendes gilt. Da die Summe der Maße für alle Ruhelagen gleich 1 ist, stellt $\mathfrak{K}$ eine „normale“ Wurffigur (Nr. 8) vor¹⁸.

Natürlich kommt man zu wesentlich allgemeineren Figuren, wenn man ausgeht von irgend einer abzählbaren unendlichen Menge von Teilbogen χ_μ eines Kreises, derart daß keine zwei Kreisbogen einen inneren Punkt gemein haben und $\sum \chi_\mu = 2\pi$ ist, ohne daß man dabei einschränkende Voraussetzungen macht über die Menge der Häufungsstellen der Kreisbogenendpunkte (die im obigen Beispiel aus dem einzigen Punkt B besteht).

13. Fünftes Beispiel. Die Wurffigur $\mathfrak{K}$ sei das inhomogen mit Masse belegte Quadrat $|x| \leq 1, |y| \leq 1$. Der Schwerpunkt S befinde sich im Punkt $x = 0, y = -s$ (wo $0 < s < 1$). Jede der vier Quadratseiten liefert eine stabile Ruhelage und die zugehörigen Maße sind für die untere bzw. obere Seite

$$\frac{1}{\pi} \arctan \frac{1}{1 \mp s} \text{ und für die linke sowie für die rechte Seite}$$

$$\frac{1}{2\pi} (\arctan (1+s) + \arctan (1-s)).$$

Diese Maße wären nach der in Nr. 3 unter 1) dargelegten Auffassung als die Wahrscheinlichkeiten dafür anzusprechen, daß das Quadrat beim „Würfeln“ auf der fraglichen Seite liegen bleibt. Eine Realisierung durch Stäbe aus inhomogenem Material mit quadratischem Querschnitt würde es ermöglichen, diese Wahrscheinlichkeitsberechnung zu vergleichen mit der l. c. unter 3) angeführten experimentellen Methode.

Im Grenzfall $s = 1$ (bei dem die Masse auf der unteren Quadratseite konzentriert, die übrige Quadratfläche masselos zu den-

¹⁸ Von ganz anderer Art ist diejenige Figur $\mathfrak{K}$, die man erhält, wenn man zu der eben beschriebenen „oberen“ Figur die untere Halbkreisfläche (homogen mit der Dichte 1) hinzunimmt. Dann würde jede Richtung von S aus zu einem Punkt der unteren Halbkreislinie die Richtung einer labilen Ruhelage liefern.

ken ist) liegen die Dinge wesentlich anders, da nur die untere und die obere Quadratseite zu stabilen, die linke und rechte Quadratseite aber zu labilen Ruhelagen gehören. Man kann sich fragen, inwieweit schon bei Werten von s nahe an 1 die geringe Stabilität der seitlichen Ruhelagen sich bemerkbar machen würde bei einem Vergleich der oben errechneten Wahrscheinlichkeiten mit den Ergebnissen von Experimenten.

14. Sechstes Beispiel. Die Wurf figur $\mathfrak{R}$ sei gegeben durch die homogen mit Masse belegte Fläche $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$, wobei $a \geq b$ sei. Wir unterscheiden

α) den Fall der Ellipse $a > b$ mit zwei stabilen Ruhelagen, die zu den Richtungen der positiven und negativen y -Achse gehören, jede mit einem gleich großen Richtungsbereich vom Maß $\frac{1}{2}$. In diesem Fall α) liegt also eine normale Wurf figur im Sinn der Nr. 8 vor.

β) den Fall des Kreises $a = b$ mit unendlich vielen Ruhelagen indifferenten Gleichgewichts.

15. Siebentes Beispiel. Wir zerlegen den Einheitskreis mit dem Mittelpunkt M durch einen Durchmesser AB in eine „obere“ und „untere“ Hälfte (vgl. Nr. 12). Die zu betrachtende Wurf figur $\mathfrak{R}$ sei dann zusammengesetzt aus der unteren Hälfte des Einheitskreises (dessen tiefster Punkt D heiße) und einem auf der Grundlinie AB nach oben errichteten gleichschenkligen Dreieck ABC (mit $AC = BC$) von der Höhe $MC = h$. Der Schwerpunkt der homogen mit Masse belegten Fläche $\mathfrak{R}$ heiße S . Führt man ein cartesisches $x y$ -Koordinatensystem ein mit M als Anfangspunkt und MA bzw. MC als positiven Koordinatenrichtungen, dann sind

$$\xi = 0, \quad \eta = \frac{h^2 - 2}{3(h + \frac{\pi}{2})} \quad (10)$$

die Koordinaten von S . Dabei ist

$$h > \frac{h}{3} > \eta > -\frac{2}{3h} > -\frac{1}{h}.$$

Das Lot von S auf die Gerade AC bzw. BC trifft diese Gerade in einem Punkt mit der Ordinate

$$y_0 = \frac{h}{1 + h^2} (1 + h\eta), \quad (11)$$

woraus wegen $1 + h^2 > 1 + h\eta > 0$ hervorgeht, daß dieser Punkt im Inneren der Strecke AC bzw. BC liegt. Auf jeder dieser Strecken ist also ein stabiles Ruhen von $\mathfrak{K}$ möglich (ferner ein labiles auf der Spitze C , wenn MC die Richtung der Schwerkraft ist). Im übrigen haben wir drei Fälle zu unterscheiden:

α) Es ist $h > \sqrt{2}$; der Schwerpunkt S liegt auf der Strecke MC . Wenn die Schwerkraft die Richtung MD hat und $\mathfrak{K}$ auf dem Punkt D ruht, dann hat man es mit einer labilen Ruhelage zu tun. Demgemäß sind nur die Ruhelagen auf den Seiten AC und BC stabil und jeder von ihnen kommt das Maß $\frac{1}{2}$ zu.

β) Es ist $h = \sqrt{2}$ und $S = M$. Außer den stabilen Ruhelagen auf den Seiten AC und BC , jede mit dem Maß $\frac{1}{4}$, gibt es unendlich viele Ruhelagen indifferenten Gleichgewichts, bei denen $\mathfrak{K}$ auf einem Punkt des unteren Halbkreises aufliegt.

γ) Es ist $h < \sqrt{2}$, sodaß S zwischen M und D liegt. Man hat dann drei stabile Ruhelagen: auf AC , auf BC und auf D mit den Maßen

$$m_1 = m_2 = \frac{1}{2\pi} \arctan \frac{3(h + \frac{\pi}{2})}{2 - h^2} \text{ und } m_3 = 1 - 2m_1.$$

In den Fällen α) und γ) ist die Wurffigur „normal“ (Nr. 8).

16. Ahtes Beispiel. Allgemeinere als die in Nr. 15 betrachteten Wurffiguren erhalten wir, wenn wir für die untere Halbkreisfläche die Dichte ρ' , für die obere Dreiecksfläche ABC die Dichte ρ'' annehmen. Dann wird die Ordinate η von S anstelle von (10) durch

$$\eta = \frac{h^2 \rho'' - 2\rho'}{3(h\rho'' + \frac{\pi}{2}\rho')} \quad (12)$$

gegeben. Man kann speziell fragen, wann das von S auf AC (bzw. BC) gefällte Lot nicht ins Innere der Strecke AC (bzw. BC) fällt, sodaß diese Strecken keine Ruhelagen liefern. Aus (11) erkennt man, daß das für $1 + h\eta < 0$ oder für

$$\frac{\rho''}{\rho'} < \frac{2(h - \frac{3\pi}{4})}{h(h^2 + 3)}, \quad h > \frac{3\pi}{4}$$

also beispielsweise für $h = 2,4$ und $\rho'': \rho' = 0,004$ eintritt.

Man hat es dann mit einer Wurffigur $\mathfrak{R}$ zu tun, die nur eine einzige stabile Ruhelage auf dem Mittelpunkt D des unteren Halbkreisbogens (mit dem zugehörigen Maß 1) hat, im übrigen nur die labile Ruhelage auf der Spitze C aufweist¹⁹. Ersichtlich hat man dabei eine normale Wurffigur $\mathfrak{R}$.

§ 4. Der n -dimensionale Fall.

17. Der „Wurfkörper“ (= Wurffigur), den wir wieder als konvex voraussetzen (vgl. Anm. 7, Nr. 4), heiße $\mathfrak{R}$; es sei S sein Schwerpunkt. Wir betrachten Vektoren $\mathfrak{x}$, die von S ausgehen, und bezeichnen dann auch den Endpunkt des Vektors mit $\mathfrak{x}$. Mit $|\mathfrak{x}|$ werde die Länge des Vektors $\mathfrak{x}$ bezeichnet, mit 0 der Nullvektor. Als „Schranken“ von $\mathfrak{R}$, die zur Richtung $\mathfrak{x}$ senkrecht sind, bezeichnen wir die $(n-1)$ -dimensionalen Ebenen $\mathfrak{x}\mathfrak{z} - \rho = 0$ mit der Eigenschaft, daß kein Punkt $\mathfrak{z}$, für den $\mathfrak{x}\mathfrak{z} > \rho$ ist, zu $\mathfrak{R}$ gehört. Unter allen diesen Schranken gibt es eine mit kleinstem Wert ρ ; diesen kleinsten Wert ρ bezeichnen wir mit $h(\mathfrak{x})$, so daß

$$\mathfrak{x}\mathfrak{z} - h(\mathfrak{x}) = 0 \quad (13)$$

die Gleichung der zur Richtung $\mathfrak{x}$ gehörigen $(n-1)$ -dimensionalen „Stützebene“ $\sigma(\mathfrak{x})$ darstellt²⁰. Offenbar ist

$$h(\rho\mathfrak{x}) = \rho h(\mathfrak{x}) \text{ für jedes } \rho > 0. \quad (14)$$

¹⁹ Ein ganz analoges Beispiel stellt eine inhomogene Kreisscheibe mit exzentrischem Schwerpunkt dar.

²⁰ Wird $|\mathfrak{x}| = 1$ und im Fall $n = 2$

$$\mathfrak{x} = (\cos \varphi, \sin \varphi)$$

gesetzt, so wird für $\mathfrak{z} = (x, y)$ aus (13) die Gleichung (1).

Außerdem folgt aus der Definition der „Stützfunktion“ $h(x)$ bekanntlich die Ungleichung²¹

$$h(x + y) \leq h(x) + h(y). \quad (15)$$

Sind nämlich x und y nicht parallel²² und ist w ein Vektor, der sich mit positiven Faktoren α, β in der Gestalt

$$w = \alpha x + \beta y$$

darstellen läßt, dann hat die auf w senkrechte Ebene des die Ebenen $\sigma(x)$ und $\sigma(y)$ enthaltenden Ebenenbüschels die Gleichung

$$w \cdot (\alpha h(x) + \beta h(y)) = 0,$$

und da diese Ebene eine Schranke von $\mathfrak{K}$ ist, so ist

$$h(w) \leq \alpha h(x) + \beta h(y)$$

oder

$$h(\alpha x + \beta y) \leq h(\alpha x) + h(\beta y),$$

was sich im Hinblick auf (14) im wesentlichen mit (15) deckt.

18. Wenn x_0 die Richtung der Schwerkraft ist, werden wir von einer nicht-labilen Ruhelage des Wurfkörpers $\mathfrak{K}$ auf $\sigma(x_0)$ als Unterlage sprechen, wenn $h(x_0)$ einen Minimalwert von $h(x)$ darstellt im Vergleich mit allen Vektoren gleicher Länge und genügend wenig abweichender Richtung. Das drückt sich, wenn wir die Gesamtheit der zu x_0 normalen Vektoren n betrachten, darin aus, daß es ein $\delta > 0$ gibt, so daß²³

$$\frac{h(x_0 + \lambda n)}{|x_0 + \lambda n|} \geq \frac{h(x_0)}{|x_0|} \quad (16)$$

ist für jeden Vektor n und alle der Ungleichung $0 < \lambda < \delta$ ge-

²¹ Es stellt (15) im Fall $n = 2$ eine andere Gestalt von (2) dar.

²² Für parallele Vektoren x, y ist (15) trivial, da bei gleichsinnigem Parallelismus das Gleichheitszeichen gilt, bei ungleichsinnigem aber die Ungleichung (15) im wesentlichen auf $h(x) + h(-x) \geq 0$ hinausläuft.

²³ Offenbar ist $\frac{h(x)}{|x|} = h\left(\frac{x}{|x|}\right)$ der Wert der Stützfunktion für den zu x gleichsinnig parallelen Einheitsvektor $\frac{x}{|x|}$.

nügenden Zahlen λ . Im besonderen liegt eine stabile Ruhelage $\mathbf{r}_0$ vor, wenn (16) unter Ausschluß des Gleichheitszeichens gilt.

19. Von einer „speziellen stabilen Ruhelage“ $\mathbf{r}_0$ aber soll gesprochen werden (vgl. Nr. 7), wenn für jeden zu $\mathbf{r}_0$ normalen Vektor $\mathbf{n}$ die durch

$$\frac{h(\mathbf{r}_0 + \lambda \mathbf{n})}{|\mathbf{r}_0 + \lambda \mathbf{n}|} \quad (17)$$

gegebene Funktion von λ in einem Intervall $0 \leq \lambda < \delta$ monoton wächst.

Man nehme nun für jeden Vektor $\mathbf{n}$ den größtmöglichen Wert $\delta(\mathbf{n})$ von δ , für den die besagte Monotonie von (17) gilt, und betrachte die Gesamtheit der so für alle $\mathbf{n}$ sich ergebenden Vektoren

$$\frac{\mathbf{r}_0 + \lambda \mathbf{n}}{|\mathbf{r}_0 + \lambda \mathbf{n}|} \quad 0 \leq \lambda < \delta(\mathbf{n}).$$

Die Endpunkte dieser Vektoren liefern eine Punktmenge auf der Einheitskugel. Wenn diese Punktmenge so beschaffen ist, daß ihr ein bestimmtes Maß (Oberflächen-Inhalt) zukommt, dann soll das Verhältnis dieses Maßes zum Inhaltsmaß (zur Oberfläche) der ganzen Einheitskugel als „Maß $m(\mathbf{r}_0)$ des Richtungsbereiches“ genommen werden, der zur betrachteten Ruhelage gehört (vgl. Nr. 7).

20. Als normaler Wurfkörper werde ein Wurfkörper $\mathfrak{K}$ bezeichnet, für welchen alle stabilen Ruhelagen von der in Nr. 19 betrachteten speziellen Art sind, jeder von ihnen ein bestimmtes Maß $m(\mathbf{r}_0)$ zukommt und die über alle diese (endlich oder höchstens abzählbar unendlich vielen) speziellen stabilen Ruhelagen erstreckte Summe $\sum m(\mathbf{r}_0)$ den Wert 1 hat (also gleich dem Maß der Gesamtheit aller Richtungen überhaupt ist).

Wir sehen dann (analog wie in Nr. 8) das Maß $m(\mathbf{r}_0)$ als Wahrscheinlichkeit dafür an, daß der normale Wurfkörper $\mathfrak{K}$ beim Würfeln diejenige Ruhelage einnimmt, für welche $\mathbf{r}_0$ die Richtung der Schwerkraft angibt.

Wir geben in § 5 einige dreidimensionale Beispiele.

§ 5. Beispiele von dreidimensionalen Wurfkörpern.

21. Neuntes Beispiel. Wir betrachten das in Nr. 2 beschriebene, in Fig. 1 dargestellte Polyeder (Kubo-Oktaeder), das aus einem Würfel von der Seitenlänge a dadurch entsteht, daß man die acht dreiseitigen Pyramiden entfernt, deren Spitzen die Würfecken und deren Seitenflächen rechtwinklige Dreiecke mit der Kathetenlänge $\frac{a}{2}$ sind. Sechs Seitenflächen von $\mathfrak{K}$ sind Quadrate mit der Seitenlänge $\frac{a}{\sqrt{2}}$, die acht übrigen Seitenflächen sind gleichseitige Dreiecke mit der Seitenlänge $\frac{a}{\sqrt{2}}$. Projektion dieser Seitenflächen vom Mittelpunkt M des Würfels aus auf die um M gelegte Einheitskugel liefert regelmäßige sphärische Vierecke bzw. Dreiecke mit den Winkeln

$$\varphi = \arccos\left(-\frac{1}{3}\right) = 109^{\circ}28'16'',4 \text{ bzw.}$$

$$\psi = \arccos\frac{1}{3} = 70^{\circ}31'43'',6$$

(im Bogenmaß $1,910633$ bzw. $1,230959$) vom Flächeninhalt $4\varphi - 2\pi$ bzw. $3\psi - \pi$. Es sind somit

$$m' = \frac{4\varphi - 2\pi}{4\pi} = 0,108173 \text{ und } m'' = \frac{3\psi - \pi}{4\pi} = 0,043870$$

die Maßzahlen der zu diesen Seitenflächen gehörigen Ruhelagen und damit die diesen Ruhelagen zugeschriebenen Wahrscheinlichkeiten.

Aus dem Gesagten errechnet man als Wahrscheinlichkeiten dafür, daß der Wurfkörper auf irgendeinem der 6 Quadrate bzw. irgendeinem der 8 Dreiecke zur Ruhe kommt, die Werte $m^* = 6m' = 0,6490407$ bzw. $m^{**} = 8m'' = 0,3509593$.

Es ist $m^* : m^{**}$ nahezu $37 : 20$ (genauer $135 : 73$), so daß unter 57 (bzw. 208) Würfeln der Körper rund 37- (bzw. 135-) mal auf einer der quadratischen und rund 20- (bzw. 73-) mal auf einer dreieckigen Seitenfläche liegen bliebe. Es läge nahe, an diesem Beispiel das rechnerische Ergebnis mit experimentellem Material zu vergleichen (vgl. Nr. 3).

22. Zehntes Beispiel. Der Wurfkörper sei das durch

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1$ gegebene Ellipsoid ($a \geq b \geq c > 0$). Wir unterscheiden vier Fälle.

α) Es sei $a > b > c$. Dann haben wir 2 stabile Ruhelagen und 4 instabile (labile) für das Zusammenfallen der Schwerkraft mit der positiven oder negativen z -Richtung bzw. mit einer der vier anderen in eine Koordinatenachse fallenden Richtungen. Für jede der stabilen Lagen hat man das (Wahrscheinlichkeits-) Maß $\frac{1}{2}$.

β) Für $a = b > c$ (abgeplattetes Rotationsellipsoid) gilt dasselbe wie im Fall α bezüglich der stabilen Ruhelagen; dagegen gibt es unendlich viele labile Ruhelagen, die zu den in der xy -Ebene liegenden Richtungen gehören.

γ) Für $a > b = c$ (spindelförmiges Rotationsellipsoid) hat man keine stabile Ruhelage, unendlich viele Lagen indifferenten Gleichgewichts (für Richtungen der Schwerkraft in der yz -Ebene) und zwei labile Gleichgewichtslagen (zur $\pm x$ -Richtung gehörig).

δ) Für $a = b = c$ (Kugel) gibt es nur indifferente Gleichgewichtslagen.

Normale Wurfkörper hat man nur für α) und β) mit $a \geq b > c$.

23. Elftes Beispiel. Eine gerade Pyramide mit einem regelmäßigen m -Eck $A_0 A_1 \dots A_{m-1}$ als Grundfläche (Mittelpunkt M , Seitenlänge a , dabei $r = \frac{a}{2} \cot \gamma$ und $R = \frac{a}{2 \sin \gamma}$ die Radien des

eingeschriebenen und umschriebenen Kreises, wo $\gamma = \frac{\pi}{m}$) und der Höhe h (Spitze C , Kante $A_\mu C = s = \sqrt{R^2 + h^2}$) stellt bei homogener Dichte einen normalen Wurfkörper $\mathfrak{K}$ mit $m + 1$ stabilen Ruhelagen dar. Wird vom Schwerpunkt S aus ($MS = \frac{1}{4} h$) die Grundfläche bzw. eine der m Seitenflächen der Pyramide auf die um S als Mittelpunkt gelegte Einheitskugel projiziert, so erhält man ein gleichseitiges sphärisches m -Eck mit m Winkeln $= \varphi$ bzw. ein sphärisches Dreieck mit einem Winkel $\frac{2\pi}{m}$ und zwei Winkeln $= \psi$, wobei $2\psi + \varphi = 2\pi$ und, wenn $\frac{h}{4R \cos \gamma} = \frac{h}{4r} = t$ gesetzt wird, φ und ψ gegeben ist durch

$$\cos (\pi - \varphi) = \frac{1 + t^2 \cos 2\gamma}{1 + t^2}, \quad \cos (\pi - \psi) = \frac{t \sin \gamma}{\sqrt{1 + t^2}}. \quad (17a)$$

Bei festem a (und r) und einem von 0 nach $+\infty$ variierenden h nimmt φ monoton ab vom Wert π zum Wert $\pi - 2\gamma$.

Die Inhalte der genannten sphärischen Figuren sind

$$J_g = m\varphi - (m-2)\pi \quad \text{bzw.} \quad J_s = 2\psi - \frac{(m-2)\pi}{m},$$

die zugehörigen Wahrscheinlichkeitsmaße also $\frac{J_g}{4\pi}$ bzw. $\frac{J_s}{4\pi}$.

Da für sehr kleines $\frac{h}{a}$, wo die Pyramide in eine flache m -eckige Münze ausartet, die Wahrscheinlichkeit aller Seitenflächen zusammen ungefähr die Wahrscheinlichkeit der Grundfläche ausmacht, die der einzelnen Seitenfläche also wenig über $\frac{1}{2m}$ liegt, dagegen für sehr großes $\frac{h}{a}$, wo man es nahezu mit einem langen m -kantigen Stab zu tun hat, die Wahrscheinlichkeit der Grundfläche nahezu null, die einer Seitenfläche beinahe $\frac{1}{m}$ beträgt, so ist von vornherein klar, daß für einen geeigneten mittleren Wert von $\frac{h}{a}$ der einzelnen Seitenfläche als Ruhelage die gleiche Wahrscheinlichkeit zukommt wie der Grundfläche. Bei der hier zugrunde gelegten Hypothese (vgl. Nr. 3) ergibt sich dieser Fall nach dem Gesagten dann, wenn $J_g = J_s$, somit wenn φ den zwischen π und $\pi - 2\gamma$ liegenden Wert

$$\varphi^* = \frac{m^2 - m + 2}{m(m+1)} \pi$$

annimmt. Der zugehörige Wert von $t = \frac{h}{2a} \operatorname{tg} \gamma$ bestimmt sich der obigen Formel (17a) gemäß aus

$$t^2 = \frac{1 - \cos (\pi - \varphi^*)}{\cos (\pi - \varphi^*) - \cos 2\gamma} = \frac{\sin^2 \frac{\pi(m-1)}{m(m+1)}}{\sin \frac{2\pi}{m+1} \sin \frac{2\pi}{m(m+1)}}.$$

Daraus errechnet man

$$\frac{h}{a} = 2 t \cotg \gamma, \quad \frac{s}{a} = \frac{1}{2 \sin \gamma} \sqrt{1 + 16 t^2 \cos^2 \gamma}.$$

Das gibt beispielsweise bei $m = 3, 4, 5, 6$ und (um auch einen größeren Wert herauszugreifen) $m = 17$ für $\frac{h}{a}$ bzw. $\frac{s}{a}$ die Werte

$$0,8164966 \left(= \sqrt{\frac{2}{3}}\right), \quad 1,6749, \quad 2,6386, \quad 3,7075, \quad 20,8785$$

bzw.

$$1, \quad 1,8180 \quad 2,7723, \quad 3,8400, \quad 21,0551.$$

Für wachsendes m sind $\frac{h}{a}$ bzw. $\frac{s}{a}$ asymptotisch durch $\frac{m \sqrt{m}}{\pi}$ gegeben; genauer durch

$$\frac{(m-1) \sqrt{m}}{\pi} \left(1 - \frac{\pi^2}{6 m^2} + \dots \right) \text{ bzw. } \frac{(m-1) \sqrt{m}}{\pi} \left(1 + \frac{1}{8 m} + \left(\frac{7}{32} - \frac{\pi^2}{6} \right) \frac{1}{m^2} + \dots \right).$$

Bei $m = 3$ erhält man natürlich das regelmäßige Tetraeder. Die Fälle aber mit $m > 3$ ergeben einfache Beispiele, an denen unsere Rechnung mit experimentell-statistischen Beobachtungen verglichen werden könnte.

24. Zwölftes Beispiel. Wir betrachten als Wurfkörper $\mathfrak{K}$ den durch $|x| \leq a, |y| \leq a, |z| \leq a$ dargestellten Würfel $\mathfrak{B}$

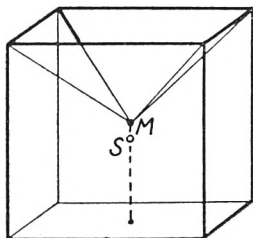


Fig. 3

und geben ihm eine solche Massenverteilung, daß der Schwerpunkt S die Koordinaten $x = 0, y = 0, z = -p$ hat, wo

$0 < p < a$ ist²⁴. Projektion der 6 Seitenflächen des Würfels von S aus auf die um S gelegte Einheitskugel führt auf 6 sphärische Vierecke, von denen das oberste (die Projektion der in der Ebene $z = a$ liegenden Seitenfläche des Würfels) 4 gleiche Winkel ψ und den Inhalt $4\psi - 2\pi$ hat; das unterste 4 gleiche Winkel χ und den Inhalt $4\chi - 2\pi$; jedes der 4 seitlichen Vierecke zwei Winkel φ , zwei Winkel φ' und den Inhalt $2\varphi + 2\varphi' - 2\pi$. Dabei ist, wenn

$$\begin{aligned} (a+p)^2 + a^2 &= b^2, & (a-p)^2 + a^2 &= c^2, \\ b^2 + a^2 &= f^2, & c^2 + a^2 &= g^2 \end{aligned}$$

gesetzt wird,

$$\begin{aligned} \psi &= \arccos \left(-\frac{a^2}{b^2} \right), & \chi &= \arccos \left(-\frac{a^2}{c^2} \right), \\ \varphi &= \arccos \left(-\frac{a+p}{b\sqrt{2}} \right), & \varphi' &= \arccos \left(-\frac{a-p}{c\sqrt{2}} \right) \end{aligned}$$

und, was eine einfache Kontrolle liefert, (p als variabel aufgefaßt)

$$\begin{aligned} \frac{d\psi}{dp} &= -\frac{2a^2}{b^2 f}, & \frac{d\chi}{dp} &= \frac{2a^2}{c^2 g}, \\ \frac{d\varphi}{dp} &= \frac{a^2}{b^2 f}, & \frac{d\varphi'}{dp} &= -\frac{a^2}{c^2 g}, \\ \frac{d}{dp} (2\varphi + \psi) &= 0, & \frac{d}{dp} (2\varphi' + \chi) &= 0, \\ 2\varphi + \psi &= 2\varphi' + \chi = 2\pi. \end{aligned}$$

²⁴ Zu einem speziellen derartigen Wurfkörper kann man so gelangen, daß man $\mathfrak{B}$ in zwei Teile zerlegt, wobei der eine Teil durch eine 4-seitige gerade Pyramide von der Höhe h (mit $0 < h < 2a$) gebildet wird, deren quadratische Grundfläche die in der Ebene $z = a$ liegende obere Seitenfläche von $\mathfrak{B}$ ist und deren Spitze im Punkt $z = a - h$ der z -Achse liegt. Nimmt man den andern Teil, der also vom Würfel nach Herausschneiden dieser Pyramide übrig bleibt, bei homogener Dichte 1 als Wurfkörper $\mathfrak{A}$, so kann man diesen nicht-konvexen homogenen Wurfkörper von der Masse $8a^2 \left(a - \frac{h}{6}\right)$ auch auffassen als einen inhomogenen Würfel (vgl. Fig. 3), der im Bereich der genannten Pyramide die Dichte null hat. Für p erhält man dann einen Wert $< \frac{a}{4}$,

nämlich $p = \frac{h \left(a - \frac{h}{4}\right)}{6 \left(a - \frac{h}{6}\right)}$.

Aus den Inhalten der sphärischen Vierecke errechnet man für die sechs Ruhelagen die Wahrscheinlichkeiten

$$\frac{\psi}{\pi} - \frac{1}{2}, \quad \frac{\chi}{\pi} - \frac{1}{2} \text{ und (viermal) } \frac{\varphi + \varphi'}{2\pi} - \frac{1}{2}.$$

Nimmt man beispielsweise (vgl. Anm. 24 und Fig. 3) die Höhe der herausgeschnittenen Pyramide $h = a$, so daß deren Spitze im Würfel-Mittelpunkt M liegt, so findet man $p = \frac{3a}{20}$, demgemäß

$$\psi = \arccos \left(-\frac{20^2}{20^2 + 23^2} \right) = 2,015921 \quad (\text{im Gradmaß } 115^{\circ}30'13''6)$$

$$\chi = \arccos \left(-\frac{20^2}{20^2 + 17^2} \right) = 2,1902022 \quad (\text{im Gradmaß } 125^{\circ}29'21''64)$$

$$\varphi = \arccos \left(-\frac{23}{\sqrt{2(20^2 + 23^2)}} \right) = 2,133632 \quad (\text{im Gradmaß } 122^{\circ}14'53''2)$$

$$\varphi' = \arccos \left(-\frac{17}{\sqrt{2(20^2 + 17^2)}} \right) = 2,0464915 \quad (\text{im Gradmaß } 117^{\circ}15'19''18)$$

und die genannten Wahrscheinlichkeiten werden 0,14168 76543 bzw. 0,19716 30247 bzw. 0,16528 73302. Danach entfallen auf 36 Würfe rund 5 bzw. 7 auf ein Liegenbleiben auf der oberen bzw. unteren Quadratfläche und rund 6 auf jedes der vier seitlichen Quadrate²⁵.

Da ein Wurfkörper der beschriebenen Art, z. B. durch Aneinanderfügen (Leimen) geeigneter konvexer Teilpolyeder, nicht

²⁵ Genauer hat man bei 91 Würfeln die bezüglichlichen runden Anzahlen 13, 18, 15. Noch genauer: bei 726 Würfeln die Anzahlen 103, 143, 120 (während bei homogenem Würfel unter 726 auf jede Seitenfläche durchschnittlich 121 Würfe fallen). Zur Ermittlung derartiger rationaler Approximationen dienen bekanntlich kettenbruchartige Algorithmen; im vorliegenden Fall wurde das anderwärts als „Algorithmus lentus“ bezeichnete Verfahren benutzt. Vgl. „Über real – statt formal – festgelegte Kettenalgorithmen zur simultanen Approximation mehrgliedriger reeller Zahlenverhältnisse“ und „Ein Algorithmus von Poincaré und andere Algorithmen zur Approximation mehrgliedriger reeller Zahlenverhältnisse“, Sitz.ber. d. Bayer. Ak. d. Wiss., math.-naturwiss. Abt., Jahrgang 1945, Januar- und Februar-Sitzung.

schwer herzustellen ist, so böte das Beispiel die Möglichkeit, Theorie und Experiment zu vergleichen (vgl. Nr. 3, 1 und 3).

25. Dreizehntes Beispiel. Während in der vorigen Nr. 24 ein „normaler“ Wurfkörper (vgl. Nr. 20) besprochen wurde, stellt ein homogener gerader Kreiskegel keinen solchen dar. Man hat nur eine stabile Ruhelage, d. i. die auf der Grundfläche, mit einem Wahrscheinlichkeitsmaß $= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{h}{\sqrt{h^2 + 16a^2}} \right)$ (wenn a der Radius der Grundfläche, h die Höhe des Kegels ist), während daneben unendlich viele indifferente Ruhelagen auf den Leitlinien des Kegels und eine labile Ruhelage auf der Spitze vorhanden sind.

26. Vierzehntes Beispiel. Lassen wir die im siebenten und achten Beispiel (§ 3, Nr. 15, 16) betrachtete ebene Figur um die Achse CD rotieren, so entsteht ein Wurfkörper $\mathfrak{K}$, dessen untere Hälfte eine Halbkugel, dessen obere Hälfte ein Kegel ist. Wenn wir für diese beiden Teile, von denen jeder für sich homogen sei, die räumliche Dichte mit ρ' bzw. ρ'' bezeichnen, dann hat der Schwerpunkt S von $\mathfrak{K}$ die z -Koordinate

$$\zeta = \frac{h^2 \rho'' - 3\rho'}{4(h\rho'' + 2\rho')} \quad (18)$$

in einem cartesischen Koordinatensystem mit dem Mittelpunkt M der Halbkugel als Anfangspunkt und der positiven z -Achse in Richtung von MC . Nehmen wir eine Leitlinie des Kegels, beispielsweise AC , und fällen auf sie von S aus das Lot, dann trifft dieses Lot die Leitlinie in einem Punkt mit der z -Koordinate

$$z_0 = \frac{h}{1+h^2} (1 + h\zeta). \quad (19)$$

Man kann nun folgende fünf Fälle unterscheiden:

$$\alpha) \text{ Es ist } \frac{\rho''}{\rho'} > \frac{3}{h^2}, \text{ somit } \zeta > 0, z_0 > 0.$$

Hier stellt jede Leitlinie des Kegels eine Ruhelage indifferenter Gleichgewichts dar. Dazu kommen die Spitze C und der tiefste Punkt D der Halbkugel als labile Ruhelagen.

$$\beta) \text{ Es ist } \frac{\rho''}{\rho'} = \frac{3}{h^2}, \text{ somit } \zeta = 0, z_0 > 0.$$

Außer den Leitlinien des Kegels liefern auch die Punkte der Halbkugelfläche indifferente Gleichgewichtslagen, mit Ausnahme der (in der Ebene $z = 0$ gelegenen) „Kanten-Punkte“ auf demjenigen Kreis, in welchem Halbkugelfläche und Kegelfläche aneinanderstoßen; diese Kantenpunkte ergeben ebenso wie die Kegelspitze C labile Ruhelagen.

$$\gamma) \text{ Es ist } \frac{3h-8}{h(4+h^2)} < \frac{\rho''}{\rho'} < \frac{3}{h^2},$$

somit $\zeta < 0, z_0 > 0$. Man hat indifferente Gleichgewichtslagen auf den Leitlinien des Kegels, labile auf den oben genannten Kantenpunkten und auf der Spitze C , ferner eine stabile Ruhelage im tiefsten Punkt D der Halbkugel, wobei das zu dieser Ruhelage gehörige Maß (der zugehörige Wahrscheinlichkeitswert) gegeben ist durch

$$\frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{\zeta^2}}} \right). \quad (20)$$

$$\delta) \text{ Es ist } \frac{\rho''}{\rho'} = \frac{3h-8}{h(4+h^2)} \left(\text{dabei } h > \frac{8}{3} \right),$$

somit $\zeta < 0, z_0 = 0$. Die Ruhelagen auf den Leitlinien und auf C sind labil; dazu tritt eine stabile Ruhelage auf D mit dem zugehörigen Maß (20).

$$\epsilon) \text{ Es ist } \frac{\rho''}{\rho'} < \frac{3h-8}{h(4+h^2)} \left(\text{dabei } h > \frac{8}{3} \right),$$

somit $\zeta < 0, z_0 < 0$. Man hat hier nur die labile Ruhelage in C und die stabile in D , letztere mit dem Wahrscheinlichkeitsmaß 1.

Da $\frac{3h-8}{h(4+h^2)} < 1$ ist, können die Fälle δ und ϵ bei homoge-

nem Körper $\mathfrak{K}$ (mit $\rho'' = \rho'$) nicht auftreten. Von allen fünf Fällen stellt nur der letzte Fall ε einen normalen Wurfkörper (Nr. 20) dar²⁶.

§ 6. Die Anzahl stabiler Ruhelagen.

27. Aus mehreren der in §§ 3 und 5 angeführten Beispiele (vgl. Nr. 16, 26) von 2- und 3-dimensionalen Wurfkörpern, unter denen Kreisscheibe und Kugel mit excentrischem Schwerpunkt die einfachsten sind, ist zu sehen, daß die Anzahl stabiler Ruhelagen auf 1 sinken kann. In allen diesen Fällen handelt es sich um inhomogene Wurfkörper. Daß bei homogenen Wurfkörpern die Dinge anders liegen, zeigt ein Satz über homogene 2-dimensionale Wurffiguren von sehr allgemeiner Beschaffenheit, dessen Beweis einer besonderen Note vorbehalten sei²⁷. Dieser Satz lautet:

Eine homogen mit Masse belegte konvexe 2-dimensionale Wurffigur $\mathfrak{K}$, deren Schwerpunkt S sei und deren Randlinie in Polarkoordinaten ρ, φ mit S als Anfangspunkt durch $\rho = \rho(\varphi)$ dargestellt sei, hat, wenn $\rho(\varphi)$ nicht konstant (somit $\mathfrak{K}$ kein Kreis) ist, mindestens zwei stabile Ruhelagen jedenfalls in allen denjenigen Fällen, für welche die Funktion $\rho(\varphi)$ nur endlich viele Maxima und Minima hat.

Dabei kann man vermuten, daß die Behauptung auch noch unter allgemeineren Voraussetzungen sowie für mehr als zwei Dimensionen zutreffend sei.

²⁶ Den gleichen Charakter (eine einzige stabile Ruhelage mit dem zugehörigen Wahrscheinlichkeitsmaß 1) hat eine inhomogene Kugel mit excentrischem Schwerpunkt. Außerdem mag an Puppen aus leichtem Material (Celluloid) mit halbkugelförmigem schwerem, z. B. mit Blei ausgegossenem Fuß erinnert werden, die sich aus jeder Lage immer von selbst aufrichten.

²⁷ „Über die Anzahl der stabilen Ruhelagen eines Würfels. Herrn Georg Faber zum 70. Geburtstag am 5. April 1947 gewidmet.“