

Die
von optischen Systemen
grösserer Oeffnung und grösseren Gesichtsfeldes
erzeugten Bilder.

Auf grund der Seidelschen Formeln untersucht

von

S. Finsterwalder.

(Mit 3 Tafeln.)

174

18

19

20

21

22

23

24

25

26

27

Die

von optischen Systemen

grösserer Öffnung und grösseren Gesichtsfeldes

erzeugten Bilder.

Auf Grund der Seidel'schen Formeln untersucht

von

S. Finsterwalder.

(Mit 3 Tafeln.)

Verlag v. H. G. K. & W. V. J. B. H. in Leipzig

Solange man sich bei der Untersuchung der Wirkungsweise centrierter dioptrischer Systeme und der von ihnen erzeugten Bilder räumlicher Objekte auf die nächste Umgebung der Axe solcher Systeme beschränkt, kann man bekanntlich jedes noch so komplizierte System dieser Art durch eine einzige Linse von endlicher Dicke ersetzt denken, welche innerhalb der angegebenen Beschränkung von jedem Gegenstand ein Bild in gleicher Grösse und Lage erzeugt, wie jenes System. Dass dieser Ersatz nur in der Theorie, nicht aber in der optischen Praxis seine Bedeutung hat, liegt einestheils darin, dass er nur unter Voraussetzung einfarbigen Lichtes gilt, andernteils, dass er sich nicht auf die in der Regel vorhandenen Abweichungen der ursprünglich von einem Punkte angangenen und dann gebrochenen Strahlen von einem gemeinsamen Vereinigungspunkt ausdehnen lässt. Die ganze optische Leistung eines Systems: Achromasie, Schärfe und Richtigkeit der Bilder liegt also ausserhalb des Geltungsbereiches jenes Ersatzes. Um dieselbe von vorneherein beurteilen zu können, muss man entweder, wie es von seiten der ausübenden Optiker zumeist geschieht, eine genaue numerische Rechnung für den Gang einer grösseren Zahl von Strahlen durch das System anstellen und aus dem Resultate derselben auf die vorhandenen Abweichungen zu schliessen versuchen, oder man muss die Theorie derart zu erweitern streben, dass sie ein ausreichendes Gesamtbild der eintretenden Abweichungen liefert. Im ersteren Falle sind langwierige Zifferrechnungen unvermeidlich. Dieselben bestehen allerdings nur in der oft wiederholten Anwendung weniger, leicht verständlicher Formeln, welche zuerst Herr Professor L. v. Seidel auf eine für die rechnerische Praxis bequeme Form gebracht hat ¹⁾. Im letzteren Falle dagegen scheint zunächst die zu erwartende Complicirtheit der Formeln ein ernstes Hindernis nicht nur

1) Sitzber. d. II. Cl. d. k. Ak. d. Wiss. vom 10. Nov. 1866.

für die Ableitung, sondern auch für die schliessliche Anwendung zu bieten. Indessen hat sich herausgestellt, dass für die in der Praxis vorkommenden optischen Systeme gewisse Vereinfachungen eintreten können, welche uns gestatten, die Abweichungen der gebrochenen Strahlen zwar nicht absolut genau, aber doch mit genügender Annäherung allgemein zu berechnen und in geschlossenen Formeln auszudrücken. Die von Gauss zum Abschluss gebrachte Theorie der centrierten optischen Systeme, auf welche sich der erwähnte theoretische Ersatz derselben durch einfache Linsen stützt, geht von der Voraussetzung aus, dass alle Strahlen mit der Axe kleine Winkel einschliessen, deren dritte und höhere Potenzen vernachlässigbar sind. Insofern sie nur Strahlen berücksichtigt, welche die Linsenflächen in nächster Nähe der Axe treffen, ist sie nur für Systeme von kleiner Oeffnung und sofern sie blos für Objektpunkte in der Nähe der Axe gilt, auch nur für Systeme mit kleinem Gesichtsfeld anwendbar. Zuerst entstand das Bedürfnis nach Berücksichtigung der Abweichungen, die mit Vergrösserung der Oeffnung eintreten; ihm genügte die von Euler, Schleiermacher, Grunert, Bessel, Gauss, Seidel u. A. entwickelte Theorie der sphärischen Aberration oder der sogenannten Abweichung wegen der Kugelgestalt. Später, unter dem Einflusse der Photographie entwickelte sich die Notwendigkeit neben der ausgedehnteren Oeffnung auch ein grösseres Gesichtsfeld in Betracht zu ziehen und die Abbildung von Objekten zu untersuchen, die sich in einiger Entfernung von der Axe des optischen Systems befinden. Mit der ungleich schwierigeren Frage nach dem Einfluss der Entfernung des Objektes von der Axe auf die Güte des nun nicht mehr in der Mitte des Gesichtsfeldes liegenden Bildes hatte sich zuerst wohl Petzval¹⁾ beschäftigt, ohne sie indessen einer genügenden Beantwortung zuführen zu können. Erst Herr Professor L. v. Seidel²⁾ ist es gelungen, auf ebenso allgemeine, wie relativ einfache Weise die Abhängigkeit des in einem Linsensysteme beliebig oft gebrochenen Strahles vom einfallenden derart darzustellen, dass der Einfluss der Oeffnung und des Gesichtsfeldes auf die Güte der Bilder zum Ausdruck kommt. Dabei hat v. Seidel die durch Gauss einge-

1) Bericht über dioptrische Untersuchungen. Sitzber. d. k. k. Ak. d. Wiss. Wien 1857; eine frühere Schrift unter gleichem Titel war 1843 in Pest selbstständig erschienen.

2) Astronomische Nachrichten Nr. 1027 ff.

führte Reihenentwicklung auf Glieder dritter Ordnung ausgedehnt, nachdem er gezeigt hatte, dass Glieder vierter Ordnung nicht auftreten und demnach die Schlussformeln bis auf Glieder von der fünften Ordnung genau sind. Später sind ähnliche Untersuchungen wie die Seidel'schen aber merkwürdigerweise ohne Kenntniss derselben unternommen worden, so 1870 von Dr. Zinken¹⁾ gen. Sommer in Braunschweig, die an Allgemeinheit, Eleganz und Anwendbarkeit weit hinter den Seidel'schen zurückblieben, und erst ganz neuerdings (1890) hat Herr Dr. M. Thiesen²⁾ in Charlottenburg genau dieselbe Aufgabe behandelt, die v. Seidel vor 35 Jahren allgemein gelöst hatte. Er ist denn auch auf ganz verschiedenem Wege zu wesentlich denselben Resultaten wie Seidel gelangt, wenngleich seine Formeln noch nicht in gleichem Masse zur rechnerischen Anwendung vorbereitet sind wie die Seidel'schen.

Herr Professor v. Seidel begnügte sich nicht mit der Aufstellung der erwähnten Formeln, welche zur Untersuchung eines Linsensystems mässigen Gesichtsfeldes und mässiger Oeffnung ausreichen, sondern er bestimmte auch die Brennfläche, welche die von einem leuchtenden Punkte ausserhalb der Axe ausgehenden Strahlen nach ihrer Brechung umhüllen. Dieselbe findet sich in den gelehrten Anzeigen der K. b. Akademie der Wissenschaften vom Jahre 1857 beschrieben; ihre Gleichung ist — allerdings ohne Beziehung der Coefficienten auf die Constanten des Linsensystems — in einem Briefe Seidels an Kummer, der in den Sitzungsberichten der K. Akademie der Wissenschaften zu Berlin vom Jahre 1867 abgedruckt ist, angeführt; über die Ableitung derselben ist bisher nichts publiciert worden.

Eine weitere Aufgabe wird der analytischen Dioptrik bei Betrachtung der Wirkungsweise neuerer photographischer Objektive, welche bei sehr ausgedehntem Gesichtsfeld relativ geringe Oeffnung besitzen, gestellt, nämlich die strenge Berücksichtigung der Winkel, von welchen ersteres abhängig ist, wogegen man sich in Hinsicht der Oeffnung auf den bei der Gauss'schen Theorie erreichten Genauigkeitsgrad beschränken kann. Die Lösung dieser Aufgabe führt auf die Theorie der sogenannten astig-

1) Untersuchungen über die Dioptrik der Linsensysteme. Braunschweig 1870.

2) Beiträge zur Dioptrik. Sitzungsberichte der K. Ak. d. W. zu Berlin 1890.

matischen Strahlenbündel, jener Gebilde nämlich, welche als Elemente eines beliebigen, in einem isotropen Medium optisch darstellbaren Strahlensystemes aufgefasst werden können. Ein solches astigmatisches Strahlenbündel besteht bekanntlich aus der Gesamtheit der Strahlen, welche zwei unter sich und zur Axe des Bündels senkrechte und diese schneidende unendlich kurze Brennnlinien treffen. Solcher Art sind auch die unter beliebig grossem Winkel aus einem Linsensysteme austretenden unendlich dünnen Strahlenbündel und es handelt sich darum, die Elemente derselben (z. B. die Abstände der Brennnlinien von einem bestimmten Punkte der Axe des Bündels) durch die entsprechenden Elemente der zugehörigen Bündel der einfallenden Strahlen auszudrücken. Dies hat u. A. Herr Professor Lippich¹⁾ in Prag 1877 ausgeführt. Um das Verhältniss der Seidel'schen Theorie zur Theorie der astigmatischen Strahlenbündel richtig zu beurteilen, ist zu bedenken, dass erstere die letztere bei grossen Gesichtsfeldwinkeln natürlich nicht ersetzen kann; dafür leistet sie aber bei mässigen Gesichtsfeldwinkeln insofern weit mehr wie die andere, als sie nicht bloss eine unendlich kleine Oeffnung berücksichtigt; sie gibt vielmehr die Elemente beliebig vieler über die Oeffnung verteilter astigmatischer Strahlenbündel, aus denen sich schliesslich die Brennfläche zusammensetzt.

So erscheint die Seidel'sche Theorie auch gegenüber der von den astigmatischen Strahlenbündeln noch hervorragend geeignet zur Untersuchung der Bilder der meisten und wichtigsten optischen Instrumente. In der folgenden Untersuchung soll nun auf Grund der Seidel'schen Formeln, welche von ihrem Urheber bereits zur Klärung einer Reihe wichtiger Fragen der Dioptrik verwendet worden sind, eine möglichst umfassende Darstellung der Abhängigkeit reeller Bilder von dem Gesichtsfelde, der Abblendung und der Lage der Schirmebene, auf welcher man das Bild auffängt, in Angriff genommen werden. Hierbei erweisen sich einige Transformationen der Seidel'schen Formeln und namentlich die Ableitung der Gleichung der Brennfläche mit voller Bedeutung der Coefficienten als notwendig.

Ein besonderer Wert wurde auf die exakte graphische Dar-

1) Denkschriften der K. K. Akad. d. W. in Wien 1877.

stellung typischer Fälle gelegt, deren Reproduktion in mehreren Tafeln am Schlusse der Abhandlung beigegeben ist. Bei der Durchführung der dabei nötigen Rechnungen hat sich auch das letzte Bedenken gegen die Anwendbarkeit der Seidel'schen Theorie, das in der möglicherweise unerträglichen Rechenarbeit begründet war, endgiltig gehoben. Im Vergleiche zu dem bei der gebräuchlichen Berechnung einzelner Strahlen nötigen Rechenaufwand bedeutet die Benützung der Seidel'schen Formeln eine ganz wesentliche Ersparnis, die um so wirksamer wird, je complicierter das System und je zahlreicher die zu berechnenden Strahlen sind. Da die Seidel'schen Formeln die Abweichung der Strahlen als Funktion der Gauss'schen Näherungswerte ergeben, so genügt die genaue, etwa 7-stellige Durchrechnung eines oder zweier Strahlen, die in der Nähe der Axe einfallen und mit dieser in einer Ebene liegen, während alle Correktionen nur auf etwa 2—3 Stellen bekannt zu sein brauchen. Zur genauen Durchrechnung der Strahlen und zur Ableitung der Coefficienten in den Seidel'schen Formeln daraus empfiehlt sich die Benützung einer Rechenmaschine; für die Ausführung der Correktionsrechnungen selbst genügt der Rechenschieber.

Die folgenden Untersuchungen sind in 7 Paragraphen nachstehend angeführten Inhaltes gegliedert:

1) Zusammenstellung der Seidel'schen Formeln aus den Astronomischen Nachrichten Nr. 1027 u. ff. und Erläuterung der dabei angewandten Bezeichnungsweise.

2) Untersuchung des Systems der gebrochenen Strahlen und seiner Brennfläche im allgemeinen Falle unter Annahme des leuchtenden Punktes ausserhalb der Axe. Die Abbildung der Brennfläche in eine Ebene durch Einführung elliptischer Parameter. Die Lage derselben gegen die optische Axe des Systems.

3) Specielle Fälle der Brennfläche namentlich bei gehobenem Kugelgestaltsfehler in der Axe und bei Erfüllung der Fraunhoferbedingung.

4) Untersuchung der Abbildung der Ebene der Blende in die Ebene des auffangenden Schirmes, welche durch die von einem leuchtenden Punkt der Axe ausgehenden und im Linsensystem gebrochenen Strahlen vermittelt wird. Fünffache Ueberdeckung der Schirmebene mit Schnittpunkten von gebrochenen Strahlen.

5) Helligkeitsverteilung in den Lichtflecken, welche im allgemeinen an stelle scharfer Bilder leuchtender Punkte auftreten.

6) Begrenzung der Lichtflecke bei wechselnder Grösse und Lage der Blende. Diskussion der Möglichkeit, die Verschiebung der Blende zur Verbesserung der Bilder ohne Einbusse an Helligkeit zu benützen.

7) Geometrische Untersuchung über den Zusammenhang der Brennpflache der gebrochenen Strahlen mit der Centrafläche der Flächen 2. Grades. Erzeugung des Systems der gebrochenen Strahlen durch einen Mechanismus.

Alle Untersuchungen beziehen sich zunächst auf Strahlen einerlei Farbe; sie geben daher über die Achromasie eines optischen Systems keinen direkten Aufschluss. Einer Weiterführung derselben mit Berücksichtigung der Dispersion stehen keine wesentlichen Schwierigkeiten im Wege. Andererseits ist kaum ein praktisches Resultat von der Erweiterung der gewöhnlichen Theorie der Achromasie auf Glieder höherer Ordnung zu erwarten.

§ 1.

Die Seidel'schen Formeln.

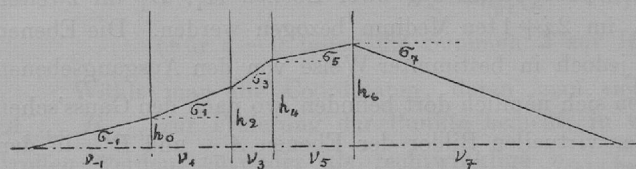
Im Folgenden werden principiell Indexbezeichnungen für die Bestimmungsstücke eines centrierten optischen Systems und der in einem solchen verlaufenden Strahlen eingeführt und zwar in der Art, dass alle auf brechende Flächen bezügliche Grössen, wie z. B. Krümmungsradien, Einfallshöhen mit geradem Index, wobei 0 der ersten brechenden Fläche entspricht, versehen werden. Alle auf die Medien sich beziehenden Grössen, wie z. B. Brechungsexponenten, Dicken, Neigungswinkel und Vereinigungsweiten der darin verlaufenden Strahlen, sollen ungerade Zahlen als Index tragen und zwar sei das der brechenden Fläche mit dem Index 0 vorausgehende Medium durch den Index -1 , das nachfolgende durch $+1$ charakterisiert. Die Richtung des Fortschreitens sei durch die der einfallenden Strahlen gegeben; Radien oder Vereinigungsweiten, welche vom Scheitel der brechenden Fläche ab gerechnet in dieser Richtung liegen, gelten als positiv.

Ein dioptrisches System ist zunächst durch seine natürlichen Bestimmungsstücke: die Krümmungsradien ϱ der Linsenflächen, die Dicken d der Medien auf der Axe gemessen und die Brechungsquotienten n derselben gegeben, welche laut obiger Bezeichnung in nachstehender Aufeinanderfolge geordnet sind:

$$n_{-1}; \varrho_0; n_1, d_1; \varrho_2; n_3, d_3; \varrho_4; \dots n_{2p-1}, d_{2p-1}; \varrho_{2p}; n_{2p+1}$$

Statt dieser Bestimmungsstücke hat nun v. Seidel mit grossem Erfolge neue eingeführt und zwar solche, welche sich auf einen von ihm so genannten Normalstrahl beziehen, der von einem Punkte der optischen Axe ausgehend und stets unendlich kleine Winkel mit derselben bildend das System durchläuft. Diese neuen Bestimmungsstücke sind die Entfernungen h_{2i} von der Axe, in welchen der Normalstrahl jeweils die brechenden Flächen trifft, und die Winkel σ_{2i+1} , welche derselbe in den einzelnen Medien mit der Axe bildet, beziehungsweise, da ja beiderlei Grössen unendlich klein sind, beliebige endliche Multipla derselben. Siehe

Fig. 1.



beistehende Figur 1, in welcher der Verlauf eines Normalstrahles durch ein System mit 4 brechenden Flächen dargestellt ist.

Der Quotient $\frac{h_0}{\sigma_{-1}}$ stellt dann beispielsweise die Entfernung des Ausgangspunktes unseres Normalstrahles vom Scheitel der ersten brechenden Fläche dar. Statt der Brechungsquotienten n_{2i+1} sollen deren reciproke Werte ν_{2i+1} eingeführt werden. Es stellt sich nun heraus, dass die Grössen h, σ, ν das dioptrische System ebenso gut bestimmen wie die ursprünglichen q, d, n . Um von den h, σ, ν zu den q, d, n zu gelangen, dient folgendes Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} q_{2i} &= \frac{N_{2i} h_{2i}}{\nu_{2i-1} \sigma_{2i+1} - \nu_{2i+1} \sigma_{2i-1}}; \\ N_{2i} &= \nu_{2i-1} - \nu_{2i+1}; \quad d_{2i+1} = \frac{h_{2i} - h_{2i+2}}{\sigma_{2i+1}}; \quad n_{2i+1} = \frac{1}{\nu_{2i+1}} \end{aligned} \quad 1)$$

Will man umgekehrt von den q, d, n zu den h, σ, ν übergehen, so kann man folgenden von Seidel angegebenen Algorithmus benutzen¹⁾: „Man bildet sich die Constanten $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2 \dots$ nach den Gleichungen

$$\begin{aligned} \alpha_{2i} &= -\frac{n_{2i-1} - n_{2i+1}}{q_{2i}} = +n_{2i-1} n_{2i+1} \frac{N_{2i}}{q_{2i}} \\ \alpha_{2i+1} &= -\frac{d_{2i+1}}{n_{2i+1}} \end{aligned}$$

wählt hierauf h_0 und σ_{-1} so, dass $\frac{h_0}{\sigma_{-1}}$ gleich dem Abstand des Ausgangspunktes des Normalstrahles vom Scheitel der ersten brechenden Fläche ist; man macht $\alpha_{-1} = n_{-1} \sigma_{-1}$.

1) Astr. N. 1027, S. 294.

$z_0 = h_0$ und berechnet mit diesen Anfangswerten alle späteren z nach der Gleichung $z_{m+1} = \alpha_m z_m + z_{m-1}$; alsdann hat man allgemein:

$$h_{2i} = z_{2i}; \quad \sigma_{2i+1} = \frac{z_{2i+1}}{n_{2i+1}}.$$

Um nun die Lage eines Strahles vor der Brechung zu bestimmen, wählt v. Seidel die zwei Paare von Coordinaten $\eta_{-1}, \zeta_{-1}, \eta'_{-1}, \zeta'_{-1}$ der Punkte, in welchen der Strahl zwei bestimmte, zur Axe des Systemes senkrechte Ebenen A_{-1}, B_{-1} trifft; in ähnlicher Weise soll der gebrochene Strahl auf zwei Ebenen A_1, B_1 im zweiten Medium und so fort A_{2i+1}, B_{2i+1} im $2i+1$ ten Medium bezogen werden. Die Ebenen $A_1, B_1, \dots, A_{2i+1}, B_{2i+1}$ sollen jedoch in bestimmter Weise von den Ausgangsebenen A_{-1}, B_{-1} abhängig sein; sie sollen sich nämlich dort befinden, wo nach den Gauss'schen Näherungsformeln die reellen oder virtuellen Bilder der Ebenen A_{-1} und B_{-1} in den betreffenden Medien entstehen.

Denkt man sich durch den Schnitt der Ebene A_{-1} mit der Axe einen Normalstrahl mit den Bestimmungsstücken h, σ gelegt, so ist, wie schon erwähnt, $\frac{h_0}{\sigma_{-1}}$ der Abstand der Ebene A_{-1} vom Scheitel der ersten brechenden Fläche, $\frac{h_0}{\sigma_1}$ der Abstand der Ebene A_1 vom gleichen Scheitel, $\frac{h_2}{\sigma_1}$ der Abstand der Ebene A_1 vom Scheitel der zweiten brechenden Fläche u. s. f. Führt man noch einen zweiten Normalstrahl ein, der durch den Schnitt der Ebene B_{-1} mit der Axe geht und dessen Bestimmungsstücke durch h', σ' bezeichnet werden, so lassen sich die Abstände der Ebenen B in ganz ähnlicher Weise ausdrücken. Die Entfernung der Ebenen A_{2i+1} und B_{2i+1} ist dann

$$\frac{h_{2i}}{\sigma_{2i+1}} - \frac{h'_{2i}}{\sigma'_{2i+2}} = \frac{h_{2i+2}}{\sigma_{2i+1}} - \frac{h'_{2i+2}}{\sigma'_{2i+1}}.$$

Dabei sind natürlich die h, σ und h', σ' nicht von einander unabhängig, da sie ja beide aus den ursprünglichen ϱ, d entspringen sind. Hieraus ergibt sich die Gleichheit folgender Ausdrücke:

$$\frac{h_0 \sigma_{-1}' - h_0' \sigma_{-1}}{\nu_{-1}} = \frac{h_0 \sigma_1' - h_0' \sigma_1}{\nu_1} = \frac{h_2 \sigma_1' - h_2' \sigma_1}{\nu_1} = \frac{h_2 \sigma_3' - h_2' \sigma_3}{\nu_3} = \dots = T \quad 2)$$

Mittels Einführung des Wertes T und mit der weiteren abkürzenden Bezeichnung:

$$\frac{h_0'}{h_0} = \chi; \quad \nu_{2i-1} + \nu_{2i+1} = 2\mu_{2i}$$

$$\sum_{p=1}^i = \sum_{p=1}^{p=i} \frac{\nu_{2p-1} d_{2p-1}}{h_{2p-2} h_{2p}}$$

kann man die Abhängigkeit der h' und σ' von den h und σ in folgenden Formeln ausdrücken:

$$\sigma'_{2i-1} - \sigma'_{2i+1} = (\sigma_{2i-1} - \sigma_{2i+1}) (\chi - T \Sigma) + \frac{T N_{2i}}{h_{2i}}$$

$$\nu_{2i-1} \sigma'_{2i-1} - \nu'_{2i+1} \sigma'_{2i+1} = (\nu_{2i-1} \sigma_{2i-1} - \nu_{2i+1} \sigma_{2i+1}) (\chi - T \Sigma) + \frac{2 T N_{2i} \mu_{2i}}{h_{2i}} \quad 3)$$

$$\nu_{2i-1} \sigma'_{2i+1} - \nu_{2i+1} \sigma'_{2i-1} = (\nu_{2i-1} \sigma_{2i+1} - \nu_{2i+1} \sigma_{2i-1}) (\chi - T \Sigma)$$

$$h'_{2i} = h_{2i} (\chi - T \Sigma)$$

(Für $i=0$ fallen die Summen Σ zur Rechten ganz weg.)¹⁾

Wählt man die Coordinaten, deren man sich in den verschiedenen Ebenen A_{2i+1} B_{2i+1} zur Fixierung der Punkte bedient, in welchen sie von den Strahlen getroffen werden, entweder als rechtwinklige η_{2i+1} ζ_{2i+1} , η'_{2i+1} ζ'_{2i+1} , die unter sich parallel sind und von dem Schnittpunkt der Ebenen mit der optischen Axe aus jeweils ihren Ausgang nehmen, oder Polarcoordinaten r_{2i+1} v_{2i+1} , r'_{2i+1} v'_{2i+1} , deren Pole in der optischen Axe liegen und deren Winkel von parallelen Geraden aus zählen, so drückt sich die Forderung, dass nach den dioptrischen Näherungsformeln die verschiedenen Ebenen A_{2i} unter sich und die Ebenen B_{2i} unter sich durch beliebige, das dioptrische System durchlaufende Strahlen ähnlich auf einander abgebildet werden, einfach durch Proportionalität der linearen Coordinaten aus. Es mögen die Buchstaben η ζ , η' ζ' , r v , r' v' die aus den dioptrischen Näherungsformeln folgenden Werte für die Coordinaten der Treffpunkte eines Strahles in den Ebenen A , B bezeichnen; ihre Proportionalität lässt sich dann nach einem bekannten Zusammenhang zwischen Bildgrösse und Convergenz der Strahlen in folgenden Formeln darstellen:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\sigma_{-1}}{\nu_{-1}} \eta_{-1} &= \frac{\sigma_1}{\nu_1} \eta_1 = \frac{\sigma_3}{\nu_3} \eta_3 = \dots H; & \frac{\sigma'_{-1}}{\nu_{-1}} \eta'_{-1} &= \frac{\sigma'_1}{\nu'_1} \eta'_1 = \frac{\sigma'_3}{\nu'_3} \eta'_3 = \dots H' \\ \frac{\sigma_{-1}}{\nu_{-1}} \zeta_{-1} &= \frac{\sigma_1}{\nu_1} \zeta_1 = \frac{\sigma_3}{\nu_3} \zeta_3 = \dots Z; & \frac{\sigma'_{-1}}{\nu_{-1}} \zeta'_{-1} &= \frac{\sigma'_1}{\nu'_1} \zeta'_1 = \frac{\sigma'_3}{\nu'_3} \zeta'_3 = \dots Z' \\ \frac{\sigma_{-1}}{\nu_{-1}} r_{-1} &= \frac{\sigma_1}{\nu_1} r_1 = \frac{\sigma_3}{\nu_3} r_3 = \dots R; & \frac{\sigma'_{-1}}{\nu_{-1}} r'_{-1} &= \frac{\sigma'_1}{\nu'_1} r'_1 = \frac{\sigma'_3}{\nu'_3} r'_3 = \dots R' \end{aligned} \right\} \quad 4a)$$

Die Grösse H , Z , R , H' , Z' , R' könnte man als reducierte Coordinaten der Durchschnittspunkte zwischen dem Strahl und den Ebenen bezeichnen, indem man sich nämlich die Coordinaten η ζ , η' ζ' , r v , r' v' in den verschiedenen Ebenen mit passend gewählten Massstäben gemessen denkt, wodurch überall dieselben Masszahlen für die

1) Astr. N. 1028, S. 315.

Coordinationen der einem bestimmten Strahl zugehörigen Durchschnittspunkte einerseits für die Ebenen A , andererseits für die Ebenen B gefunden werden. Die Abweichungen nun, welche die Coordinationen der wahren Durchstossungspunkte von den genäherten zeigen, mögen durch $\Delta\eta_{2i+1}$, $\Delta\zeta_{2i+1}$, Δr_{2i+1} , Δv_{2i+1} , $\Delta\eta'_{2i+1}$, $\Delta\zeta'_{2i+1}$, $\Delta r'_{2i+1}$, $\Delta v'_{2i+1}$ ausgedrückt werden; mit den reducierten Massstäben gemessen (soweit sie linear sind) durch ΔH_{2i+1} , ΔZ_{2i+1} , ΔR_{2i+1} , $\Delta H'_{2i+1}$, $\Delta Z'_{2i+1}$, $\Delta R'_{2i+1}$. Es ist dann z. B.

$$\left. \begin{aligned} \frac{v_{2i+1}}{\sigma_{2i+1}} (H + \Delta H_{2i+1}) &= \eta_{2i+1} + \Delta\eta_{2i+1} \\ \frac{v'_{2i+1}}{\sigma'_{2i+1}} (H' + \Delta H'_{2i+1}) &= \eta'_{2i+1} + \Delta\eta'_{2i+1} \\ \frac{v_{2i+1}}{\sigma_{2i+1}} (R + \Delta R_{2i+1}) &= r_{2i+1} + \Delta r_{2i+1} \text{ u. s. f.} \end{aligned} \right\} \quad 4b)$$

Wenn man nun an die Berechnung dieser Abweichungen $\Delta H_{2i+1} \dots$, die im Vergleich zu den Näherungswerten der Bestimmungsstücke H, Z, H', Z' eines Strahles als Korrektionsglieder zu gelten haben, schreitet, so zeigt sich der grosse Vorteil, der in der geschickten Wahl der vier Bestimmungsstücke liegt, darin, dass der Ausdruck des Korrektionsgliedes eines jeden von ihnen, welches sich auf die erste Brechung bezieht, nicht von den vier Korrektionsgliedern der vorhergegangenen Brechung, sondern nur von einem derselben abhängt und von den übrigen Bestimmungsstücken nur die Näherungswerte enthält.

Es mögen der Einfachheit halber alle auf den Strahl und das Medium vor der $2i^{\text{ten}}$ Brechung bezüglichen Grössen, die eigentlich durch den Index $2i-1$ gekennzeichnet sein sollen, durch ein unter den betreffenden Buchstaben gesetztes Minuszeichen markiert werden, und in gleicher Weise die nach der $2i^{\text{ten}}$ Berechnung veränderten Grössen durch ein untergesetztes Pluszeichen an stelle des Index $2i+1$. Dann sind die reducierten Polarcoordinaten der Durchschnittspunkte des Strahles in den

$$\begin{array}{ll} \text{Ebenen:} & \begin{array}{cc} A & B \\ - & - \end{array} \\ \text{vor der Brechung:} & R + \Delta R_{-}, v + \Delta v_{-}; \quad R' + \Delta R'_{-}, v' + \Delta v'_{-} \\ \text{und in den Ebenen:} & \begin{array}{cc} A & B \\ + & + \end{array} \\ \text{nach der Brechung:} & R + \Delta R_{+}, v + \Delta v_{+}; \quad R' + \Delta R'_{+}, v' + \Delta v'_{+} \end{array}$$

Den Unterschied: $\Delta R_{+} - \Delta R_{-}$ resp. $\Delta v_{+} - \Delta v_{-}$ der zu den konstant bleibenden reducierten Coordinationen R, v , vor und nach der Brechung hinzuzufügenden Korrektionsglieder hat nun v. Seidel durch folgende Formeln ausgedrückt, welche bis auf Glieder 5. Ordnung der als unendlich klein von der ersten Ordnung vorausgesetzten Coordinationen R, R' genau sind:

$$2 T^3 (\mathcal{A} R_+ - \mathcal{A} R_-) = R'^3 \cos(v' - v) h \left(\frac{\sigma - \sigma'}{N} \right)^2 (\nu \sigma_- - \nu \sigma_+) \dots \text{I}$$

$$- R'^2 R (1 + 2 \cos^2(v' - v)) h \frac{(\sigma - \sigma')(\sigma' - \sigma')}{NN} (\nu \sigma_- - \nu \sigma_+) \dots \text{II}$$

$$+ R' R^2 \cos(v' - v) \left\{ 2 h \left(\frac{\sigma' - \sigma'}{N} \right)^2 (\nu \sigma_- - \nu \sigma_+) \dots \text{IIIa} \right.$$

$$\left. + h \frac{(\sigma - \sigma')(\sigma' - \sigma')}{NN} (\nu \sigma'_- - \nu \sigma'_+) \dots \text{IIIb} \right.$$

$$\left. + \frac{T}{N} (\sigma - \sigma') (\nu \sigma'_- - \nu \sigma'_+) \right.$$

$$- R^3 \left(h \left(\frac{\sigma' - \sigma'}{N} \right)^2 (\nu \sigma'_- - \nu \sigma'_+) + \frac{T}{N} (\sigma' - \sigma') (\nu \sigma'_- - \nu \sigma'_+) \right) \dots \text{IV}$$

$2 T^3 R (\mathcal{A} v_+ - \mathcal{A} v_-) = R' \sin(v' - v) \times$ alles Folgende:

$$R'^2 h \left(\frac{\sigma - \sigma'}{N} \right)^2 (\nu \sigma_- - \nu \sigma_+) \dots \text{V}$$

$$- 2 R' R \cos(v' - v) h \frac{(\sigma - \sigma')(\sigma' - \sigma')}{NN} (\nu \sigma_- - \nu \sigma_+) \dots \text{VI}$$

$$+ R^2 \left(h \frac{(\sigma - \sigma')(\sigma' - \sigma')}{NN} (\nu \sigma'_- - \nu \sigma'_+) + \frac{T}{N} (\sigma - \sigma') (\nu \sigma'_- - \nu \sigma'_+) \right) \dots \text{VII}$$

Die entsprechenden Formeln für $\mathcal{A} R'_+ - \mathcal{A} R'_-$ und $\mathcal{A} v'_+ - \mathcal{A} v'_-$ werden aus obigen abgeleitet, indem man folgende Grössen vertauscht:

R und $\mathcal{A} R$ mit R' und $\mathcal{A} R'$

v und $\mathcal{A} v$ mit v' und $\mathcal{A} v'$

h mit h'

σ und σ mit σ' und σ'

$+$ $-$ mit $+$ $-$

T mit $-T$.

Nehmen wir nun an, das dioptrische System habe $k+1$ brechende Flächen 0, 2, ... $2k$, so können wir die obigen Formeln $2k+1$ mal unter einander schreiben und jedesmal an Stelle der Plus- und Minuszeichen unter den Buchstaben die Indices $2i+1$, $2i-1$ der der jeweiligen $2i^{\text{ten}}$ Brechung nachfolgenden, beziehungsweise vorangegangenen Medien setzen, ferner die nichtmarkierten Buchstaben h , N (T , R , R' , v , v' bleiben durch alle Brechungen konstant) mit dem jeweiligen Index der brechenden Fläche versehen. Werden ferner die Objektpunkte in der ersten Ebene

A_{-1} liegend vorausgesetzt, so können wir die ΔR und Δv gleich 0 nehmen. Addieren wir dann die rechten und linken Seiten der $k+1$ unter einander stehenden Gleichungen, so bleibt rechts bloß $2T^3 \Delta R_{2k+1}$ und $2T^3 R \Delta v_{2k+1}$ übrig, d. h. die reducierten Abweichungen der Coordinaten des Durchschnittspunktes in der letzten Ebene von den Näherungscoordinaten. Die wirklichen Längen-Abweichungen ergeben sich aus den reducierten durch Multiplication mit $\frac{\nu_{2k+1}}{\sigma_{2k+1}}$. Auf der linken Seite finden wir nach

der Addition die gemeinsamen, aus den reducierten Näherungscoordinaten gebildeten Faktoren der Einzelformeln wieder; es treten nur an Stelle der von Brechung zu Brechung variablen Teile Summen von $2k+1$ Gliedern, deren allgemeine Glieder aus den oben mit I bis VII bezeichneten Ausdrücken leicht zu bilden sind, indem man $\nu, \nu', \sigma, \sigma', h, N$ durch $\nu_{2i-1}, \nu_{2i+1}, \sigma_{2i-1}, \sigma_{2i+1}, \sigma'_{2i-1}, \sigma'_{2i+1}, h_{2i}, N_{2i}$ ersetzt.

Obwohl die so erhaltenen Schlussformeln bereits zur Berechnung der Wirkungsweise eines gegebenen dioptrischen Systemes sehr geeignet sind, so macht sich doch bei Beantwortung der Frage nach der Construction eines Systemes von vorgegebener Wirkung der Umstand störend geltend, dass die ursprünglichen Bestimmungsstücke des zu suchenden Systemes — die q und d — sowohl in den h und σ wie auch in den h' und σ' enthalten sind. Mittels der schon angeführten Zusammenhänge (3) zwischen h, σ und h', σ' lassen sich indessen die letzteren eliminieren und es erscheint dann thatsächlich die Wirkung des dioptrischen Systemes durch eine einzige Serie von Bestimmungsstücken ausgedrückt. Auf diese Weise erhielt v. Seidel folgendes System von Formeln, welches wir zum Ausgangspunkt unserer weiteren Betrachtungen machen werden:

$$\Delta R_{2k+1} = AR'^3 \cos(v'-v) - BR'^2 R(1 + 2 \cos^2(v'-v)) + CR' R^2 \cos(v'-v) - DR^3$$

$$R \Delta v_{2k+1} = R' \sin(v'-v) \{AR'^2 - 2BR R' \cos(v'-v) + ER^2\}$$

$$A = \frac{S(1)}{2T^3}, \quad B = \frac{\chi S(1) + TS(2)}{2T^3}, \quad C = \frac{3\chi^2 S(1) + 6\chi TS(2) + T^2(2S(3) + S(4))}{2T^3}$$

$$D = \frac{\chi^3 S(1) + 3\chi^2 TS(2) + \chi T^2(2S(3) + S(4)) + T^3 S(5)}{2T^3}$$

$$E = \frac{\chi^2 S(1) + 2\chi TS(2) + T^2 S(4)}{2T^3}$$

$$S(1) = \sum_{i=0}^{i=k} h_{2i} \left(\frac{\sigma_{2i-1} - \sigma_{2i+1}}{N_{2i}} \right)^2 (\nu_{2i-1} \sigma_{2i-1} - \nu_{2i+1} \sigma_{2i+1}) = \sum_{i=0}^{i=k} (1) \quad 5)$$

$$S(2) = \sum_{i=0}^{i=k} (1) U_{2i} = \sum_{i=0}^{i=k} (2)$$

$$S(3) = \sum_{i=0}^{i=k} (2) U_{2i} = \sum_{i=0}^{i=k} (3)$$

$$S(4) = \sum_{i=0}^{i=k} \left((3) - \frac{N_{2i}}{\varrho_{2i}} \right) = \sum_{i=0}^{i=k} (4)$$

$$S(5) = \sum_{i=0}^{i=k} (4) U_{2i}$$

$$U_{2i} = \frac{N_{2i}}{h_{2i}(\sigma_{2i-1} - \sigma_{2i+1})} - \sum_{p=1}^{p=i} \frac{v_{2p-1} d_{2p-1}}{h_{2p-2} h_{2p}}$$

$$\varrho_{2i} = \frac{N_{2i} h_{2i}}{v_{2i-1} \sigma_{2i+1} - v_{2i+1} \sigma_{2i-1}}; \quad d_{2p-1} = \frac{h_{2p-2} - h_{2p}}{\sigma_{2p-1}}$$

$$N_{2i} = v_{2i-1} - v_{2i+1}$$

Die Ebene A_{-1} des ersten Mediums wurde als mit dem Objekt zusammenfallend vorausgesetzt. Die Ebene B_{-1} desselben Mediums kann man sich an jene Stelle versetzt denken, wo sich die für die Abgrenzung der eintretenden Strahlen entscheidende Blende eventuell die Fassung der ersten Linse befindet. Ist jene Blende in einem anderen Medium, so nehme man die Ebene B_{-1} dort an, wo das (genäherte) Bild der wirklichen Blende in dem ersten Medium sich befindet. Dann ist einestheils die Grösse R abhängig von der Entfernung eines Objektpunktes von der optischen Axe, mit anderen Worten von dem zur Verwendung kommenden Gesichtsfeld, andernteils die Grösse R' von der Stelle, wo der einfallende Strahl die Diaphragmenebene trifft und, wenn man die äussersten Strahlen, die das Diaphragma noch durchlässt, berücksichtigt, von dem Betrage der wirksamen Oeffnung des dioptrischen Systemes. Die Seidel'schen Formeln sind also vollkommen geeignet, ein beliebig gegebenes centriertes optisches System auf seine Wirkung bei verschiedener Beanspruchung desselben in bezug auf Grösse des Gesichtsfeldes und der Oeffnung zu studieren.

§ 2.

Die Brennfläche des Systems der gebrochenen Strahlen.

Für die Weiterverwertung der Seidel'schen Formeln namentlich zur Untersuchung der Brennfläche der von einem Punkte ursprünglich ausgegangenen und dann in dem dioptrischen System gebrochenen Strahlen empfiehlt es sich, an stelle der Polarcoordinaten R, v, R', v' wieder rechtwinklige Coordinaten einzuführen, wie sie bereits bei Ableitung der Formeln benutzt wurden. Setzt man also:

$$\begin{aligned} H &= R \cos v; \quad Z = R \sin v \\ H' &= R' \cos v'; \quad Z' = R' \sin v' \end{aligned} \quad \text{ferner:} \quad \begin{aligned} \Delta H &= \Delta R \cos v - R \Delta v \sin v \\ \Delta Z &= \Delta R \sin v + R \Delta v \cos v^1), \end{aligned} \quad (6)$$

so gehen die Formeln in folgende²⁾ über:

$$\begin{aligned} \Delta H &= H' (AR'^2 + ER^2 - 2B(HH' + ZZ')) - H(BR'^2 + DR^2 - (C-E)(HH' + ZZ')) \\ \Delta Z &= Z' (AR'^2 + ER^2 - 2B(HH' + ZZ')) - Z(BR'^2 + DR^2 - (C-E)(HH' + ZZ')) \end{aligned} \quad (7)$$

Für die Grösse $\frac{C-E}{2}$ soll weiterhin G gesetzt werden; es ist dann

$$G = \frac{C-E}{2} = \frac{\chi^2 S(1) + 2\chi TS(2) + T^2 S(3)}{2T^3}$$

Wir nehmen nun an, es befinde sich in der Ebene A_{-1} ein leuchtender Punkt in der Entfernung η_{-1} von der optischen Axe. Das rechtswinklige Coordinatensystem lässt sich dann immer so verdrehen, dass die ζ_{-1} -Coordinate 0 ist; es wird dann auch $Z=0$ und die Formeln vereinfachen sich folgendermassen:

$$\begin{aligned} \Delta H &= H' (AR'^2 + EH^2 - 2BHH') - H(BR'^2 + DH^2 - 2GHH') \\ \Delta Z &= Z' (AR'^2 + EH^2 - 2BHH') \end{aligned} \quad (8)$$

Nun soll eine Parallelverschiebung des Coordinatensystems in der Richtung der H' -Axe um den Betrag $H'_0 = \frac{BH}{A}$ eintreten; es wird dabei:

$$\begin{aligned} H &= H_* + H'_0 \\ \Delta H &= H'_* (AR'^2 + \left(\frac{AE - B^2}{A} + 2 \frac{AG - B^2}{A} \right) H^2) \\ &\quad + \frac{2B(AG - B^2) + A(BE - AD)}{A^2} H^3 \end{aligned} \quad (9)$$

1) Von hier ab wird bei den Correctionen ΔR und Δv der Index $2k+1$ fortgelassen, da diese Unterscheidung unnötig wird.

2) Dieselben erweisen sich identisch mit den von Herrn A. Thiesen neuerdings direkt abgeleiteten (s. Beiträge zur Dioptrik, Berl. Sitzb. 1890):

$$\begin{aligned} x_3 - x_1 \gamma &= x_2 (\mathfrak{G} \varrho_1^2 + \mathfrak{G} \varrho_2^2 - 2\mathfrak{Z} (x_1 x_2 + y_1 y_2)) - x_1 (\mathfrak{G} \varrho_1^2 + \mathfrak{Z} \varrho_2^2 - 2\mathfrak{F} (x_1 x_2 + y_1 y_2)) \\ y_3 - y_1 \gamma &= y_2 (\mathfrak{G} \varrho_1^2 + \mathfrak{G} \varrho_2^2 - 2\mathfrak{Z} (x_1 x_2 + y_1 y_2)) - y_1 (\mathfrak{G} \varrho_1^2 + \mathfrak{Z} \varrho_2^2 - 2\mathfrak{F} (x_1 x_2 + y_1 y_2)) \end{aligned}$$

γ bedeutet die Vergrösserung, bei welcher das System benützt wird; daher ist:

$$x_3 - x_1 \gamma = \Delta H \cdot \frac{v_{2k+1}}{\sigma_{2k+1}}; \quad \text{wenn wir } x_3 = (H + \Delta H) \frac{v_{2k+1}}{\sigma_{2k+1}}, \quad x_2 = H' \frac{v_{-1}}{\sigma'_{-1}} \quad \text{und} \quad x_1 = H \frac{v_{-1}}{\sigma_{-1}}$$

$$\text{setzen, ferner: } \mathfrak{G} = A \left(\frac{\sigma'_{-1}}{v_{-1}} \right)^3 \frac{v_{2k+1}}{\sigma_{2k+1}}; \quad \mathfrak{Z} = B \frac{\sigma_{-1}}{v_{-1}} \left(\frac{\sigma'_{-1}}{v_{-1}} \right)^2 \frac{v_{2k+1}}{\sigma_{2k+1}};$$

$$\mathfrak{G} = E \left(\frac{\sigma_{-1}}{v_{-1}} \right)^2 \frac{\sigma'_{-1}}{v_{-1}} \frac{v_{2k+1}}{\sigma_{2k+1}}; \quad \mathfrak{F} = D \left(\frac{\sigma_{-1}}{v_{-1}} \right)^3 \frac{v_{2k+1}}{\sigma_{2k+1}}; \quad \mathfrak{F} = \frac{(C-E)}{2} \left(\frac{\sigma_{-1}}{v_{-1}} \right)^2 \frac{\sigma'_{-1}}{v_{-1}} \frac{v_{2k+1}}{\sigma_{2k+1}}.$$

$$\Delta Z = Z \left(A R_*'^2 + \frac{A E - B^2}{A} H^2 \right), \quad \text{wobei } R_*'^2 = H_*'^2 + Z'^2 \quad (9)$$

So lange wir nur Strahlen betrachten, die von dem angenommenen leuchtenden Punkt in der Ebene A_{-1} herkommen, ist H konstant; es empfiehlt sich daher, auch in ΔH den bloß von H abhängigen Teil abzutrennen und zu schreiben:

$$\begin{aligned} \Delta H &= \Delta H_* + \Delta H_0 \\ \text{wobei: } \Delta H_0 &= \frac{2 B (A G - B^2) + A (B E - A D)}{A^2} H^3 \\ &= \frac{-2 S(2) [S(1) S(3) - S(2)^2] + S(1) [S(2) S(4) - S(1) S(5)]}{S(1)^2} H^3 \end{aligned} \quad (10)$$

Es werde zur Vereinfachung

$$\begin{aligned} \frac{A E - B^2}{A} &= \frac{S(1) S(4) - S(2)^2}{2 T S(1)} = L \\ \frac{A G - B^2}{A} &= \frac{S(1) S(3) - S(2)^2}{2 T S(1)} = M \end{aligned} \quad (11)$$

gesetzt, dann reduciren sich die Formeln 9 auf folgende Ausdrücke:

$$\begin{aligned} \Delta H_* &= H_*' (A R_*'^2 + (L + 2 M) H^2) \\ \Delta Z &= Z' (A R_*'^2 + L H^2) \end{aligned} \quad (12)$$

Die Korrektionsglieder ΔH_* und ΔZ sind nunmehr ganz symmetrisch aus den neuen Coordinaten in der Diaphragmenebene B_{-1} aufgebaut. Jedes derselben ist als Produkt zweier Faktoren dargestellt, von denen der eine die Glieder gerader, der andere die ungerader Potenz der neuen Coordinaten enthält. Ersterer bleibt bei blosser Veränderung der Vorzeichen der Coordinaten konstant, letzterer behält seine Grösse mit geändertem Vorzeichen bei. Daher entspricht einer symmetrischen Anordnung der Schnittpunkte der einfallenden Strahlen in der Diaphragmenebene B_{-1} auch eine symmetrische Anordnung der Schnittpunkte der gebrochenen Strahlen in der Bildebene A_{2k+1} .

Auf Grund dieser symmetrischen Gestalt der Formeln 12 ist es leicht, zur Gleichung der Brennfläche der gebrochenen Strahlen zu gelangen. Diese Brennfläche muss offenbar in allernächster Nähe der näherungsweisen Bildebene A_{2k+1} zu liegen kommen und ihre Dimensionen in der Richtung der optischen Axe sind von der zweiten Ordnung der Grössen H, Z, H', Z' zu veranschlagen, da die Abweichungen der Schnittpunkte der gebrochenen Strahlen in der Ebene A_{2k+1} der dritten Ordnung, die Neigungen der Strahlen gegen einander aber der ersten Ordnung angehören.

Denken wir uns einen aus dem dioptrischen System austretenden Strahl durch seine Schnittpunkte P, Q mit den Ebenen A_{2k+1}, B_{2k+1} bestimmt.

Die Entfernung der beiden Ebenen ist gleich:

$$\frac{h_{2k}}{\sigma_{2k+1}} - \frac{h'_{2k}}{\sigma'_{2k+1}} = K = \frac{h_{2k}\sigma'_{2k+1} - h'_{2k}\sigma_{2k+1}}{\sigma_{2k+1}\sigma'_{2k+1}} = \frac{T\nu_{2k+1}}{\sigma_{2k+1}\sigma'_{2k+1}} \quad (13)$$

Die Coordinaten des Durchschnittspunktes P mit der Ebene A_{2k+1} sind in reduciertem Masse: $H + \Delta H_0 + \Delta H_*$, $Z + \Delta Z$, die des Schnittpunktes Q mit der Ebene B_{2k+1} : $H' + \Delta H' = H'_* + H'_0 + \Delta H'$, $Z' + \Delta Z'$. Irgend ein benachbarter Strahl $P'Q'$ wird von dem ursprünglichen geschnitten, sobald PP' parallel zu QQ' ist, denn dann liegen beide in einer Ebene.

Die Bedingung hiefür wird in folgender Formel ausgedrückt:

$$\frac{d(H + \Delta H_0 + \Delta H_*)}{d(Z + \Delta Z)} = \frac{d(H'_0 + H'_* + \Delta H')}{d(Z' + \Delta Z')}$$

Sie vereinfacht sich, wenn man bedenkt, dass H , ΔH_0 , Z und H'_0 bloß von den Coordinaten des leuchtenden Punktes abhängen und demnach hier als konstant zu betrachten sind. Ferner kann man die Grösse 3. Ordnung $\Delta H'$, $\Delta Z'$ gegenüber den Grössen erster Ordnung H'_* und Z' vernachlässigen. Wir setzen damit nur an stelle des Strahlensystems das durch die Verbindungslinien der entsprechenden Punkte P und Q bestimmt ist, ein solches, welches die Punkte P mit den Näherungswerten von Q verknüpft. Dessen Brennfläche kann aber von der des erstbetrachteten Strahlensystems nur um Grössen verschieden sein, die ohnedies ausser Berücksichtigung bleiben, nämlich um solche 4. Ordnung in Richtung der optischen Axe und solche von der 5. Ordnung senkrecht dazu. Somit erhalten wir die Gleichung:

$$\frac{d(\Delta H_*)}{d(\Delta Z)} = \frac{dH'_*}{dZ'} = \frac{\frac{\partial(\Delta H_*)}{\partial H'_*} dH'_* + \frac{\partial(\Delta H_*)}{\partial Z'} dZ'}{\frac{\partial(\Delta Z)}{\partial H'_*} dH'_* + \frac{\partial(\Delta Z)}{\partial Z'} dZ'} \quad (14)$$

Dieselbe geht durch Ausmultiplikation in folgende Differentialgleichung zwischen H'_* und Z'_* über:

$$(dH'_*)^2 \frac{\partial(\Delta Z)}{\partial H'_*} + dH'_* dZ' \left(\frac{\partial(\Delta Z)}{\partial Z'} - \frac{\partial(\Delta H_*)}{\partial H'_*} \right) - (dZ')^2 \frac{\partial(\Delta H_*)}{\partial Z'} = 0 \quad (15)$$

Sie bestimmt die Fortschreitungsrichtungen in der Ebene B_{2k+1} , für welche benachbarte Strahlen sich schneiden. Dieselben Fortschreitungsrichtungen lassen sich auch mittels der ersten Näherung auf die Diaphragmenebene übertragen.

Wir setzen nun die aus den Formeln 12 folgenden Werte der Differentialquotienten von ΔH_* und ΔZ nach H'_* und Z ein. Dieselben sind:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\Delta H_*)}{\partial H'_*} &= 3AH'^*{}^2 + AZ'^2 + (L + 2M)H^2 \\ \frac{\partial(\Delta H_*)}{\partial Z'} &= 2AZ'H'_* \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial(\Delta Z)}{\partial H'_*} &= 2 A Z' H'_* \\ \frac{\partial(\Delta Z)}{\partial Z'} &= A H'^2_* + 3 A Z'^2 + L H^2\end{aligned}\quad (16)$$

Die Differentialgleichung 15 geht dadurch in nachstehende Form über:

$$(dH'_*)^2 + \frac{dH'_*}{H'_*} \cdot \frac{dZ'}{Z'} \left(Z'^2 - H'^2_* - \frac{M H^2}{A} \right) - (dZ')^2 = 0 \quad (17)$$

Das Produkt der Wurzeln dieser in $\frac{dH'_*}{dZ'}$ quadratischen Gleichung ist gleich -1 ; d. h. die durch sie in jedem Punkte der Ebene definierten Fortschreitungsrichtungen stehen senkrecht zu einander. Dieser Umstand stimmt mit der von vorneherein feststehenden Eigenschaft des Systems der gebrochenen Strahlen als Normalensystem überein. Bei einem solchen müssen nämlich die durch einen Strahl und die beiden benachbarten ihn schneidenden Strahlen gelegten Ebenen die sog. Brennebenen senkrecht zu einander stehen. Da alle Strahlen des Systems nur wenig von der senkrechten Richtung zur Ebene B_{2k+1} abweichen, so wird auch das durch jeden derselben gehende rechtwinkelige Brennebenenpar von der Ebene B_{2k+1} nach zwei bis auf Winkelgrößen von der ersten Ordnung rechtwinkligen Geraden geschnitten.

Wird die Differentialgleichung integriert, so geben die Integralecurven eine Zusammenfassung der gebrochenen Strahlen nach Developpablen. Das allgemeine Integral der Differentialgleichung ist durch folgende Schar confokaler Kegelschnitte gegeben, wobei λ die Integrationskonstante bedeutet:

$$\frac{H'^2_*}{\lambda} + \frac{Z'^2}{\frac{M H^2}{A} + \lambda} = 1 \quad (18)$$

Denken wir uns diese in den reducierten Coordinaten geschriebene Gleichung in den Massstab der Diaphragmenebene übertragen, so definiert sie dort eine bestimmte Schar confokaler Kegelschnitte. Legen wir durch den leuchtenden Punkt als Spitze und die Kegelschnitte der Diaphragmenebene Strahlenkegel, so haben dieselben die Eigenschaft, dass ihre Erzeugenden nach der Brechung im dioptrischen System Developpable bilden.

Es kann daher der Satz ausgesprochen werden:

Ordnet man die von einem Punkt ausserhalb der Axe eines dioptrischen Systems aus einfallenden Strahlen so nach Kegeln an, dass die Erzeugenden derselben nach ihrem Durchgang durch das dioptrische System Developpable bilden, dann werden diese Kegel von einer zur optischen Axe senkrechten Transversalebene nach einer Schar confokaler Kegelschnitte geschnitten.

Die reellen Brennpunkte dieser Kegelschnitte sind auf der Z' - oder H'_* -Axe, je nachdem die Grösse $\frac{MH^2}{A}$ positiv oder negativ ist.

Es liegt sehr nahe, in die weiteren Formeln elliptische Coordinaten einzuführen. Wir schreiben zu dem Ende die Gleichung 18 nochmals mit dem Parameter μ an und drücken dann H'^2 und Z'^2 durch die beiden Parameter λ und μ aus.

$$H'^2 = -\frac{\lambda\mu \cdot A}{MH^2}; \quad Z'^2 = \frac{(MH^2 + A\lambda)(MH^2 + A\mu)}{AMH^2} \quad 19)$$

Diese Parameter sollen nun auch in die Ausdrücke für die Correkturen eingeführt werden. Das ergibt, nachdem man die Gleichungen zum Quadrat erhoben und berücksichtigt hat, dass:

$$R'^2 = \frac{MH^2 + A(\lambda + \mu)}{A} \text{ ist, folgendes:} \quad 20)$$

$$\left. \begin{aligned} (\Delta H'_*)^2 &= \frac{-A\lambda\mu[(3M+L)H^2 + A(\lambda + \mu)]^2}{MH^2} \\ (\Delta Z)^2 &= \frac{(MH^2 + A\lambda)(MH^2 + A\mu)[(M+L)H^2 + A(\mu + \lambda)]^2}{AMH^2} \end{aligned} \right\} \quad 21)$$

Man kann jetzt wieder von den reducierten Coordinaten Z' und H'_* und den ebenfalls in reduciertem Masse ausgedrückten Correkturen ΔZ und $\Delta H'_*$ zu den wirklichen auf die Ebenen B_{2k+1} und A_{2k+1} bezüglichen Werten η'_{2k+1} , ζ'_{2k+1} , $\Delta\eta'_{2k+1}$, $\Delta\zeta'_{2k+1}$ übergehen, indem man die Beziehungen 4a und 4b benützt:

$$\begin{aligned} \Delta H'_* &= \frac{\sigma_{2k+1}}{\nu_{2k+1}} \Delta\eta'_{2k+1} & \Delta Z &= \frac{\sigma_{2k+1}}{\nu_{2k+1}} \Delta\zeta'_{2k+1} \\ H'_* &= \frac{\sigma'_{2k+1}}{\nu_{2k+1}} \eta'_{2k+1} & Z' &= \frac{\sigma'_{2k+1}}{\nu_{2k+1}} \zeta'_{2k+1} \end{aligned}$$

Dann ergibt sich:

$$\eta'^2_{2k+1} = -\frac{\lambda\mu A}{MH^2} \left(\frac{\nu_{2k+1}}{\sigma'_{2k+1}} \right)^2, \quad \zeta'^2_{2k+1} = \frac{(MH^2 + A\lambda)(MH^2 + A\mu)}{AMH^2} \left(\frac{\nu_{2k+1}}{\sigma'_{2k+1}} \right)^2 \quad 22)$$

$$\begin{aligned} (\Delta\eta'_{2k+1})^2 &= -\frac{\lambda\mu A((3M+L)H^2 + A(\lambda + \mu))^2}{MH^2} \left(\frac{\nu_{2k+1}}{\sigma'_{2k+1}} \right)^2 \\ (\Delta\zeta'_{2k+1})^2 &= \frac{(MH^2 + A\lambda)(MH^2 + A\mu)((M+L)H^2 + A(\lambda + \mu))^2}{AMH^2} \left(\frac{\nu_{2k+1}}{\sigma'_{2k+1}} \right)^2 \quad 23) \end{aligned}$$

Die Entfernung der beiden Ebenen B_{2k+1} und A_{2k+1} ist nach Früherem 13):

$$K = \frac{T\nu_{2k+1}}{\sigma_{2k+1}\sigma'_{2k+1}}$$

Die 4 Gleichungen 22 und 23 bestimmen das System der gebrochenen Strahlen. Der Anfangspunkt O_0 der Coordinaten in der Ebene A_{2k} liegt um eine kleine Grösse

3. Ordnung: $\Delta \eta_{02k+1} = \Delta H_0 \frac{\nu_{2k+1}}{\sigma_{2k+1}}$ über dem Näherungspunkte des Bildes des leuchtenden Punktes. Der Anfangspunkt O'_0 in der Ebene B_{2k+1} befindet sich um die Grösse 1. Ordnung: $\eta'_{02k+1} = H'_0 \frac{\nu'_{2k+1}}{\sigma'_{2k+1}}$ über dem Schnittpunkt mit der optischen Axe.

Der Strahl $O'_0 O_0$, welcher dem Wertepaar $\lambda=0, \mu=0$ entspricht, wurde von Seidel gelegentlich als ausgezeichnete Strahl bezeichnet. Um ihn herum gruppiert sich das Strahlensystem symmetrisch. Die Strahlen, welche Punkte der Ebenen A_{2k+1} B_{2k+1} verbinden, für die ein Parameterwert konstant ist, bilden eine abwickelbare Fläche. Die Rückkehrkanten aller solchen abwickelbaren Flächen erfüllen die beiden Mäntel der Brennfläche.

Es soll nun die Rückkehrkante gefunden werden, welche einer Developpablen $\mu = \text{const}$ entspricht. Bezeichnet für einen Moment dS die Entfernung zweier benachbarter Punkte der Curve $\mu = \text{const}$ in der Ebene B_{2k+1} und ds die Entfernung der entsprechenden Punkte in der Ebene A_{2k+1} , ferner x die Entfernung des Schnittpunktes F der durch die beiden Punktepaare bestimmten Strahlen von der Ebene A_{2k+1} in der Richtung des ausgezeichneten Strahles gemessen, dann findet folgende Proportion statt:

$$\frac{ds}{dS} = \frac{x}{K \sec \omega + x},$$

wobei ω den kleinen Winkel 1. Ordnung des ausgezeichneten Strahles mit der optischen Axe bedeutet. Da x von der 2. Grössenordnung, K aber eine endliche, d. h. mit den Krümmungsradien vergleichbare Grösse ist, so kann man bis auf Grössen 4. Ordnung genau auch schreiben:

$$\frac{ds}{dS} = \frac{x}{K}$$

Nun ist für $\mu = \text{const}$. $\frac{ds}{dS} = \frac{d(\Delta \eta_{*2k+1})}{d\eta'_{*2k+1}} = \frac{d(\Delta \zeta_{2k+1})}{d\zeta_{2k+1}}$, daher:

$$x = K \frac{d(\Delta \eta_{*2k+1})}{d\eta_{*2k+1}} = \frac{T \nu_{2k+1}}{\sigma_{2k+1} \sigma'_{2k+1}} \cdot \frac{d(\Delta H_*)}{dH'_*} \cdot \frac{\sigma'_{2k+1}}{\sigma_{2k+1}} = \frac{d\Delta H_*}{dH_*} \cdot \frac{T \nu_{2k+1}}{\sigma_{2k+1}^2} \quad (24)$$

$$\text{und: } \frac{d(\Delta H_*)}{dH'_*} = \frac{\partial(\Delta H_*)^2}{\partial \lambda} \cdot \frac{\partial \lambda}{\partial H'^2_*} \cdot \frac{H'_*}{\Delta H_*} = (3M + L) H^2 + A(3\lambda + \mu),$$

woraus folgt:

$$x = \frac{T \nu_{2k+1}}{\sigma_{2k+1}^2} [(3M + L) H^2 + A(3\lambda + \mu)] \quad (25)$$

Damit ist die in der Richtung des ausgezeichneten Strahles liegende Coordinate eines Punktes der Rückkehrkante durch λ und μ ausgedrückt. Um ein Gleiches auch für die Coordinaten y und z in der Richtung der $A\eta_*$ und $A\zeta$ -Aren thun zu können, denken wir uns durch jeden Punkt der Ebene A_{2k+1} statt des durch ihn gehenden Strahles eine Parallele zu der Richtung, die der entsprechende Strahl der Gauss'schen Näherung hat, gezogen und auf ihr die Grösse x abgetragen, wodurch man den Punkt F' erhält. Diese Parallele wird, wenn es sich blos um Entfernungen 2. Ordnung von der Ebene A_{2k+1} handelt, nur um Grössen 5. Ordnung von dem wahren Strahl abweichen, da ja die Winkel des wahren Strahles denen des genäherten bis auf Grössen 3. Ordnung gleich sind. Ebenso wird die Grösse x , welche als Entfernung unseres Punktes F von A_{2k+1} in der Richtung des ausgezeichneten Strahles gemessen gefunden wurde, nur um Grössen 4. Ordnung von der Entfernung jenes Punktes F auf dem wahren Strahle gemessen unterschieden sein, da die Richtungen, in welchen die verglichenen Entfernungen 2. Ordnung gemessen wurden, beide bis auf Winkelgrössen 1. Ordnung senkrecht zur Ebene A_{2k+1} standen. Somit wird der Punkt F' bis auf Grössen 5. Ordnung in der Richtung der z und y -Aren und bis auf eine Grösse 4. Ordnung in der Richtung des ausgezeichneten Strahles mit dem Punkte F coincidieren. Der Punkt F' , den wir bei der beabsichtigten Genauigkeit mit F verwechseln können, hat folgende Coordinaten:

$$\eta = A\eta_{*2k+1} - x \frac{\eta'_{*2k+1}}{K}; \quad z = A\zeta_{2k+1} - x \frac{\zeta'_{2k+1}}{K} \quad (26)$$

Nach Einführung der Parameter λ und μ mittels der Gleichungen 22, 23 und 25 ergibt sich:

$$y^2 = \frac{-4\lambda^3\mu A^3}{MH^2} \frac{v_{2k+1}^2}{\sigma_{2k+1}^2}; \quad z^2 = \frac{4(MH^2 + A\lambda)^3(MH^2 + A\mu)}{AMH^2} \frac{v_{2k+1}^2}{\sigma_{2k+1}^2}; \quad (27)$$

$$x = \frac{T v_{2k+1}}{\sigma_{2k+1}^2} [(3M + L)H^2 + A(3\lambda + \mu)]$$

Diese 3 Gleichungen für die Coordinaten eines Punktes der Rückkehrkante der Developpablen stellen zugleich die Gleichungen des geometrischen Ortes derselben, also der Brennfläche, in Parameterform bezogen auf ein System geodätischer Linien $M = \text{const.}$ und dazu konjugierter Curven $\lambda = \text{const.}$ dar.

Eliminiert man noch den Parameter μ der geodätischen Linien mit Hilfe der letzten Gleichung, so erhält man:

$$\left. \begin{aligned} z^2 &= \frac{4(MH^2 + A\lambda)^3}{AMH^2} \left(x \frac{\sigma_{2p+1}^2}{T v_{2p+1}} - (2M + L)H^2 - 3A\lambda \right) \frac{v_{2k+1}^2}{\sigma_{2k+1}^2} \\ y^2 &= \frac{-4\lambda^3}{MH^2} \left(x \frac{\sigma_{2p+1}^2}{T v_{2p+1}} - (3M + L)H^2 - 3A\lambda \right) \frac{v_{2k+1}^2}{\sigma_{2k+1}^2} \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

Setzt man hierin $A\lambda = \frac{v - MH^2}{2}$, so ergibt sich:

$$\left. \begin{aligned} z^2 &= \frac{-1}{4 A M H^2} (v + M H^2)^3 \left(3v - M H^2 - 2 \left[x \frac{\sigma^2_{2k+1}}{T v_{2k+1}} - (M + L) H^2 \right] \right) \frac{v^2_{2k+1}}{\sigma^2_{2k+1}} \\ y^2 &= \frac{1}{4 A M H^2} (v - M H^2)^3 \left((3v + M H^2 - 2 \left[x \frac{\sigma^2_{2k+1}}{T v_{2k+1}} - (M + L) H^2 \right]) \frac{v^2_{2k+1}}{\sigma^2_{2k+1}} \right) \end{aligned} \right\} 29)$$

Die schon erwähnte Gleichung derselben Fläche, welche v. Seidel in dem Briefe an Kummer citiert, lautet:

$$\begin{aligned} -k z^2 &= (v + A)^3 (3v - A - 2x) \\ k y^2 &= (v - A)^3 (3v + A - 2x). \end{aligned} \quad 30)$$

Mit derselben wird die hier abgeleitete Gleichung identisch, wenn man die Grössen:

$$\frac{4 A M H^2 \sigma^2_{2k+1}}{v^2_{2k+1}}, \quad \frac{M H^2}{k}, \quad \frac{x \sigma^2_{2k+1}}{T v_{2k+1}} - (M + L) H^2$$

mit folgenden: k , A , x vertauscht.

Die Fläche steht in sehr naher Beziehung zur Centrafläche eines elliptischen Paraboloides. Wenn die Gleichung des letzteren folgendermassen geschrieben wird:

$$\frac{y^2}{a} + \frac{z^2}{b} - 2x - (a + b) = 0, \quad 31)$$

so ist die Gleichung der Centrafläche:

$$\begin{aligned} -b(a - b) Z^2 &= \left(v + \frac{a - b}{2} \right)^3 \left(3v - \frac{a - b}{2} - 2X \right) \\ a(a - b) Y^2 &= \left(v - \frac{a - b}{2} \right)^3 \left(3v + \frac{a - b}{2} - 2X \right). \end{aligned} \quad 32)$$

Sie geht in die Seidel'sche Gleichung der Brennfläche über, wenn:

$$X = x, \quad Y = y, \quad Z = \sqrt{\frac{a}{b}} z, \quad \text{ferner: } \frac{a - b}{2} = A \quad a(a - b) = k \text{ gesetzt wird.}$$

Die Gestalt der Brennfläche wurde von Herrn L. Schleiermacher¹⁾ diskutiert und durch ein Modell versinnlicht. Da in der Richtung der x -Axe alle Dimensionen von einer anderen Grössenordnung sind als in der Richtung der beiden anderen Axen, so sind die ersteren im Vergleich zu den letzteren stark verkürzt dargestellt.

Ohne die Diskussion, die keinerlei besondere Schwierigkeiten bietet, hier umständlich zu wiederholen, soll das Resultat derselben in einer Weise dargestellt werden,

1) Mathematische Modelle, angefertigt im math. Institut des K. Polytechnikums zu München. Abteilung II. Unter Leitung von Prof. Dr. Brill. Eine photographische Reproduktion des Schleiermacher'schen Modelles siehe Tafel I.

an die sich die spätere Weiterverwendung der Brennfläche naturgemäss anknüpft. Wir bilden nämlich die Brennfläche in eine Ebene mit den rechtwinkligen Coordinaten $\lambda \mu$ ab, indem wir jedem durch ein Parameterpar bestimmten Punkt der Fläche denjenigen Punkt der $\lambda \mu$ -Ebene zuordnen, dessen rechtwinklige Coordinaten eben diese Parameter sind. Die y -Coordinate der Fläche ist nur dann reell, wenn λ und μ entgegengesetztes Zeichen haben, die z -Coordinate ebenso, wenn ein Gleiches mit den Ausdrücken $MH^2 + A\lambda$ und $MH^2 + A\mu$ der Fall ist. Es entsprechen daher reelle Punkte der Fläche nur jenen Punkten der $\lambda \mu$ -Ebene, die in zwei in nebenstehender Figur 2 unschraffiert gelassenen Streifen liegen.

Fig. 2.

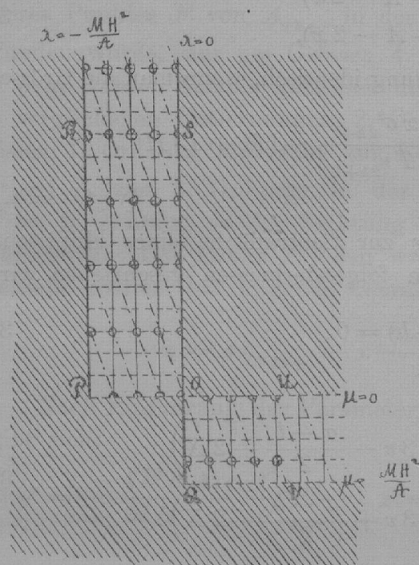
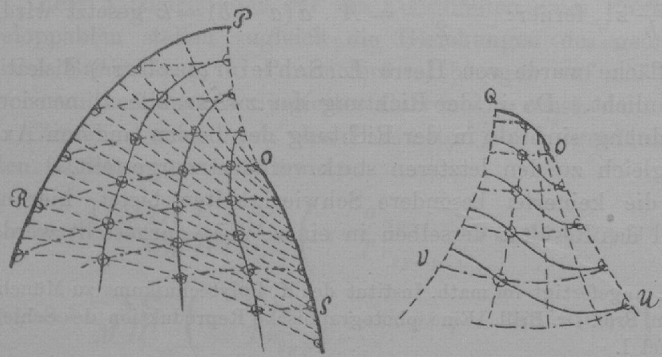


Fig. 3.



Jeder der Streifen entspricht einem Mantel der Brennfläche; jedem Punkt $\lambda \mu$ desselben gehören 4 symmetrisch in Bezug auf die XY - und XZ -Ebene gelegene Punkte eines solchen Mantels an. Der Streifen ist also gleichsam die Abbildung von einem Viertel des entsprechenden Mantels. Für $\lambda = 0$ und $\lambda = -\frac{MH^2}{A}$ hat die Brennfläche Parabeln

als Rückkehrkanten in der XY - und XZ -Ebene, da für diese Parameterwerte y^2 resp. z^2 proportional mit λ^3 resp. $(MH^2 + A\lambda)^3$ und damit proportional mit der Veränderung von X wird, welches ja linear von λ abhängig ist. Für die Parameterwerte $\lambda = 0$ $\mu = 0$ hängen die beiden Mäntel im Punkte O zusammen. Ebenen Schnitten der Brennfläche parallel zur XY -Ebene entsprechen Gerade $3\lambda + \mu = \text{const.}$ Die Schnitte mit den beiden Coordinatenebenen xy und xz zerfallen in die schon erwähnten

Rückkehrkanten (dreifach zählende apollonische Parabeln von gleichem Parameter) und in einfach zählende Neil'sche Parabeln. In der XZ -Ebene berührt die apollonische Parabel die Neil'sche in zwei Punkten mit den Parametern $\lambda = 0$ $\mu = 0$; denselben, in welchen die 2 Mäntel zusammenhängen. Die Fläche ist

neunter Ordnung. Die beiden Mäntel durchschneiden sich in einer Doppelkurve 12. Ordnung, die indessen mit der Eigenschaft der Fläche als Brennfläche nichts weiter zu thun hat. Den Geraden $\mu = \text{const}$ der Ebene entsprechen geodätische Linien der Fläche, den dazu senkrechte Geraden $\lambda = \text{const}$ dazu conjugierte Curven, welche daher einen ähnlichen Verlauf haben müssen, wie er in der Figur 3 angedeutet ist. Wenn man in dem Gleichungssystem der Fläche die Parameterwerte λ und μ vertauscht, so wird dadurch, die Fläche selbst natürlich nicht geändert; es ändert sich eben nur die Bedeutung der Parameter; $\lambda = \text{const}$ werden geodätische Linien, $\mu = \text{const}$ conjugierte Curven. Ein Parameterpaar $\lambda\mu$ repräsentiert einen Strahl, oder genauer gesagt 4 symmetrisch gelegene Strahlen, von denen jeder in zwei Punkten, die auf verschiedenen Mänteln liegen, die Brennfläche berührt. Hiedurch werden auch die beiden Mäntel der Brennfläche punktweise aufeinander bezogen, beziehungsweise abgebildet und diese Abbildung überträgt sich ebenso auf die Streifen in der $\lambda\mu$ -Ebene. Zwei Punkte dieser Ebene, für welche die λ und μ -Coordinationen dieselben Werte in vertauschter Anordnung haben, die also symmetrisch zur Geraden $\lambda = \mu$ liegen, entsprechen demnach solchen Punkten der Brennfläche, in denen ein und derselbe Strahl gleichzeitig berührt.

Unter den ebenen Schnitten der Brennfläche parallel zur xy -Ebene ist jener ausgezeichnet, welcher durch den Punkt $\lambda = 0$ $\mu = 0$ geht.

Für ihn ist $x = \frac{Tv_{2k+1}}{\sigma_{2k+1}^2} (3M + L)H^2$ und $3\lambda + \mu = 0$, oder $\mu = -3\lambda$.

Dies gibt für die z und y -Coordinate:

$$y^2 = \frac{12A^3\lambda^4}{MH^2} \cdot \frac{v_{2k+1}^2}{\sigma_{2k+1}^2}; \quad z^2 = \frac{4(MH^2 + A\lambda)^3(MH^2 - 3A\lambda)}{AMH^2} \cdot \frac{v_{2k+1}^2}{\sigma_{2k+1}^2} \quad (33)$$

Aus der ersten Gleichung folgt: $\lambda^2 = \pm y \frac{H\sigma_{2k+1}}{2\sqrt{3}Av_{2k+1}} \sqrt{\frac{M}{A}}$.

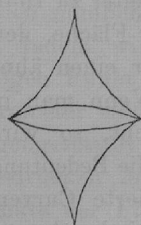
Entwickelt man die linke Seite der zweiten Gleichung und ordnet man nach geraden und ungeraden Potenzen von λ , so folgt:

$$AMH^2z^2 \frac{\sigma_{2k+1}^2}{v_{2k+1}^2} - 4M^4H^8 + 24M^2H^4A^2\lambda^2 + 12A^4\lambda^4 = 32MH^2A^3\lambda^3.$$

Nun quadriert man auf beiden Seiten und führt den Wert für λ^2 ein:

$$\begin{aligned} & \left\{ AMH^2z^2 \frac{\sigma_{2k+1}^2}{v_{2k+1}^2} - 4M^4H^8 \pm \frac{12}{\sqrt{3}} M^2H^4Ay \frac{\sigma_{2k+1}}{v_{2k+1}} \sqrt{\frac{M}{A}} + AMH^2y^2 \frac{\sigma_{2k+1}^2}{v_{2k+1}^2} \right\}^2 \\ &= \frac{128}{3\sqrt{3}} M^3H^7A^2y^3 \sqrt{\frac{M}{A}} \frac{\sigma_{2k+1}^3}{v_{2k+1}^3} \\ & \left\{ z^2 + y^2 - \frac{4M^3H^6}{A} \cdot \frac{v_{2k+1}^2}{\sigma_{2k+1}^2} \pm 4\sqrt{3}MH^3y \frac{v_{2k+1}}{\sigma_{2k+1}} \sqrt{\frac{M}{A}} \right\}^2 \\ &= \frac{128}{3\sqrt{3}} MH^3y^3 \frac{v_{2k+1}}{\sigma_{2k+1}} \sqrt{\frac{M}{A}}. \end{aligned} \quad (34)$$

Fig. 4.



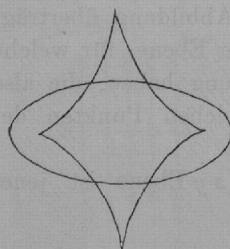
Diese Gleichung stellt zwei in Bezug auf die z -Axe symmetrisch liegende, dreispitzige Hypocycloiden dar; und zwar beträgt der Radius des äusseren Bahnkreises:

$$\frac{4}{\sqrt{3}} M H^3 \frac{\nu_{2k+1}}{\sigma_{2k+1}} \sqrt{\frac{M}{A}};$$

der des inneren rollenden Kreises ist ein Drittel davon. (Fig. 4.)

Die weiteren Schnitte der Brennfläche parallel zur yz -Ebene bestehen, wie am einfachsten aus der Abbildung in der $\lambda\mu$ -Ebene

Fig. 5.



zu ersehen ist, für: $x > \frac{T \nu_{2k+1}}{\sigma_{2k+1}^2} (3M + L) H^2$ aus einem ovalen und einem asteroidenartigen Zweige (Fig. 5); wenn:

$$x < \frac{T \nu_{2k+1}}{\sigma_{2k+1}^2} (3M + L) H^2, \text{ aber } > T \frac{\nu_{2k+1}}{\sigma_{2k+1}^2} (2M + L) H^2$$

aus zwei ineinanderliegenden, spindelförmigen Zweigen (Fig. 6);

wenn ferner $x < T \frac{\nu_{2k+1}}{\sigma_{2k+1}^2} (2M + L) H^2$ aber $> T \frac{\nu_{2k+1}}{\sigma_{2k+1}^2} L H^2$

Fig. 6.



aus einem solchen, endlich, wenn x noch kleiner als letzterer Wert ist, wird die Schnittkurve ganz imaginär.

Aus der Form, welche v. Seidel der Gleichung der Brennfläche gegeben hat, ersieht man am einfachsten, dass alle durch dieselbe definierten Flächen, abgesehen von ihrer Lage zum dioptrischen System und von einzelnen Ausnahmefällen, die im nächsten Abschnitt erledigt werden, in affiner Beziehung zu einander stehen, wobei indessen das Verhältnis der z - und y -Coordinationen unverändert bleibt. Für ein und dasselbe dioptrische System und vorgegebene Objektebene sind die Grössen A , M , T , h , σ , ν constant; es ändert sich nur mit dem jeweils benützten Gesichtsfeld proportional die Grösse H . Die Längsdimensionen der Brennfläche hängen, wie aus der Gleichung 25 für die x -Coordinationen hervorgeht, in quadratischem Verhältnis von H und damit vom Gesichtsfeld ab; die Querdimensionen dagegen, wie sich aus den Gleichungen für z^2 und y^2 , oder noch einfacher aus dem Ausdruck für den Radius des Hypocycloidenkreises ergibt, von den dritten Potenzen der Grösse H . Je mehr man sich demnach von der Mitte des Gesichtsfeldes entfernt, um so grösser wird das an sich kleine Verhältnis der Querdimensionen zu den Längsdimensionen der Fläche.

Was nun die Lage der Brennfläche im Raum gegenüber der optischen Axe und der genäherten Bildebene bei verschiedener Lage des leuchtenden Punktes in der Objektebene betrifft, so ist es nützlich, zunächst die einzelnen x -Axen der Coordinatensysteme zu verfolgen, auf welche die Gleichung der Brennfläche bezogen erscheint.

Diese x -Axen sind die jeweils ausgezeichneten Strahlen $O'_0 O_0$ der zu den Brennflächen gehörigen Strahlensysteme. Dieselben liegen mit dem leuchtenden Punkt und der optischen Axe in einer Ebene. Alle in Betracht kommenden leuchtenden Punkte sollen in derselben Ebene durch die optische Axe angenommen werden, was in an- betracht der Symmetrie des Linsensystems in bezug auf die optische Axe offenbar zulässig ist. Von den Punkten O'_0 und O_0 liegt der erstere in einer Entfernung:

$$\eta'_{0\ 2k+1} = H'_0 \frac{\nu_{2k+1}}{\sigma'_{2k+1}} = \frac{B}{A} H \frac{\nu_{2k+1}}{\sigma'_{2k+1}}, \text{ der zweite dagegen in der Entfernung:}$$

$$\eta_{2k+1} + \Delta \eta_{0\ 2k+1} = (H + \Delta H_0) \frac{\nu_{2k+1}}{\sigma'_{2k+1}} \text{ von der Axe. Wenn wir von dem Correktionsgliede } \Delta \eta_{0\ 2k+1} \text{ absehen, sind beide Entfernungen proportional der Grösse } H \text{ und ihr Verhältniss beträgt: } \frac{B}{A} \frac{\nu_{2k+1}}{\sigma'_{2k+1}}.$$

Daher werden alle Verbindungslinien $O'_0 O$ in erster Näherung durch einen bestimmten Punkt W der Axe gehen, dessen Abstand ε von der Ebene B_{2k+1} durch nachstehende Formel ausgedrückt wird:

$$\varepsilon = \eta'_{0\ 2k+1} \cdot \frac{K}{\eta'_{0\ 2k+1} - \eta_{2k+1}} = - \frac{BT\nu_{2k+1}}{A\sigma'_{2k+1}(B\sigma_{2k+1} - A\sigma'_{2k+1})}. \quad (35)$$

Wir können daher folgenden Satz aussprechen: Die Symmetrieaxen (ausgezeichneten Strahlen) der Brennflächen, die zu den leuchtenden Punkten einer Objektebene gehören, convergieren nach einem Punkte W der optischen Axe.

Nunmehr betrachten wir die Lage einzelner ausgezeichnete Punkte der Brennfläche auf dem jeweiligen ausgezeichneten Strahl. Als solche bieten sich drei dar: Die Scheitel α und β der beiden Rückkehrparabeln und der Punkt γ , in welchem die zu Fig. 4 gehörige Schnittebene die Axe trifft. Für diese drei Punkte sind die x -Coordi- naten, die bis auf hier zu vernachlässigende Grössen den Entfernungen von der ge- näherten Bildebene gleichgesetzt werden können, folgende:

$$\alpha \dots \dots x = T \frac{\nu_{2k+1}}{\sigma^2_{2k+1}} L H^2$$

$$\beta \dots \dots x = T \frac{\nu_{2k+1}}{\sigma^2_{2k+1}} (L + 2M) H^2$$

$$\gamma \dots \dots x = T \frac{\nu_{2k+1}}{\sigma^2_{2k+1}} (L + 3M) H^2$$

Sie sind alle dem Quadrate des Gesichtsfeldes proportional. Durch die Punkte α lässt sich demnach mit der hier angestrebten Genauigkeit eine Kugel legen, deren Radius ϱ_α sich folgendermassen ausdrückt:

$$\varrho_\alpha = \frac{\eta_{2k+1}^2}{2x}$$

Es ist nämlich η_{2k+1} bis auf Grössen 3. Ordnung der Entfernung des Punktes α von der optischen Axe gleich und x bis auf Grössen 4. Ordnung dem Abstände desselben Punktes von der Ebene A_{2k+1} . Die Formel stellt daher bis auf Grössen 2. Ordnung den betreffenden endlichen Kugelradius dar. Setzt man nach 4a:

$$\eta_{2k+1} = H \cdot \frac{\nu_{2k+1}}{\sigma_{2k+1}}$$

und den entsprechenden Wert für x , so erhält man:

$$\varrho_\alpha = \frac{\nu_{2k+1}}{2TL} = \frac{S(1)\nu_{2k+1}}{S(4)S(1) - S(2)^2} \quad 36)$$

Analog für die Radien $\varrho_\beta, \varrho_\gamma$:

$$\varrho_\beta = \frac{S(1)\nu_{2k+1}}{S(1)(S(4) + 2S(3)) - 3S(2)^2} \quad 37)$$

$$\varrho_\gamma = \frac{S(1)\nu_{2k+1}}{S(1)(S(4) + 3S(3)) - 4S(2)^2} \quad 38)$$

Nimmt man statt α oder β einen zwischen, oder ausserhalb beiden liegenden Punkt δ , dessen Abstandsverhältnis von α und β wie $\varphi:1$ ist, so werden alle entsprechend liegenden Punkte auf den verschiedenen ausgezeichneten Strahlen auf einer Kugel vom Radius ϱ_δ liegen, der sich, wie leicht zu sehen, aus den Radien ϱ_α und ϱ_β folgendermassen berechnet:

$$\frac{1}{\varrho_\delta} = (1 + \varphi) \frac{1}{\varrho_\alpha} - \varphi \frac{1}{\varrho_\beta} \quad 39)$$

Alle diese Kugeln berühren die Ebene A_{2k+1} in der optischen Axe; jede von ihnen schneidet aus den verschiedenen Brennflächen unter sich ähnliche Brennfiguren, aus, deren Dimensionen vom Centrum des Gesichtsfeldes gegen den Rand zu mit der dritten Potenz der Entfernung von der Axe wachsen. Man kann daher beispielsweise den Satz aussprechen:

Eine Kugel vom Radius ϱ_γ , welche die genäherte Bildebene A_{2k+1} im Schnittpunkte mit der optischen Axe berührt, schneidet alle zu den leuchtenden Punkten der Objektebene A_{-1} gehörigen Brennflächen nach einem Par dreispitziger Hypocyloiden, deren Dimensionen mit der dritten Potenz der Entfernung des leuchtenden Punktes von der optischen Axe wachsen.

§ 3.

Specielle Fälle und Ausartungen der Brennfläche.

Für einen leuchtenden Punkt in der optischen Axe ist die Grösse H gleich Null und damit vereinfachen sich die Formeln derartig, dass die Brennfläche zur Rotationsfläche wird. Es ist dies indessen nicht die einzige Möglichkeit, die Brennfläche zur Rotationsfläche zu machen; es gibt vielmehr dioptrische Systeme, welche für jeden beliebigen leuchtenden Punkt ausser der Axe — innerhalb unserer Näherung — eine Rotationsfläche als Brennfläche liefern. Um dieses zu erkennen, müssen wir auf die Formeln 12 zurückgreifen. Wenn wir hierin die Grösse $M=0$ setzen, was dem Verschwinden des Ausdrucks $S(1)S(3) - S(2)^2$ gleichbedeutend ist, so gehen dieselben in folgende Form über:

$$\begin{aligned} \Delta H_* &= H'_* (A R'_*{}^2 + L H^2) \\ \Delta Z &= Z' (A R'_*{}^2 + L H^2). \end{aligned}$$

Durch Quadrieren und Addieren beiderseits erhält man:

$$(\Delta H_*)^2 + (\Delta Z)^2 = (\Delta R_*)^2 = R'_*{}^2 (A R'_*{}^2 + L H^2)^2, \text{ woraus:}$$

$$\Delta R_* = R'_* (A R'_*{}^2 + L H^2). \quad (40)$$

Durch Division beiderseits:

$$\frac{\Delta H_*}{\Delta Z} = \frac{H'_*}{Z'}. \quad (41)$$

Daraus erkennt man, dass die Schnittpunkte der Strahlen in den beiden Ebenen A_{2k+1} und B_{2k+1} um die betreffenden Anfangspunkte der Coordinaten O_0 und O'_0 nach allen Richtungen symmetrisch liegen, wenn dies in einer Ebene der Fall ist. Entsprechende Punkte beider Ebenen miteinander verbunden geben demnach Strahlen, welche den ausgezeichneten Strahl alle schneiden und um ihn herum symmetrisch gelagert sind. Das confokale Kegelschnittsystem der Ebenen B geht, wie aus den Formeln ersichtlich ist, in eine Schar concentrischer Kreise: $R'_* = \text{const.}$ und das Büschel ihrer Radien: $\frac{H'_*}{Z'} = \text{const.}$ über.

Für den Meridian der Brennfläche lassen sich dann die Formeln ableiten:

$$\begin{aligned} x &= T \frac{\nu_{2k+1}}{\sigma_{2k+1}^2} (3 A R'_*{}^2 + L H^2) \\ r &= \sqrt{y^2 + z^2} = -2 A R'_*{}^3 \frac{\nu_{2k+1}}{\sigma_{2k+1}^2}, \text{ woraus:} \\ r^2 &= \frac{4}{27} \frac{\nu_{2k+1}^2}{\sigma_{2k+1}^2} \cdot \frac{1}{A} \left(x \frac{\sigma_{2k+1}^2}{T \nu_{2k+1}} - L H^2 \right)^2. \quad (42) \end{aligned}$$

Diese Gleichung stellt eine Neil'sche Parabel dar, deren Spitze von der Ebene A_{2k+1} um die Grösse $x = \frac{L T \nu_{2k+1}}{\sigma_{2k+1}^2} H^2$ absteht. Die Tangente in der Spitze ist die Rotationsaxe der Brennfläche. Alle Spitzen der Brennflächen, die den leuchtenden Punkten der Objektebene zugehören, liegen wieder auf einer Kugelfläche, deren Radius durch den Ausdruck:

$$\varrho_a = \frac{\nu_{2k+1}}{2 T L} = \frac{S(1) \nu_{2k+1}}{S(4) S(1) - S(2)^2} \quad (43)$$

gegeben ist.

Da der Parameter der Neil'schen Parabel von der Grösse H (dem Gesichtsfeld) unabhängig ist, so sind in diesem Falle alle Brennflächen kongruent. Daher der Satz: Wenn für ein gegebenes dioptrisches System und eine gegebene Objektebene der Ausdruck: $S(1)S(3) - S^2(2)$ verschwindet, so sind alle Brennflächen, die zu leuchtenden Punkten der Objektebene gehören, congruente Rotationsflächen, mit einer Neil'schen Parabel als Meridian,

deren Spitzen auf einer Kugel vom Radius $\varrho_a = \frac{S(1) \nu_{2k+1}}{S(4) S(1) - S^2(2)}$ liegen.

Verschwindet auch $S(1)S(4) - S(2)^2$, ohne dass $S(1) = 0$ wird, was das Verschwinden von $S(2)$ und $S(4)$ nach sich zieht, so geht jene Kugel in die genäherte Bildebene über.

Wird in den Formeln 12 $H = 0$ gesetzt, also der leuchtende Punkt in der Axe angenommen, so werden dieselben auch von M unabhängig und in diesem Falle ist daher die Brennfläche dieselbe, gleichviel ob $M = 0$ ist oder nicht. Die Formel 42 gilt daher stets für die Brennfläche des leuchtenden Punktes, der in der Axe liegt.

Es ist bisher immer die stillschweigende Voraussetzung gemacht worden, dass $S(1) = 2 A T^3$ nicht verschwinde. Denn sonst wäre ja die Reduktion der Gleichungen 8 auf die symmetrische Form nicht ausführbar gewesen, da diese eine Koordinatenverschiebung um $H'_0 = \frac{B}{A} H$ notwendig machte. Nur in dem einen Falle, wo $H = 0$,

das heisst der leuchtende Punkt in der Axe angenommen ist, fällt diese Verschiebung fort und für diesen Fall gelten also auch unsere Gleichungen, wenn $A = 0$ gesetzt wird. Dann wird aber der Parameter der Neil'schen Parabel, die den Meridian der Brennfläche bestimmt, unendlich gross, es existiert überhaupt keine Brennfläche mehr, alle von dem leuchtenden Punkt der Axe ausgehenden Strahlen schneiden sich nach der Brechung bis auf Abweichungen 5. Ordnung wieder in einem Punkt. Wenn demnach $S(1) = 0$ wird, so ist der Kugelgestaltsfehler des dioptrischen Systems in der Axe gehoben. Unter dieser Voraussetzung ist eine symmetrische Gestaltung der Formeln für einen leuchtenden Punkt ausserhalb der Axe, wie sich herausstellen wird, überhaupt ausgeschlossen. Wenn $A = 0$ ist, vereinfachen sich die Formeln 8 zunächst folgendermassen:

$$\begin{aligned}\Delta H &= H(-3BH'^2 + HH'(E+2G) - BZ'^2) - DH^3 \\ \Delta Z &= Z'(EH^2 - 2BHH').\end{aligned}$$

Die erste von beiden lässt sich durch Parallelverschiebung des Coordinatensystems in der Richtung der H' -Axe noch weiter reducieren:

$$H' = H'_0 + H'_*, \quad H'_0 = \frac{G}{2B} H = \frac{2\chi S(2) + TS(3)}{2S(2)} H \quad (44)$$

$$\begin{aligned}\Delta H &= HH'_*(H(E-G) - 2BH'_*) - BHR'^2_* - DH^3 \\ \Delta Z &= HZ'(H(E-G) - 2BH'_*).\end{aligned} \quad (45)$$

Es soll wieder der von der Oeffnung unabhängige Teil von ΔH abgetrennt und mit ΔH_0 bezeichnet werden.

$$\Delta H = \Delta H_* + \Delta H_0 \quad \Delta H_0 = -DH^3 = -\frac{3\chi^2 S(2) + \chi T(2S(3) + S(4)) + T^2 S(5)}{2T^2} H^3$$

Die beiden Gleichungen:

$$\begin{aligned}\Delta H_* &= HH'_*(H(E-G) - 2BH'_*) - BHR'^2_* \\ \Delta Z &= HZ'(H(E-G) - 2BH'_*)\end{aligned} \quad (46)$$

werden nun ganz analog den Gleichungen 12 weiter behandelt.

Um die Strahlen des austretenden Strahlensystems nach Developpablen zu ordnen, bilden wir die Differentialgleichung 15, wobei wir folgende Werte für die Differentialquotienten einzuführen haben:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Delta H_*}{\partial Z'} &= -2BHZ' \\ \frac{\partial \Delta H_*}{\partial H'_*} &= H^2(E-G) - 6BHH'_* \\ \frac{\partial \Delta Z}{\partial Z'} &= H^2(E-G) - 2BHH'_* \\ \frac{\partial \Delta Z}{\partial H'_*} &= -2BHZ'\end{aligned}$$

So erhalten wir:

$$(dH'_*)^2 - 2dH'_*dZ'\frac{H'_*}{Z'} - (dZ')^2 = 0 \quad (47)$$

Das allgemeine Integral wird: $Z'^2 = \lambda^2 + 2\lambda H'_*$ und stellt eine Schar confocaler Parabeln dar.

Geht man von den reducierten Coordinaten auf diejenigen der Diaphragmenebene über, und ordnet man die einfallenden Strahlen in Kegel, welche die confocalen Parabeln der Diaphragmenebene zu Leitlinien haben, so werden die Strahlen eines Kegels nach ihrer Brechung wieder Developpable bilden; daher der Satz: Werden in einem dioptrischen System, bei welchem für eine bestimmte Entfer-

nung der Objektebene der Kugelgestaltfehler in der Axe gehoben ist, die von einem Punkt ausserhalb der Axe ausgehenden Strahlen so nach Kegeln geordnet, dass die Erzeugenden eines Kegels nach ihrer Brechung Developpable bilden, so schneidet eine Ebene senkrecht zur optischen Axe die Kegel nach einem System confocaler Parabeln.

Wir führen nun wieder statt der Grössen H'_* , Z' die Parameter der confocalen Parabelschar ein:

$$H'_* = -\frac{\mu + \lambda}{2}; \quad Z'^2 = -\mu\lambda \quad (48)$$

$$\begin{aligned} \Delta H_* &= -\frac{\mu + \lambda}{2} H [H(E - G) + B(\lambda + \mu)] - BH \left(\frac{\lambda - \mu}{2} \right)^2 \\ \Delta Z &= \sqrt{-\lambda\mu} H [H(E - G) + B(\lambda + \mu)]. \end{aligned} \quad (49)$$

Dann gehen wir von den reducierten Coordinaten auf jene der Ebenen A_{2k+1} B_{2k+1} über und erhalten:

$$\eta'_{*2k+1} = -\frac{\lambda + \mu}{2} \frac{\nu_{2k+1}}{\sigma'_{2k+1}}; \quad \zeta'^2 = -\mu\lambda \frac{\nu_{2k+1}^2}{\sigma'^2_{2k+1}} \quad (50)$$

$$\begin{aligned} \Delta \eta_{*2k+1} &= \left\{ -\frac{\lambda + \mu}{2} H [H(E - G) + B(\lambda + \mu)] - BH \left(\frac{\lambda - \mu}{2} \right)^2 \right\} \frac{\nu_{2k+1}}{\sigma_{2k+1}} \\ (\Delta \zeta_{2k+1})^2 &= -\lambda\mu H^2 [H(E - G) + B(\lambda + \mu)]^2 \frac{\nu_{2k+1}^2}{\sigma_{2k+1}^2} \end{aligned} \quad (51)$$

Um zur Gleichung der Brennfläche zu gelangen, sei als Coordinatensystem jenes gewählt, welches von den Geraden $\Delta \eta_{*2k+1} = 0$ als y -Axe und $\Delta \zeta_{2k+1} = 0$ als z -Axe und ausserdem von der Verbindungslinie des Ursprungs dieses Coordinatensystems der Ebene A_{2k+1} mit dem Punkte $Z' = 0$ $H'_* = 0$ der Ebene B_{2k+1} als x -Axe gebildet wird. Letztere Verbindungslinie tritt nunmehr an die Stelle des ausgezeichneten Strahles.

Unter dieser Voraussetzung lässt sich die Formel 24:

$$x = \frac{d(\Delta H_*)}{d\Delta H'_*} \cdot \frac{T \nu_{2k+1}}{\sigma_{2k+1}^2} = \frac{\partial(\Delta H_*)}{\partial \lambda} \cdot \frac{\partial \lambda}{\partial H'_*} T \frac{\nu_{2k+1}}{\sigma_{2k+1}^2} \quad (24)$$

direkt anwenden. Wenn man nun:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\Delta H_*)}{\partial \lambda} &= -\frac{H^2(E - G)}{2} - BH(\lambda + \mu) - BH \frac{\lambda - \mu}{2} \\ \frac{\partial H'_*}{\partial \lambda} &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

setzt, so ergibt sich:

$$x = H[H(E - G) + B(3\lambda + \mu)] T \frac{\nu_{2k+1}}{\sigma_{2k+1}^2} \quad (52)$$

Ebenso gelten für die y und z -Coordinaten die Gleichungen 26:

$$y = A \eta_{2k+1} - x \frac{\eta'_{2k+1}}{K}; \quad z = A \zeta_{2k+1} - x \frac{\zeta'_{2k+1}}{K}$$

Hieraus folgt nach Einführung von λ und μ aus 48 und 49:

$$\left. \begin{aligned} y &= \frac{\nu_{2k+1}}{\sigma_{2k+1}} \frac{BH}{4} (3\lambda^2 + 6\lambda\mu - \mu^2) \\ z^2 &= - \frac{\nu_{2k+1}^2}{\sigma_{2k+1}^2} 4 B^2 H^2 \lambda^3 \mu \\ x &= H[H(E-G) + B(3\lambda + \mu)] T \frac{\nu_{2k+1}}{\sigma_{2k+1}^2} \end{aligned} \right\} \quad 53)$$

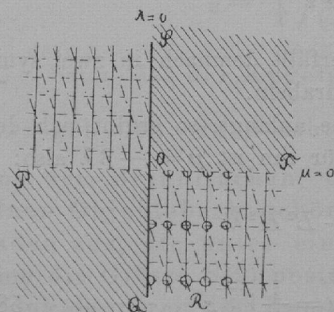
Wie man aus dieser Gleichung der Brennfläche ersieht, ist die letztere symmetrisch zur xy -Ebene. Führt man an stelle von x einen um: $x_0 = H^2(E-G) T \frac{\nu_{2k+1}}{\sigma_{2k+1}^2}$

verschiedenen Wert x_* ein, so dass: $x_* = BH \frac{T \nu_{2k+1}}{\sigma_{2k+1}^2} (3\lambda + \mu)$, so zeigt sich, dass

die Brennfläche auch symmetrisch zur Ebene $x = x_0$ ist. Ändert man nämlich gleichzeitig das Zeichen von λ und μ , so ändert sich weder Grösse noch Vorzeichen von y und z , dagegen das Vorzeichen, wenn auch nicht die Grösse von x_* .

Nach Art der Ableitung geben die Curven $\mu = \text{const}$ geodätische Linien, die Curven $\lambda = \text{const}$ dazu conjugierte Linien der Fläche, die selbst aus 2 Mänteln besteht. Wir wollen dieselbe wieder in eine $\lambda\mu$ -Ebene abbilden, so dass einem durch das Parameterpar λ, μ definierten Punkte der Fläche der Punkt mit den rechtwinkligen Coordinaten λ, μ der Ebene entspricht. Da z nur für Parameterwerte von entgegengesetztem Vorzeichen reell wird, so entsprechen nur dem 2. und 4. Quadranten der $\lambda\mu$ -Ebene reelle Punkte der Fläche. Jeder der Quadranten ist das Bild eines Mantels der Fläche. (Fig. 7.)

Fig. 7.

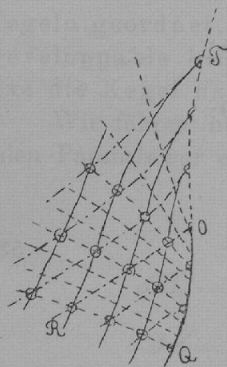


Die Schnitte mit Ebenen $x_* = \text{const}$ werden durch Gerade abgebildet, die in beistehender Figur 7 strichpunktirt sind; die geodätischen Linien sind durch punktierte, die conjugierten Curven durch ausgezogene Linien angedeutet. Die conjugierte Curve $\lambda = 0$ ist eine in der xy -Ebene verlaufende Parabel OQ von der Gleichung:

$$y = - \frac{\nu_{2k+1}}{\sigma_{2k+1}} \frac{BH}{4} \mu^2; \quad x_* = \frac{\nu_{2k+1}}{\sigma_{2k+1}^2} T B H \mu,$$

$$\text{oder:} \quad y = - \frac{\sigma_{2k+1}^3}{4 T^2 B H \nu_{2k+1}} x_*^2. \quad 54)$$

Fig. 8.



Dieselbe ist Rückkehrkante der Fläche, da für $\lambda^3 = 0$ $z^2 = 0$ wird. Die geodätische Linie $\lambda = 0$ liegt ebenfalls in der xy -Ebene und zwar ist dieselbe ebenfalls eine Parabel OT , deren Öffnung aber der vorgenannten entgegengesetzt ist.

$$y = \frac{\nu_{2k+1}}{\sigma_{2k+1}} \frac{3}{4} BH\lambda^2 \quad x_* = 3 \frac{\nu_{2k+1}}{\sigma_{2k+1}^2} TBH\lambda$$

$$y = \frac{\sigma_{2k+1}^3}{12 T^2 BH \nu_{2k+1}} x_*^2 \quad (55)$$

Letztere ist, da für $\mu = 0$ $z^2 = 0$ wird, eine einfache Symmetrielinie des Mantels. Siehe Figur 8, welche eine Hälfte des Mantels darstellt. Auf Tafel I Figur 2 sind die beiden Mäntel in ihrem Zusammenhange abgebildet.

Wird $3\lambda^3 + 6\mu\lambda - \mu^2 = 0$ gesetzt, oder $\mu = (3 \pm 2\sqrt{3})\lambda$, so erhält man den Schnitt mit der xz -Ebene:

$$\left. \begin{aligned} z^2 &= -4 \frac{\nu_{2k+1}^2}{\sigma_{2k+1}^2} B^2 H^2 (3 \pm 2\sqrt{3}) \lambda^4 \\ x_* &= HBT \frac{\nu_{2k+1}}{\sigma_{2k+1}^2} (6 \pm 2\sqrt{3}) \lambda \end{aligned} \right\} \quad (56)$$

Die erste der beiden Gleichungen zerfällt in zwei solche, welche aber nur reelle Coefficienten haben, wenn $\sqrt{3}$ mit negativem Zeichen genommen wird:

$$\left. \begin{aligned} z &= \pm 2 \frac{\nu_{2k+1}}{\sigma_{2k+1}} BH\lambda^2 \sqrt{2\sqrt{3}-3} \\ x_* &= \frac{\nu_{2k+1}}{\sigma_{2k+1}^2} BHT\lambda(6-2\sqrt{3}) \\ z &= \pm \frac{1}{2} \frac{\sigma_{2k+1}^3 \sqrt{2\sqrt{3}-3}}{\nu_{2k+1} BHT^2 (3-\sqrt{3})^2} x_*^2 \end{aligned} \right\} \quad (57)$$

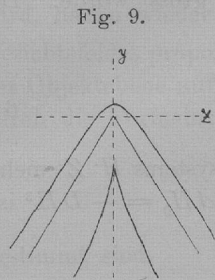
Der reelle Teil des Schnittes mit der xz -Ebene zerfällt demnach in zwei symmetrisch gelegene, im Anfangspunkte sich berührende Parabeln.

Was die Schnitte mit Ebenen parallel zur yz -Ebene anlangt, so ergibt sich der Schnitt mit der Ebene $x_* = 0$ als besonders einfach. Für ihn ist $\mu = -3\lambda$ also:

$$y = -6 \frac{\nu_{2k+1}}{\sigma_{2k+1}} BH\lambda^2 \quad z^2 = 12 \frac{\nu_{2k+1}^2}{\sigma_{2k+1}^2} B^2 H^2 \lambda^4$$

$$\text{oder} \quad z = \pm 2 \frac{\nu_{2k+1}}{\sigma_{2k+1}} BH\lambda^2 \sqrt{3} \quad y = \pm \sqrt{3} z \quad (58)$$

Er zerfällt demnach in ein Geradenpar. In demselben durchschneiden sich die beiden Mäntel. Jeder Schnitt parallel zu der Ebene $x = x_0$ besteht aus zwei Zweigen, von denen einer einer halben Hyperbel, der andere einer Neil'schen Parabel ähnlich sieht. Siehe nachstehende Figur 9.



Wie aus den Gleichungen 53 unschwer zu entnehmen ist, unterscheiden sich die möglichen speciellen Brennflächen, abgesehen von ihrer Lage im Raum und ihrer absoluten Grösse nur durch das Verhältnis der Querdimensionen zu den Längsdimensionen. Dieses Verhältnis ist, wie aus den Ausdrücken für die Parameter der Parabeln 54, 55, 57 ersichtlich wird, von der ersten Grössenordnung und proportional dem Gesichtsfeld.

Ueber die Lage der speciellen Brennfläche gegenüber dem optischen System gelten ganz ähnliche Bemerkungen wie im allgemeinen Falle. Hat der leuchtende Punkt verschiedene Distanz von der optischen Axe, so werden die x -Axen der Coordinatensysteme, auf welche die den verschiedenen Lagen desselben zugehörigen Brennflächen bezogen sind, in erster Näherung gegen einen Punkt der optischen Axe convergieren, dessen Entfernung ε von der Ebene B_{2k+1} ähnlich wie im allgemeinen Falle berechnet wird. Sie ergibt sich hiebei zu:

$$\varepsilon = \frac{G T v_{2k+1}}{2 B \sigma'_{2k+1} (G \sigma_{2k+1} - 2 B \sigma'_{2k+1})} \quad (59)$$

Die Entfernung der zur yz -Ebene parallelen Symmetrieebene der Brennfläche:

$x_0 = (E - G) T \frac{v_{2k+1}}{\sigma_{2k+1}^2} H^2$ ist dem Quadrate der Entfernung des leuchtenden Punktes von der optischen Axe und damit auch dem der genäherten Entfernung des Bildpunktes von der Axe proportional, woraus wieder folgt, dass die Punkte der x -Axe, für welche $x = x_0$ ist, auf einer Kugelfläche liegen, welche die genäherte Bildebene im Schnitt mit der optischen Axe berührt und deren Radius sich zu:

$$\varrho = \frac{v_{2k+1}}{2 T (E - G)} = \frac{v_{2k+1}}{S(3) - S(4)} \text{ berechnet.} \quad (60)$$

Satz: Ist der Kugelgestaltsfehler eines dioptrischen Systems in der Axe gehoben, dann schneidet eine Kugel vom Radius $\varrho = \frac{v_{2k+1}}{S(3) - S(4)}$ aus den Brennflächen, die zu den verschiedenen leuchtenden Punkten einer Objektebene gehören, je zwei (unendlich kleine) Stücke von Geraden aus, die unter einem Winkel von 60° zusammenstossen. Je nachdem die Grösse $S(2)$ positiv oder negativ ist, kehrt sich der Scheitel des Winkels gegen den Rand oder gegen die Mitte des Gesichtsfeldes.

Wir kommen nun zu dem Falle, dass die Grösse $B = \frac{S(2)}{2T^2}$ neben A oder $S(1)$ verschwindet.¹⁾ Hier lässt uns wieder die vorhin angewendete Coordinatentransformation $H' = H'_0 + H'_*$ im Stich, da $H'_0 = \frac{G}{2B} H$ unendlich gross würde. Die Formeln 8 lauten in diesem Falle:

$$\begin{aligned}\Delta H &= H'(E + 2G)H^2 - DH^3 \\ \Delta Z &= Z'EH^2\end{aligned}\quad (61)$$

Es bedarf hier keiner weiteren Verschiebung des Coordinatensystems $H'Z'$ mehr, dagegen wird man für $\Delta H = \Delta H_0 + \Delta H_*$ schreiben, wobei wieder $\Delta H_0 = -DH^3$ ist. So ergibt sich:

$$\begin{aligned}\Delta H_* &= H'(E + 2G)H^2 \\ \Delta Z &= Z'EH^2\end{aligned}\quad (62)$$

Die Abbildung der $H'Z'$ -Ebene in die $\Delta H_*\Delta Z$ -Ebene ist in diesem Falle einfach eine affine. Das Strahlensystem, welches die entsprechenden Punkte der Ebenen A_{2k+1} und B_{2k+1} verbindet, wird ein lineares; an stelle der Developpablen treten Ebenen, die sich in den Direkticen (Brennlinien) schneiden. Die Brennfläche selbst degeneriert in die beiden Direkticen und besteht aus 2 geraden Brennlinien. Die Curven der Ebene $H'Z'$, welche den Developpablen entsprechen, sind die Geraden $H' = \lambda$, $Z' = \mu$. Die entsprechenden Curven der Ebene $\Delta H_*\Delta Z$:

$$\Delta H_* = \lambda(E + 2G)H^2, \quad \Delta Z = \mu EH^2. \quad (63)$$

Von den reducierten Coordinaten auf diejenigen der Ebenen A_{2k+1} B_{2k+1} übergehend, erhält man:

$$\eta'_{2k+1} = \lambda \frac{\nu_{2k+1}}{\sigma'_{2k+1}} H^2 \quad \zeta'_{2k+1} = \mu \frac{\nu_{2k+1}}{\sigma'_{2k+1}} H^2 \quad (64)$$

$$\Delta \eta_{2k+1} = \lambda \frac{\nu_{2k+1}}{\sigma_{2k+1}} (E + 2G) H^2 \quad \Delta \zeta_{2k+1} = \mu \frac{\nu_{2k+1}}{\sigma_{2k+1}} EH^2 \quad (65)$$

Führt man als x -Axe die Gerade, welche die Punkte mit den Parametern $\lambda = 0$ $\mu = 0$ verbindet, ein, während die y und z -Axe mit der $\Delta \eta$ und $\Delta \zeta$ -Axe der Ebene A_{2k+1} zusammenfallen, so erhält man für die x -Coordinaten der Brennlinien:

$$\left. \begin{aligned}x_1 &= (E + 2G)H^2 T \frac{\nu_{2k+1}}{\sigma_{2k+1}} \\ x_2 &= EH^2 T \frac{\nu_{2k+1}}{\sigma_{2k+1}}\end{aligned} \right\} \quad (66)$$

1) Die Diskussion dieses Falles findet sich bereits in den astronomischen Nachrichten 1027 ff.

In ersterer schneiden sich die Strahlen, welche den Punkten der Geraden $\mu = \text{const}$, in letzterer die Strahlen, welche denen der Geraden $\lambda = \text{const}$ entsprechen; erstere ist daher parallel zur x -Axe, letztere zur y -Axe.

Diejenigen Punkte der x -Axe, in welchen sie von den Brennnlinien geschnitten wird, haben wieder Entfernungen x_1, x_2 von der Ebene A_{2k+1} , die dem Quadrate des Gesichtsfeldes proportional sind. Sucht man diese Punkte für alle leuchtenden Punkte der Objektebene auf, so liegen dieselben auf zwei Kugelflächen, deren Radien ϱ_1 und ϱ_2 durch die Formeln:

$$\varrho_1 = \frac{\nu_{2k+1}}{S(4) + 2S(3)} \quad \varrho_2 = \frac{\nu_{2k+1}}{S(4)} \quad (67)$$

bestimmt sind.

Herr Professor v. Seidel hat in den Astronomischen Nachrichten nachgewiesen, dass bei dem von Fraunhofer konstruierten Objektiv des Königsberger Helimeters die Bedingung $S(2) = 0$ nahezu erfüllt ist und knüpft daran den Vorschlag, die Bedingung, unter welcher die Brennflächen in Brennnlinien degenerieren, Fraunhoferbedingung zu nennen. Innerhalb der Grenzen unserer Näherung fällt dieselbe mit der Abbe'schen Sinusbedingung zusammen, wie Seidel in einem Vortrag in der Sitzung der k. Akademie der Wissenschaften auseinandergesetzt hat.

Die beiden durch die Coordinaten x_1 und x_2 bestimmten Punkte fallen dann in einen einzigen zusammen, wenn die Grösse G zu Null wird. Da $S(1)$ und $S(2)$ bereits gleich Null vorausgesetzt sind, so bedeutet das Verschwinden von G dasselbe wie $S(3) = 0$. Tritt dieser Fall ein, so entspricht jedem leuchtenden Punkt der Objektebene ein bestimmter leuchtender Punkt, in dem sich die gebrochenen Strahlen

schneiden. Alle diese Bildpunkte liegen auf einer Kugel vom Radius: $\varrho_2 = \frac{\nu_{2k+1}}{S(4)}$, welche die genäherte Bildebene A_{2k+1} in der Axe berührt. Damit diese Kugel zur Ebene werde, muss auch noch $S(4)$ verschwinden. Dann bildet sich die Objektebene thatsächlich scharf auf die Bildebene ab. Aber noch nicht korrekt. Zwar wird das Korrektionsglied $\angle Z = 0$, aber $\angle H = -DH^3$ zeigt an, dass der wahre Bildpunkt von dem durch die Näherung bestimmten Ort um eine Grösse absteht, die der dritten Potenz des Gesichtsfeldes proportional ist. Erst, wenn auch D verschwindet, was $S(5) = 0$ bedeutet, findet eine punktweise, vollkommen scharfe und korrekte Abbildung der Objektebene auf die Bildebene statt.

Das Verschwinden der 5 Summen $S(1), S(2), S(3), S(4), S(5)$ ist notwendige und hinreichende Bedingung für das Zustandekommen eines scharfen und korrekten Bildes.

Die Lichtflecke an stelle der scharfen Bilder leuchtender Punkte.

Abbildung der Blendenebene in die Schirmebene durch die von einem leuchtenden Punkt ausgehenden Strahlen.

Nach den Untersuchungen der vorigen Paragraphen über die Brennfläche der gebrochenen Strahlen ist es unmittelbar klar, dass ein leuchtender Punkt durch ein dioptrisches System in der Regel nicht als scharfer Punkt abgebildet wird. Wenn wir die gebrochenen Strahlen mit einem Schirm auffangen, so wird — selbstverständlich vorausgesetzt, dass in erster Näherung ein reelles Bild zu stande kommt — bei keiner Stellung des Schirmes ein scharfes Bild erscheinen, sondern stets ein mehr oder minder ausgedehnter Lichtfleck. Nach Massgabe der Lage, Grösse und Helligkeitsverteilung dieses Lichtfleckes und der Veränderung desselben, einestheils bei verschiedener Abblendung des Linsensystems, andernteils bei verschiedener Entfernung des leuchtenden Punktes von der Axe und endlich bei Verschiebung des Schirmes ist die optische Leistung zu beurteilen. Dies ist von hervorragenden Autoritäten auf dem Gebiete der optischen Praxis betont und geübt worden.¹⁾ Streng genommen ist indessen diese Beurteilung nur dort gerechtfertigt, wo die Projektion auf einen Schirm wirklich Zweck des optischen Systems ist, also hauptsächlich bei photographischen Objektiven. Dass die Sachlage bei optischen Systemen, die zur Ocularbeobachtung dienen und welche demnach für sich betrachtet ein virtuelles Bild des Gegenstandes liefern, nicht unwesentlich anders ist, geht schon daraus hervor, dass beispielsweise bei sonst scharfer Abbildung die Krümmung des Bildfeldes in ersterem Falle sehr störend wirkt, während sie im letzteren Falle sogar zur Verbesserung des Bildes beitragen kann, falls ihr Radius der deutlichen Sehweite nahe kommt. Eine strenge mathematische Behandlung des zweiten Falles hängt von der Erledigung gewisser Fragen physiologischer Natur ab, bezüglich der Auffassung der Unschärfe eines astigmatischen Strahlenbündels mit sehr geringer Distanz der Brennpunkte durch das Auge. Er soll hier ausser Acht bleiben.

Ehe zur Untersuchung der Lichtflecke selbst übergegangen wird, soll die Ordnung des Systems der gebrochenen Strahlen abgeleitet werden, da ihre Kenntnis für das Folgende von Wichtigkeit ist. Wir suchen zu dem Zweck die Anzahl der Strahlen auf, welche durch einen Punkt der Ebene A_{2k+1} gehen. Wir gehen dabei von den Gleichungen 12 in reduzierten Coordinaten aus:

$$\Delta H_* = H'_* (A R_*'^2 + (L + 2M) H^2) \quad 12a)$$

$$\Delta Z = Z' (A R_*'^2 + L H^2) \quad 12b)$$

1) Dr. A. Steinheil, Ueber den Einfluss der Objektivkonstruktion etc. Sitz.-Ber. der math.-phys. Classe der k. b. Akademie der W. 1889 Bd. XIX.

A. Steinheil und E. Voit, Handbuch der angewandten Optik 1. Bd.

Aus der ersten Gleichung folgt:

$$Z'^2 = \frac{\Delta H_* - A H_*'^3 - (L + M) H^2 H_*'}{A H_*'}$$

Setzt man diesen Wert in die zum Quadrat erhobene zweite Gleichung, so ergibt sich:

$$(\Delta Z)^2 = \frac{\Delta H_* - A H_*'^3 - (L + 2M) H^2 H_*'}{A H_*'^3} (\Delta H_* - 2 M H H_*')^2. \quad (68)$$

Das ist eine Gleichung 5. Grades für H'_* ; zu jeder Wurzel derselben finden sich aus der Gleichung 12a) 2 gleiche und entgegengesetzte Werte für Z , von denen aber nur der eine der Gleichung 12b) genügen kann. Es gibt also zu einem bestimmten Wertepare ΔH_* , ΔZ 12 Wertepare H'_* , Z' , welche den Gleichungen genügen. Berücksichtigen wir den Umstand, dass ΔH_* und ΔZ einen Punkt der Ebene A_{2k+1} , ebenso H'_* und Z' einen solchen der Ebene B_{2k+1} festlegen und die durch die Formeln 12 zusammengeordneten Punkte auf Strahlen des Systems liegen, so folgt, dass durch einen Punkt der Ebene A_{2k+1} 5 Strahlen des Systems der gebrochenen Strahlen gehen, die natürlich zum Teil imaginär sein können. Da die Ebene A_{2k+1} in Bezug auf das Strahlensystem keine ausgezeichnete Rolle spielt, so folgt, dass das System der gebrochenen Strahlen 5. Ordnung ist. Für $M=0$ reduziert sich die Ordnung auf die dritte, wie aus der Gleichung unmittelbar zu ersehen ist; wir haben es dann mit dem schon betrachteten Fall zu thun, in dem die Brennfäche Rotationsfläche wird. In dem Falle $A=0$ muss man von den Gleichungen 46 ausgehen und findet dann auf ganz analogem Wege, dass hier die Ordnung 4 ist. Die Klasse des Strahlensystems ist im allgemeinen Falle gleich 3. Denn, denken wir uns eine beliebige Ebene $\mathfrak{E}$, welche die Ebene A_{2k+1} nach der Geraden $\mathfrak{G}$: $\alpha \Delta H + \beta \Delta Z + \gamma = 0$ und die dazu parallele Ebene B_{2k+1} nach den Geraden $\mathfrak{G}'$: $\alpha H' + \beta Z' + \gamma_1 = 0$ schneidet, so werden den Punkten ersterer Geraden $\mathfrak{G}$ in A_{2k+1} die Punkte einer Curve 3. Ordnung in B_{2k+1} entsprechen, wie man durch Einsetzen der Ausdrücke von ΔH und ΔZ nach den Gleichungen 12 erkennt. Diese Curve 3. Ordnung wird von der Geraden $\mathfrak{G}'$ in drei Punkten geschnitten, welche mit den drei ihnen entsprechenden Punkten von $\mathfrak{G}$ verbunden die drei Strahlen des Systems liefern, die in der beliebigen Ebene $\mathfrak{E}$ liegen. Für $A=0$ erniedrigt sich die Klasse auf zwei. Das für $A=0$ und $B=0$ Ordnung und Klasse gleich eins werden, wurde schon erwähnt.

Nach diesen Vorbemerkungen gehen wir dazu über, den Schnitt des Systems der gebrochenen Strahlen mit einer Ebene auszudrücken, die in geringer Entfernung x von der genäherten Bildebene A_{2k+1} parallel zu dieser angenommen wird. Dazu dienen die Gleichungen 26:

$$y = \Delta \eta_{*2k+1} - x \frac{\eta'_{*2k+1}}{K}; \quad z = \Delta \zeta_{2k+1} - x \frac{\zeta'_{2k+1}}{K},$$

wobei wir nunmehr unter x, y, z nicht mehr wie früher die Coordinaten eines Brennpunktes, sondern eines beliebigen Punktes des durch $A\eta_{*2k+1}, A\zeta_{2k+1}$ gehenden Strahles bezogen auf das gleiche Coordinatensystem verstehen.

Wir führen zunächst die reducierten Coordinaten H'_*, Z', R'_* ein und erhalten:

$$\begin{aligned} y &= AH'_* \frac{\nu_{2k+1}}{\sigma_{2k+1}} - x \frac{H'_*}{T} \cdot \sigma_{2k+1}; \quad z = AZ' \frac{\nu_{2k+1}}{\sigma_{2k+1}} - x \frac{Z'}{T} \sigma_{2k+1} \\ y &= H'_* \left[AR'^2_* + (L + 2M)H^2 - x \frac{\sigma_{2k+1}^2}{T\nu_{2k+1}} \right] \frac{\nu_{2k+1}}{\sigma_{2k+1}} \\ z &= Z' \left[AR'^2_* + LH^2 - x \frac{\sigma_{2k+1}^2}{T\nu_{2k+1}} \right] \frac{\nu_{2k+1}}{\sigma_{2k+1}} \end{aligned} \quad (69)$$

Wir können aber auch an stelle derselben ihre Ausdrücke in den elliptischen Parametern λ und μ setzen und beiderseits quadrieren:

$$\begin{aligned} y^2 &= - \frac{\lambda \mu A \left[(3M + L)H^2 - x \frac{\sigma_{2k+1}^2}{T\nu_{2k+1}} + A(\lambda + \mu) \right]^2}{MH^2} \cdot \frac{\nu_{2k+1}^2}{\sigma_{2k+1}^2} \\ z^2 &= - \frac{(MH^2 + A\lambda)(MH^2 + A\mu) \left[(M + L)H^2 - x \frac{\sigma_{2k+1}^2}{T\nu_{2k+1}} + A(\lambda + \mu) \right]^2}{AMH^2} \cdot \frac{\nu_{2k+1}^2}{\sigma_{2k+1}^2} \end{aligned} \quad (70)$$

Das erste Gleichungspaar ist der analytische Ausdruck für jene Abbildung der Blendenebene B_{-1} (worauf wir uns die reducierten Coordinaten H'_*, Z' bezogen denken) auf die Schirmebene, die durch die Schnittpunkte des von einem bestimmten leuchtenden Punkt ausgehenden Strahles vor und nach der Brechung in dem Systeme geometrisch definiert wird.

Das zweite Gleichungspaar vermittelt eine Beziehung zwischen den Punkten der Schirmebene und den Parametern $\lambda \mu$ eines Strahles, welche wir als Abbildung der Schirmebene auf die $\lambda \mu$ -Ebene, die wir schon bei der Diskussion der Brennfläche benützt haben, auffassen.

Endlich können wir die Gleichungen 19:

$$H'^2_* = \frac{-\lambda \mu A}{MH^2}; \quad Z'^2 = \frac{(MH^2 + A\lambda)(MH^2 + A\mu)}{AMH^2} \quad (19)$$

zur Definition einer Abbildung der Schirmebene auf die $\lambda \mu$ -Ebene benützen.

Von den drei Abbildungen interessiert uns zunächst die erste, welche Blenden- und Schirmebene betrifft. Die beiden andern zusammen sollen eigentlich nur die erste ersetzen und die Einschiebung der $\lambda \mu$ -Ebene hat nur den Zweck, die Auffindung ausgezeichneten Curven in der Blenden- und Schirmebene zu erleichtern.

Es sollen nun die für das Folgende wichtigen Eigenschaften der drei Abbildungen kurz betrachtet werden.

Bezüglich der dritten ist zu bemerken, dass einem Punkte $\lambda\mu$ vier symmetrisch gegen die Axen verteilte Punkte der Ebene B_{-1} entsprechen. Damit dieselben reell seien, muss der Punkt $\lambda\mu$ in den schon früher bei der Diskussion der Brennfläche bemerkten zwei Streifen (s. Fig. 2) liegen, für welche sowohl λ und μ entgegengesetztes, als $MH^2 + A\lambda$ und $MH^2 + A\mu$ gleiches Vorzeichen haben. Umgekehrt gehören zu einem Punkte der Ebene B_{-1} zwei Punkte $\lambda\mu$. Sind nämlich α und β die Wurzeln der quadratischen Gleichung: $\frac{H'^2}{\lambda} + \frac{Z'^2}{\frac{MH^2}{A} + \lambda} = 1$, dann genügen die

Parameterpaare $\lambda = \alpha \mu = \beta$, $\lambda = \beta \mu = \alpha$ den Abbildungsgleichungen 19. Die entsprechenden Punkte der $\lambda\mu$ -Ebene liegen symmetrisch zur Geraden $\mu = \lambda$ auf die beiden Streifen verteilt. Man kann daher auch einen Streifen unterdrücken und sich dafür den andern doppelt mit Punkten $\lambda\mu$ überdeckt denken. Mechanisch würde dies so ausgeführt, dass wir die eine Hälfte der $\lambda\mu$ -Ebene um die Linie $\lambda = \mu$ in die andere Hälfte umklappen, wodurch beide Streifen mit den entsprechenden Punkten zur Deckung kommen. Siehe Figur 2. Den Begrenzungen dieses Streifens, die durch $\lambda = 0$, μ positiv und $\mu = 0$, λ negativ, aber absolut kleiner als $\frac{MH^2}{A}$, gebildet wird, ent-

spricht die doppelt gezählte Z' -Axe; der Begrenzung $\lambda = -\frac{MH^2}{A}$, μ positiv die doppelte H'_* -Axe. Einer beliebigen Curve des Streifens, unter welchem Winkel sie auch dessen Begrenzungen treffen mag, entspricht eine symmetrisch zu beiden Axen liegende Curve der Blendenebene, welche die Axen im allgemeinen senkrecht durchschneidet. So z. B. geht die Gerade: $\lambda + \alpha \mu + \beta = 0$ in die bicirkulare Curve 4. Ordnung:

$$\alpha \left(Z'^2 + H'^2_* - \frac{MH^2}{A} + \beta \right)^2 + \beta (1 - \alpha) \left(Z'^2 + H'^2_* - \frac{MH^2}{A} + \beta \right) - (1 - \alpha)^2 \frac{MH^2}{A} H'^2_* = 0 \quad (71)$$

über, welche für $\alpha = 1$ in einen doppelt gezählten Kreis, für $\beta = 0$ in zwei zur Z' -Axe symmetrisch gelegene Kreise zerfällt. In letzterem Falle findet eine Ausnahme von dem senkrechten Durchschnitt mit der Z' -Axe statt; hier geht aber auch die Gerade $\lambda + \alpha \mu + \beta = 0$ durch den Anfangspunkt, in welchem das Bild der Z' -Axe unter einem rechten Winkel gebogen erscheint. Jeder Curve, die durch den Anfangspunkt der $\lambda\mu$ -Ebene einfach hindurchgeht, entspricht eine Curve mit Doppelpunkt auf der Z' -Axe. Berührt eine Curve der $\lambda\mu$ -Ebene den Rand des Streifens von innen, so hat die entsprechende Curve der Blendenebene Doppelpunkte. So gehört zu der Hyperbel:

$$\left\{ \frac{MH}{A} + \lambda + \mu + \alpha^2 - \gamma^2 \right\}^2 + \frac{4\lambda\mu\alpha^2 A}{MH^2} = 0, \quad (72)$$

welche die λ und μ -Axe berührt, das Par von Kreisen:

$$Z'^2 + (H'_* \mp \alpha)^2 = \gamma^2, \quad (73)$$

welches auf der Z' -Axe Doppelpunkte hat.

Weit, komplizierter ist die Abbildung der Schirmebene auf die $\lambda\mu$ -Ebene. Einem Punkte $\lambda\mu$ entsprechen zwar auch 4 symmetrisch verteilte Punkte der Schirmebene; aber einem Punkte der letzteren entsprechen nicht weniger als 10 Punkte $\lambda\mu$. Nach dem früher Bemerkten gehören zu einem Punkt der Schirmebene 5 Punkte der Blendenebene und zu jedem derselben wieder 2 symmetrisch zur Geraden $\lambda = \mu$ gelegene Punkte der $\lambda\mu$ -Ebene. Reellen Punkten der Schirmebene entsprechen wiederum bloß Punkte innerhalb der bekannten Streifen der $\lambda\mu$ -Ebene, von welchen wieder der eine unterdrückt und dafür der andere doppelt mit Punkten bedeckt werden soll. Innerhalb des einen Streifens gehören immer bloß 5 allerdings doppelt zählende Punkte zu einem Punkte der Schirmebene. Die Ränder des Streifens entsprechen, wie bei der vorigen Abbildung die z und y -Axe und zwar, wie sich später zeigen wird, in ganz analoger Weise; ausserdem bilden sich auch die Geraden der $\lambda\mu$ -Ebene, die beim Nullsetzen der quadratischen Faktoren der Abbildungsformeln 70 auftreten, in die Axen der Schirmebene ab. Von besonderem Interesse sind endlich jene Punkte der Schirmebene, welchen zusammenfallende Punkte der $\lambda\mu$ -Ebene und was hieraus folgt, auch zusammenfallende Punkte der Diaphragmenebene entsprechen. Dieselben bilden nämlich den Uebergang zwischen denjenigen Partien, welchen fünf, drei oder ein reeller Punkt der Diaphragmenebene entsprechen. Dieser Uebergang findet aber an dem Schnitte der Schirmebene mit der Brennfläche statt, da die letztere die Teile des Raumes gegeneinander abgrenzt, welche fünf, drei oder einen reellen Strahl durch einen gegebenen Punkt haben. In der $\lambda\mu$ -Ebene ist die Grenze einfach durch die Geraden:

$$(3M + L)H^2 - x \frac{\sigma_{2k+1}^2}{T v_{2k+1}} + A(3\lambda + \mu) = 0 \quad (25)$$

und $(3M + L)H^2 - x \frac{\sigma_{2k+1}^2}{T v_{2k+1}} + A(\lambda + 3\mu) = 0$ gegeben.

In der That gehen die Gleichungen 70, wenn man mit Hilfe einer der obigen Gleichungen x eliminiert in die Gleichungen 27 der Brennfläche, wobei nur einmal λ und μ vertauscht sind, über. Diese beiden Geraden stellen demnach das Bild der Schnittkurve unserer Schirmebene mit der Brennfläche dar. Wir nennen diese Schnittkurve die Brennnlinie der Schirmebene. Damit haben wir die bei der Abbildung ausgezeichneten Linien der $\lambda\mu$ -Ebene erschöpft. Sie mögen zur Uebersicht noch einmal zusammengestellt werden:

$$\begin{array}{ll}
\text{a) } \lambda = 0 & \\
\text{b) } \mu = 0 & \\
\text{c) } (3M + L)H^2 - x \frac{\sigma_{2k+1}^2}{T v_{2k+1}} + A(\lambda + \mu) = 0 & \left. \begin{array}{l} \text{Diese 3 Geraden entsprechen} \\ \text{der } z\text{-Axe der Schirmebene.} \end{array} \right\} \\
\text{d) } MH^2 + A\lambda = 0 & \\
\text{e) } MH^2 + A\mu = 0 & \left. \begin{array}{l} \text{Diese 3 Geraden entsprechen} \\ \text{der } y\text{-Axe der Schirmebene.} \end{array} \right\} \\
\text{f) } (M + L)H^2 - x \frac{\sigma_{2k+1}^2}{T v_{2k+1}} + A(\lambda + \mu) = 0 & \\
\text{g) } (3M + L)H^2 - x \frac{\sigma_{2k+1}^2}{T v_{2k+1}} + A(3\lambda + \mu) = 0 & \left. \begin{array}{l} \text{Diese 2 Geraden entsprechen} \\ \text{der Brennpunktlinie der Schirm-} \\ \text{ebene.}^1 \end{array} \right\} \\
\text{h) } (3M + L)H^2 - x \frac{\sigma_{2k+1}^2}{T v_{2k+1}} + A(\lambda + 3\mu) = 0 &
\end{array}$$

Zeichnen wir auf der $\lambda\mu$ -Ebene eine beliebige Curve, welche alle oder einige dieser 8 ausgezeichneten Geraden schneidet und in dem bekannten Streifen verläuft, so entspricht ihr in der Schirmebene eine ganz bestimmte Curve, welche jenen Schnittpunkten entsprechend eine Reihe von Besonderheiten aufweist. Dieselben lassen sich an der Hand der differentiirten Abbildungsgleichungen 70 leicht verfolgen.

$$\begin{aligned}
dy = \frac{-v_{2k+1}}{2\sigma_{2k+1}HV\overline{M}} \left[d\lambda \frac{\sqrt{-\mu}}{\sqrt{\lambda}} \left(A(3\lambda + \mu) + (3M + L)H^2 - x \frac{\sigma_{2k+1}^2}{T v_{2k+1}} \right) + \right. \\
\left. + d\mu \frac{\sqrt{-\lambda}}{\sqrt{\mu}} \left(A(3\mu + \lambda) + (3M + L)H^2 - x \frac{\sigma_{2k+1}^2}{T v_{2k+1}} \right) \right] \quad 74)
\end{aligned}$$

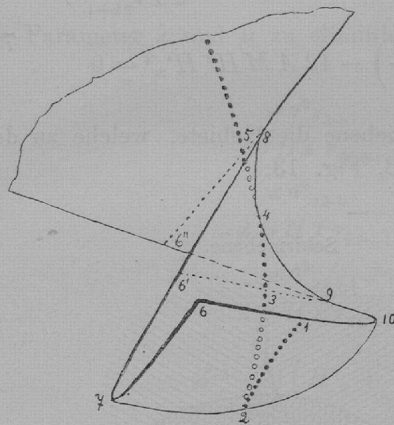
$$\begin{aligned}
dz = \frac{v_{2k+1}}{2\sigma_{2k+1}HV\overline{AM}} \left[d\lambda \frac{\sqrt{MH^2 + A\mu}}{\sqrt{MH^2 + A\lambda}} \left(A(3\lambda + \mu) + (3M + L)H^2 - x \frac{\sigma_{2k+1}^2}{T v_{2k+1}} \right) \right. \\
\left. + d\mu \frac{\sqrt{MH^2 + A\lambda}}{\sqrt{MH^2 + A\mu}} \left(A(\lambda + 3\mu) + (3M + L)H^2 - x \frac{\sigma_{2k+1}^2}{T v_{2k+1}} \right) \right]
\end{aligned}$$

Für $\lambda = 0$ oder $\mu = 0$ wird — ganz unabhängig von dem Verhältnis von $d\lambda : d\mu$ — dy unendlich gross im Vergleich zu dz ; nur wenn $d\lambda : d\mu = 0$ wird, ist für $\lambda = 0$ dieses Verhältnis unbestimmt. Einer solchen Fortschrittsrichtung der $\lambda\mu$ -Ebene entspricht dann keine bestimmte der Schirmebene, sondern im allgemeinen zwei getrennte (Doppelpunkt). Analoges gilt für d) und e); daher:

Ueberschreitet die Curve der $\lambda\mu$ -Ebene eine der Geraden a), b), d), e) innerhalb des Streifens unter beliebigem endlichen Winkel, so durchsetzt die entsprechende Curve der Schirmebene eine der Axen unter rechtem

1) Auf Tafel III sind zwei verschiedene Fälle solcher Geraden octupel abgebildet.

Fig. 12.



Diese Umkehr kann bei einer Berührung der Brennlinie eintreten oder auch bei Bildung einer Spitze, welche an der Brennlinie aufsitzt.

Wenn die Curve der $\lambda\mu$ -Ebene eine der Geraden g) oder h) quert, so berührt die entsprechende Curve der Schirmebene die Brennlinie. Ausgenommen sind nur die Fälle, in welchen erstere Curve die Gerade g) in der Richtung $\mu = \text{const}$, oder die Gerade h) in der Richtung $\lambda = \text{const}$ durchsetzt; dann setzt sich nämlich die Curve der Schirmebene mit einer Spitze an die Brennlinie.

Zur Erläuterung sei in Fig. 11 für ein bestimmtes System der Geraden a) . . . h) (siehe Fig. 10) die entsprechende Brennlinie der Schirmebene und der Verlauf der Curve, die der punktierten Geraden $\lambda = \text{const}$ entspricht, dargestellt. (Diese Curve ist der Schnitt einer Developpablen des Systems der gebrochenen Strahlen mit der Schirmebene).

Entsprechende Curven sind durch gleiche Punktierung, entsprechende Punkte durch eingeschriebene Zahlen kenntlich gemacht.

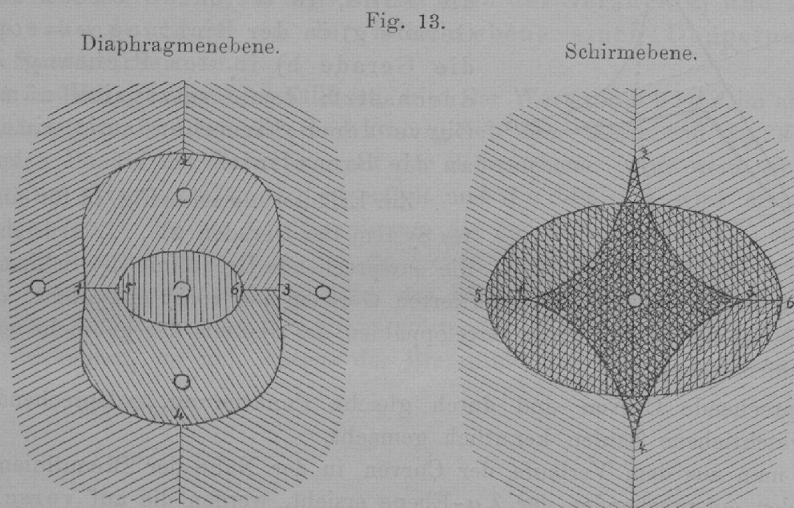
Wie man aus dem Verlaufe der Curven in der Nähe der Brennlinien im Vergleich zu den entsprechenden der $\lambda\mu$ -Ebene ersieht, werden die auf verschiedenen Seiten des Bildes der Brennlinie in der $\lambda\mu$ -Ebene gelegenen Punkte auf die eine Seite der Brennlinie abgebildet, so dass die Verteilung der Punkte in der Schirmebene nahe der Brennlinie ähnlich ist, wie sie durch Umklappen der einen Hälfte des Streifens in der $\lambda\mu$ -Ebene um eine der Geraden g) oder h) erhalten wird. Durch solche Zusammenfaltungen und damit parallel gehende Verdehnungen des Streifens lässt sich ein ganz anschauliches Bild der verwickelten Verhältnisse der Abbildung gewinnen. Siehe Fig. 12. Sie stellt den deformierten und gefalteten Streifen vor und ist ein Viertel des Continuum, auf dem sich die Parameterwerte $\lambda\mu$ ohne Unterbrechung eindeutig durch Punkte darstellen lassen, die über den entsprechenden Punkten der Schirmebene liegen. Man sieht leicht, dass das gesammte Continuum den inneren von dem sternförmigen Teil der Brennlinie umschlossenen Teil fünffach, den von der elliptischen Figur begrenzten dreifach und den ausserhalb beiden liegenden einfach überdeckt.

Es unterliegt nun weiter keinen Schwierigkeiten, die Diaphragmen- und die Schirmebene direkt in Beziehung zu setzen. Den beiden Geraden g) und h) der $\lambda\mu$ -Ebene entspricht eine bicirkulare Raumkurve 4. Ordnung, die wir aus Gleichung 71

erhalten, wenn wir $\alpha = \frac{1}{3}$ und $\beta = \left((3M + L)H^2 - x \frac{\sigma^2}{T\nu_{2k+1}} \right) : 3A$ setzen.

$$\begin{aligned} & \left(3A(Z'^2 + H'^2) + LH^2 - x \frac{\sigma_{2k+1}^2}{T\nu_{2k+1}} \right)^2 + 6 \left((3M + L)H^2 - x \frac{\sigma_{2k+1}^2}{T\nu_{2k+1}} \right) \times \\ & \times \left(3A(Z'^2 + H'^2) + LH^2 - x \frac{\sigma_{2k+1}^2}{T\nu_{2k+1}} \right) - 12AMH^2H'^2 = 0 \end{aligned} \quad (75)$$

Diese Curve trennt dann in der Diaphragmenebene die Gebiete, welche zu den verschiedenen Teilen der Brennfigur beitragen, z. B. Fig. 13.



Hier sind entsprechende Teile des Diaphragmas und der Brennfigur in gleicher Richtung schraffiert und entsprechende Punkte mit gleichen Ziffern bezeichnet.

Wenn wir die Voraussetzung machen, dass der Kugelgestaltsfehler in der Axe des optischen Systems verschwinde, also A gleich 0 sei, werden die Gleichungen, welche die Abbildung der Blendenebene in die Schirmebene definieren, ganz erheblich einfacher:

$$\begin{aligned} y &= \frac{\nu_{2k+1}}{\sigma_{2k+1}} \left\{ H'_* \left(H^2(E - G) - 2BHH'_* - x \frac{\sigma_{2k+1}^2}{T\nu_{2k+1}} \right) - BHH'^2_* \right\} \\ z &= \frac{\nu_{2k+1}}{\sigma_{2k+1}} Z' \left(H^2(E - G) - 2BHH'_* - x \frac{\sigma_{2k+1}^2}{T\nu_{2k+1}} \right) \end{aligned} \quad (76)$$

Wir können uns bei der weiteren Betrachtung sogar den Umweg über die $\lambda\mu$ -Ebene ersparen, sobald wir uns überzeugt haben, dass die Curven der Diaphragmenebene, welche in Brennpunkten der Schirmebene übergehen, einfach Hyperbeln mit parallelen Asymptoten werden. Zu diesem Zwecke haben wir aus den drei Gleichungen 48 und 52:

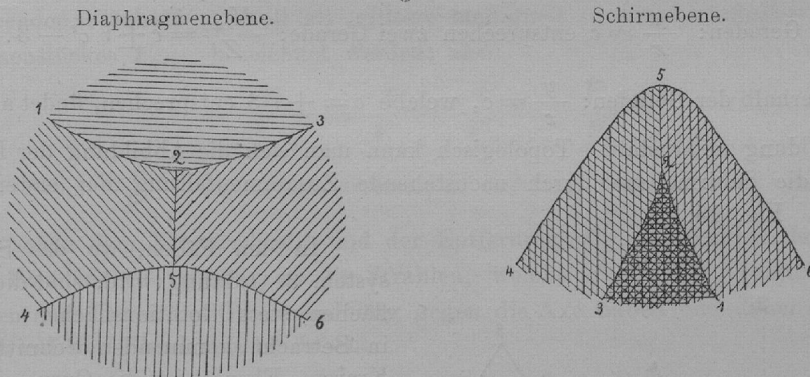
$$H'_* = -\frac{\lambda + \mu}{2}, \quad Z'^2 = -\lambda\mu, \quad x = H[H(E-G) + B(3\lambda + \mu)] T \frac{\nu_{2k+1}}{\sigma_{2k+1}^2}$$

die Parameter λ und μ zu eliminieren.

$$\begin{aligned} 2H'_* &= -\lambda - \mu \\ \frac{x\sigma_{2k+1}^2}{BHT\nu_{2k+1}} - \frac{H(E-G)}{B} &= 3\lambda + \mu \\ \frac{x\sigma_{2k+1}^2}{2BHT\nu_{2k+1}} - \frac{H(E-G)}{2B} + H'_* &= \lambda \\ \frac{x\sigma_{2k+1}^2}{2BHT\nu_{2k+1}} - \frac{H(E-G)}{2B} + 3H'_* &= -\mu \\ Z'^2 - 3\left(H'_* + \frac{x\sigma_{2k+1}^2}{3BHT\nu_{2k+1}} - \frac{H(E-G)}{3B}\right)^2 & \\ &= \frac{1}{12}\left(\frac{x\sigma_{2k+1}^2}{BHT\nu_{2k+1}} - \frac{H(E-G)}{B}\right)^2 \end{aligned} \quad (77)$$

Der Neigungswinkel der Asymptoten beträgt 60° . Die reelle Axe liegt stets in der H'_* -Ebene. Den Charakter der Brennlinsen in der Schirmebene haben wir bereits kennen gelernt. Fig. 9.

Fig. 14.



Hiernach gestaltet sich die Verteilung der Gebiete in der Abbildung so, wie es in vorstehender Figur 14 durch Schraffierung und Bezifferung angedeutet ist. Da das Strahlensystem in diesem Falle 4. Ordnung ist, so kommen in der Schirmebene vierfach, zweifach und gar nicht überdeckte Stellen vor.

Besondere Beachtung verdient der Fall, bei dem die Schirmebene in der Symmetrieebene der Brennfläche $x = x_0 = \frac{T\nu_{2k+1}}{\sigma_{2k+1}^2} H^2(E-G)$ angenommen wird.

Hiebei gehen die Brennnlinien in ein Par unter einem Winkel von 60° geneigte Gerade über. Vergl. Fig. 9. Die Gleichungen 76 reducieren sich folgendermassen:

$$\left. \begin{aligned} y &= -\frac{\nu_{2k+1}}{\sigma_{2k+1}} (3 H'^2_* + Z'^2) H \\ z &= -\frac{2 \nu_{2k+1}}{\sigma_{2k+1}} Z' H'_* H \end{aligned} \right\} \quad (78)$$

Die Hyperbel 77 degeneriert in ein Geradenpar: $Z'^2 - 3 H'^2_* = 0$, welches auch einen Winkel von 60° einschliesst, aber gegenüber den Brennnlinien um 90° verdreht erscheint.

Die zwei konjugierten Hyperbeln der Blendenebene, welche durch die Gleichung:

$$Z'^2 - 3 H'^2_* = \pm a^2 \quad (79)$$

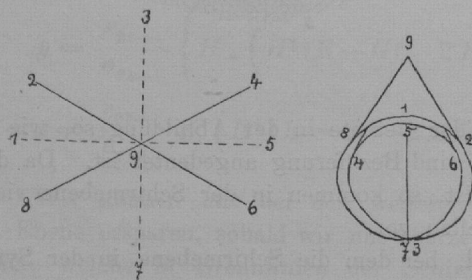
gegeben sind, werden bei der Abbildung in eine einzige Hyperbel verwandelt von der Gleichung:

$$y^2 - 3z^2 = \frac{a^2 \nu_{2k+1}^2}{\sigma_{2k+1}^2} H^2. \quad (80)$$

Gerade wie: $Z' = H'_* \cdot \text{const.}$ gehen wieder in Gerade: $y = z \cdot \text{const.}$ über; aber einer Geraden: $\frac{y}{z} = c$ entsprechen zwei Gerade: $\frac{H'_*}{Z} = c \pm \sqrt{c^2 - 3}$.

Ausserhalb der Geraden: $\frac{y}{z} = c$, welche $c = \pm \sqrt{3}$ entsprechen, findet also keine reelle Abbildung mehr statt. Topologisch kann man sich die Abbildung der Blendenebene in die Schirmebene durch nachstehende Zusammenfaltung der ersteren ver sinnlichen. Fig. 15.

Fig. 15.



In den Fällen, wo das Strahlensystem 3. Ordnung wird, sind die Brennnflächen stets Rotationsflächen, die hier in Betracht kommenden Schnitte daher Kreise. Ebenso ist die Curve der Diaphragmenebene, welche den Punkten der Brennnlinie entspricht, ein Kreis. Das Innere der Brennnlinie auf der Schirmebene wird von den Bildpunkten, der Blendenebene dreifach, das Aeusserere einfach überdeckt.

§ 5.

Die Helligkeitsverteilung des Lichtfleckes.

Es ist zu erwarten, dass der Lichtfleck in seinen verschiedenen Teilen sehr verschiedene Grade von Helligkeit besitzt, da nicht nur die verschiedenen Gebiete eines solchen, wie wir eben bei der Diskussion der Abbildung von Blenden- und Schirmebene bemerkt haben, Licht von fünf, drei oder einem Teil der durch das Diaphragma tretenden Strahlen bekommen, sondern auch die Strahlen verschieden stark gegen die Schirmebene zusammengedrängt sind. Um hierüber Aufschluss zu erhalten, stellen wir folgende Betrachtung an. Wir begrenzen in der Blendenebene B_{-1} ein bestimmtes Flächenstück F'_{-1} . Durch den Rand desselben geht ein Kegel einfallender Strahlen. Die gebrochenen Strahlen schneiden die Ebene B_{2k+1} nach einer Curve, die das Flächenstück F'_{2k+1} begrenzt und ebenso bestimmen dieselben in der Schirmebene ein Flächenstück F_{2k+1} . Ersteres ist bis auf Grössen 3. Ordnung dem Flächenstück F'_{-1} der Blendenebene ähnlich, letzteres hat Dimensionen, die überhaupt nur von der dritten Grössenordnung sind. Die einfallenden Strahlen denken wir uns von dem leuchtenden Punkt aus nach allen Richtungen gleich dicht geschart. Als Mass für die Menge der einfallenden Strahlen, die in dem von F'_{-1} begrenzten Kegel enthalten sind, können wir demnach jenen Teil F'_0 einer Kugel vom Radius 1 um den leuchtenden Punkt als Centrum gelten lassen, welcher von dem Grenzkegel der einfallenden Strahlen umschlossen wird. Das Verhältniss nun der Fläche F'_0 zu der entsprechenden Fläche F_{2k+1} soll als mittlere Helligkeit i_m des Lichtfleckes innerhalb des Flächenstückes F_{2k+1} bezeichnet werden; also:

$$i_m = \frac{F'_0}{F_{2k+1}} = \frac{F'_0}{F'_{-1}} \cdot \frac{F'_{-1}}{F'_{2k+1}} \cdot \frac{F'_{2k+1}}{F_{2k+1}} \quad (81)$$

Der Bruch $\frac{F'_0}{F'_{-1}}$ ist bis auf Grössen 2. Ordnung dem Quadrate des Verhältnisses zwischen dem Kugelradius 1 und der Entfernung K_{-1} des leuchtenden Punktes von der Blendenebene gleich, da die Strahlen, welche F'_0 in F'_{-1} projicieren, alle Neigungen von der ersten Grössenordnung gegen die Axe haben und daher annähernd senkrecht auf der Blendenebene stehen.

Wir setzen also:

$$\frac{F'_0}{F'_{-1}} = \left(\frac{\sigma_{-1} \sigma'_{-1}}{T v_{-1}} \right)^2 \quad (82)$$

Das Verhältniss $\frac{F'_{-1}}{F'_{2k+1}}$ weicht von dem Verhältniss der Figur in der Diaphragmenebene zu der durch die erste Näherung bestimmten Figur der Ebene B_{2k+1} nur um Grössen 3. Ordnung ab. Letzteres Verhältniss ist aber gleich: $\left(\frac{v_{-1}}{\sigma'_{-1}} \cdot \frac{\sigma'_{2k+1}}{v_{2k+1}} \right)^2$.

Genähert kann man also die mittlere Helligkeit des Flächenstückes F_{2k+1} der Schirm-
ebene wie folgt schreiben:

$$i_m = \left(\frac{\sigma_{-1}}{T} \right)^2 \cdot \left(\frac{\sigma'_{2k+1}}{\nu_{2k+1}} \right)^2 \cdot \frac{F'_{2k+1}}{F_{2k+1}} = \frac{\sigma_{-1}^2 \sigma'^2_{2k+1}}{T^2 \nu^2_{2k+1}} \cdot \frac{F'_{2k+1}}{F_{2k+1}} \quad (82)$$

Ob wir dabei unter F'_{2k+1} den wahren Inhalt oder den aus der ersten Näherung
folgenden verstehen, ist für die hier angestrebte Genauigkeit gleichgültig; wir werden
daher das letztere thun. Um aus dieser mittleren Helligkeit i_m diejenige eines ganz
bestimmten Punktes des Lichtfleckes abzuleiten, nehmen wir einen Grenzübergang vor,
indem wir die Dimensionen der Figuren F'_0 , F'_{-1} , F'_{2k+1} und damit auch F'_{2k+1}
mehr und mehr verkleinern, bis sie schliesslich unendlich klein, selbst im Vergleich
zur 3. Grössenordnung, geworden sind. Dann kann man das Flächenstück F'_{2k+1}
als ein Rechteck mit den Seiten ds_λ , ds_μ , die zu den Elementen der Curven $\lambda = \text{const.}$,
 $\mu = \text{const.}$ parallel sind, ebenso das Flächenstück F_{2k+1} als ein solches mit den
Seiten dAs_λ , dAs_μ auffassen und daher für die Helligkeit i in dem durch die Para-
meterwerte $\lambda \mu$ gekennzeichneten Punkt der Schirmebene folgenden Ausdruck setzen:

$$i = \frac{\sigma_{-1}^2 \sigma'^2_{2k+1}}{T^2 \nu^2_{2k+1}} \cdot \left\{ \left(\frac{dAs}{ds} \right)_{\lambda = \text{const}} \cdot \left(\frac{dAs}{ds} \right)_{\mu = \text{const}} \right\} \quad (83)$$

Für die Differentialquotienten lassen sich folgende Umschreibungen machen:

$$\begin{aligned} \left(\frac{dAs}{ds} \right)_{\lambda = \text{const}} &= \frac{dAs}{d\mu} \cdot \frac{d\mu}{ds} = \frac{dy}{d\mu} \cdot \frac{d\mu}{d\eta'_{2k+1}} = \frac{dz}{d\mu} \cdot \frac{d\mu}{d\zeta'_{2k+1}} \\ \left(\frac{dAs}{ds} \right)_{\mu = \text{const}} &= \frac{dAs}{d\lambda} \cdot \frac{d\lambda}{ds} = \frac{dy}{d\lambda} \cdot \frac{d\lambda}{d\eta'_{2k+1}} = \frac{dz}{d\lambda} \cdot \frac{d\lambda}{d\zeta'_{2k+1}}, \end{aligned}$$

wobei folgende Gleichungen zur Ausführung der Differentiationen nötig sind:

$$\begin{aligned} y &= \sqrt{\frac{-\lambda \mu A}{MH^2}} \left\{ (3M + L)H^2 - x \frac{\sigma'^2_{2k+1}}{T\nu_{2k+1}} + A(\lambda + \mu) \right\} \frac{\nu_{2k+1}}{\sigma_{2k+1}} \\ &= \eta'_{2k+1} \left\{ (3M + L)H^2 - x \frac{\sigma'^2_{2k+1}}{T\nu_{2k+1}} + A(\lambda + \mu) \right\}. \\ z &= \sqrt{\frac{(MH^2 + A\lambda)(MH^2 + A\mu)}{AMH^2}} \left\{ (M + L)H^2 - x \frac{\sigma'^2_{2k+1}}{T\nu_{2k+1}} A(\lambda + \mu) \right\} \frac{\nu_{2k+1}}{\sigma_{2k+1}} \\ &= \zeta'_{2k+1} \left\{ (M + L)H^2 - x \frac{\sigma'^2_{2k+1}}{T\nu_{2k+1}} + A(\mu + \lambda) \right\}. \\ \eta'_{2k+1} &= \sqrt{\frac{-\lambda \mu A}{MH^2}} \frac{\nu_{2k+1}}{\sigma_{2k+1}}, \quad \zeta'_{2k+1} = \sqrt{\frac{(MH^2 + A\lambda)(MH^2 + A\mu)}{AMH^2}} \frac{\nu_{2k+1}}{\sigma_{2k+1}} \end{aligned} \quad (27)$$

woraus nach leichter Rechnung folgt:

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{d\mathcal{A}s}{ds} \right)_{\lambda = \text{const}} &= (3M + L)H^2 - x \frac{\sigma_{2k+1}^2}{T\nu_{2k+1}} + A(\lambda + 3\mu) \\ \left(\frac{d\mathcal{A}s}{ds} \right)_{\mu = \text{const}} &= (3M + L)H^2 - x \frac{\sigma_{2k+1}^2}{T\nu_{2k+1}} + A(3\lambda + \mu) \end{aligned} \right\} \quad 84)$$

Schliesslich wird:

$$i = \frac{\sigma_{-1}^2 \sigma_{2k+1}^2}{T^2 \nu_{2k+1}^2} : \left\{ \left[(3M + L)H^2 - x \frac{\sigma_{2k+1}^2}{T\nu_{2k+1}} + A(\lambda + 3\mu) \right] \times \right. \\ \left. \times \left[(3M + L)H^2 - x \frac{\sigma_{2k+1}^2}{T\nu_{2k+1}} + A(3\lambda + \mu) \right] \right\} \quad 85)$$

Diese Formel gibt die Helligkeit eines Punktes der Schirmebene in der Entfernung x von der genäherten Bildebene als Funktion der Parameter λ und μ .

Es wird daher das Nächstliegende sein, die Verteilung der Helligkeit zuerst in der $\lambda\mu$ -Ebene zu studieren. Setzen wir $i = \text{const}$, so erhalten wir die Gleichung einer Curve gleicher Helligkeit i , einer Isophote. In der $\lambda\mu$ -Ebene werden die Isophoten eine Hyperbelschar mit gemeinsamen Asymptoten, welche den gleich Null gesetzten Klammerfaktoren in dem Nenner des Ausdruckes für i entsprechen. Für die Asymptoten ist also die Helligkeit unendlich gross. Die Asymptoten der Hyperbelschar sind aber, wie aus einem Vergleich mit Formel 25 ersichtlich ist, die Bilder der Brennnlinien in der Schirmebene. Für eine beliebige Isophote ist der Betrag der Helligkeit proportional dem Quadrat der reellen Axe der entsprechenden Hyperbel.

Wir können daher folgenden Satz aussprechen:

Die Isophoten der Lichtflecke in der Schirmebene werden in die Ebene der Parameter $\lambda\mu$ als eine Schar von Hyperbeln mit gemeinsamen Asymptoten abgebildet. Die zugehörige Helligkeit ist den Quadraten der reellen Hyperbelaxen proportional. Den Asymptoten selbst entsprechen die Brennnlinien der Schirmebene. Für sie wird daher die Helligkeit unendlich gross im Vergleich zu den übrigen Teilen des Lichtfleckes.

Wie aus der Diskussion der Abbildung von Schirm- und Diaphragmenebene erinnerlich ist, entsprechen einem Punkte der erstgenannten Ebene bis zu 5 Parameterpaare $\lambda\mu$ oder 5 Punkte der Diaphragmenebene und daher auch 5 verschiedene Helligkeiten, die sich übereinander lagern. Die aus den Hyperbeln construierten Isophoten geben demnach immer nur die Helligkeit, die von einem einzelnen Strahle herrührt, die Gesammthelligkeit ist gleich der Summe der von den einzelnen Strahlen herrührenden Teilhelligkeiten.

Aus dem Verlauf der Hyperbelschar der $\lambda\mu$ -Ebene geht hervor, dass die Helligkeit ausser in den Brennnlinien kein Maximum haben kann, wohl aber Minima.

Solche treten auf, wenn eine Hyperbel eine der Geraden, welche den Streifen begrenzen, von Aussen berührt, oder wenn sie durch den Punkt $\lambda = -\frac{MH^2}{A}\mu = 0$ hindurchgeht, ohne in den Streifen einzutreten. Vergl. Tafel II.

Wenn der Kugelgestaltsfehler in der Axe gehoben ist, lässt sich die Helligkeit in einem Punkte der Schirmebene in ganz ähnlicher Weise nur noch einfacher berechnen. Man kann hier statt der Parameter $\lambda\mu$ gleich deren Ausdrücke in den reducierten Coordinaten der Diaphragmenebene einführen und gelangt dann zu folgendem Werte:

$$i = \frac{\sigma_{-1}^2 \sigma_{2k+1}^2}{4 B^2 H^2 T^2 v_{2k+1}^2} : \left\{ 3 \left(H'_* + \frac{x \sigma_{2k+1}^2}{3 B H T v_{2k+1}} - \frac{H(E-G)}{3 B} \right)^2 - Z'^2 + \right. \\ \left. + \frac{1}{12} \left(\frac{x \sigma_{2k+1}^2}{B H T v_{2k+1}} - \frac{H(E-G)}{B} \right)^2 \right\} \quad (86)$$

Der Klammerausdruck im Nenner stellt gleich 0 gesetzt diejenige Hyperbel der Diaphragmenebene dar, welcher der Brennnlinie in der Schirmebene entspricht (vergleiche Formel 77). In letzterer ist also auch in diesem Falle, wie vorausszusehen, die Brennnlinie unendlich heller als alle übrigen Teile. Die Curven der Diaphragmenebene, welche den Isophoten der Schirmebene entsprechen, sind Hyperbeln mit gemeinsamen Asymptoten.

Ganz besonders einfach werden die Isophoten, wenn wir die Schirmebene so wählen, dass $x = x_0 = H^2(E-G)T \frac{v_{2k+1}}{\sigma_{2k+1}^2}$ wird. Die Brennnlinien in dieser Schirmebene zerfallen, wie wir früher sahen, in ein Geradenpar, das einen Winkel von 60° einschliesst. Die Formel für die Helligkeit reduciert sich hiedurch auf:

$$i = \frac{\sigma_{-1}^2 \sigma_{2k+1}^2}{4 B^2 H^2 T^2 v_{2k+1}^2} \cdot \frac{1}{3 H'^2_* - Z'^2} \quad (87)$$

Auch die Abbildungsformeln für die Schirmebene vereinfachen sich beträchtlich:

$$y = -\frac{v_{2k+1}}{\sigma_{2k+1}} B (3 H'^2_* + Z'^2) H \\ z = -2 \frac{v_{2k+1}}{\sigma_{2k+1}} B H'_* Z' H. \quad (78)$$

Ohne Schwierigkeiten lässt sich hier die Elimination der H'_* und Z' ausführen und man gelangt schliesslich zu der einfachen Gleichung der Asymptoten in der Schirmebene $x = x_0$ selbst:

$$y^2 - 3 z^2 = \frac{\sigma_{-1}^4 \sigma_{2k+1}^2}{16 B^2 H^2 T^4 v_{2k+1}^2 i^2} \quad (88)$$

Da in diesem Falle der Winkelraum zwischen den Brennnlinien vierfach überdeckt wird und da ferner die vier übereinander liegenden Schichten, wie sich aus dem Vergleiche des über die Abbildung früher Gesagten mit der Formel für die Helligkeit ergibt, in jedem Punkte gleiche Helligkeit besitzen, so folgt, dass die Gesamthelligkeit gleich der vierfachen Einzelhelligkeit jedes Punktes ist.

Satz: Wenn bei einem dioptrischen System, dessen Kugelgestaltsfehler in der Axe gehoben ist, die Schirmebene die Brennfläche symmetrisch schneidet, so sind die Isophoten dortselbst eine Schar von Hyperbeln mit gemeinsamen Asymptoten, den Brennnlinien. Die Helligkeit ist den reellen Axen der Hyperbeln umgekehrt proportional.

Es sei endlich der Fall in Betracht gezogen, dass bei einem Linsensystem nicht bloß die Bedingung $S(1) = 0$, die den Kugelgestaltsfehler in der Axe vernichtet, erfüllt sei, sondern auch die Fraunhoferbedingung $S(2) = 0$. Für alle Punkte der Objektebene ist dann reiner Astigmatismus vorhanden und die Brennflächen sind in Linienelemente degeneriert. Auf der Schirmebene treten mit zwei Ausnahmen keine Brennnlinien auf; die Abbildung der Diaphragmenebene in die Schirmebene ist eindeutig affin; gleichen Flächen der Diaphragmenebene entsprechen auch gleiche Flächen der Schirmebene und hieraus folgt, dass die letztere gleichförmig beleuchtet erscheint. Geht die Schirmebene gerade durch eine der beiden Brennnlinien, so konzentriert sich alles Licht auf einem unendlich schmalen Streifen, der dann auch unendlich hell ist. Die Helligkeit in einer beliebigen Schirmebene lässt sich durch Zurückgehen auf die Formeln ermitteln:

$$i = \frac{\sigma_{-1}^2 \sigma_{2k+1}^2}{T^2 \nu_{2k+1}^2} : \left\{ \left(H^2 (E + 2G) - x \frac{\sigma_{2k+1}^2}{T \nu_{2k+1}} \right) \left(H^2 E - x \frac{\sigma_{2k+1}^2}{T \nu_{2k+1}} \right) \right\} \quad 89)$$

Dieselbe hat ein Minimum für $x \frac{\sigma_{2k+1}^2}{T \nu_{2k+1}} = H^2 (E + G)$

Dasselbe wird gleich: $i = -\frac{\sigma_{-1}^2 \sigma_{2k+1}^2}{G^2 T^2 H^4 \nu_{2k+1}^2}$ und liegt gerade in der Mitte zwischen den beiden Brennnlinien.

§ 6.

Begrenzung des Lichtfleckes durch Ablendung der einfallenden Strahlen.

Für die Gestalt des Lichtfleckes ist nicht die Verteilung der Helligkeit allein massgebend, sondern auch die Begrenzung desselben. Diese geschieht durch die Strahlen, welche den Rand der massgebenden Blende passiert hatten. Bei der mannigfachen Ueberdeckung mit Helligkeit, die ein Lichtfleck im allgemeinen aufweist, darf indessen nicht angenommen werden, dass ausserhalb der Curve, in welchen die Randstrahlen die Schirmebene schneiden, nun gar keine Helligkeit mehr vorkomme.

Es verlaufen vielmehr die durch die Randstrahlen in der Schirmebene gegebenen Curven in den einzelnen Blättern, mit denen man sich zur Herstellung der Eindeutigkeit die Schirmebene überdeckt denken muss und grenzen dort jeweils Hell und Dunkel gegen einander ab. Wo bloß eine Ueberdeckung der Schirmebene stattfindet, bilden sie thatsächlich die Grenze des Lichtfleckes, in anderen Teilen kann die Helligkeit eines zweiten Blattes über die Grenze des ersten hinausreichen und dann bildet, wenn nicht ein Ast der Grenzkurve im zweiten Blatt, ein Stück der Brennnlinie, die ja stets den Uebergang zweier Blätter vermittelt, die thatsächliche Grenze des Lichtfleckes. Im ersteren Falle ist die Grenze häufig unscharf, weil an ihr unter Umständen nur mehr eine geringe Helligkeit vorhanden ist, in letzterem Falle aber ist immer der Contrast der „unendlich hellen“ Brennnlinie gegenüber der unbeleuchteten Schirmebene massgebend und die Grenze daher sehr scharf.

Die Abbildungsmethode gibt uns ein bequemes Mittel, die Grenzcurven des Lichtfleckes zu untersuchen. Wir setzen in der Folge stets eine kreisförmige, centrisch zur optischen Axe gelegene Blende voraus, die wir zunächst in der Ebene B_{-1} gelegen annehmen. Ihre Gleichung ist dann:

$$\eta'^2_{-1} + \zeta'^2_{-1} = \gamma^2$$

Gehen wir auf die reducierten Coordinaten über, so haben wir:

$$H'^2 + Z'^2 = \gamma^2 \frac{\sigma'^2_{-1}}{\nu^2_{-1}} = \Gamma^2 \quad (90)$$

Führen wir die auf eine parallele Axe $H' = H'_0 = \frac{BH}{A}$ bezogenen Coordinaten $H'_* = H' - H'_0$ ein, wodurch wir die Anwendung der Abbildungsformeln 70 ermöglichen, so ergibt sich:

$$(H'_* + H'_0)^2 + Z'^2 = \Gamma^2 \quad (91)$$

Wir können auch hier wieder die Parameter $\lambda \mu$ einführen und erhalten folgende Gleichung für die Punkte, welche den Grenzen der Blende entsprechen:

$$\left\{ \frac{MH^2}{A} + \lambda + \mu + H'^2_0 - \Gamma^2 \right\}^2 + \frac{4\lambda\mu AH'^2_0}{MH^2} = 0 \quad (92)$$

Allerdings gehören den Parameterwerten $\lambda \mu$, die obige Gleichung erfüllen, auch die Punkte des zum Blendenkreis in Bezug auf die Z' -Axe symmetrisch gelegenen Kreises: $(H'_* - H'_0)^2 + Z'^2 = \Gamma^2$ an, was bei der Weiterverwendung der Formel zu berücksichtigen ist. Diese Formel stellt für verschiedene Werte des Radius Γ ein System von Hyperbeln mit parallelen Asymptoten dar, welche die Geraden $\lambda = 0$ $\mu = 0$ berühren. Unter ihnen befindet sich ein Geradenpar, dessen Schnittpunkt in den Anfangspunkt fällt. Es entspricht dem Kreise mit dem Radius $\Gamma^2 = H'^2_0 + \frac{MH^2}{A}$. Siehe Tafel III. Fig. Ib und IIb.

Um die Grenzkurven der Lichtflecke wirklich zu verzeichnen, kann man entweder von den Formeln 69 und den Kreisen in der Blendenebene oder von den Formeln 70 und den Hyperbeln in der $\lambda\mu$ -Ebene ausgehen. Man hat im ersteren Falle zu einer genügenden Anzahl von Punkten des gewählten Kreises in der Blendenebene mittels der Formeln 69 die Punkte der Schirmebene zu berechnen, oder wohl auch zu konstruieren und die letzteren unter Berücksichtigung der zu erwartenden Singularitäten durch einen Curvenzug zu verbinden. Hat man die bicirkulare Curve 4. Ordnung (vergl. Formel 75) in der Blendenebene, welche der Brennnlinie entspricht, verzeichnet, so ist die Einteilung der Blendenebene in Gebiete, die den verschieden von der Brennnlinie abgegrenzten Blättern der Schirmebene entsprechen, leicht auszuführen und aus dem Verlaufe des Kreises zu der Curve 4. Ordnung lässt sich ersehen, welchem Blatte die jeweils betrachteten Partien der Grenzkurve angehören. Zur genauen Unterscheidung ist die Berechnung derjenigen Punkte der Grenzkurve, in welchen sie die Brennnlinie trifft, notwendig; dieselbe setzt voraus, dass man die Schnittpunkte des Kreises mit der bicirkularen Curve 4. Ordnung der Blendenebene kennt.

Einfacher wird die Verzeichnung der Grenzkurve unter Benützung der $\lambda\mu$ -Ebene und der Formeln 70. Zwar hat man hier an stelle des Blendekreises die entsprechende Hyperbel zu konstruieren, aber die Brennnlinie wird dafür einfach durch zwei Gerade repräsentiert. So oft die Hyperbel diese Geraden schneidet, berührt die Grenzkurve die Brennnlinie. Eine Ausnahme tritt nur dann ein, wenn die Tangente an die Hyperbel im Schnittpunkte mit dieser Geraden parallel zu λ oder μ -Axe (je nachdem man es mit der einen oder anderen Geraden zu thun hat) verläuft; dann setzt nämlich die Grenzkurve in Spitzen auf die Brennnlinie auf. So oft die Hyperbel eine der andern bei der Abbildung ausgezeichneten Geraden schneidet, treten für die Grenzkurve entweder Doppelpunkte oder senkrechte Schnitte mit den Symmetrieaxen der Schirmebene auf, was gelegentlich der Besprechung der Abbildung schon erwähnt wurde. Nicht vergessen darf endlich der Umstand werden, dass, wenn man alle zu den Punkten $\lambda\mu$ der Hyperbel gehörigen Punkte der Schirmebene aufsucht, die gewünschte Grenzkurve doppelt, nämlich auch noch einmal an der z -Axe gespiegelt erhalten wird. Lässt man die ungehörige Hälfte fort, so gehen die Doppelpunkte der z -Axe in einfache Punkte über; die Grenzkurve liegt dann unsymmetrisch zur z -Axe. Der Lichtfleck, welcher abgesehen von der Blende nach der y und z -Axe symmetrisch wäre, verliert diese Eigenschaft bezüglich der z -Axe bei beliebiger Abblendung.

Die Unsymmetrie liegt darin begründet, dass der Mittelpunkt unserer Abbildung der Blendenebene in die Schirmebene nicht mit der optischen Axe zusammenfällt, sondern in ersterer um die Grösse $\eta'_{0-1} = \frac{BH\nu_{-1}}{A\sigma'_{-1}}$ verschoben ist. Der Betrag dieser Unsymmetrie hängt linear von der Grösse des Gesichtsfeldes ab und verringert sich gegen das Centrum desselben hin.

Nunmehr soll die Frage zur Erörterung gelangen, ob sich nicht durch Verschiebung der Blende die Beschaffenheit des Lichtfleckes beziehungsweise die Qualität des von einem leuchtenden Punkte entworfenen Bildes verbessern lässt. Dass eine solche Verbesserung allerdings auf Kosten der Helligkeit durch Verkleinerung des Blendenradius möglich ist, ist bekannt und soll später noch besprochen werden. Es lässt sich aber zeigen, dass durch eine Verschiebung der Blende auf der Axe eine erhebliche Verbesserung des Bildes bewirkt werden kann, die um so wertvoller ist, als sie nicht auf Kosten der Helligkeit geschieht. Man kann nämlich durch geeignete Wahl der Blende die Unsymmetrie der Grenzfigur gegenüber der einen Symmetriearchse der Helligkeit zum Verschwinden bringen. Versetzt man nämlich die Blende aus der Ebene B_{-1} um eine Strecke m in der Richtung der Lichtbewegung und vergrössert sie derart, dass noch dieselbe Lichtmenge hindurchgeht, so werden die Strahlen des leuchtenden Punktes ebenso abgeblendet, wie wenn in der Ebene B_{-1} eine zur optischen Achse excentrisch gelegene Blende vorhanden wäre, welche durch Projektion der wirklichen Blende auf die Ebene B_{-1} vom leuchtenden Punkt aus entstanden gedacht werden kann. Bezeichnen wir mit η_{-1} die Entfernung des leuchtenden Punktes von der optischen Achse und mit K_{-1} den Abstand von Objekt und Blenden-ebene, dann wird die fingierte Blende in der Ebene B_{-1} um einen Betrag gleich $\frac{m}{m + K_{-1}} \eta_{-1}$ excentrisch zur optischen Achse liegen. Wählen wir m so, dass dieser

Betrag gleich $\eta'_{0-1} = \frac{B}{A} \frac{\eta_{-1} \sigma_{-1}}{\sigma'_{-1}}$ gleich der Verschiebung H'_0 des Koordinaten-systems (im Masstab der Ebene B_{-1} ausgedrückt) wird, also: $m = K_{-1} \frac{B \sigma_{-1}}{A \sigma'_{-1} - B \sigma_{-1}}$,

so fällt der Mittelpunkt der fingierten Blende mit dem Mittelpunkt der Abbildung in der Ebene B_{-1} zusammen. Man hätte auch die Betrachtung so führen können, dass man alles auf die Ebene der wirklichen Blende bezieht und vom leuchtenden Punkt aus die Ebene B_{-1} auf jene projiziert. Bei passender Wahl der letzteren wird dadurch der Mittelpunkt der Abbildung in die optische Achse versetzt.

Durch die neue Abbildung wird eine zur Helligkeitsverteilung symmetrische Begrenzung des Lichtfleckes erzielt. Dabei ist es wesentlich, dass die Grösse m , welche den Ort der neuen Abbildung bestimmt, unabhängig von η_{-1} , d. h. von der Lage des leuchtenden Punktes ist und dass also für alle leuchtenden Punkte der Objektebene die Lichtflecken der Schirmebene symmetrisch werden. Die Grenzcurven vereinfachen sich hierbei ganz bedeutend. Sie entstehen nun entweder aus den Kreisen: $H'^2_* + Z'^2 = \Gamma^2$ der Blendenebene, oder aus den Geraden der $\lambda\mu$ -Ebene: $\lambda + \mu + \frac{MH^2}{A} = \Gamma^2$, in welche die Hyperbeln ausarten. Sehr einfach lässt sich nunmehr die Elimination ausführen, die direkt zur Gleichung der Grenzcurven in der Schirmebene führt.

Dieselbe ergibt:

$$\frac{y^2}{\left(A\Gamma^2 + (L + 2M)H^2 - x \frac{\sigma_{2k+1}^2}{T\nu_{2k+1}}\right)^2} + \frac{z^2}{\left(A\Gamma^2 + LH^2 - x \frac{\sigma_{2k+1}^2}{T\nu_{2k+1}}\right)^2} = \Gamma^2 \frac{\nu_{2k+1}^2}{\sigma_{2k+1}^2}$$

Wir erhalten für verschiedene Radien Γ der Blendenöffnung ein System von Ellipsen, welches die Brennnlinie einhüllt. Jede Ellipse berührt in 4 reellen und 4 imaginären Punkten.

Für $x \frac{\sigma_{2k+1}^2}{T\nu_{2k+1}} - LH^2 = A\Gamma^2$ und $x \frac{\sigma_{2k+1}^2}{T\nu_{2k+1}} - (L + 2M)H^2 = A\Gamma^2$ redu-

ciert sich die Ellipse auf eine Doppellinie, welche 2 Spitzen der Brennnlinie mit einander verbindet. Obwohl demnach für diese Werte des Radius der Blendenöffnung die Grenzcurve keine Fläche mehr umschliesst, so hat der Lichtfleck dennoch Ausdehnung nach allen Seiten; es bildet eben die Brennnlinie seine Grenze. Die Figuren auf Tafel III sind bestimmt, in einem konkreten Falle den Verlauf der Grenzcurven bei verschiedener Grösse der Blende darzustellen. (Vergl. die am Schlusse der Abhandlung beigegebene Erläuterung der Tafeln). Fig. 1 a b c zeigt einen Fall, in welchem die Grenzcurven unsymmetrisch zu der Brennnlinie liegen. Der Strahl, der durch den Mittelpunkt der Blende geht, bildet sich nicht im Centrum des Lichtfleckes ab. Fig. 2 a b c zeigt dagegen den symmetrischen Fall, in welchem die Grenzcurven Ellipsen werden. Zwei von denselben sind sehr nahe in Doppellinien ausgeartet. Fig. 3 a b zeigt einen ebenfalls symmetrischen Fall, aber in einer anderen Schirmebene. In dieser ist die Brennnlinie ein Hypocycloidenpar und bedeutend kleiner als bei der vorhergehenden Schirmebene. Wie man aus Fig. 2 a b c d e f auf Tafel II ersehen konnte, war auch der Raum innerhalb der Brennnlinie bedeutend heller als bei der vorhergehenden Schirmebene. Dagegen ist die Ausbreitung der Randstrahlen hier eine bedeutend stärkere als vorher.

Es soll nun der Fall betrachtet werden, dass $S(1) = 0$ ist.

Hiebei treten zu der Gleichung des Blendenrandes in der Ebene B_{-1} :

$$(H'_* + H'_0)^2 + Z'^2 = \Gamma^2 \quad (90)$$

(wobei aber $H'_0 = \frac{G}{2B}H$) an stelle der Formeln 70 die folgenden:

$$y = \frac{\nu_{2k+1}}{\sigma_{2k+1}} \left\{ H'_* \left(H^2 (E - G) - 2BHH'_* - x \frac{\sigma_{2k+1}^2}{\nu_{2k+1}} \right) - BHR'^2_* \right\} \quad (76)$$

$$z = \frac{\nu_{2k+1}}{\sigma_{2k+1}} Z' \left(H^2 (E - G) - 2BHH'_* - x \frac{\sigma_{2k+1}^2}{\nu_{2k+1}} \right)$$

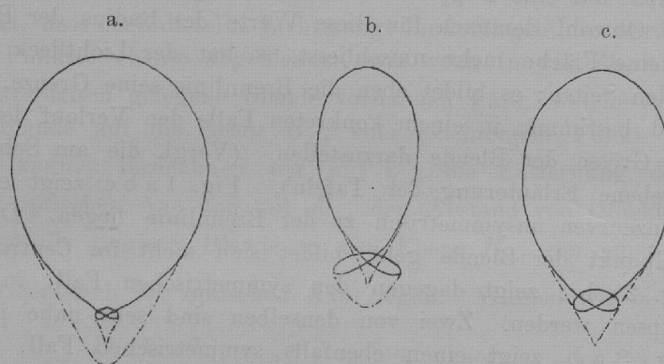
Aus 90 und 76 wäre durch Elimination von H'_* und Z' die Gleichung der Grenzcurve des Lichtfleckes zu bestimmen. Die Brennnlinie wird in der Blendenebene B_{-1} durch die Hyperbel:

$$Z'^2 - 3 \left(H'_* + \frac{x \sigma_{2k+1}^2}{3 B H T \nu_{2k+1}} - \frac{H(E-G)}{3 B} \right)^2$$

$$= \frac{1}{12} \left(\frac{x \sigma_{2k+1}^2}{B H T \nu_{2k+1}} - \frac{H(E-G)}{B} \right)^2 \quad 93)$$

abgebildet. Ihre Schnittpunkte mit dem Blendenrande geben, wenn man sie in die Schirmebene abbildet, die Punkte, in denen die Grenzcurve die Brennnlinie berührt, also von einem Blatte ins andere übertritt. Wenn alle 4 Schnittpunkte reell sind, ist die Figur, welche Brennnlinie und Grenzlinie bilden, im allgemeinen von einem der

Fig. 16.



beiden in Fig. 16 a und b abgebildeten Typen, je nachdem die Schirmebene auf der einen oder andern Seite der Symmetrieebene der Brennfläche schneidet. Den Uebergang vermittelt der 3. Typus (Fig. 16 c), welcher in der Symmetrieebene auftritt. Bei diesem sind die beiden geraden Brennnlinien Doppeltangenten der Grenzcurve.

In dieser Symmetrieebene lässt sich die Gestalt der Grenzcurve durch Verschiebung der Blende noch ganz erheblich vereinfachen. Versetzt man nämlich die Blende in eine Ebene, welche um die Strecke

$$n = K_{-1} \frac{G \sigma_{-1}}{2 B \sigma'_{-1} - G \sigma_{-1}} \quad 94)$$

in der Richtung des einfallenden Lichtes von B_{-1} aus verschoben ist und projiciert man die Ebene B_{-1} vom leuchtenden Punkt aus auf die neue Blendenebene, so fällt der Mittelpunkt der Hyperbel, die nunmehr in ein Geradenpar ausgeartet ist, auf die Axe und die neue Blende wird symmetrisch zu diesem Geradenpar liegen. Da weder die Abbildung noch die Helligkeitsverteilung in diesem Falle symmetrisch in Bezug auf die Z -Axe ist, so kann die symmetrische Lage der Blende zum Geradenpar keine symmetrische Begrenzung des Lichtfleckes zur Folge haben. Sie bewirkt aber, worauf ich durch eine Bemerkung des Herrn Professor v. Seidel aufmerksam gemacht worden

bin, dass die Grenzcurve des Lichtfleckes einfach ein allerdings excentrisch gelegener Kreis wird, der beide Brennlinien berührt. Dies lässt sich leicht beweisen:

Die Gleichung der fingierten Blende, welche durch Projektion der neuen Blende vom leuchtenden Punkt aus in die Ebene B_{-1} entstanden gedacht werden kann, habe die Gleichung:

$$H'^2_* + Z'^2 = \Gamma^2.$$

Die Abbildungsformeln für die Symmetrieebene der Brennfläche als Schirmebene lauten:

$$\begin{aligned} y &= -\frac{\nu_{2k+1}}{\sigma_{2k+1}} B H (3 H'^2_* + Z'^2), \\ z &= -2 \frac{\nu_{2k+1}}{\sigma_{2k+1}} B H H'_* Z' \end{aligned} \quad (95)$$

Durch Elimination von H'_* und Z ergibt sich die Gleichung der Grenzcurve:

$$\begin{aligned} \frac{z^2 \sigma_{2k+1}^2}{\nu_{2k+1}^2 B^2 H^2} &= -\left(y \frac{\sigma_{2k+1}}{\nu_{2k+1} B H} + \Gamma^2\right) \left(y \frac{\sigma_{2k+1}^2}{\nu_{2k+1} B H} + 3 \Gamma^2\right) \\ z^2 + \left(y + 2 \frac{B H \nu_{2k+1}}{\sigma_{2k+1}} \Gamma^2\right)^2 &= \frac{B^2 H^2 \nu_{2k+1}^2}{\sigma_{2k+1}^2} \Gamma^4 \end{aligned} \quad (96)$$

Denkt man sich Γ variabel, so stellt diese Gleichung eine Schar von Kreisen dar, welche zwei unter 60° gegeneinander geneigte Grade, die Brennlinien berühren. Der Durchmesser eines solchen Grenzkreises ist dem Quadrate des Radius Γ der Blende, also der Fläche derselben proportional. Bei konstanter Grösse der Blende ist der Durchmesser der Grenzcurve und damit des ganzen Lichtfleckes dem Gesichtsfelde (ausgedrückt durch die reducierte Entfernung H des leuchtenden Punktes von der Axe) einfach proportional. Wir können daher folgenden Satz aussprechen:

In einem Linsensystem mit gehobenem Kugelgestaltsfehler bildet sich ein leuchtender Punkt ausser der Axe in einer geeignet gewählten Schirmebene und bei geeignet gewählter Stellung der Blende in einen Lichtfleck ab, der von einem Kreise und zwei unter 60° gegeneinander geneigten Tangenten desselben begrenzt wird. Der einfallende Strahl, der durch den Mittelpunkt der Blende geht, trifft nach der Brechung den Schirm im Schnittpunkt der beiden Tangenten, woselbst der Lichtfleck am hellsten ist. Alle Strahlen, welche auf einem zur Blende concentrischem Kreise einfallen, treffen nach der Brechung den Schirm wieder in einem Kreise, der dieselben Grenztangenten berührt. Vergleiche Tafel III Fig. 5 a und 5 b.

Ueber den Zusammenhang der Brennfläche der gebrochenen Strahlen mit der Centrafläche der Flächen 2. Grades. Mechanische Erzeugung des Systems der gebrochenen Strahlen.

Die Gleichung eines dreiaxigen Ellipsoides werde in folgender Form angenommen:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{(a+b)^2} + \frac{z^2}{(a+c)^2} = 1. \quad (97)$$

Für die Normale in einem Punkte $x' y' z'$ desselben gelten bekanntlich nachstehende Beziehungen zwischen den laufenden Coordinaten $x y z$ und denen des Fusspunktes $x' y' z'$:

$$x - x' : y - y' : z - z' = \frac{x'}{a^2} : \frac{y'}{(a+b)^2} : \frac{z'}{(a+c)^2} \quad (98)$$

Führt man die Entfernung q zwischen den Punkten $x y z$ und $x' y' z'$ ein, so kann man an stelle der Proportion 98 folgende drei Gleichungen setzen:

$$\begin{aligned} x - x' &= q \frac{x'}{a^2 p} \\ y - y' &= q \frac{y'}{(a+b)^2 p}; \quad p = \sqrt{\frac{x'^2}{a^4} + \frac{y'^2}{(a+b)^4} + \frac{z'^2}{(a+c)^4}} \\ z - z' &= q \frac{z'}{(a+c)^2 p} \end{aligned} \quad (99)$$

Es sollen nun die Längen q_1, q_2, q_3 der Normalen vom Fusspunkt bis zu den drei Durchschnittspunkten mit den Coordinatenebenen berechnet werden:

$$q_1 = -a^2 p,$$

$$q_2 = -(a+b)^2 p,$$

$$q_3 = -(a+c)^2 p.$$

Wir nehmen nun die Grössen b und c klein im Vergleich zu a an und entwickeln nach Potenzen von $\frac{b}{a}$ und $\frac{c}{a}$:

$$\begin{aligned} p &= \sqrt{\frac{x'^2}{a^4} + \frac{y'^2}{(a+b)^4} + \frac{z'^2}{(a+c)^4}} = \sqrt{\frac{x'^2 + y'^2 + z'^2}{a^4} - 4 \frac{b y'^2 + c z'^2}{a^5}} \\ \frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{(a+b)^2} + \frac{z'^2}{(a+c)^2} &= 1 = \frac{x'^2 + y'^2 + z'^2}{a^2} - 2 \frac{b y'^2 + c z'^2}{a^3} \end{aligned}$$

Aus der zweiten Gleichung setzen wir den Wert von $x'^2 + y'^2 + z'^2$ in die erste ein und erhalten damit:

$$p = \sqrt{\frac{1}{a^2} - 2 \frac{b y'^2 + a z'^2}{a^5}} = \frac{1}{a} \left(1 - \frac{b y'^2 + c z'^2}{a^3} \right). \quad (100)$$

Hieraus ergibt sich für $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3$:

$$\begin{aligned} \varrho_1 &= -a \left(1 - \frac{b y'^2 + c z'^2}{a^3} \right), \\ \varrho_2 &= -\frac{(a+b)^2}{a} \left(1 - \frac{b y'^2 + c z'^2}{a^3} \right) = -a \left(1 + \frac{2b}{a} \right) \left(1 - \frac{b y'^2 + c z'^2}{a^3} \right) \\ &= -a \left(1 + \frac{2b}{a} - \frac{b y'^2 + c z'^2}{a^3} \right), \\ \varrho_3 &= -\frac{(a+c)^2}{a} \left(1 - \frac{b y'^2 + c z'^2}{a^3} \right) = -a \left(1 + \frac{2c}{a} - \frac{b y'^2 + c z'^2}{a^3} \right). \end{aligned}$$

Bilden wir die Differenzen: $\varrho_2 - \varrho_1, \varrho_3 - \varrho_1$

$$\begin{aligned} \varrho_2 - \varrho_1 &= 2b \\ \varrho_3 - \varrho_1 &= 2c, \end{aligned} \quad (101)$$

so finden wir, dass dieselben innerhalb der bei der Entwicklung innegehaltenen Genauigkeit constant sind.

Daher können wir folgenden Satz aussprechen: Die Normalen eines dreiaxigen Ellipsoides, dessen Axen sich nur um kleine Grössen von der ersten Ordnung unterscheiden, werden von den drei Hauptebenen in Punkten geschnitten, welche bis auf Grössen zweiter Ordnung gleiche Entfernung von einander haben.

Umgekehrt kann man behaupten: Bewegt sich eine Gerade so, dass drei auf ihr festliegende Punkte in drei zu einander rechtwinkligen Ebenen gleiten, so beschreibt sie ein Strahlensystem, das mit dem Normalensystem eines Ellipsoides von nahezu gleichen Axen identificiert werden kann.

Da die Entfernung der Punkte auf der Geraden nach 101 gleich den doppelten Unterschieden der Halbaxen des Ellipsoides sein muss, so werden, falls jene Entfernungen endlich angenommen sind, die Halbaxen des Ellipsoides unendlich gross, da sie gegenüber den Unterschied zweier von ihnen stark überwiegen müssen. Das hindert aber nicht, dass das Strahlensystem, das von der Geraden beschrieben wird und dessen Brennpunkten nun endliche Dimensionen besitzen, alle allgemeinen Eigenschaften des Normalensystems eines Ellipsoides besitzt, und, wie wir sehen werden, noch manche specielle dazu. Obwohl durch die Art der Herleitung ausreichend bewiesen erscheint, dass bei der angegebenen Bewegung auch unter Voraussetzung endlicher Entfernung der Fixpunkte die Gerade wirklich ein Normalensystem, d. h. ein solches mit zu einander senkrechten Brennebenen beschreibt, soll, da dies einfach geschehen kann, eine direkte Herleitung dieser Eigenschaft aus kinematischen Principien nachfolgen:

Die Punkte, in welchen die Gerade G die 3 Ebenen trifft, werden mit A, B, C bezeichnet. In jedem derselben werde ein Lot zur zugehörigen Ebene errichtet, die dann ein System von 3 untereinander senkrechten Geraden bilden. Denke ich mir die Gerade G um eine ausserhalb ihr liegende Axe unendlich wenig gedreht, so werden im Allgemeinen die mit G verbundenen Fixpunkte aus ihren Ebenen herausrücken. Schneidet aber die Drehaxe die drei Lote, so wird jeder Fixpunkt in seiner Ebene fortrücken. Alle momentanen Drehaxen, welche die drei Lote schneiden, sind mit den Bedingungen für die bewegte Gerade G verträglich und umgekehrt. Diese momentanen Drehaxen sind Erzeugende eines Hyperboloides, das durch die 3 Lote bestimmt wird und ausserdem die Gerade G enthält. Das Hyperboloid ist ein orthogonales, da 3 Erzeugende, die 3 Lote nämlich, unter sich orthogonal sind. Es enthält unendlich viele Tripel orthogonaler Erzeugender und zu jeder Geraden auf dem Hyperboloid gehört eines; also auch zur Geraden G . Die zwei Geraden G' und G'' , welche mit G ein orthogonales Tripel von Erzeugenden bilden, haben die Eigenschaft, dass, wenn man G um eine derselben als Momentanaxe unendlich wenig dreht, die Nachbarlage von G die Anfangslage schneidet, also G bei der Bewegung aus einer Ebene, die senkrecht zur betreffenden Momentanaxe steht, nicht heraustritt. Diese Ebene ist also Brennebene des von der Geraden G erzeugten Strahlensystems; es existiert noch eine zweite der andern zu G senkrechten Momentanaxe entsprechende, welche senkrecht auf dieser steht. Da die beiden Momentanaxen einen rechten Winkel bilden, so ist ein Gleiches auch von den zu ihnen senkrechten Brennebenen der Fall. Das von der Geraden G beschriebene Strahlensystem ist demnach ein Normalensystem.

Irgend ein Punkt der Geraden G beschreibt bei der Bewegung bekanntlich ein Ellipsoid. Es seien die Entfernungen desselben von den Fixpunkten $q, q + 2b, q + 2c$, die Winkel der Geraden mit den Axen α, β, γ , dann sind die Coordinaten eines Punktes der beschriebenen Fläche:

$$x = q \cos \alpha \quad y = (q + 2b) \cos \beta \quad z = (q + 2c) \cos \gamma \quad 102)$$

und ihre Gleichung wird:

$$\frac{x^2}{q^2} + \frac{y^2}{(q + 2b)^2} + \frac{z^2}{(q + 2c)^2} = 1. \quad 103)$$

Unter allen möglichen Flächen befindet sich, wie ausdrücklich hervorzuheben ist, das Ellipsoid 97, von welchem wir ausgegangen sind und zu dem die Geraden normal stehen, nicht, dasselbe wird also nicht von irgend einem festen Punkt der Geraden beschrieben.

Wie aus den Gleichungen 102 hervorgeht, beschreiben alle Punkte der Geraden G räumlich affine Figuren; es sind daher die einzelnen Ellipsoide, welche von den Punkten von G beschrieben werden, durch das Strahlensystem affin auf einander bezogen. Beschreibt ein Punkt einen ebenen Schnitt seines Ellipsoides, so thun dies alle. Je weiter die Punkte auf der Geraden gegen das Unendliche zu liegen, um so kreisähnlicher werden die von ihnen beschriebenen ebenen Schnitte, da die

Ellipsoide selbst immer kugelhähnlicher werden. Die Regelfläche, welche von den Geraden gebildet wird, die ebene Schnitte der Ellipsoide aufeinander beziehen, wird daher von der unendlich fernen Ebene nach einem Kreise geschnitten, oder ihre Erzeugenden sind einem Kreiskegel parallel. Ordnet man die Einzellagen der Geraden G nach Regelflächen, welche durch parallele ebene Schnitte eines Ellipsoides E hindurchgehen, so werden diese Regelflächen wegen der affinen Beziehung der Ellipsoide auf einander von allen Ellipsoiden nach parallelen ebenen Curven geschnitten und speciell von den kugelhähnlichen, weit vom Centrum abliegenden Ellipsoiden nach Curven, die sich von parallelen Kreisen mit gemeinsamer Axe senkrecht zu ihren Ebenen um so weniger unterscheiden, je ferner die sie beschreibenden Punkte auf der Geraden liegen. Alle diese Regelflächen werden daher Richtungskegel mit gemeinsamer Axe haben. Die erwähnte Zusammenordnung nach parallelen ebenen Schnitten des Ellipsoides E ist auf doppelt unendliche Weise möglich; jeder entspricht ein System von Kreiskegeln mit gemeinsamer Axe und allen möglichen Oeffnungswinkeln als Richtungskegel der Regelflächen. Es werden daher bei allen möglichen solchen Zusammenordnungen alle möglichen Kreiskegel als Richtungskegel erschöpft und wir können umgekehrt den Satz aussprechen:

Sondert man von den Lagen der Geraden G diejenigen aus, welche einem gegebenen Kreiskegel parallel sind, so bilden dieselben eine Regelfläche, welche auf unendlich verschiedene Arten durch Verbindung entsprechender Punkte zweier affiner Kegelschnitte erzeugt gedacht werden kann. Sie ist daher vierter Ordnung und ein ebener Schnitt derselben ist im allgemeinen eine rationale Curve vierter Ordnung mit 3 Doppelpunkten.

Aus der Gleichung: $\frac{x^2}{q^2} + \frac{y^2}{(q+2b)^2} + \frac{z^2}{(q+2c)^2} = 1$, die in q vom sechsten Grade ist, folgt unmittelbar, dass zu einem Punkte x, y, z sechs Werte von q , also sechs verschiedene Lagen der Geraden, oder auch 6 Ellipsoide, die von Punkten der Geraden beschrieben sind, gehören. Hat die Gleichung bei gehöriger Wahl des Punktes x, y, z zwei gleiche Wurzeln q , so fallen zwei von den sechs Geraden und ebenso zwei von den sechs Ellipsoiden zusammen. Das erste bedeutet, dass der Punkt x, y, z auf der Brennfläche des Strahlensystems liegt, das zweite, dass er sich auf der Enveloppe der Ellipsoide befindet. Da beide Bedingungen zugleich erfüllt und durch die Diskriminante der Gleichung sechsten Grades ausgedrückt werden, so folgt der Satz:

Die von allen Punkten der bewegten Geraden erzeugten Ellipsoide umhüllen die Brennfläche des Strahlensystems der verschiedenen Lagen der Geraden.¹⁾

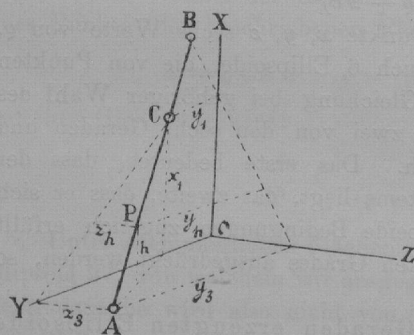
1) Ein analoger Satz gilt allgemein von den Flächen, welche Punkte einer Geraden bei beliebiger Bewegung beschreiben. Auch sie umhüllen die Brennfläche, die von den Einzellagen der Geraden gebildet wird.

Aus den Diskriminanteneigenschaften der Gleichung sechsten Grades in q lassen sich nun die Eigenschaften der Brennfläche, ihre Rückkehrkanten, ausgezeichneten ebenen Schnitte, Doppelcurve etc. genau ebenso herleiten, wie es Clebsch für die Centrafläche des Ellipsoides aus der entsprechenden etwas allgemeineren Gleichung sechsten Grades gethan hat.¹⁾

Von der gewöhnlichen Centrafläche unterscheidet sich unsere Brennfläche wesentlich darin, dass die drei Hauptebenen statt der Evoluten von Ellipsen Asteroiden enthalten. Sonst haben beide die Rückkehrkegelschnitte in den Hauptebenen, sowie die eigentümlichen, den Kreispunkten entsprechenden Knotenpunkte gemein, nur besteht bei der Brennfläche zwischen den Axen der Rückkehrkegelschnitte die Relation, dass immer zwei nicht demselben Kegelschnitt angehörige oder in derselben Richtung liegende gleich gross sind.

Es lässt sich nun unschwer nachweisen, dass zwischen der Seidel'schen Brennfläche und der Brennfläche der Geraden G ein einfacher Zusammenhang besteht, in der Art, dass erstere ein specieller Fall der letzteren wird, wenn man eine der Grössen b und c unendlich klein im Vergleich zur andern nimmt und sich ausserdem auf Lagen der Geraden, welche von einer Axe des Coordinatensystems nur wenig abweichen, beschränkt. Der Beweis könnte an den Gleichungen der Flächen selbst geführt werden, ich ziehe es aber vor, nachzuweisen, dass durch das geeignet modificierte Strahlensystem der Geraden G dieselbe Abbildung zweier unter sich parallelen Ebenen vermittelt wird, welche wir zwischen den Ebenen B_{2k+1} und A_{2k+1} durch das System der gebrochenen Strahlen gefunden haben.

Fig. 17.



$A B C$ seien die Schnittpunkte der Geraden G mit den Ebenen $X=0, Y=0, Z=0$. AB werde mit c , AC mit $b=c-a$, BC mit a bezeichnet. Die Coordinaten von A seien y_3 und z_3 , die von C x_1, y_1 , endlich die von Punkt P , der auf der Geraden G in einer Höhe h über der YZ -Ebene gelegen ist: $x = h, y = y_h, z = z_h$.

Man findet dann:

$$z_h = z_3 - \frac{h z_3}{x_1} = z_3 \left(1 - \frac{h}{x_1}\right); \quad y_3 = \frac{c}{a} y_1$$

$$y_h = y_3 - \frac{h (y_3 - y_1)}{x_1} = y_3 \left(1 - \frac{h(c-a)}{c x_1}\right)$$

Die Neigungscosinus α, β, γ der Geraden G drücken sich folgendermassen durch die Coordinaten aus:

1) Vergl. Salmon-Fiedler. Analytische Geom. d. Raumes II. Teil S. 337 ff. und Crelle's Journal, 62. Bd. S. 64.

$$\alpha = \frac{x_1}{a-c}, \quad \beta = \frac{y_3}{c}, \quad \gamma = \frac{z_3}{c-a},$$

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1.$$

$$\frac{x_1^2}{(a-c)^2} + \frac{y_3^2}{c^2} + \frac{z_3^2}{(c-a)^2} = 1,$$

$$x_1 = (c-a) \sqrt{1 - \frac{y_3^2}{c^2} - \frac{z_3^2}{(c-a)^2}}.$$

Es sollen nunmehr blos Strahlen in Betracht gezogen werden, welche in unmittelbarer Nähe der X-Axe liegen. Wir nehmen daher y_3 und z_3 klein im Vergleich zu c an und entwickeln nach Potenzen von $\frac{y_3}{c}$ und $\frac{z_3}{c}$:

$$\begin{aligned} z_h &= z_3 \left(1 - \frac{h}{(c-a) \sqrt{1 - \frac{y_3^2}{c^2} - \frac{z_3^2}{(c-a)^2}}} \right), \\ &= z_3 \left[1 - \frac{h}{c-a} \left(1 + \frac{y_3^2}{2c^2} + \frac{z_3^2}{2(c-a)^2} \right) \right], \\ &= \frac{z_3}{2c^2(c-a)^3} [2c^2(c-a)^3 - 2hc^2(c-a)^2 - y_3^2(c-a)^2h - z_3^2c^2h], \\ &= \frac{z_3}{2c^2(c-a)^3} [2c^2(c-a)^2(c-a-h) - (y_3^2(c-a)^2 + z_3^2c^2)h], \\ y_h &= y_3 \left[1 - \frac{h}{c} \left(1 + \frac{y_3^2}{2c^2} + \frac{z_3^2}{2(c-a)^2} \right) \right], \\ &= \frac{y_3}{2c^3(c-a)^2} [2c^2(c-a)^2(c-h) - (y_3^2(c-a)^2 + z_3^2c^2)h]. \end{aligned}$$

Jetzt soll auch die Grösse a , ferner die Differenz $c-h$ sehr klein gegen c sein und gegenüber c vernachlässigt werden:

$$2c^2 z_h = z_3 \left(c(c-a-h) - \frac{h}{c} (y_3^2 + z_3^2) \right), \quad (104)$$

$$2c^2 y_h = y_3 \left(c(c-h) - \frac{h}{c} (y_3^2 + z_3^2) \right).$$

In den so erhaltenen Formeln müssen die Grössen $c-h$ und a von der Ordnung der Quadrate der y_3 und z_3 angenommen werden, damit die rechte Seite homogen wird. Die z_h und y_h werden dann von der Ordnung der Cuben von z_3 und y_3 .

Die eben entwickelten Formeln sind bis auf die Constanten identisch mit den Abbildungsformeln 12, aus welchen wir die Brennfläche des Systems der gebrochenen

Strahlen abgeleitet haben. Man kann daher jenes Strahlensystem genähert auf kinematischem Wege erzeugen, was in folgendem Satz ausgesprochen werden möge:

Sind auf einer Geraden drei Fixpunkte gegeben, von denen zwei sehr nahe im Vergleich zur Entfernung des dritten bei einander liegen, und bewegt sich die Gerade so, dass die drei Fixpunkte auf den drei Ebenen eines orthogonalen Coordinatensystems gleiten, so beschreibt sie dabei ein Strahlensystem, das in der Nähe einer der Coordinatenachsen mit der aus den Seidel'schen Formeln folgenden Näherung des Systems der in einem centrierten optischen Apparat gebrochenen Strahlen zusammenfällt.

Die Specialisierung, welche wir bei der kinematischen Erzeugung des neuen Strahlensystems im Vergleich zum alten eintreten liessen, kann am besten an den kugelähnlichen Ellipsoiden veranschaulicht werden, als deren Normalen wir die Strahlen des Systems betrachten können. Der halbe Winkel, welchen im allgemeineren Falle die Normalen in den Kreispunkten einschlossen, berechnete sich nach der Formel $\tan^2 \varphi = \frac{c}{b}$.

Nachdem in der Specialisierung c sehr klein gegen b angenommen wurde, ist auch dieser Winkel unendlich klein und es rücken je zwei Kreispunkte des Ellipsoides sehr nahe zusammen, wodurch dasselbe mehr den Charakter einer Rotationsfläche mit bestimmter Axe bekommt, ohne seine allgemeine Kugelähnlichkeit einzubüssen. Dabei reducirt sich auch die Ordnung des Strahlensystems von der sechsten auf die fünfte; wie man an der Gleichung 103 sieht:

$$\frac{x^2}{\varrho^2} + \frac{y^2}{(\varrho + 2b)^2} + \frac{z^2}{(\varrho + 2c)^2} = 1, \quad (103)$$

$$\frac{x^2}{\varrho^2} + \frac{y^2}{(\varrho + 2b)^2} + \frac{z^2}{\varrho^2} \left(1 - \frac{4c}{\varrho}\right) = 1,$$

$$\frac{x^2 + z^2}{\varrho^2} + \frac{y^2}{(\varrho + 2b)^2} - \frac{4cz^2}{\varrho^3} = 1. \quad (105)$$

Letztere Gleichung ist nur mehr vom fünften Grad in ϱ .

Für das specialisierte Strahlensystem gilt ebenso wie vom allgemeinen der Satz, dass die Strahlen, welche den Erzeugenden eines Kreiskegels parallel sind, eine Regelfläche 4. Ordnung bilden. Diese Regelflächen haben nun eine ganz besondere Bedeutung bei der Anwendung auf das Linsensystem. Dieselben umgrenzen nämlich das austretende Strahlensystem, wenn das eintretende durch die Strahlen, welche am Rande einer kreisförmigen Blende auftrafen, begrenzt war. Die letzteren bilden nämlich in erster Annäherung einen Kreiskegel; einen solchen werden daher auch die austretenden Strahlen in erster Annäherung bilden. Nun haben wir früher das System der gebrochenen Strahlen in der Nähe der Brennfläche bis auf Grössen fünfter Ordnung dadurch bestimmt, dass wir durch die mit der Correktion dritter Ordnung versehenen Punkte der genäherten Bildebene A_{2k+1} Parallele zu den genäherten Richtungen der

gebrochenen Strahlen zogen und diese Parallelen innerhalb Distanzen zweiter Ordnung von A_{2k+1} ab gerechnet mit den wahren gebrochenen Strahlen verwechselten. Ohne uns also von der erstrebten Genauigkeit zu entfernen, können wir behaupten, dass in der Gegend der Brennfläche die Begrenzung der austretenden Strahlen stets eine Regelfläche mit geradem Richtungskegel ist. Die Schnitte einer solchen mit einer beliebigen Ebene, also auch mit der Schirmebene sind Curven vierter Ordnung mit 3 Doppelpunkten. Von dieser Art sind also unsere Grenzcurven.

Dabei ist noch gar nicht vorausgesetzt worden, dass die abgrenzende Blende centrisch auf der optischen Axe sitzt. Wenn letzteres der Fall ist, dann liegt die Axe des Richtungskegels in einer Ebene mit der optischen Axe, die gleichzeitig Symmetrieebene für die Brennfläche ist. Dann wird auch die Regelfläche vierter Ordnung symmetrisch und ebenso ihre Schnittcurven mit der Schirmebene. Von den 3 Doppelpunkten der Schnittcurve muss dann notwendig einer in die Symmetrieaxe fallen. Die Raumcurve dritter Ordnung, welche im Allgemeinen als Doppelcurve der Regelfläche vierter Ordnung auftritt, muss nun ebenfalls symmetrisch werden, was dadurch ermöglicht wird, dass sie in eine in der Symmetrieebene liegende Gerade und in einen sie schneidenden zu jener Ebene symmetrischen Kegelschnitt zerfällt. Wird die centrische Blende in der Axe noch so verschoben, dass sie die früher ermittelte günstigste Stellung einnimmt, dann fällt die Axe des Richtungskegels der Regelfläche mit dem Schnitte der beiden Symmetrieebenen der Brennfläche, nämlich mit dem ausgezeichneten Strahl zusammen. Die Regelfläche hat nun ebenfalls zwei Symmetrieebenen wie die Brennfläche; ihre Doppelcurve ist in zwei, zum ausgezeichneten Strahl senkrechte und eine im Unendlichen liegende Gerade zerfallen. Die Schirmebenen, die alle durch die letztgenannte Doppelgerade hindurchgehen, schneiden die Regelfläche ausserdem nach Ellipsen, die also in diesem Falle als Grenzcurven auftreten.

Satz: Unter Voraussetzung einer kreisförmigen Blende, deren Ebene senkrecht zur Axe des optischen Apparates steht, wird das aus dem Apparataustretende, ursprünglich von einem Punktausgegangene Strahlenbündel angenähert durch eine Regelfläche vierter Ordnung begrenzt. Die Grenzcurven der von ihm auf verschiedenen Schirmebenen erzeugten Lichtflecke sind rationale Curven vierter Ordnung mit 3 Doppelpunkten. Wird die Blende centrisch zur optischen Axe gesetzt, so gestaltet sich die Begrenzung des Strahlenbündels, wie des Lichtfleckes symmetrisch zu einer durch die optische Axe und den leuchtenden Punkt gehenden Ebene. Verschiebt man endlich die Blende an die ausgezeichnete Stelle der Axe, so wird das Strahlenbündel und der Lichtfleck nach zwei Ebenen symmetrisch begrenzt und die Grenzcurven des letzteren werden Ellipsen.¹⁾

1) Eine Reihe von Sätzen über die Regelflächen vierter Ordnung als Grenzflächen von Strahlenbündeln finden sich in allgemeinerer Form in der Abhandlung von Herrn O. Bücklen in Reutlingen: „Ueber die Krümmung der Flächen“, Crelles Journal Bd. 96, namentlich im §

Geometrische Betrachtungen der Art, wie sie in diesem letzten Paragraphen angedeutet sind, haben mich zur Ausführung der vorangegangenen Entwicklungen veranlasst, sie haben ihren Gang begleitet und ihre Resultate kontrolliert. Dieselben knüpften sich zumeist an die von Seidel seit Langem publicierte Form der Gleichung der Brennfläche. Sie stehen damit auf demselben Fundamente, das Seidel vor einem Menschenalter in der Dioptrik gelegt hat, das aber, so weit meine Kenntniss reicht, von allen neueren Autoren ignoriert wurde.

„Die Normalenregelflächen des Ellipsoides“. S. 169. Trotz der vielen interessanten geometrischen Resultate, welche die erwähnte Abhandlung zu tage fördert, halte ich die Tendenz derselben, durch Einführung der Normalenbündel von Flächen zweiter Ordnung an stelle des Sturm'schen Conoids für die Erklärung der Accommodation des Auges weiteren Spielraum zu gewinnen vom mathematischen Standpunkt aus für verfehlt. Entweder begnügt man sich mit der Berücksichtigung der zweiten Potenzen des Verhältnisses der Pupillenöffnung zur Brennweite des Auges, dann ist das Sturm'sche Conoid die ausreichende Begrenzungsfläche des Strahlenbündels. Oder man nimmt noch die Glieder dritter Ordnung hinzu, dann muss man aber auch alle nehmen und darf nicht ohne triftigen Grund einzelne fortlassen. Letzteres geschieht aber bei der Art und Weise, wie Herr Böcklen die Normalenbündel der Fläche zweiter Ordnung einführt. Da eine allgemeine Wellenfläche keine vollständige Berührung dritter Ordnung mit einer Fläche zweiter Ordnung eingehen kann, so begnügt sich der Verfasser mit einer „teilweisen“ Berührung dritter Ordnung, die sich z. B. auf die Normalschnitte durch die Tangenten an die Krümmungslinien nicht erstreckt, und daher streng genommen nur eine specielle Berührung zweiter Ordnung ist. Aus ihr werden dann die Constanten des Normalenbündels der Fläche zweiter Ordnung abgeleitet. Bemerkenswert ist hingegen, dass für mässiges Gesichtsfeld, wie es die Seidel'sche Theorie voraussetzt, thatsächlich die Wellenfläche der gebrochenen Strahlen in grösserer Entfernung von der Brennfläche eine vollständige Berührung dritter Ordnung mit einer kugelähnlichen Fläche zweiter Ordnung eingehen kann. Ob das auch für grosses Gesichtsfeld noch zutrifft, müsste erst untersucht werden.

Erläuterung zu den Tafeln.

Die Figuren 1a, 1b und 1c der Tafel I stellen den allgemeinen Fall der Seidel'schen Brennfläche nach einem Gipsmodelle von L. Schleiermacher dar und zwar Fig. 1a die Combination beider Mäntel, Fig. 1b und 1c jeden der beiden Mäntel separat (v. S. 538 des Textes). Die Fläche ist näherungsweise die Brennfläche des Systems von Strahlen, das aus einem seitlich von der optischen Axe gelegenen Strahlenbündel durch Brechung in einem centrierten Linsensystem entstanden ist. In Wirklichkeit hat man sich jedoch die Querdimensionen der Fläche von einer geringeren Grössenordnung vorzustellen, als die in der Figur vertikal gedachte Längsdimension.

Fig. 2 Tafel I stellt die beiden ineinander gesteckten Mäntel der Brennfläche für den Fall vor, dass der sog. Kugelgestaltsfehler in der Axe des Linsensystems gehoben ist. Die beiden Mäntel schneiden sich hier in einem Geradenpar, zu dessen Ebene die Brennfläche symmetrisch liegt (v. § 3 S. 546).

Die übrigen in den 3 Tafeln zusammengestellten Figuren beziehen sich auf zwei bestimmte Linsensysteme und dazu gewählte leuchtende Punkte, nämlich:

A) eine Convexlinse aus Crownglas von folgenden Dimensionen:

$$e_0 = 69,25 \text{ mm}, d_1 = 8,0 \text{ mm}, e_2 = -216,195 \text{ mm}, n_1 = 1,52964 \text{ für gelbe Strahlen.}$$

Der leuchtende Punkt befindet sich in unendlicher Entfernung und die Richtung nach demselben schliesst mit der optischen Axe der Linse einen Winkel von 6° ein.

B) das von Bessel beschriebene Fraunhofer'sche Heliometerobjektiv, resp. diejenige von A. Steinheil angegebene Modifikation desselben, bei welcher für die gelben Strahlen der Kugelgestaltsfehler in der Axe verschwindet. Dasselbe besteht aus einer Crown- und Flintglaslinse und hat folgende Dimensionen:

$$e_0 = 838,164''', d_1 = 6,0''', e_2 = 333,768''', d_3 = 0,0''', e_4 = 340,326''', d_5 = 4,0''', e_6 = 1168,926''' \\ r_{-1} = 1,0, r_1 = 0,653967, r_3 = 1,0, r_5 = 0,610083, r_7 = 1,0 \text{ für gelbe Strahlen.}$$

Aus ihnen berechnet sich nachstehendes System von Bestimmungsstücken h, σ (v. S. 525):

$$\sigma_{-1} = 0,0, \sigma_1 = 0,041285, \sigma_3 = 0,221270, \sigma_5 = 0,020675, \sigma_7 = 0,088382 \\ h_0 = 100,0, h_2 = 99,7523, h_4 = 99,7523, h_6 = 99,6696.$$

Aus diesen hinwiederum folgen die 5 Summen $S(1)$ bis $S(5)$, für welche jedesmal der Betrag der positiven und negativen Glieder für sich angegeben ist (v. S. 530):

$$\begin{aligned} S(1) &= -5,50853 & +5,50874 & = +0,00021 \\ S(2) &= -0,111980 & +0,108383 & = -0,003597 \\ S(3) &= -0,0028800 & +0,0020082 & = -0,0008718 \\ S(4) &= -0,0046632 & +0,0031744 & = -0,0014888 \\ S(5) &= +0,00011733 & +0,00011635 & = +0,00000148. \end{aligned}$$

Wie man sieht, ist $S(1)$ bis auf ca. $0,04\%$ des Betrages der positiven Glieder gleich 0, also die Compensation der positiven und negativen Glieder nahezu vollständig. Eine Compensation bis auf einige $\%$ tritt auch bei $S(2)$ und $S(5)$ ein. Erstere wurde nach v. Seidel's Vermutung von Fraunhofer angestrebt, letztere ist bei geringen Linsendicken immer in ähnlichem Grade vorhanden. Die Vereinigungsweite der Strahlen parallel zur Axe beträgt $1126,70''$ von der letzten Fläche ab gerechnet. Das halbe Gesichtsfeld beträgt beim Heliometerobjektiv $48'$.

Der leuchtende Punkt liegt in unendlicher Entfernung und die Richtung nach demselben bildet mit der optischen Axe einen Winkel von $48'$.

Alle Figuren der Tafel II, sowie Fig. 3a und 3b der Tafel I, welche von Linsen erzeugte Lichtfleck darstellen, sind negativ zu denken, d. h. in Wirklichkeit sind die dunkel dargestellten Partien hell und umgekehrt.

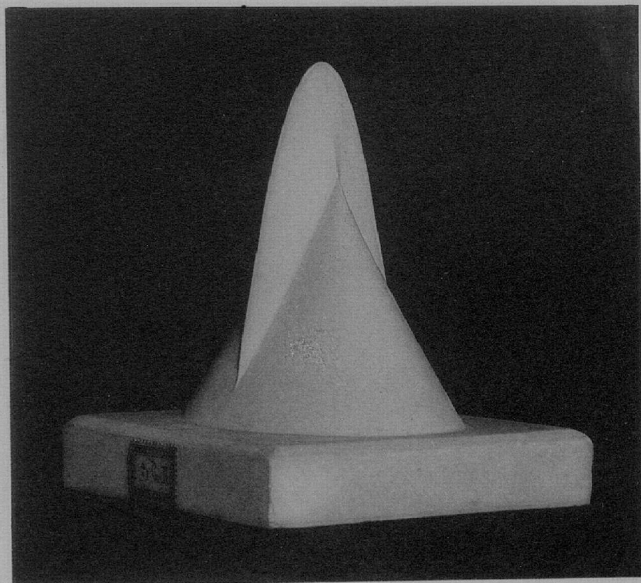
Die Figuren der Tafel II mit Ausnahme von Fig. 3 beziehen sich auf die unter A) beschriebene Linse und sollen die Helligkeitsverteilung in einem Lichtfleck allgemeiner Art ohne Rücksicht auf die Begrenzung durch ein Diaphragma darstellen (v. § 5, S. 565). Sie sind in 100facher Vergrößerung gezeichnet. Die Fig. 1a bis 1e (bzw. 2a bis 2e) beziehen sich auf einen Lichtfleck, der auf einer Schirmebene entsteht, die sich in der Entfernung von 93,78 (bzw. 92,45) mm hinter der letzten Linsenfläche und 2,22 (bzw. 3,55) mm vor der Vereinigungsstelle der centralen Parallelstrahlen befindet. Fig. 1a (bzw. 2a) stellt die Verteilung der Helligkeit in der $\lambda\mu$ -Ebene dar (v. S. 567 und Textfigur 10 S. 560); die Fig. 1b, 1c, 1d (bzw. 2b, 2c, 2d) die Helligkeit in den einzelnen Blättern der Schirmebene, endlich Fig. 1e (bzw. 2e) die bei Aufeinanderlegung der Blätter resultierende Gesamthelligkeit des Lichtfleckes. Die den Isophoten beigesetzten Zahlen geben den Grad der Helligkeit an. Als Einheit gilt die Helligkeit, welche der Schirm bei Entfernung der Linse von dem in unendlich grosser Entfernung angenommenen leuchtenden Punkt erhalten würde. Die Schirmebene der Fig. 1 ist so gewählt, dass sie durch die Knotenpunkte der Brennfläche hindurchgeht und daher die Brennlinie in ein Hypocycloidenspar zerfällt (v. S. 542).

Die Figuren der Tafel III, nämlich 1a, 1b, 1c, 2a, 2b, 2c, 3a, 3b beziehen sich auf die Begrenzung des Lichtfleckes bei Ablendung der einfallenden Strahlen (v. § 6, S. 569). Dabei ist wieder die Linse A vorausgesetzt. Fig. 1c, 2c und 3b stellen die Blendenebene dar und zwar in der Grösse, dass die Einheit des Masstabes 1 cm in Wirklichkeit bedeutet. Die Fig. 1a, 2a, 3a beziehen sich auf die Schirmebene, für sie ist die Einheit des Masstabes gleich 0,1 mm. Die Schirmebene ist in Fig. 1a und 2a in 92,45 mm Entfernung von der hinteren Linsenfläche angenommen, für Fig. 3a beträgt diese Entfernung 93,78 mm. Die Blendenebene ist jeweilig durch konzentrische Kreise in 10 flächengleiche Ringe, die verschieden grosser Ablendung entsprechen und einen centralen Kern geteilt, durch dessen Mitte die optische Axe hindurchgeht. Die Einteilung der Blendenebene ist durch Farbentöne hervorgehoben. Die Blendenebene in Fig. 1c hat man sich an der Vorderfläche der Linse gelegen zu denken. Fig. 1b gibt die Abbildung der Blendenebene in die $\lambda\mu$ -Ebene wieder, Fig. 1a stellt dagegen die Abbildung der Blendenebene in die Schirmebene dar. Entsprechende Gebiete sind jedesmal mit gleichen Farbentönen versehen. Die feinpunktierte, aus zwei ellipsenähnlichen Zweigen bestehende Curve der Blendenebene 1c gibt den Ort der Schnittpunkte der Strahlen, welche die Schirmebene in der Brennlinie (Fig. 1a) treffen (v. Textfigur 13 S. 562). Die Fig. 1a, 1b, 1c stellen den allgemeinen Fall dar, wo der Lichtfleck trotz konzentrischer Ablendung der einfallenden Strahlen durch eine unsymmetrische Curve vierter Ordnung begrenzt wird. Bei günstiger Wahl der Blende kann man, wie die Fig. 2a und 3a zeigen, diese Unsymmetrie vermeiden (v. S. 572). Hierbei ist die Blendenebene in einer Entfernung von 20,9 mm vor der ersten Linsenfläche angenommen. Die punktierte Curve der Blendenebene, welche der Brennlinie des Lichtfleckes entspricht, liegt nunmehr symmetrisch zur optischen Axe und die Curven, welche bei verschiedenen Ablendungen den Lichtfleck begrenzen,

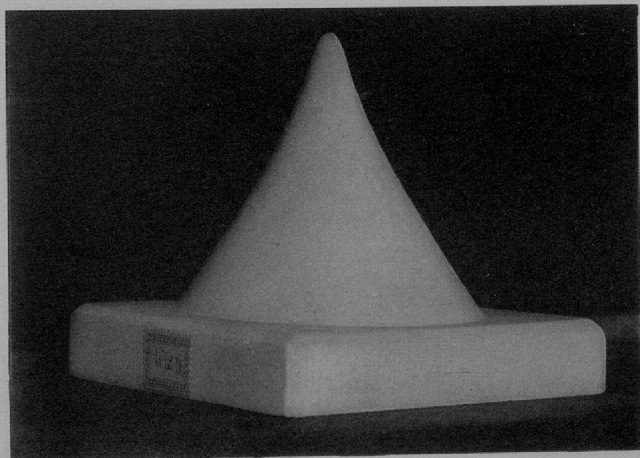
werden Ellipsen mit gemeinsamem Mittelpunkt (v. S. 573). Ihre Bilder in der $\lambda\mu$ -Ebene 2b sind Gerade. Die Schirmebene bei Fig. 2a liegt an derselben Stelle wie bei Fig. 1a; bei Fig. 3a dagegen 93,78 mm hinter der letzten Linsenfläche wie bei Fig. 1e Tafel II. Die punktierte Curve der Blendenebene Fig. 3b besteht aus 2 Kreisen (v. S. 557, Formel 71 im Falle $\beta = 0$).

Die Fig. 3a und 3b auf Tafel I, die Fig. 3 auf Tafel II und die Fig. 4a, 4b und 5a, 5b auf Tafel III illustrieren die Wirkung des Linsensystems *B* (Heliometerobjektiv). Fig. 3 Tafel II zeigt die Helligkeitsverteilung der Brennfigur in der Ebene, welche durch den Brennpunkt des Objektivs hindurchgeht in 1000 facher Vergrößerung (v. Textfig. 16a, S. 574). Dabei ist als Abblendung der einfallenden Strahlen der innere Rand der Objektivfassung von 158 mm Durchmesser angenommen. Fig. 3a Tafel I zeigt in gleicher Vergrößerung den Lichtfleck in der Symmetrieebene der Brennfläche bei voller Oeffnung; Fig. 3b denselben Lichtfleck, wenn die rechte oder linke Hälfte des Heliometerobjektivs abgeblendet ist. Dabei ist angenommen, dass der leuchtende Punkt in der Trennungsebene des Objektivs liege. Die Fig. 4a, 4b und 5a, 5b auf Tafel III illustrieren die Abbildung der Blendenebene in diejenige Schirmebene, welche die Brennfläche symmetrisch teilt (v. Textfigur 15, S. 564). Sie zeigen auch, wie sich bei Veränderung des Blendendurchmessers die Begrenzung des Lichtfleckes ändert. Bei Fig. 4a ist die Blendenebene an der Vorderfläche des Objektivs angenommen. Die Strahlen, welche auf dem punktierten Linienpar der Blendenebene 4b auffallen, schneiden nach der Brechung die Schirmebene in den Brennnlinien. Fig. 5a und 5b entspricht einer Blendenebene, die sich 1211,9''' vor der vordern Linsenfläche befindet. Hierbei tritt die S. 575 erwähnte einfache Begrenzung des Lichtfleckes durch Kreise ein. Diese Abblendung wäre theoretisch die günstigste; ihre Anwendung setzt aber einen um die Hälfte grösseren Durchmesser des Objektivs voraus, oder es müsste der Durchmesser der Blende gegenüber dem Objektivdurchmesser auf die Hälfte reduciert werden, falls das Gesichtsfeld von $2 \times 48'$ aufrecht erhalten werden soll. Zu bemerken ist schliesslich noch, dass die Einheit des Masstabes der Tafel III in den Fig. 4a und 5a 0,01 mm, in den Fig. 4b und 5b dagegen 50 mm bedeutet.

1a



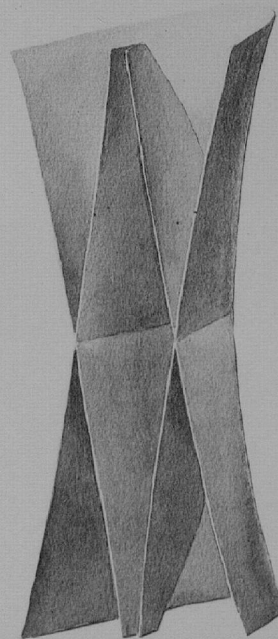
1b



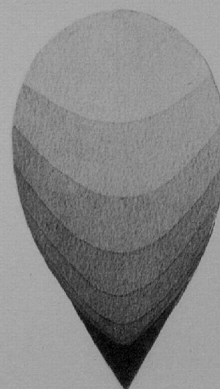
1c



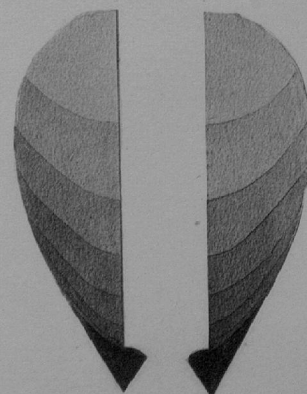
2

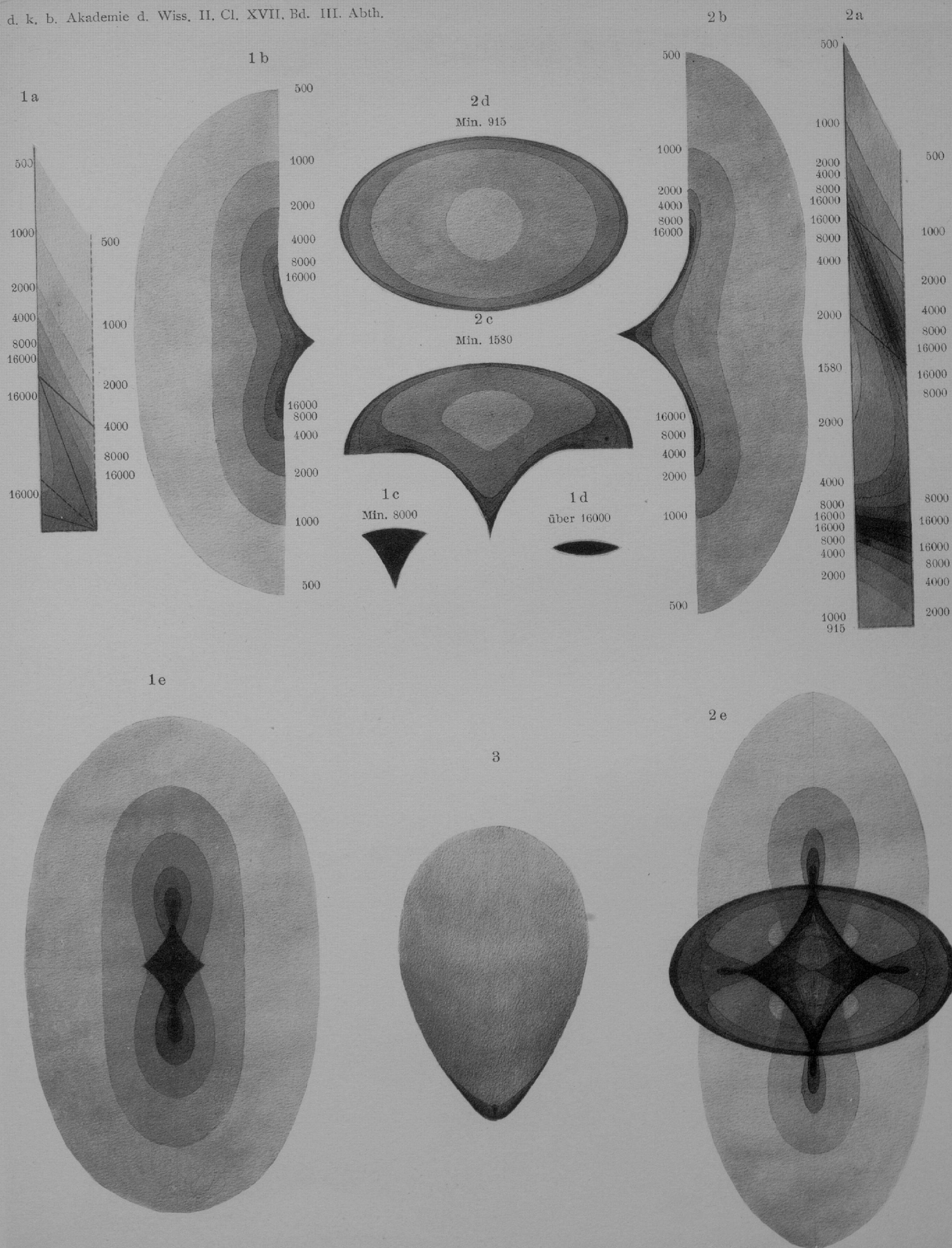


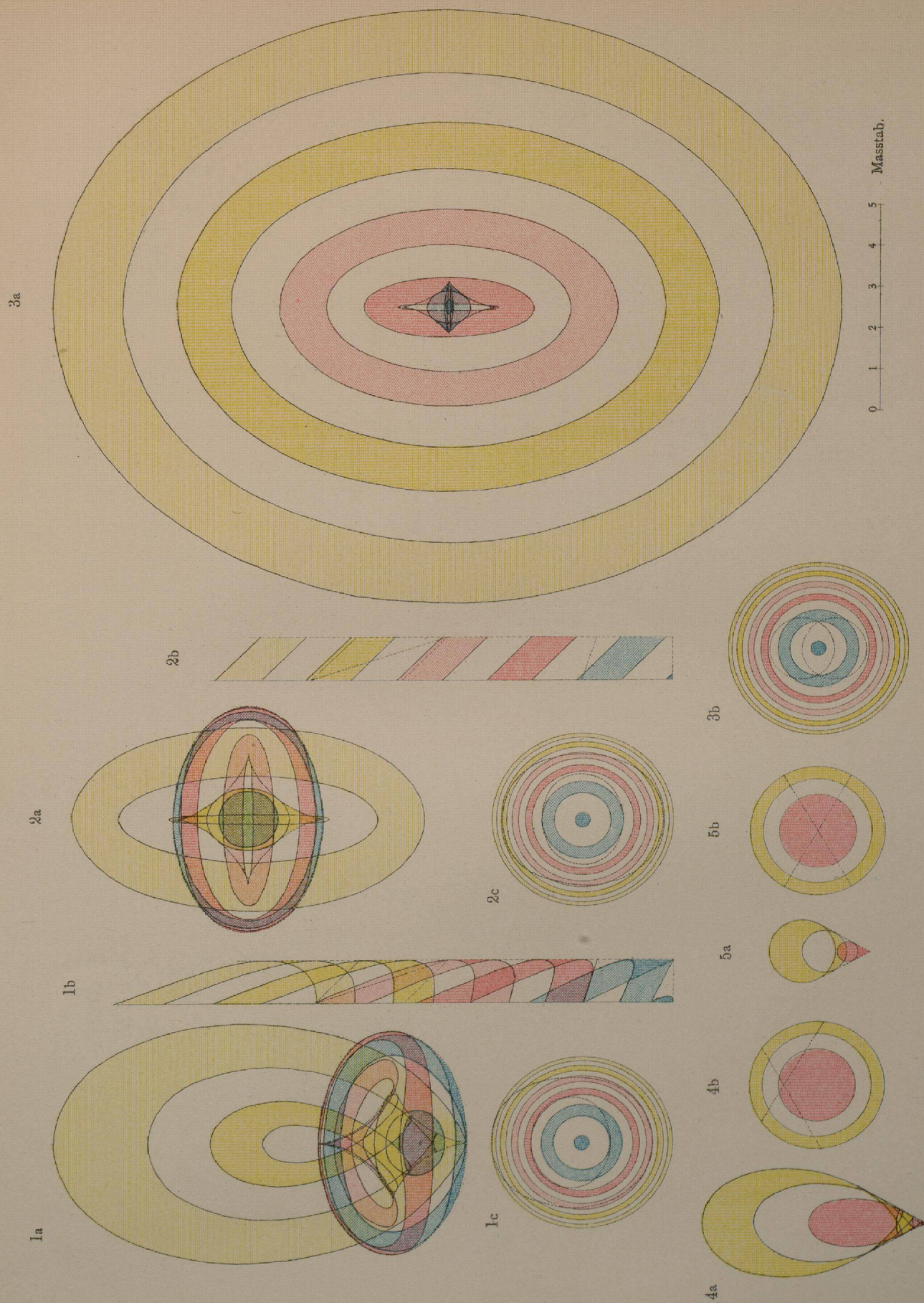
3a



3b







Druck von J. B. Obernetter, München.

S. Finsterwalder gez.

