

Zur Theorie

der

Berührungscurven der ebenen Curve vierter Ordnung.

Von

M. Noether.

Aus den Abhandlungen der k. bayer. Akademie der Wiss. II. Cl. XVII. Bd. I. Abth.

München 1889.

Verlag der k. Akademie
in Commission bei G. Franz.

Die allgemeinsten quadratischen Systeme von Curven n^{ter} Ordnung, welche eine gegebene ebene Curve 4^{ter} Ordnung, Ω , an allen Schnittstellen in 1^{ter} Ordnung berühren, sind seit Hesse und Steiner (Crelle J. 49, 55) vielfach behandelt worden. Insbesondere ist in Bezug auf die $36 \infty^3$ -Systeme von solchen Berührungscurven 3^{ter} Ordnung, für welche die je 6 Berührungspunkte nicht auf einem Kegelschnitt liegen, von Clebsch (Math. Annalen III) bemerkt worden, dass innerhalb eines jeden dieser Systeme diejenigen Curven, welche noch je einen Doppelpunkt haben, in 8 völlig getrennte ∞^2 -Schaaren zerfallen, welche einzeln selbst wieder nur quadratisch in den beiden Parametern sind; die Schnittpunkte von je zwei Curven irgend eines dieser $8 \cdot 36$ Untersysteme haben ausgezeichnete Lageneigenschaften, und diese Untersysteme sind den $8 \cdot 36$ Aronhold'schen Siebensystemen von Doppeltangenten eindeutig zugeordnet.

Dass auch in allen höheren Systemen von Berührungscurven von Ω quadratische Untersysteme mit analogen Eigenschaften existiren, ist zwar von mir in einer Note in den „Berichten der Erlanger physik.-medic. Societät“¹⁾ angedeutet worden, indem ich eine unmittelbar ausdehnbare einfache Methode gab, um jene Unterschaaren von Curven 3^{ter} Ordnung aufzufinden, zum Zweck, die von Clebsch a. c. O. angegebene Abbildbarkeit der Doppelebene, welche Ω als Uebergangscurve hat, auf die einfache Ebene nachzuweisen. In dieser Methode und dieser Abbildung hat man alle Mittel zur Untersuchung dieser bemerkenswerthen Untersysteme, die alle auf's Engste ausgezeichneten Systemen von Doppeltangenten zugeordnet sind. Aber weder verfolgt die Specialuntersuchung,

1) Heft 10, 1878: „Ueber die ein-zweideutigen Ebenentransformationen.“

welche Herr De Paolis dieser Abbildung gewidmet hat,¹⁾ die Untersysteme, noch finden sich dieselben sonst irgendwo hervorgehoben.

Ich erlaube mir daher, eine systematische Behandlung der Theorie dieser Systeme (in Nr. 1) mit einer Reihe von Ausführungen (in Nr. 3—7), im Anschluss an die aus Nr. 1 folgende Abbildung (Nr. 2), hier vorzulegen. Ich thue dies auch aus dem Grunde, weil von den unzähligen Sätzen über Lagenverhältnisse der Schnitt- und Berührungspunkte der Doppeltangenten und der Berührungscurven von Ω überhaupt, welche unsere allgemeine Methode alle als specielle Fälle in sich begreift, bisher nur die allereinfachsten ausgesprochen worden sind; beschränke mich aber in den Beispielen von Nr. 7 auf einige die Doppeltangenten betreffenden Sätze.

Ferner benutze ich die Gelegenheit, um in (Nr. 1—4) einmal eine vollständige algebraische Begründung der Charakteristikentheorie zu geben, die zu den Ω in 1^{ter} Ordnung berührenden Curven gehört. Diese Theorie ist bisher entweder aus transcendenten Beziehungen abgeleitet, oder, wenn algebraisch, nur ganz unvollständig begründet und entwickelt worden. Der Theil der Begründung, welcher zum Nachweise der völligen Gleichartigkeit der 36 eigentlichen geraden Charakteristiken unter sich etc. sich der Cremona'schen Ebenentransformationen bedient, findet sich auch in der De Paolis'schen Abhandlung (auch implicit in meiner Note über Thetafunctionen, Erl. Berichte, 1878). Da diese Theorie, insbesondere der letzte Satz von Nr. 4, so unmittelbar und mit so grosser Leichtigkeit aus jedem einzelnen Doppeltangentensystem die allgemeinsten von denselben Eigenschaften anzuschreiben erlaubt, so habe ich in Nr. 7 die Sätze meistens nur an speziellen einzelnen Systemen ausgesprochen.

2) „La trasformazione piana doppia di terzo ordine primo genere e la sua applicazione alle curve del quarto ordine.“ (Mem. d. R. Acc. d. Lincei, Ser. 3, Bd. II, 1878.)

1. Berührungssysteme.

Die Grundcurve 4^{ter} Ordnung, auf welche sich alle unsere Betrachtungen beziehen, sei überall mit

$$\Omega_4(\xi) \equiv \Omega_4 \equiv \Omega = o$$

bezeichnet. Sei $C(\xi) = o$ eine Ω_4 an allen Schnittstellen in 1^{ter} Ordnung berührende Curve r^{ter} Ordnung; so wird das „System“ der zu C gehörigen Berührungscurven C' an Ω definiert durch die Identität

$$(1) \quad C(\xi) \cdot C'(\xi) \equiv F^2(\xi) - Q'(\xi) \cdot \Omega(\xi),$$

wo $F(\xi) = o$ alle möglichen Curven irgend einer Ordnung sind, welche durch die Berührungspunkte der Curve C mit Ω gelegt werden können. Solche Systeme gibt es nur eine endliche Anzahl, indem, wenn man zu Stelle von C irgend eine der Curven C' setzt, das System sich nicht ändert. Man braucht daher für C nur zu nehmen:

1) jede der Doppeltangenten von Ω , was ebensoviele verschiedene „ungerade eigentliche Systeme“, oder kurz „ungerade Systeme“, liefert;

2) die verschiedenen Curven 3^{ter} Ordnung, die Ω in drei gegebenen und drei weiteren Punkten berühren, welche 6 Punkte nicht auf einem Kegelschnitt liegen sollen: die „geraden eigentlichen Systeme“, oder kurz „die geraden Systeme“;

3) die Kegelschnitte, die Ω in einem gegebenen und drei weiteren Punkten berühren, welche 4 Punkte nicht auf einer Geraden liegen sollen: die „Gruppensysteme“;

4) $C(\xi)$ als Quadrat einer linearen Function. Dieser uneigentliche Fall von 3), in welchem die vier Punkte auf einer Geraden liegen, was $C(\xi)$ zu einem vollständigen Quadrat macht, führt nur auf Ausdrücke $C'(\xi)$, die vermöge $\Omega(\xi) = o$ ebenfalls vollständige Quadrate sind, und wird im Folgenden nur in § 6, I berücksichtigt.

Man kann den Systemsbegriff auch so fassen: Zwei Berührungscurven gehören zu einem System zusammen, wenn ihre Berührungspunkte, einfach genommen, zwei „corresiduale“ Gruppen bilden. Und umgekehrt

bildet jede zu einer Berührungsgruppe corresiduale (und jede residuale) Gruppe von Punkten eine Berührungsgruppe desselben Systems.

Nimmt man $C(\xi)$ und die Ordnung von $P(\xi)$ fest an, und legt alle Curven $P(\xi)$ dieser Ordnung s , so erhält man eine quadratische Schaar von Curven $C'(\xi) = 0$, der Ordnung $r' = 2s - r$, von der Mannigfaltigkeit $\infty^{2r'-3}$ (ausgenommen $r' = 1$), wenn man vermöge der Gleichung $\Omega(\xi) = 0$ reducirt; also eine quadratische $\infty^{2r'-3}$ Schaar von Gruppen von je $2r'$ doppelt zu zählenden Punkten auf Ω . Ohne Reduction durch $\Omega(\xi) = 0$ wird die Schaar der $C'(\xi) = 0$ eine quadratische $\infty^{\frac{1}{2}r'(r'-1)}$ Schaar, indem zu den $2r' - 3$ quadratisch eingehenden Parametern jener Schaar noch $\frac{1}{2}(r' - 3)(r' - 2)$ linear eingehende hinzukommen. Die Gruppen von je $2r'$ Punkten, alle einfach gezählt, bilden auf Ω eine lineare Vollschaar, ausgeschnitten von den Curven $P(\xi) = 0$.

Im Folgenden sollen ausgezeichnete Theilschaaren der $\infty^{\frac{1}{2}r'(r'-1)}$ Schaar von Curven $C'(\xi) = 0$ betrachtet werden, nämlich solche, welche ausserhalb Ω bewegliche Doppelpunkte besitzen und doch die Parameter in keiner weiteren Irrationalität enthalten, als die Grundschaar, also quadratische Schaaren bleiben. Man erreicht dies dadurch, dass man die Function $Q'(\xi)$ in Gleichung (1) zu einem vollen Quadrat werden lässt, wobei man aber r im Allgemeinen nicht mehr auf 1, 2 oder 3 reduciren kann.

Sei nämlich in (1) $C(\xi) = 0$ eine irreducible Curve r^{ter} Ordnung, welche Ω in $2r$ Punkten $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{2r}$ berühre und d Doppelpunkte $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_d$ ausserhalb Ω besitze. Man lege die Schaar $P(\xi) = 0$ der Curven s^{ter} Ordnung ($s \geq r$), welche durch die Punkte α und β gehen:

$$(2) \quad \lambda_0 P_0 + \lambda_1 P_1 + \dots + \lambda_t P_t + K \cdot C = 0,$$

wo die λ_i willkürliche Parameter, K eine beliebige Curve $(s - r)^{\text{ter}}$ Ordnung und

$$t \geq rs - \frac{1}{2}(r-1)(r-2) - (2r + d) = r(s-2) - 2d - [\frac{1}{2}(r-1)(r-2) - d]$$

ist. Dieselben treffen $C = 0$ in einer ∞^t -Schaar von Gruppen von je $r(s - 2) - 2d$ Punkten. Nun wird später gezeigt werden, dass eine Reihe von Fällen existirt, in welchen diese Gruppenschaar identisch ist mit derjenigen, welche von zu C adjungirten Curven $(s - 2)^{\text{ter}}$ Ordnung

$$(3) \quad \lambda_0 Q_0 + \lambda_1 Q_1 + \dots + \lambda_t Q_t + K' C = 0$$

aus C ausgeschnitten wird (so ist unmittelbar klar, dass dies für $d = \frac{1}{2}(r-1)(r-2)$, d. h. wenn das Geschlecht von C gleich o ist, eintritt); für diese Fälle also wird nach dem Restsatz:

$$(4) \quad Q_0(\lambda_0 P_0 + \lambda_1 P_1 + \cdots + \lambda_t P_t) - P_0(\lambda_0 Q_0 + \lambda_1 Q_1 + \cdots + \lambda_t Q_t) \equiv C \cdot D,$$

oder

$$(4') \quad Q_0(\sum \lambda_i P_i + K C) - P_0(\sum \lambda_i Q_i + K' C) \equiv C(D + K Q_0 + K' P_0)$$

wo $D + K Q_0 + K' P_0 = o$ eine Curve der Ordnung $2s - r - 2$ ist, welche durch die $(s-r)(s-2) + d$ ausserhalb C liegenden beweglichen Schnittpunkte γ_λ von

$$(5) \quad P \equiv \sum \lambda_i P_i + K C = o, \quad Q \equiv \sum \lambda_i Q_i + K' C = o$$

hindurchgeht. Der Curvenbüschel $2s^{\text{ter}}$ Ordnung:

$$P^2 - \varrho Q^2 \Omega = o,$$

trifft aber $C = o$ in $2(r(s-2) - 2d) + 4r + 4d = 2rs$ von ϱ unabhängigen Punkten; man kann also ϱ so bestimmen, dass eine Curve des Büschels C zum Factor hat:

$$P^2 - \varrho' Q^2 \Omega \equiv C \cdot C'.$$

Dabei wird ϱ' auch von den Parametern λ unabhängig; denn sei

$$P_0^2 - \varrho_0 Q_0^2 \Omega \equiv C \cdot C_0,$$

so folgt für $C = o$

$$\sqrt{\varrho_0} \cdot Q_0 P \pm \sqrt{\varrho'} Q P_0 = o,$$

was in Verbindung mit (4) $\varrho' = \varrho_0$ liefert. Wir mögen daher $\varrho' = 1$ setzen:

$$(6) \quad P^2 - Q^2 \Omega \equiv C \cdot C'.$$

Hier erhält man in $C'(\xi) = o$ eine Schaar von Curven der Ordnung $2s - r$, welche die $\frac{1}{2}s(s+3) - 2r - d$ oder mehr Parameter von (2), und etwaige weitere Parameter von Q , quadratisch enthalten, die Curve Ω je in $2(2s - r)$ Punkten berühren und je $(s-r)(s-2) + d$ bewegliche Doppelpunkte γ_λ , die sich aus (5) ergeben, enthalten. Diese Curven bilden eine zu C gehörige Unterklasse in dem ganzen zu C gehörigen Berührungssysteme.

Denkt man sich die ganze ξ -Ebene mit zwei Blättern überdeckt, indem man über jedem Punkt die beiden Werthe von $\sqrt{\Omega}$ aufträgt, Blätter, die also längs $\Omega = 0$ verzweigt sind, so kann man die Curve $C'(\xi) = 0$ in zwei übereinanderlagernde Curven rational trennen, je nachdem man $\sqrt{\Omega} = \pm \frac{P}{Q}$ nimmt. Wir wollen etwa die durch

$$(7) \quad P + Q\sqrt{\Omega} = 0$$

bestimmte Schaar betrachten.

Von den Doppelpunkten γ_λ der Curven C' gilt dann: sie sind nur scheinbare, d. h. die beiden Zweige einer C' laufen an einer solchen Stelle in verschiedenen Blättern; und diese beiden Zweige liegen harmonisch zu den beiden Richtungen, welche die Curven $P = 0$ und $Q = 0$ daselbst haben. Denn beschränkt man sich in Gleichung (6) auf die Glieder zweiter Dimension an der Stelle γ_λ , so sagen dieselben aus, dass die 3 Richtungspaare von P^2 , Q^2 und C' in Involution liegen; ist also für den einen Zweig von C' $\frac{P}{Q} = a$, so ist für den andern Zweig $\frac{P}{Q} = -a$, und für den ersten Zweig wird $\sqrt{\Omega} = -a$, für den zweiten $\sqrt{\Omega} = +a$.

Auch bei zwei Curven der Schaar C' kann man die wirklichen von den scheinbaren Schnittpunkten unterscheiden. Hat man für zwei solche Curven nach (6):

$$P_1^2 - Q_1^2 \Omega = 0 \quad \text{und} \quad P_2^2 - Q_2^2 \Omega = 0,$$

so gilt für die wirklichen Schnittpunkte:

$$P_1 + Q_1 \sqrt{\Omega} = 0, \quad P_2 + Q_2 \sqrt{\Omega} = 0,$$

also

$$P_1 Q_2 - P_2 Q_1 = 0.$$

Nun ist nach (4)

$$P_1 Q_2 - P_2 Q_1 = C \cdot N$$

wo $N = 0$ eine Curve der Ordnung $2s - r - 2$ ist, welche durch die $(s - r)(s - 2) + d$ Doppelpunkte γ_{λ_1} der zu $P_1 Q_1$ gehörigen Curve C_1' und die $(s - r)(s - 2) + d$ Doppelpunkte γ_{λ_2} der zu $P_2 Q_2$ gehörigen Curve C_2' hindurchgeht. Die Curve $N = 0$ trifft also die Curve C_1' in

$$(2s - r)(2s - r - 2) - 2(s - r)(s - 2) - 2d$$

wirklichen Schnittpunkten mit C_2 . — Ebenso sind in (6) die $r(s-2) - 2d$ ausserhalb der β liegenden Schnittpunkte von Q und P mit C zugleich scheinbare Schnittpunkte von C und C' . —

Bei den vorstehenden Betrachtungen ist implicite angenommen, dass alle $(s-r)(s-2) + d$ ausserhalb C liegenden Schnittpunkte γ_λ von $P = o$, $Q = o$ von den Punkten β endlich entfernt liegen. Haben aber die $P = o$, $Q = o$ für alle λ eine Berührung in einem Punkte β , so wird dieser Punkt nach (6) nur fester einfacher Punkt aller C' .

Die Gleichungen (4), (6) sind für verschiedene λ nicht von einander unabhängig. Beziehen sich wieder P_1, Q_1, C_1 auf irgend eine, P_2, Q_2, C_2 auf irgend eine andere der Curven $C'(\xi) = o$, und ist nur gegeben:

$$(8) \quad P_1^2 - Q_1^2 \Omega = C \cdot C_1,$$

$$(9) \quad P_1 Q_2 - P_2 Q_1 = C \cdot N,$$

so folgt daraus

$$P_1(P_1 N - Q_2 C_1) = Q_1(Q_1 N \Omega - P_2 C_1),$$

also

$$(10) \quad P_1 N - Q_2 C_1 = Q_1 M,$$

$$(11) \quad Q_1 N \Omega - P_2 C_1 = P_1 M.$$

Ferner aus (8), (9) und (10):

$$C(P_1 N - Q_2 C_1) = C Q_1 M = Q_1(Q_1 Q_2 \Omega - P_1 P_2),$$

also

$$(12) \quad Q_1 Q_2 \Omega - P_1 P_2 = C \cdot M,$$

und aus (12) und (9):

$$C(M Q_2 + N P_2) = Q_1(Q_2^2 \Omega - P_2^2),$$

also

$$(13) \quad M Q_2 + N P_2 = -C_2 Q_1$$

$$(14) \quad P_2^2 - Q_2^2 \Omega = C \cdot C_2.$$

(14) ist aber die Formel (6) für die zweite Curve C' . Endlich folgt noch aus (10) und (11):

$$C_1(P_2 N + Q_2 M) = Q_1(N^2 \Omega - M^2),$$

also nach (13):

$$(15) \quad M^2 - N^2 \Omega = C_1 C_2,$$

womit C_2 analog aus C_1 hergeleitet ist, wie diese beiden Curven aus C es waren.

Die in Vorstehendem inbegriffenen Fälle, zu welchen auch noch solche mit reduciblen Curven C hinzukommen, werden sich alle aus der bekannten eindeutigen Abbildung der erwähnten Doppelebene auf eine einfache Ebene ergeben.

2. Abbildung der Doppelebene.

Die Abbildbarkeit der in Nr. 1 genannten Doppelebene auf eine einfache Ebene beruht selbst auf einem solchen speciellen Falle der Formel (6) von Nr. 1, der sich direct erledigen lässt.

Man nehme in Nr. 1: $r = 3, d = 1, s = 3$; und zwar soll $C(\xi) = 0$ irgend eine „gerade“ eigentliche Berührungcurve 3^{ter} Ordnung mit einem Doppelpunkt β sein; ihre 6 Berührungspunkte $\alpha_1 \cdots \alpha_6$ mit Ω sollen also nicht auf einem Kegelschnitt liegen. Dabei darf $C(\xi) = 0$ sogar eine reducible Curve ihrer Art sein, z. B. aus drei Doppeltangenten, die zusammen zu einem geraden System gehören, bestehen, wobei man irgend einen der 3 Schnittpunkte als Doppelpunkt β annehmen kann. Solche Curven C existiren also immer.

In (2) hat man dann $t = 1$, K wird eine Constante, die Q von (3) werden zu einem Geradenbüschel durch den Punkt β , und es gilt der Restsatz (4) oder (4') für die Schaaren (5). Eine Curve 3^{ter} Ordnung von (5) hat mit der entsprechenden Geraden Q aus (5), ausser β und dem gemeinsamen Punkte auf C , nur je einen Punkt γ_λ gemein, der nicht in β hineinfällt; denn wenn γ_λ an β rückte, würde in Gleichung (4)

$$Q_0 P_1 - Q_1 P_0 \equiv C \cdot D,$$

da die P die entsprechenden Q in β berührten, $C D$ den Punkt β zum 3-fachen Punkte, D also β zum einfachen Punkte haben, d. h. die Gerade D ginge durch alle drei ausserhalb der 6 Punkte $\alpha_1 \cdots \alpha_6$ liegenden Schnittpunkte von $P_0 = 0$, $P_1 = 0$ hindurch, und diese 6 Punkte müssten auf einen Kegelschnitt liegen — gegen die Voraussetzung.

Dann folgt Gleichung (6), auch wenn C aus drei Doppeltangenten T_1, T_2, T_3 besteht. Denn sei β der Schnittpunkt von T_1, T_2 so bestimme man ϱ in $P^2 - \varrho Q^2 \Omega = 0$ so, dass diese Curve noch durch einen weiteren, als die festen Schnittpunkte mit T_3 geht: diese Curve wird dann T_3 zum Factor haben; der Rest, eine Curve 5^{ter} Ordnung, die T_1 und T_2 in je 6 festen Punkten trifft, wird noch $T_1 T_2$ als Factor enthalten müssen; man hat also Gleichung (6).

Die so gefundenen Curven $C'(\xi) = 0$ werden eine Unterklasse von ∞^2 Curven 3^{ter} Ordnung, welche alle Ω in je 6 Punkten berühren, je einen beweglichen scheinbaren Doppelpunkt besitzen und sich zu je zwei in nur einem wirklichen Schnittpunkt treffen, gelegen auf der Verbindungsgeraden $N = 0$ der Doppelpunkte der beiden Curven.

Setzt man also

$$(16) \quad \begin{cases} \varrho y_1 = P_0(\xi) + Q_0(\xi) \sqrt{\Omega(\xi)} \\ \varrho y_2 = P_1(\xi) + Q_1(\xi) \sqrt{\Omega(\xi)} \\ \varrho y_3 = C(\xi), \end{cases}$$

so entsprechen den Geraden $\sum \lambda_i y_i = 0$ die Curven $C'(\xi) = 0$, in nur einem Blatte genommen, und es werden auch die $\xi_1 : \xi_2 : \xi_3$, sowie $\frac{\sqrt{\Omega(\xi)}}{\xi_1^2}$, rationale Functionen von y_1, y_2, y_3 . Die charakteristischen Eigenschaften der Umkehrungsformeln lassen sich unmittelbar angeben. Den beide Blätter durchsetzenden Geraden der doppelten ξ -Ebene Ξ entspricht in der einfachen Y -Ebene eine lineare ∞^2 -Schaar von Curven, von der Ordnung der C' , also von der 3^{ten} Ordnung. Diese Curven müssen, da die ihnen ein-zweideutig entsprechenden Geraden der Doppelebene Ξ je 4 Verzweigungspunkte haben, das Geschlecht 1 haben, also ohne Doppelpunkte sein; und je zwei der Curven dürfen sich in nur 2 beweglichen Punkten treffen, d. h. sie müssen 7 feste einfache Punkte gemein haben. Man hat somit:

$$(17) \quad \sigma \xi_1 = I_1(y), \quad \sigma \xi_2 = I_2(y), \quad \sigma \xi_3 = I_3(y),$$

wo die I Curven 3^{ter} Ordnung mit 7 gemeinsamen einfachen Punkten

$$a_1, a_2 \cdots a_7$$

sind.

Geht man umgekehrt von einer solchen Schaar (17) aus, so kommt man auf eine doppelte Ebene Ξ mit Uebergangscurve Ω , 4^{ter} Ordnung vom Geschlecht 3, die der Jacobi'schen Curve

$$(18) \quad \Delta(y) = \Sigma \pm \frac{d\Gamma_1}{dy_1} \frac{d\Gamma_2}{dy_2} \frac{d\Gamma_3}{dy_3}$$

der Schaar (17), einer Curve 6^{ter} Ordnung mit Doppelpunkten in a_1, \dots, a_7 , eindeutig entspricht.

Es wird vermöge (17)

$$(18') \quad \begin{aligned} \sigma^4 \Omega(\xi) &= \Delta^2(y), \\ \frac{\sqrt{\Omega(\xi)}}{\xi_1^2} &= \frac{\Delta(y)}{\Gamma_1^2(y)}, \end{aligned}$$

was die Umkehrung (17) von (16) ergänzt.

Die wirkliche Ausrechnung der Umkehrung (17) von (16) ist für das Folgende unnöthig. Ich bemerke deshalb nur: Fasst man die y als Liniencoordinaten der Ebene Ξ auf, so geht wegen der aus (4) folgenden Gleichung

$$(19) \quad y_1 Q_1 - y_2 Q_0 + y_3 D \equiv 0$$

die Linie (y) durch den entsprechenden Punkt (ξ); und zwar kann man durch Bilden der zweiten Polare von (ξ) in Bezug auf die linke Seite von (6) zeigen, dass in (16) einem Punkte (ξ) gerade die beiden Doppelpunktstangenten (y) derjenigen Berührungscurven 3^{ter} Ordnung, $C'(\xi) = 0$, entsprechen, die in (ξ) ihren Doppelpunkt hat; einer Geraden (y) der Schnittpunkt auf (y) von irgend solchen zwei Curven $C'(\xi) = 0$, die ihre Doppelpunkte auf (y) haben. Diese Betrachtung liefert ferner aus (16) zu (19) eine zweite Gleichung, die rational in den ξ und den y ist, und zwar von der Dimension 1 in den ξ , 2 in den y . Somit kömmt man durch diese Rechnung auf den Ausgangspunkt von Aronhold für die Ω_4 ¹⁾ zurück, und der Weg der Abbildung selbst ist im Wesentlichen der von Clebsch,²⁾ aber mit Vermeidung aller räumlichen Betrachtungen.

Die Einzelheiten der Abbildung sind folgende: Während den Geraden von Y im Allgemeinen in Ξ in nur je einem Blatte laufende Curven

1) Aronhold, Monatsber. d. Berl. Akad. 1864. Clebsch-Lindemann: „Vorlesungen“, Cap. über Connexe.

2) Clebsch, Math. Annalen III.

3^{ter} Ordnung mit je einem beweglichen scheinbaren Doppelpunkte entsprechen, welche Ω_4 noch in je 6 Punkten berühren, entspricht dem Geradenbüschel durch einen der Punkte a_i nur eine quadratische ∞^1 -Schaar von Kegelschnitten, die Ω_4 in je 4 Punkten berühren. a_i ist also Fundamentalpunkt, dem eine Doppeltangente von Ω_4 entspricht, gelegen in einem Blatte; derselben Doppeltangente, im anderen Blatte genommen, entspricht in Y eine Curve 3^{ter} Ordnung aus den $I'(y)$, welche aber bez. a_i zum Doppelpunkt hat, und zwar werden ihre Doppelpunktstangenten in a_i auch solche für die Jacobi'sche Curve $\mathcal{A}(y)$. Diese 7, den 7 Punkten a_i entsprechende, Doppeltangenten von Ω bezeichne ich bez. mit

$$t_{18}, t_{28}, \dots, t_{78}$$

und den zugehörigen ungeraden Berührungssystemen ertheile ich die Charakteristiken

$$(18), (28), \dots, (78).$$

Ferner entsprechen den 21 Verbindungsgraden $L_1(a_i a_k)$ und den dieselben zu Curven $I'(y)$ ergänzenden Kegelschnitten je durch die anderen 5 Punkte a weitere 21 Doppeltangenten von Ω , im einen, bez. im andern Blatte; eine solche Gerade und der ergänzende Kegelschnitt treffen \mathcal{A} in denselben beiden Punkten. Diese 21 Doppeltangenten und die Charakteristiken ihrer Systeme bezeichne ich bez. mit

$$t_{ik}, (ik).$$

Wir haben in unserer Abbildung ein (Aronhold'sches) 7-System von Doppeltangenten von Ω_4 ausgezeichnet, konnten aber zu diesem Zwecke oben von einer nur aus drei Doppeltangenten $T_1 T_2 T_3$ bestehenden Curve C ausgehen. Da die C selbst zu den $C'(\xi) = 0$ gehört, wird sich diese Curve C abbilden durch $a_i \cdot a_k \cdot L_1(a_i, a_k)$, es ist also

$$T_1 = t_{i8}, T_2 = t_{k8}, T_3 = t_{ik},$$

wobei nach der Abbildung diese 3 Linien je in solchem Blatte laufend zu nehmen sind, dass t_{i8} mit t_{k8} nur einen scheinbaren, t_{ik} mit t_{i8} und t_{k8} je einen wirklichen Schnittpunkt erhält. Dass solche 3 Doppeltangenten in der That ein einziges 7-System eindeutig bestimmen, wird sich später ergeben.

3. Discussion der einfachsten Berührungscurven an Ω und ihrer Untersysteme.

Zur Discussion der Berührungssysteme an Ω aus der Abbildung ist zunächst zu bemerken, dass zwei übereinander, aber getrennt laufende Curven von Ξ immer gleichzeitig behandelt werden können; sie führen auf zwei Curven von Y , die in der durch die Punktepaare von Y veranlassten involutorischen eindeutigen Ebenentransformation einander conjugirt sind. Bei dieser entsprechen den Geraden von Y Curven 8^{ter} Ordnung von Y , welche die a_i zu dreifachen Punkten haben. Die 28 Doppeltangenten mit ihren Bildern und den Charakteristiken ihrer Systeme sind in Nr. 2 schon aufgezählt; wir leiten jetzt die Berührungscurven 2^{ter} und 3^{ter} Ordnung, $\Phi^{(2)}$ und $\Phi^{(3)}$, ab.

I. Berührende Kegelschnitte, $\Phi^{(2)}$.

Für irgend zwei Kegelschnitte eines Gruppensystems, C, C' , gilt Gleichung (6) von Nr. 1, wobei Q eine Constante wird. Alle diese Kegelschnitte machen also $\sqrt{\Omega}$ rational und müssen sich aus den, sich nicht selbst conjugirten, Curven 1^{ter} bis 6^{ter} Ordnung der Y -Ebene ergeben. Es finden sich folgende ∞^1 -Schaaren, denen ich Gruppencharakteristiken zuschreibe, die als Indices angeschrieben sind:

a) $\Phi_{81}^{(2)}$; Bild in Y : $L_1(a_1)$, bez. $L_5(a_1 a_2^2 \cdots a_7^2)$.

b) $\Phi_{1234}^{(2)}$; Bild in Y : $L_2(a_1 a_2 a_3 a_4)$, bez. $L_4(a_1 a_2 a_3 a_4 a_5^2 a_6^2 a_7^2)$.

c) $\Phi_{12}^{(2)}$; Bild in Y : $L_3(a_1^2 a_3 \cdots a_7)$, bez. $L_3(a_2^2 a_3 \cdots a_7)$,

sowie die durch Vertauschung der Zahlen $1 \cdots 7$ sich daraus ergebenden Schaaren.

Dies sind im Ganzen $7 + \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{7 \cdot 6}{1 \cdot 2} = 63$ ∞^1 -Schaaren. Dass dieselben unter sich gleichberechtigt sind, sieht man so: Macht man auf die Ebene Y eine quadratische Transformation mit den Grundpunkten in a_2, a_3, a_4 , so erhält man aus den Curven $I_3(a_1, \cdots, a_7)$ Curven $I_3'(a_1', \cdots, a_7')$ der neuen Y' -Ebene, und den Geraden der letzteren durch a_1' entsprechen die Kegelschnitte b) durch a_1, a_2, a_3, a_4 ; zwischen Y' und Ξ herrscht aber eine der zwischen Y und Ξ bestehenden völlig analoge Beziehung. Ebenso

folgen die $\Phi_{12}^{(2)}$ aus den $\Phi_{81}^{(2)}$ durch eine cubische Cremona-Transformation der Y -Ebene.

Wir haben somit 63 gleichartige Gruppencharakteristiken, die ich so bezeichne (mit den Vertauschungen 1, 2, ... 7):

$$[81], [12], [1234] = [5678].$$

Dabei sind eckige Klammern gesetzt, weil das System $[ik]$ nicht der Doppeltangente (ik) zugeordnet ist. Vielmehr gibt es unter den Curven $L_1(a_1)$ die 6 zerfallenden Curven

$$a_k \cdot L_1(a_1^k a_k) \quad (k = 2, \dots, 7);$$

d. h. in $\Phi_{81}^{(2)}$ die 6 in je ein Doppeltangentenpaar zerfallenden Curven

$$t_{8k} \cdot t_{1k} \quad (k = 2, \dots, 7),$$

was ich schreibe

$$[81] = (8k) + (1k), \quad (k = 2, \dots, 7).$$

Ebenso in $\Phi_{12}^{(2)}$ die 6 Doppeltangentenpaare

$$t_{81} \cdot t_{82}, \quad t_{1k} \cdot t_{2k} \quad (k = 3, \dots, 7),$$

oder

$$[12] = (81) + (82) = (1k) + (2k) \quad (k = 3, \dots, 7);$$

und in $\Phi_{1234}^{(2)} = \Phi_{5678}^{(2)}$ die 6 Doppeltangentenpaare

$$t_{12} \cdot t_{34}, \quad t_{13} \cdot t_{24}, \quad t_{14} \cdot t_{23}, \quad t_{56} \cdot t_{78}, \quad t_{57} \cdot t_{68}, \quad t_{58} \cdot t_{67},$$

oder

$$\begin{aligned} [1234] &= [5678] = (12) + (34) = (13) + (24) = (14) + (23) \\ &= (56) + (78) = (57) + (68) = (58) + (67). \end{aligned}$$

II. Ω berührende ungerade $\Phi^{(3)}$, ohne scheinbare Doppelpunkte.

Da diese ∞^3 -Schaaren einzeln auf die 28 Doppeltangenten von Ω vermöge Gleichungen:

$$t_{ik} \cdot \Phi_{ik}^{(3)} = P_{ik}^2 - \Omega,$$

die nur spezieller Fall von (6), Nr. 1 sind, zurückführen, so sind längs jeder dieser Berührungscurven die beiden Blätter der Doppalebene getrennt.

Man hat:

$$\text{a) } \Phi_{81}^{(3)}; \text{ Bild: } L_3(a_2 \cdots a_7), \text{ bez. } L_6(a_1^3 a_2^2 \cdots a_7^2).$$

$$\text{b) } \Phi_{12}^{(3)}; \text{ Bild: } L_4(a_1^2 a_2^2 a_3 \cdots a_7), \text{ bez. } L_5(a_1 a_2 a_3^2 \cdots a_7^2),$$

mit den Vertauschungen $1, \dots, 7$. Diese Curven $\Phi^{(3)}$ haben keine scheinbaren Doppelpunkte, weil sich die beiden Bilder einer solchen Curve nur je in 6 Punkten auf \mathcal{A} schneiden. Wohl aber könnte man jeder der 28 Schaaren noch an irgend einer Stelle der Doppelebene einen wirklichen Doppelpunkt geben, nur dass dann die Gesamtheit der ∞^2 Curven mit Doppelpunkt in einer Schaar keine quadratische Schaar mehr bildet; stellt man vielmehr mit einer solchen Curve C mit Doppelpunkt β Gleichung (6), Nr. 1 für $r=3$, $s=3$ auf, so erhält C' , statt eines beweglichen Doppelpunkts, einen festen Punkt in β . In einer Schaar $\Phi_{ik}^{(3)}$ ist dagegen als ausgezeichnet enthalten: die zugeordnete Doppeltangente t_{ik} , verbunden mit allen doppelt genommenen Geraden. Zwei der Curven einer Schaar $\Phi_{ik}^{(3)}$ treffen sich in 3 wirklichen, auf einer Geraden liegenden, und 6 scheinbaren, auf einem Kegelschnitt liegenden, Schnittpunkten.

III. Ω berührende gerade $\Phi^{(3)}$, mit einem scheinbaren Doppelpunkte.

Die Berührungscurven 3^{ter} Ordnung, deren je 6 Berührungspunkte mit Ω nie auf einem Kegelschnitt liegen, bilden quadratische ∞^3 -Schaaren; und darunter erhält man aus der Abbildung folgende Unterschaaren von ∞^2 , nur immer in je einem Blatte laufenden, Curven, analog der oben zur Abbildung benutzten Unterschaar:

$$\text{a}_1) \Phi_0^{(3)}; \text{ Bild: } L_1, \text{ bez. } L_8(a_1^3 \cdots a_7^3),$$

$$\text{a}_2) \Phi_0^{(3)}; \text{ Bild: } L_4(a_1^3 a_2 \cdots a_7), \text{ bez. } L_5(a_2^2 \cdots a_7^2).$$

$$\text{b}_1) \Phi_{8123}^{(3)} = \Phi_{4567}^{(3)}; \text{ Bild: } L_2(a_1 a_2 a_3), \text{ bez. } L_7(a_1^2 a_2^2 a_3^2 a_4^3 \cdots a_7^3),$$

$$\text{b}_2) \Phi_{8123}^{(3)} = \Phi_{4567}^{(3)}; \text{ Bild: } L_3(a_1^2 a_4 \cdots a_7), \text{ bez. } L_6(a_1 a_2^3 a_3^3 a_4^2 \cdots a_7^2),$$

$$\text{b}_3) \Phi_{8123}^{(3)} = \Phi_{4567}^{(3)}; \text{ Bild: } L_4(a_1 a_2 a_3 a_4^2 a_5^2 a_6^2), \text{ bez. } L_5(a_1^2 a_2^2 a_3^2 a_4 a_5 a_6 a_7^3),$$

mit allen Vertauschungen der Zahlen $1 \cdots 7$. Dies liefert aus $\text{a}_1)$ und $\text{a}_2)$ $1 + 7 = 8$ Unterschaaren, denen die Charakteristik

$$(o) = (123 \cdots 78),$$

und aus $b_1), b_2), b_3)$ $1 + 3 + 4 = 8$ Unterschaaren, denen die Charakteristik

$$(8123) = (4567)$$

zugeschrieben ist; im Ganzen $8 \cdot 36$ Unterschaaren, die sich je zu 8 auf 36 Charakteristiken $(o), (iklm)$ vertheilen. Die Zuordnung ist so:

Die Schaaren $a_2)$ gehören zum selben ∞^3 -System $\Phi_0^{(3)}$, wie $a_1)$; denn unter den Bild-Curven von $a_1)$ und $a_2)$ sind bez. die beiden conjugirten Curven

$$L_1(a_1), L_5(a_1 a_2^2 \cdots a_7^2)$$

enthalten, die \mathcal{A} in denselben 6 Punkten treffen; daher sind die Punktgruppen, in welchen \mathcal{A} von den Curven $a_2)$ getroffen wird, corresidual zu den Schnittgruppen mit den Curven $a_1)$ und dieses überträgt sich auf die Berührungsgruppen auf Ω der entsprechenden Curven der Doppelsebene. Aus der ∞^2 -Schaar L_1 von $a_1)$ sind die 7 ∞^2 -Schaaren von $a_2)$, die zu (o) gehören, durch Cremona-Transformationen der Y -Ebene abgeleitet; so dass diese 7 Schaaren — genau nach dem oben unter Nr. 3 I. gemachten Schlusse — jener ersten Schaar völlig gleichwerthig sind. Aber auch die 8 Schaaren $b)$ ergeben sich aus $a_1), a_2)$ durch Cremona-Transformation der Y -Ebene, so dass dieselben sowohl zu einem und demselben ∞^3 -System $\Phi_{\alpha}^{(3)}$ gehören, als mit jenen ersten 8 Schaaren gleichberechtigt sind. Dies für jeden der 35 Werthe $(iklm)$, welche (α) ausser (o) noch annehmen kann.

Die 8 Unterschaaren $\Phi_0^{(3)}$ in $a_1), a_2)$ lassen sich durch die 8 Werthe 8, 1, 2, \cdots 7 eines Index von einander unterscheiden. Sie sind einzeln 8 verschiedenen 7-Systemen von Doppeltangenten zugeordnet; nämlich Schaar $a_1)$, vom Index 8, dem System:

$$a_1) \quad t_{81}, t_{82}, \cdots t_{87},$$

insofern irgend zwei der Doppeltangenten aus diesem System, t_{8i}, t_{8k} , verbunden mit einer nicht diesem System angehörigen t_{ik} , eine der Curven $\Phi_0^{(3)}$ von $a_1)$ bilden (wobei der Schnittpunkt von t_{8i} mit t_{8k} als scheinbarer Doppelpunkt betrachtet wird). Ebenso Schaar $a_2)$, vom weiteren Index 1, dem System:

$$a_2) \quad t_{12}, \cdots t_{17}, t_{18};$$

Schaar b_1) mit Charakteristik $(8123) = (4567)$ und Bild $L_2(a_1 a_2 a_3)$ dem System:

$$b_1') \quad t_{23}, t_{31}, t_{12}, t_{48}, \dots t_{78};$$

Schaar b_2) mit Bild $L_3(a_1^2 a_4 \dots a_7)$ dem System:

$$b_2') \quad t_{14}, \dots t_{17}, t_{23}, t_{28}, t_{38};$$

endlich Schaar b_3) mit Bild $L_4(a_1 a_2 a_3 a_4^2 a_5^2 a_6^2)$ dem System:

$$b_3') \quad t_{17}, t_{27}, t_{37}, t_{87}, t_{45}, t_{46}, t_{56}.$$

Eine andere Zuordnung der Schaaren zu den 7-Systemen ist die: In a_1) gibt es 7 ∞^1 -Schaaren, bestehend je aus einer der 7 Doppeltangenten $a_1')$, t_{8i} , verbunden mit einer ∞^1 -Schaar $\Phi_{8i}^{(2)}$ aus I, Nr. 3, mit Charakteristik $[8i]$. Nimmt man dann in Gleichung (6) von Nr. 1 diese ∞^1 -Schaar $t_{8i} \cdot \Phi_{8i}^{(2)}$ für C' , irgend eine Schaar $\Phi_0^{(3)}$ der Schaar a_1) für C_1 , so liefern die Curven 3^{ter} Ordnung, $P = 0$, dieser Gleichung den Satz:

Die 6 Berührungspunkte irgend einer Curve $\Phi_0^{(3)}$ der Unterschaar a_1 mit Ω bilden mit den 2 Berührungspunkten irgend einer Doppeltangente t_{8i} aus $a_1')$ und dem scheinbaren Doppelpunkte β der Curve $\Phi_0^{(3)}$ ein System von 9 Schnittpunkten zweier Curven 3^{ter} Ordnung.

Dasselbe gilt für die übrigen Unterschaaren und entsprechenden Systeme von je 7 Doppeltangenten.

Die 7-Systeme $a_1')$ $a_2')$ haben noch die Eigenschaft, dass die Summe der Zahlen ihrer Charakteristiken, wenn man bei dieser Summenbildung je zwei gleiche Zahlen weglässt, zu (0) wird, nämlich

$$(81) + (82) + \dots + (87) = (812 \dots 7) = (0),$$

$$(12) + (13) + \dots + (18) = (12 \dots 8) = (0);$$

analog liefern $b_1')$, $b_2')$, $b_3')$:

$$(23) + (31) + (12) + (48) + \dots + (78) = (4567) = (1238),$$

$$(14) + \dots + (17) + (23) + (28) + (38) = (4567) = (1238),$$

$$(17) + (27) + (37) + (87) + (45) + (46) + (56) = (1238) = (4567).$$

Wenn nun, wie am Schlusse von Nr. 2, drei Doppeltangenten t_{8i} , t_{8k} , t_{ik} vorliegen, für welche die Summe der Charakteristiken zu

$$(8i) + (8k) + (ik) = (0)$$

wird, und 2 der Doppeltangenten t_{8i}, t_{8k} werden vor der dritten ausgezeichnet, so gibt es unter den 8 zu (o) gehörigen 7-Systemen a'_1, a'_2 nur eines, welches jene beiden, t_{8i}, t_{8k} enthält, nämlich a'_1 ; womit die Behauptung am Schlusse von Nr. 2 gerechtfertigt ist.

4. Charakteristikentheorie.

In Nr. 3 haben wir für die 28 Doppeltangenten, für die 36 geraden ∞^3 -Schaaren von $\Phi^{(3)}$ und die 63 ∞^1 -Schaaren von $\Phi^{(2)}$, und damit für alle Gesamt-Berührungsschaaren, Systems-Charakteristiken eingeführt.

Zunächst lehren die dortigen Betrachtungen, dass der Index 8 dabei vor den übrigen Indices 1, 2, \dots 7 nur in der Abbildung mittels a'_1 von III, Nr. 3 bevorzugt war, an sich aber denselben in Bezug auf Ω_4 völlig gleichwerthig ist. Die bez. Charakteristiken sind also:

$$\begin{aligned} &\text{für die Doppeltangenten: } (ik), \\ &\text{„ „ geraden } \Phi^{(3)}: (o) = (123 \dots 78), (iklm) = (npqr), \\ &\text{„ „ } \Phi^{(2)}: [ik], [iklm] = [npqr], \end{aligned}$$

wo i, k, \dots, q, r von einander verschiedene Zahlen aus der Reihe 1, 2 \dots 8 sind.

Auf diese Zeichen wende man folgende Rechenregeln an:

Es ist

$$\begin{aligned} (\alpha_1) + (\alpha_2) + (\alpha_3) &= (\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3), \\ (\alpha_1) + (\alpha_2) &= [\alpha_1] + [\alpha_2] = [\alpha_1 \alpha_2], \end{aligned}$$

also

$$[\alpha_1] + (\alpha_2) = (\alpha_1 \alpha_2),$$

wobei in einer Charakteristik die einzelnen Zahlen beliebig geordnet, zwei gleiche weggelassen werden können, und wobei

$$[123 \dots 8] = o$$

gesetzt und in Combination ebenfalls weggelassen wird. Daraus folgt schon

$$(12 \dots 8) = (o), (1234) = (5678), [1234] = [5678].$$

Man hat dann den Satz:

Ist die Summe zweier Charakteristikencombinationen $= o$, so bilden die beiden entsprechenden Curvencombinationen zwei Berührungscurven eines Systems.

Zum Beweis genügt es, alle Charakteristiken aus Zeichen (ik) zusammenzusetzen und denselben Doppeltangenten zuzuordnen; und zwar braucht man nur den Satz in der Form nachzuweisen:

Liefert die Summe der Charakteristiken von $2s$ Doppeltangenten o , so liegen deren $4s$ Berührungspunkte mit Ω auf einer Curve s^{ter} Ordnung.

Der Beweis ergibt sich aus Nr. 3, durch den Schluss von $s - 1$ auf s . Für $s = 1$ ist der Satz selbstverständlich; für $s = 2$ ist derselbe in Nr. 3, I entwickelt. Ist $s = 3$:

$$(\alpha_1) + (\alpha_2) + (\alpha_3) + (\alpha_4) + (\alpha_5) + (\alpha_6) = o,$$

und $(\alpha_1) + (\alpha_2) + (\alpha_3) = (\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3) = (\alpha)$ eine ungerade Charakteristik, so wird

$$(\alpha_1) + (\alpha_2) + (\alpha_3) + (\alpha) = o,$$

$$(\alpha_4) + (\alpha_5) + (\alpha_6) + (\alpha) = o;$$

nach dem für $s = 2$ Gesagten bilden also die 6 Berührungspunkte der drei zu $(\alpha_1), (\alpha_2), (\alpha_3)$ gehörigen Doppeltangenten (einfach genommen) eine zu den 2 Berührungspunkten der Doppeltangente (α) corresiduale Gruppe auf Ω ; ebenso die 6 Berührungspunkte der drei zu $(\alpha_4), (\alpha_5), (\alpha_6)$ gehörigen Doppeltangenten, so dass also diese Gruppe von 6 Punkten auch jener Gruppe von 6 Punkten corresidual ist. Wird aber bei $s = 3$ $(\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3) = (\alpha)$ eine gerade Charakteristik, so kann man zunächst $(\alpha) = (o)$ annehmen, da sich die übrigen Fälle vermöge Cremona'scher Transformationen der Y -Ebene nach III, Nr. 3 daraus ergeben; es sind dann nur die Zerlegungen möglich

$$(o) = (ik) + (il) + (kl),$$

die nach III, Nr. 3 wieder nur zu einander corresidualen Gruppen von je 6 Punkten auf Ω führen, alle dem System (o) angehörig.

Bei allgemeinem s zerlege man die Summe

$$(\alpha_1) + (\alpha_2) + \cdots + (\alpha_{2s}) = o$$

in

$$(\alpha_1) + (\alpha_2) + (\alpha_3) + (\alpha_4) = [\alpha] = (\beta_1) + (\beta_2)$$

$$(\alpha_5) + (\alpha_6) + \cdots + (\alpha_{2s}) = [\alpha] = (\beta_1) + (\beta_2);$$

so wird nach den Fällen $s = 3$ und $s = 1$ (bez. wenn $[\alpha] = o$ nach den Fällen für noch niedrigere s) sowohl die Gruppe der 8 Berührungspunkte der $(\alpha_1) \cdots (\alpha_4)$ zugeordneten Doppeltangenten, als die Gruppe der $4s - 8$ Berührungspunkte der $(\alpha_5) \cdots (\alpha_{2s})$ zugeordneten Doppeltangenten zur Gruppe der beiden Berührungspunkte der beiden (β_1) und (β_2) zugeordneten Doppeltangenten corresidual, so dass jene Gruppen zu einander corresidual werden.

In der Abbildung ist der Uebergang von den (o) zugeordneten Curven zu den den übrigen 35 geraden Charakteristiken zugeordneten Curven durch Cremona'sche Transformationen der Y -Ebene bewirkt worden. Ueberträgt man dies auf die Charakteristiken-Bezeichnung, so erhält man folgende erlaubte Charakteristikensubstitutionen, durch welche nun die Auszeichnung von (o) aufgehoben werden kann:

Wenn $[s]$ eine beliebige Gruppen-Charakteristik, so ist $\{s\}$ eine Substitution, welche eine eigentliche Charakteristik (a) in (as) oder (a) transformirt, je nachdem (a) und (as) gleichen oder entgegengesetzten Charakter des Geraden und Ungeraden haben; also eine Gruppencharakteristik $[a]$ in $[as]$ transformirt, wenn, für $[a] = (a_1) + (a_2)$, nur eine der beiden Zahlen (a_1) , (a_2) durch $\{s\}$ verändert wird, sonst aber $[a]$ unverändert lässt.

Man kann dann irgend eine andere gerade Charakteristik, z. B. $(4567) = (1238)$, mit (o') bezeichnen, die Doppeltangenten mit $(i' k')$, und zwar etwa die 7 von b'_1 Nr. 3, III der Reihe nach mit $(8' 1')$, \dots , $(8' 7')$; so vertritt dieses System in der Bezeichnung die Stelle des ursprünglichen.

Damit ist die ganze Charakteristikentheorie¹⁾ für unsere Berührungscurven an Ω aufgestellt, und zwar algebraisch begründet.

5. Die Berührungsschaaren $\Phi^{(4)}$, $\Phi^{(5)}$, $\Phi^{(6)}$.

I. Berührungscurven $\Phi^{(4)}$ mit je einem scheinbaren Doppelpunkte.

Zu jeder der 63 Gruppencharakteristiken $[\alpha]$ gehört eine ∞^6 -Schaar von Curven 4^{ter} Ordnung, $\Phi_\alpha^{(4)}$, welche Ω_4 in einer ∞^5 -Schaar von Gruppen von je 8 Punkten berühren. Aus einer solchen Curve C' , welche Ω_4

1) S. insbesondere meinen Aufsatz: „Ueber die Gleichungen 8^{ten} Grades und ihr Auftreten in der Theorie der Curven 4^{ter} Ordnung“, Math. Ann. XV, § 7.

in $\alpha'_1, \alpha'_2 \dots \alpha'_8$ berühre, ergeben sich alle Curven 4^{ter} Ordnung, welche Ω_4 in denselben Punkten berühren, in der Form

$$C' + \lambda \Omega_4 = 0.$$

Man kann dann zeigen:

In diesem Büschel gibt es eine Curve mit scheinbarem Doppelpunkte; derselbe ist der 9^{te} Schnittpunkt β der durch $\alpha'_1, \dots \alpha'_8$ gehenden Curven 3^{ter} Ordnung.

Zum Beweise leite man die Curve C' aus einem in 4 Punkten $\alpha_1, \dots \alpha_4$ berührenden Kegelschnitt C , mit derselben Charakteristik $[\alpha]$, mittels Gleichung (6) von Nr. 1 her, für $r = 2, s = 3, d = 0$. Die Ableitung dieser Gleichung gilt, wegen $0 = d = \frac{1}{2}(r-1)(r-2)$ hier vollständig. Man kommt so auf eine in $\alpha'_1 \dots \alpha'_8$ berührende Curve 4^{ter} Ordnung C' mit einem scheinbaren Doppelpunkt β .

Man betrachte dann den Schnitt der Curve C' (β^2) mit den Curven $C_3(\alpha'_1 \dots \alpha'_8)$. Unter diesen Curven C_3 ist P von (6) enthalten, welche auch durch β geht und C' in noch zwei weiteren Punkten γ_1, γ_2 trifft, welche, da $Q(\beta)$ hindurchgeht, mit β auf einer Geraden liegen. Die ganze ∞^2 -Schaar der zur Gruppe $(\beta^2, \gamma_1, \gamma_2)$ corresidualen Gruppen von je 4 Punkten auf C' (β^2), nämlich die von den ∞^2 Geraden ausgeschnittenen Gruppen, müsste also auch von den $C_3(\alpha'_1 \dots \alpha'_8)$ ausgeschnitten werden, wenn diese nicht zu C' (β^2) adjungirt wären. Aber $\alpha'_1, \dots \alpha'_8$ liegen nicht auf einem Kegelschnitt (wegen des ausgeschlossenen uneigentlichen Falls von 3), Nr. 1), die $C_3(\alpha'_1 \dots \alpha'_8)$ bilden daher nur eine ∞^1 -Schaar, müssen also alle durch β gehen.

(Oder: die beiden Punkte, in welchen C' ausser β und $\alpha'_1, \dots \alpha'_8$ von P geschnitten sind, gehören zu einer ∞^1 -Schaar auf C' ; also geht durch $\alpha'_1 \dots \alpha'_8, \beta$ eine ∞^1 -Schaar von Curven 3^{ter} Ordnung.)

Dasselbe folgt, indem man bemerkt, dass in Gleichung (6) von Nr. 1 an Stelle von C die ∞^1 Kegelschnitte aus der Schaar $[\alpha]$ treten können. Die Formeln (8) bis (14) von Nr. 1 lehren dabei den Uebergang von der auf zwei solche Kegelschnitte C_2, C'_2 bezüglichen Gleichung (8) oder

$$B_2^2 - \Omega = C_2 C'_2,$$

mittels (9), d. h., wenn ψ_3 eine durch die 4 Berührungspunkte von C_2 mit Ω gehende Curve 3^{ter} Ordnung ist, mittels

$$B_2 M_1 - \psi_3 = C_2 N_1$$

zu der Gleichung (14) oder

$$\psi_3^2 - M_1^2 \Omega \equiv C_2 C_4,$$

wo

$$C_4 \equiv C_2' M_1^2 - 2 B_2 M_1 N_1 + C_2 N_1^2,$$

eine Curve 4^{ter} Ordnung mit Doppelpunkt in $M_1 = N_1 = o$. Nach denselben Formeln aber hat man, wenn man B_2 durch $B_2 + \lambda C_2'$, also C_2 durch

$$K_2 = C_2 + 2\lambda B_2 + \lambda^2 C_2',$$

ψ_3 durch

$$\psi_3' = \psi_3 + \lambda \chi_3$$

ersetzt, wo

$$\chi_3 = C_2' M_1 - B_2 N_1:$$

$$\psi_3'^2 - K_2 C_4' \equiv \begin{vmatrix} B_2 C_2' & M_1 - N_1 \\ C_2' B_2 & \lambda & 1 \end{vmatrix} \equiv (M_1 + \lambda N_1)^2 \Omega,$$

und man hat so ∞^1 Curven 3^{ter} Ordnung ψ_3' , durch die 8 Punkte $\alpha_1' \dots \alpha_8'$, in welchen Ω von C_4' berührt wird, und durch den Punkt $M_1 = N_1 = o$.

Die Abbildungen der 63 Curvenschaaren C_4' , mit je einem scheinbaren Doppelpunkte, werden:

- $\Phi_{81}^{(4)}$; Bild in Y : $L_4(a_1^2 a_2 \dots a_7)$, bez. $L_8(a_1^2 a_2^3 \dots a_7^3)$.
- $\Phi_{1234}^{(4)}$; Bild in Y : $L_5(a_1^2 a_2^2 a_3^2 a_4^2 a_5 a_6 a_7)$, bez. $L_7(a_1^2 \dots a_4^2 a_5^3 a_6^3 a_7^3)$.
- $\Phi_{12}^{(4)}$; Bild in Y : $L_6(a_1^3 a_2 a_3^2 \dots a_7^2)$, bez. $L_6(a_1 a_2^3 a_3^2 \dots a_7^2)$.

In einer solchen ∞^5 -Schaar mit der Charakteristik $[\alpha]$ sind enthalten: die zu $[\alpha]$ gehörigen ∞^1 Berührungskegelschnitte, verbunden mit den doppelt gezählten Geraden der Ebene (entsprechend dem Zerfallen von L in $L_3(a_1 \dots a_7)$ und die bez. Schaar aus I von Nr. 3); ferner 12 ∞^3 -Schaaren von ungeraden berührenden $\Phi^{(3)}$, verbunden mit je einer der 12 Doppeltangenten (ik) , für welche (αik) ungerade ist; endlich 2 · 16 ∞^2 -Schaaren von berührenden geraden $\Phi^{(3)}$, mit je einem scheinbaren Doppelpunkte, verbunden mit je einer der 16 Doppeltangenten (ik) , für welche (αik) gerade ist. So hat man als Bild der letzteren,

wenn man $[\alpha] = [81]$ und $(ik) = (81)$ also $(\alpha ik) = (o)$ nimmt, die beiden Schaaren:

$$L_3(a_1^2 a_2 \cdots a_7) \cdot L_1 \text{ und } L_4(a_1^3 a_2 \cdots a_7),$$

also Bilder von t_{81} , verbunden mit der Schaar $\Phi_0^{(3)}$ aus a_1) bez. a_2) von III, Nr. 3; und dieses zeigt zugleich, dass der Satz von III, Nr. 3 ein spezieller Fall des obigen in I dieser Nummer ist.

II. Berührungscurven $\mathcal{O}^{(4)}$ mit je 2 scheinbaren Doppelpunkten.

Diese Curvenschaaren, von der Mannigfaltigkeit ∞^4 , lassen sich nach den Formeln (2)—(6) von Nr. 1 aus Doppeltangentenpaaren C , mit je einem scheinbaren Schnittpunkt, ableiten. Sei

$$C = \xi_1 \cdot \xi_2$$

ein solches Paar, so kann man in (2) Nr. 1 setzen:

$$P = (\lambda_0 \xi_1 - \lambda_1 \xi_2) D + K \cdot \xi_1 \xi_2, \quad Q = \lambda_0 \xi_1 + \lambda_1 \xi_2$$

wo D irgend einen Kegelschnitt durch die 4 Berührungspunkte von ξ_1, ξ_2 vorstellt. Denn (4) wird dann, wenn

$$P_0 = (\xi_1 - \xi_2) D, \quad Q_0 = \xi_1 + \xi_2:$$

$$D(\xi_1 + \xi_2)(\lambda_0 \xi_1 - \lambda_1 \xi_2) - D(\xi_1 - \xi_2)(\lambda_0 \xi_1 + \lambda_1 \xi_2) = 2(\lambda_0 - \lambda_1) \cdot \xi_1 \xi_2 \cdot D.$$

Stellt man dann auch hier $P^2 - \varrho Q^2 \Omega = o$ auf und bestimmt ϱ so, dass diese Curve ξ_1 zum Factor hat, so wird sie, da sie in $\xi_1 = \xi_2 = o$ zwei zu $P = o, Q = o$ harmonisch liegende Zweige hat, daselbst auch die Richtung von ξ_2 haben, also wegen der 4 weiteren Schnittpunkte mit $\xi_2 = o$ auch ξ_2 zum Factor haben; so dass auch hier Gleichung (6) von Nr. 1 gilt. Setzt man noch

$$\Omega = D^2 - \xi_1 \xi_2 C',$$

so würde

$$P^2 - Q^2 \Omega = \xi_1 \xi_2 \cdot C',$$

wo

$$C' = (\lambda_0 \xi_1 + \lambda_1 \xi_2)^2 C_2' + (K \xi_2 + 2 \lambda_0 D) \cdot (K \xi_1 - 2 \lambda_1 D),$$

mit scheinbaren Doppelpunkten in

$$\lambda_0 \xi_1 + \lambda_1 \xi_2 = o, \quad K \xi_2 + 2 \lambda_0 D = o.$$

Man sieht zugleich aus dieser Ableitung:

Es gibt 6·63 verschiedene Unterschaaren $\Phi^{(4)}$ mit je 2 scheinbaren Doppelpunkten. Eine solche Schaar hat die Mannigfaltigkeit ∞^4 und ist einem der 6 Paare von Doppeltangenten zugeordnet, welche in einer der 63 ∞^1 -Schaaren von Berührungskegelschnitten $\Phi^{(2)}$ enthalten sind. Die 8 Berührungspunkte einer solchen Curve $\Phi^{(4)}$ liegen mit den beiden Doppelpunkten dieser Curve, mit den 4 Berührungspunkten des zugeordneten Doppeltangentenpaars und mit dem Schnittpunkt dieses Paars auf einer Curve 3^{ter} Ordnung.

Dasselbe ergibt sich aus den Abbildungen dieser ∞^4 -Schaaren $\Phi^{(4)}$:

- a₁) $\Phi_{12}^{(4)}$; Bilder: $L_3(a_3 \cdots a_7)$, bez. $L_9(a_1^4 a_2^4 a_3^3 \cdots a_7^3)$,
 a₂) $\Phi_{12}^{(4)}$; Bilder: $L_5(a_1^2 a_2^2 a_3^3 a_4 \cdots a_7)$, bez. $L_7(a_1^2 a_2^2 a_3 a_4^3 \cdots a_7^3)$.
 b) $\Phi_{81}^{(4)}$; Bilder: $L_5(a_1 a_3^2 \cdots a_7^2)$, bez. $L_7(a_1^3 a_2^4 a_3^2 \cdots a_7^2)$.
 c₁) $\Phi_{1234}^{(4)}$; Bilder: $L_4(a_1 \cdots a_4 a_5^2 a_6^2)$, bez. $L_8(a_1^3 \cdots a_4^3 a_5^2 a_6^2 a_7^4)$,
 c₂) $\Phi_{1234}^{(4)}$; Bilder: $L_6(a_1^3 a_2^3 a_3 a_4 a_5^2 a_6^2 a_7^2)$, bez. $L_6(a_1 a_2 a_3^3 a_4^3 a_5^2 a_6^2 a_7^2)$,

mit den Vertauschungen von 1, 2, ... 7.

In a₁) ist enthalten $t_{81} +$ der ∞^3 -Schaar von ungeraden Berührungscurven $\Phi_{82}^{(3)}$; ferner $t_{82} +$ der ∞^3 -Schaar von ungeraden Berührungscurven $\Phi_{81}^{(3)}$, sowie $t_{81} t_{82}$, verbunden mit den doppelt gezählten Geraden der Ξ -Ebene; dagegen die 16, nicht in [12] enthaltenen Doppeltangenten, verbunden mit je einer der geraden ∞^2 -Schaaren von Berührungscurven $\Phi^{(3)}$ aus III, Nr. 3, die 10 übrigen Doppeltangenten nur wieder mit zerfallenden Curven verbunden. Aus der aus der Abbildung von a₁) gefolgerten Thatsache, dass unter den Curven von a₁) $t_{81} t_{82}$, verbunden mit den doppelten Geraden, vorkommt, schliesst man ebenfalls auf die obigen Curven 3^{ter} Ordnung P , d. h. die aus der Abbildung hier folgenden Curven $\Phi^{(4)}$ sind mit den aus den Doppeltangentenpaaren erschlossenen Curven identisch.

III. Berührungscurven $\Phi^{(4)}$, mit je 3 scheinbaren Doppelpunkten.

Man hat folgende Schaaren mit ihren Abbildungen:

- a₁) $\Phi_{12}^{(4)}$; Bilder: $L_2(a_1, a_2)$, bez. $L_{10}(a_1^3 a_2^3 a_3^4 \cdots a_7^4)$,
 a₂) $\Phi_{12}^{(4)}$; Bilder: $L_4(a_1 a_2 a_3^2 a_4^2 a_5^2)$, bez. $L_8(a_1^3 a_2^3 a_3^2 a_4^2 a_5^2 a_6^4 a_7^4)$,
 a₃) $\Phi_{12}^{(4)}$; Bilder: $L_6(a_1^3 a_2^3 a_3^2 \cdots a_6^2)$, bez. $L_6(a_1 a_2 a_3^2 \cdots a_6^2 a_7^4)$.
 b₁) $\Phi_{1234}^{(4)}$; Bilder: $L_3(a_1^2 a_5 a_6 a_7)$, bez. $L_9(a_1^2 a_2^4 a_3^4 a_4^4 a_5^3 a_6^3 a_7^3)$,
 b₂) $\Phi_{1234}^{(4)}$; Bilder: $L_5(a_2^2 a_3^2 a_4^2 a_5 a_6 a_7^3)$, bez. $L_7(a_1^4 a_2^2 a_3^2 a_4^2 a_5^3 a_6^3 a_7)$.
 c₁) $\Phi_{81}^{(4)}$; Bilder: $L_4(a_2^3 a_3 \cdots a_7)$, bez. $L_8(a_1^4 a_2 a_3^3 \cdots a_7^3)$,
 c₂) $\Phi_{81}^{(4)}$; Bilder: $L_6(a_1^2 a_2^3 a_3^3 a_4^3 a_5 a_6 a_7)$, bez. $L_6(a_1^2 a_2 a_3 a_4 a_5^3 a_6^3 a_7^3)$,

mit allen Vertauschungen von 1, ... 7. Dies liefert aus a₁), a₂), a₃) $1 + 10 + 5 = 16$ ∞^3 -Schaaren, die alle zur Gruppen-Charakteristik [12] gehören; denn in a₁) z. B. ist enthalten: t_{12} , verbunden mit der ∞^2 -Schaar $\Phi_0^{(3)}$ aus III, a₁) von Nr. 3, mit dem Bild $L_1(a_1 a_2) \cdot L_1$; etc. Im Ganzen ergeben sich so $16 \cdot 63$ Schaaren, zu je 16 den 63 Gruppencharakteristiken zugeordnet.

In a₁) sind wieder als Unterschaaren enthalten: die Curven mit den Abbildungen:

$$L_2(a_1 a_2 a_3), \dots, L_2(a_1 a_2 a_7), L_1(a_1 a_2) \cdot L_1,$$

d. h. die 6 Doppeltangenten

$$a'_1) \quad t_{83}, t_{84}, \dots, t_{87}, t_{12},$$

je verbunden mit einer ∞^2 -Schaar von geraden $\Phi^{(8)}$ aus III, Nr. 3. Diese 6 Doppeltangenten sind in der [12] zugehörigen Kegelschnittschaar nicht enthalten, irgend drei von ihnen bilden eine „gerade“ Berührungscurve, und die Berührungspunkte aller 6 liegen auf einer Curve 3^{ter} Ordnung (da die Summe der 6 Charakteristiken von a₁') = 0 ist). Den 16 derartigen Sechsystemen,¹⁾ welche zu $[\alpha]$ gehören, sind unsere zu $[\alpha]$ gehörigen 16 ∞^3 -Schaaren einzeln zugeordnet.

1) Andere theilweise bekannte Eigenschaften dieser Sechsysteme werden später (Nr. 5, XV und Nr. 7, II) erwähnt.

Die Curven P von (2) Nr. 1 liefern den Satz:

Durch die 8 Berührungspunkte einer unserer Curven $\Phi^{(4)}$, durch deren 3 Doppelpunkte und durch die 2 Berührungspunkte irgend einer der Doppeltangenten des zugehörigen Sechserystems gehen ∞^2 Curven 4^{ter} Ordnung; durch die ersteren 11 Punkte und durch die 4 Berührungs- und den Schnittpunkt zweier dieser 6 Doppeltangenten ∞^1 Curven 4^{ter} Ordnung.

IV. Ungerade Berührungscurven $\Phi^{(5)}$, mit je 2 scheinbaren Doppelpunkten.

Aus den 28 Doppeltangenten $t_{ik} = C(\xi) = 0$ ergeben sich vermöge (2)—(6) von Nr. 1 für $r = 1$, $d = 0$, $s = 3$ ebenso viele Schaaren $C'(\xi) = 0$ von Curven $\Phi_{ik}^{(5)}$, mit je zwei scheinbaren Doppelpunkten. Dabei wird $P = 0$ in (5) eine ∞^7 -Schaar von Curven 3^{ter} Ordnung, welche Ω in einer Vollschaar von Gruppen von je 10 Punkten schneiden. So berührt also unsere Schaar $\Phi_{ik}^{(5)}$ die Curve Ω in der Gesamtschaar von Gruppen von je 10 Punkten, welche zum System (ik) überhaupt gehören. Die Mannigfaltigkeit der Curvenschaar $\Phi_{ik}^{(5)}$ selbst aber wird ∞^8 ; denn ist $\alpha'_1 \dots \alpha'_{10}$ eine solche Gruppe von 10 Punkten auf Ω , so wird man zunächst durch $\alpha'_1 \dots \alpha'_{10}$ und die beiden Berührungspunkte von t_{ik} die eine der ∞^7 Curven 3^{ter} Ordnung, $P = 0$, legen; sodann aber kann man für $Q = 0$ von (5) irgend eine der ∞^1 durch den dritten Schnittpunkt γ von $P = 0$ mit t_{ik} gehenden Geraden wählen; man erhält so ∞^1 Curven 5^{ter} Ordnung $C'(\xi) = 0$, welche alle Ω in $\alpha'_1, \alpha'_2 \dots \alpha'_{10}$ berühren, durch γ gehen und noch je 2 Doppelpunkte bez. in einem der ∞^1 Punktpaare haben, in welchen $P = 0$ von den ∞^1 Geraden $Q = 0$ getroffen wird.

Die Bilder der Curvenschaaren $\Phi_{ik}^{(5)}$ ergeben sich aus den der t_{ik} , indem man das Bild eines doppelt gerechneten Kegelschnitts $L_6(a_1^2 \dots a_7^2)$ hinzunimmt; also:

$$\Phi_{81}^{(5)}; \text{ Bild: } L_6(a_1 a_2^2 \dots a_7^2), \text{ bez. } L_9(a_1^4 a_2^3 \dots a_7^3).$$

$$\Phi_{12}^{(5)}; \text{ Bild: } L_7(a_1^3 a_2^3 a_3^2 \dots a_7^2), \text{ bez. } L_8(a_1^2 a_2^2 a_3^3 \dots a_7^3).$$

V. Gerade Berührungscurven $\Phi^{(5)}$, mit je drei scheinbaren Doppelpunkten.

Diese Curvenschaaren ergeben sich einzeln aus den unter III, Nr. 3 angegebenen $8 \cdot 36$ ∞^2 -Schaaren gerader $\Phi^{(3)}$, indem man die letzteren in (2)—(6), Nr. 1 für C nimmt und daselbst $r = 3$, $d = 1$, $s = 4$ nimmt. Es gibt also auch $8 \cdot 36$ solcher Schaaren $\Phi^{(5)}$, und jede erhält die Mannigfaltigkeit ∞^7 , berührt also Ω in der zur betreffenden geraden Charakteristik gehörenden Vollschaar von Gruppen von je 10 Punkten. Ihre Bilder werden aus den $\Phi^{(3)}$ von III, Nr. 3 unter Hinzunahme des Bildes $L_3(a_1 \cdots a_7)$ einer doppelt gezählten Geraden erhalten; werden also:

- a₁) $\Phi_0^{(5)}$; Bild: $L_4(a_1 \cdots a_7)$, bez. $L_{11}(a_1^4 \cdots a_7^4)$,
- a₂) $\Phi_0^{(5)}$; Bild: $L_7(a_1^4 a_2^2 \cdots a_7^2)$, bez. $L_8(a_1 a_2^3 \cdots a_7^3)$.
- b₁) $\Phi_{8123}^{(5)}$; Bild: $L_5(a_1^2 a_2^2 a_3^2 a_4 \cdots a_7)$, bez. $L_{10}(a_1^3 a_2^3 a_3^3 a_4^4 \cdots a_7^4)$,
- b₂) $\Phi_{8123}^{(5)}$; Bild: $L_6(a_1^3 a_2 a_3 a_4^2 \cdots a_7^2)$, bez. $L_9(a_1^2 a_2^4 a_3^4 a_4^3 \cdots a_7^3)$,
- b₃) $\Phi_{8123}^{(5)}$; Bild: $L_7(a_1^2 a_2^2 a_3^2 a_4^3 a_5^3 a_6^3 a_7)$, bez. $L_8(a_1^3 a_2^3 a_3^3 a_4^2 a_5^2 a_6^2 a_7^4)$.

Da eine solche Schaar, wie die zugehörige $\Phi^{(3)}$, einem 7-System von Doppeltangenten zugeordnet ist (III, Nr. 3), und $\Phi^{(3)}$ in eine solche Gerade, verbunden mit ∞^1 Kegelschnitten, zerfallen kann, so hat man noch:

Durch die 10 Berührungspunkte einer unserer Curven $\Phi^{(5)}$, ihre 3 Doppelpunkte und die 2 Berührungspunkte irgend einer der Doppeltangenten des zugeordneten 7-Systems, t_α , gehen ∞^1 Curven 4^{ter} Ordnung, mit dem letzten Basispunkt in einem Schnittpunkt der $\Phi^{(5)}$ mit der t_α .

VI. Ungerade Berührungscurven $\Phi^{(5)}$, mit je 4 scheinbaren Doppelpunkten.

Nach der Abbildung hat man folgende ∞^6 -Schaaren:

- a₁) $\Phi_{12}^{(5)}$; Bild: $L_4(a_2^2 a_3 \cdots a_7)$, bez. $L_{11}(a_1^5 a_2^3 a_3^4 \cdots a_7^4)$,
- a₂) $\Phi_{12}^{(5)}$; Bild: $L_5(a_1 a_2 a_3^2 \cdots a_6^2)$, bez. $L_{10}(a_1^4 a_2^4 a_3^3 \cdots a_6^3 a_7^5)$,
- a₃) $\Phi_{12}^{(5)}$; Bild: $L_6(a_1^2 a_2^2 a_3^3 a_4^3 a_5 a_6 a_7)$, bez. $L_9(a_1^3 a_2^3 a_3^2 a_4^4 a_5^4 a_6^4 a_7^4)$,
- a₄) $\Phi_{12}^{(5)}$; Bild: $L_7(a_1^3 a_2 a_3^4 a_4^2 \cdots a_7^2)$, bez. $L_8(a_1^2 a_2^4 a_3^3 a_4^3 \cdots a_7^3)$.
- b₁) $\Phi_{81}^{(5)}$; Bild: $L_5(a_1^2 a_2^3 a_3 \cdots a_7)$, bez. $L_{10}(a_1^3 a_2^2 a_3^4 \cdots a_7^4)$,
- b₂) $\Phi_{81}^{(5)}$; Bild: $L_6(a_1^3 a_2^2 \cdots a_6^2)$, bez. $L_9(a_1^2 a_2^3 \cdots a_6^3 a_7^5)$,
- b₃) $\Phi_{81}^{(5)}$; Bild: $L_7(a_1^2 a_2 a_3 a_4^3 \cdots a_7^3)$, bez. $L_8(a_1^3 a_2^4 a_3^4 a_4^2 \cdots a_7^2)$,

mit den Vertauschungen von $1, \dots, 7$. Dies gibt $27 \cdot 28$ ∞^6 -Schaaren, je zu 27 einem der 28 ungeraden Systeme (ik) angehörig.

Die Zuordnung der einzelnen Schaaren zu Charakteristikengruppen ergibt sich aus den in jeder Schaar weiter enthaltenen Unterschaaren. In a_1) ist enthalten als Bild:

$$L_2(a_3 \cdots a_7) \cdot L_1(a_2) \cdot L'_1(a_2),$$

d. h. die Doppeltangente t_{12} , welcher die Schaar zunächst zugeordnet ist, verbunden mit zwei Berührungskegelschnitten eines Systems; ferner die Doppeltangente t_{81} , verbunden mit der ∞^5 -Schaar von [82] zugeordneten Berührungscurven $\Phi^{(4)}$ aus I dieser Nummer; die übrigen in der Gruppe $(12) + (81) = [82]$ enthaltenen 10 Doppeltangenten nur je mit Curvenschaaren $\Phi^{(4)}$ aus II, Nr. 5, die letzten 16 Doppeltangenten je mit Schaaren $\Phi^{(4)}$ aus III, Nr. 5 verbunden. Somit unterscheiden sich die (ik) zugehörigen 27 Unterschaaren $\Phi^{(6)}$ nach den 27 von t_{ik} verschiedenen Doppeltangenten, indem in einer solchen Schaar immer nur eine dieser 27 Doppeltangenten mit einer $\Phi^{(4)}$ aus I, Nr. 5 verbunden vorkommt.

Dies liefert auch die Abbildung unserer Schaaren nach Nr. 1. Für a_1) gehe man zu dem Zweck in Nr. 1 aus von

$$C(\xi) \equiv t_{81} \cdot \Phi_{82}^{(2)},$$

wo $\Phi_{82}^{(2)}$ ein [82] angehöriger Berührungskegelschnitt ist (mit dem Bilde $a_1 \cdot L_1(a_2)$), und betrachte also die beiden Schnittpunkte von t_{81} mit $\Phi_{82}^{(2)}$ als scheinbare Doppelpunkte β_1, β_2 von C . Die Curven 4^{ter} Ordnung, $P = 0$, von (2) Nr. 1, treffen dann nur $\Phi_{82}^{(2)}$ in ∞^2 Gruppen von je 2 beweglichen Punkten; den durch β_1 und β_2 gehenden Kegelschnitten Q , welche diese Gruppen ebenfalls ausschneiden, kann man also noch vorschreiben, dass in β_1 die Richtungen von P, Q harmonisch liegen zu denen von C . Dann folgt aber Gleichung (6) von Nr. 1, und damit in den C' die gesuchte ∞^6 -Schaar von $\Phi_{12}^{(6)}$. Die vier Doppelpunkte einer solchen Curve liegen mit β_1, β_2 und mit zweien der Schnittpunkte der Curve mit $\Phi_{82}^{(2)}$ auf einem Kegelschnitt; ihre 10 Berührungspunkte, ihre 4 Doppelpunkte und die zwei Berührungspunkte von t_{81} bilden die 16 Basispunkte eines Büschels von Curven 4^{ter} Ordnung.

VII. Gerade Berührungscurven $\Phi^{(5)}$, mit je 5 scheinbaren Doppelpunkten.

Man gehe in Nr. 1 für die Curve C von einer aus drei Doppeltangenten $\xi_1 \xi_2 \xi_3$ bestehenden geraden Berührungscurve $\Phi^{(3)}$ aus, mit 3 scheinbaren Doppelpunkten in deren Schnittpunkten $\beta_1 \beta_2 \beta_3$ (z. B. von $t_{81} t_{82} t_{12}$ mit dem Bilde $a_1 \cdot a_2 \cdot L_2(a_3 \cdots a_7)$, zu (o) gehörig). Die Curven 4^{ter} Ordnung $P=0$ von (2) treffen C nur in festen Punkten; die durch $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ gehenden Kegelschnitte Q von (3) kann man dann so bestimmen, dass die Richtungen von P, Q in β_2 mit denen von ξ_1, ξ_3 und in β_3 mit denen von ξ_1, ξ_2 harmonisch liegen. Gibt man nun der Curve

$$P^2 - \rho Q^2 \Omega = 0$$

einen weiteren Punkt auf ξ_1 , so erhält sie nicht nur ξ_1 , sondern auch $\xi_2 \xi_3$ zum Factor und es existirt also wieder Gleichung (6), womit in den C' eine ∞^5 -Schaar der gesuchten Curven $\Phi^{(5)}$ gefunden ist.

Solcher ∞^5 -Schaaren existiren also 56 · 36, je 56 in der allgemeinen, einer der 36 geraden Charakteristiken (α) zugeordneten Schaar von $\Phi_\alpha^{(5)}$. Die 56 Schaaren von (α) sind einzeln den 56 Doppeltangententripeln zugeordnet, welche in der allgemeinen Schaar der $\Phi_\alpha^{(3)}$ enthalten sind.

Die 5 Doppelpunkte einer $\Phi_\alpha^{(5)}$ liegen mit den 3 Schnittpunkten des zugehörigen Doppeltangententripels auf einem Kegelschnitt; dieselben 8 Punkte, die 10 Berührungspunkte der $\Phi_\alpha^{(5)}$ und die 6 Berührungspunkte des Tripels liegen zusammen auf einer Curve 4^{ter} Ordnung.

Die Abbildung ergibt:

- a₁) $\Phi_0^{(5)}$; Bild: $L_5(a_3^2 \cdots a_7^2)$, bez. $L_{10}(a_1^5 a_2^5 a_3^3 \cdots a_7^3)$, zug. $t_{81} t_{82} t_{12}$,
a₂) $\Phi_0^{(5)}$; Bild: $L_6(a_1^3 a_2^3 a_3^3 a_4 \cdots a_7)$, bez. $L_9(a_1^2 a_2^2 a_3^2 a_4^4 \cdots a_7^4)$, zug. $t_{12} t_{13} t_{23}$.
b₁) Φ_{1284} ; Bild: $L_3(a_1 \cdots a_4)$, bez. $L_{12}(a_1^4 \cdots a_4^4 a_5^5 a_6^5 a_7^5)$, zug. $t_{85} t_{86} t_{87}$,
b₂) Φ_{1284} ; Bild: $L_4(a_1^2 a_2^2 a_5 a_6 a_7)$, bez. $L_{11}(a_1^3 a_2^3 a_3^5 a_4^5 a_5^4 a_6^4 a_7^4)$, zug. $t_{83} t_{84} t_{12}$,
b₃) Φ_{1284} ; Bild: $L_5(a_1^3 a_2 a_3 a_4 a_5^2 a_6^2)$, bez. $L_{10}(a_1^2 a_2^4 a_3^4 a_4^4 a_5^3 a_6^3 a_7^5)$, zug. $t_{87} t_{15} t_{16}$,
b₄) $\Phi_{1284}^{(5)}$; Bild: $L_6(a_2^2 a_3^2 a_4^2 a_5^3 a_6^3 a_7)$, bez. $L_9(a_1^5 a_2^3 a_3^3 a_4^3 a_5^2 a_6^2 a_7^4)$, zug. $t_{81} t_{17} t_{56}$,
b₅) $\Phi_{1284}^{(5)}$; Bild: $L_6(a_1^4 a_2^2 a_3^2 a_4^2 a_5 a_6 a_7)$, bez. $L_9(a_1 a_2^3 a_3^3 a_4^3 a_5^4 a_6^4 a_7^4)$, zug. $t_{12} t_{13} t_{14}$,

b₆) $\Phi_{1234}^{(5)}$; Bild: $L_7(a_1^3 \cdots a_4^3 a_5^2 a_6^2)$, bez. $L_8(a_1^2 \cdots a_4^2 a_5^3 a_6^3 a_7^5)$, zug. $t_{87} t_{57} t_{67}$,
 b₇) $\Phi_{1284}^{(5)}$; Bild: $L_7(a_1 a_2 a_3^3 a_4^3 a_5^4 a_6^2 a_7^2)$, bez. $L_8(a_1^4 a_2^4 a_3^2 a_4^2 a_5 a_6^3 a_7^3)$, zug. $t_{12} t_{35} t_{45}$,
 mit den Vertauschungen von 1, ... 7. In einer solchen ∞^5 -Schaar ist besonders enthalten: irgend eine der drei Doppeltangenten des zugehörigen Tripels, verbunden mit einer entsprechenden Schaar von ∞^4 Curven $\Phi^{(4)}$ aus II, Nr. 5.

VIII. Ungerade Berührungscurven $\Phi^{(5)}$, mit je 6 scheinbaren Doppelpunkten.

Man hat die ∞^4 -Schaaren:

- a₁) $\Phi_{81}^{(5)}$; Bild: $L_2(a_1)$, bez. $L_{13}(a_1^4 a_2^5 \cdots a_7^5)$,
 a₂) $\Phi_{81}^{(5)}$; Bild: $L_4(a_1 a_2^2 a_3^2 a_4^2)$, bez. $L_{11}(a_1^4 a_2^3 a_3^3 a_4^3 a_5^5 a_6^5 a_7^5)$,
 a₃) $\Phi_{81}^{(5)}$; Bild: $L_5(a_1^4 a_2 \cdots a_7)$, bez. $L_{10}(a_1 a_2^4 \cdots a_7^4)$,
 a₄) $\Phi_{81}^{(5)}$; Bild: $L_6(a_1 a_2^4 a_3^2 \cdots a_6^2)$, bez. $L_9(a_1^4 a_2 a_3^3 \cdots a_6^3 a_7^5)$,
 a₅) $\Phi_{81}^{(5)}$; Bild: $L_7(a_1^4 a_2^3 a_3^3 a_4^3 a_5 a_6 a_7)$, bez. $L_8(a_1 a_2^2 a_3^2 a_4^2 a_5^4 a_6^4 a_7^4)$.
 b₁) $\Phi_{12}^{(5)}$; Bild: $L_3(a_1 a_2 a_3^2)$, bez. $L_{12}(a_1^4 a_2^4 a_3^3 a_4^5 \cdots a_7^5)$,
 b₂) $\Phi_{12}^{(5)}$; Bild: $L_4(a_3^3 a_4 \cdots a_7)$, bez. $L_{11}(a_1^5 a_2^5 a_3^2 a_4^4 \cdots a_7^4)$,
 b₃) $\Phi_{12}^{(5)}$; Bild: $L_5(a_1^3 a_2 a_3^2 a_4^2 a_5^2)$, bez. $L_{10}(a_1^2 a_2^4 a_3^3 a_4^3 a_5^3 a_6^5 a_7^5)$,
 b₄) $\Phi_{12}^{(5)}$; Bild: $L_6(a_2^2 a_3^3 a_4^3 a_5^3 a_6 a_7)$, bez. $L_9(a_1^5 a_2^3 a_3^2 a_4^2 a_5^2 a_6^4 a_7^4)$,
 b₅) $\Phi_{12}^{(5)}$; Bild: $L_7(a_1^3 a_2^3 a_3^4 a_4^2 a_5^2 a_6^2)$, bez. $L_8(a_1^2 a_2^2 a_3 a_4^3 a_5^3 a_6^3 a_7^5)$,
 b₆) $\Phi_{12}^{(5)}$; Bild: $L_7(a_1^5 a_2 a_3^2 \cdots a_7^2)$, bez. $L_8(a_2^4 a_3^3 \cdots a_7^3)$,

mit den Vertauschungen von 1, ... 7. Dies sind $72 \cdot 28$ Schaaren, zu je 72 in einem der 28 ungeraden Systeme (α) enthalten.

In a₁) mit dem Bild $L_2(a_1)$, ist enthalten: 1) die Doppeltangente t_{81} , verbunden mit 2 Kegelschnitten eines Systems [81]; 2) irgend eine der 6 Doppeltangenten

$$t_{82}, t_{83}, \cdots t_{87},$$

verbunden mit einer ∞^3 -Schaar von rationalen $\Phi^{(4)}$ aus III, Nr. 5. Dieses Sechssystem, welchem unsere Unterschaaar $\Phi_{81}^{(4)}$ aus (81) eindeutig zugeordnet ist, hat die Eigenschaft, mit t_{81} verbunden eines der $8 \cdot 36$ Aronhold'schen 7-Systeme von III, Nr. 3 zu liefern. Solcher 7-Systeme, welche t_{81} enthalten, gibt es in der That $\frac{8 \cdot 36 \cdot 7}{28} = 72$, nämlich je 2 unter den 8 zu jeder der 36 geraden Charakteristiken gehörigen Systemen.

Hiernach leitet man eine unserer Schaaren mittels Nr. 1 ab, indem man von einer Curve

$$C \equiv t_{82} t_{83} t_{84} t_{85} \cdot t_{67}$$

ausgeht, und in ihr die 6 gegenseitigen Schnittpunkte von $t_{82}, t_{83}, t_{84}, t_{85}$ als scheinbare Doppelpunkte $(\beta_1, \dots, \beta_6)$ betrachtet ($r = 5, d = 6, s = 5$), wodurch man unmittelbar zu (6), Nr. 1 gelangt. Die 6 Doppelpunkte einer so abgeleiteten $\Phi_{81}^{(5)}$ liegen mit den 6 Eckpunkten $\beta_1 \dots \beta_6$ des vollständigen Vierseits $t_{82} t_{83} t_{84} t_{85}$ auf einer Curve 3^{ter} Ordnung, die auch durch die 3 wirklichen Schnittpunkte von $\Phi_{81}^{(5)}$ mit t_{67} geht; und jene 15 Punkte, die 10 Berührungspunkte von $\Phi_{81}^{(5)}$, und die 10 Berührungspunkte von $t_{82} t_{83} t_{84} t_{85} t_{67}$ liegen auf einer Curve 5^{ter} Ordnung.

IX. Berührungscurven $\Phi^{(6)}$, mit je 4 scheinbaren Doppelpunkten.

Man hat 63 verschiedene ∞^{11} -Schaaren, welche Ω in ∞^9 Gruppen von je 12 Punkten berühren, und welche sich aus den 63 ∞^1 -Schaaren von $\Phi^{(2)}$ in I, Nr. 3, oder den 63 ∞^5 -Schaaren von $\Phi^{(4)}$ in I, Nr. 5 einzeln nach Nr. 1 ergeben.

Die 12 Berührungspunkte und die 4 Doppelpunkte einer solchen $\Phi^{(6)}$ bilden die 16 Basispunkte eines Büschels von Curven 4^{ter} Ordnung; dieselben 16 Punkte liegen mit den 8 Berührungspunkten einer zugehörigen $\Phi^{(4)}$ und deren Doppelpunkte auf einer Curve 5^{ter} Ordnung, durch deren 10 weitere Schnittpunkte mit $\Phi^{(4)}$ auch $\Phi^{(6)}$ geht. Diese 10 Punkte und die 5 Doppelpunkte liegen auch auf einer Curve 3^{ter} Ordnung.

Die Abbildungen ergeben sich aus Nr. 3, I durch Zufügung von $L_6(a_1^2 \dots a_7^2)$, zu

- a) $\Phi_{81}^{(6)}$; Bild: $L_7(a_1^3 a_2^2 \dots a_7^2)$, bez. $L_{11}(a_1^3 a_2^4 \dots a_7^4)$.
- b) $\Phi_{1234}^{(6)}$; Bild: $L_8(a_1^3 \dots a_4^3 a_5^2 a_6^2 a_7^2)$, bez. $L_{10}(a_1^3 \dots a_4^3 a_5^4 a_6^4 a_7^4)$.
- c) $\Phi_{12}^{(6)}$; Bild: $L_9(a_1^4 a_2^2 a_3^3 \dots a_7^3)$, bez. $L_9(a_1^2 a_2^4 a_3^3 \dots a_7^3)$.

X. $\Phi^{(6)}$, mit je 5 scheinbaren Doppelpunkten.

Dieselben sind nach Nr. 1 abzuleiten aus Doppeltangentenpaaren, deren Schnittpunkt als scheinbarer Doppelpunkt betrachtet wird; die so entstehenden ∞^{10} -Schaaren sind also einzeln den Schaaren $\Phi^{(4)}$ von Nr. 5, II

zugeordnet. Es gibt deren, wie dort, 6 · 63. Die 12 Berührungspunkte einer solchen Curve $\Phi^{(6)}$ und ihre 5 Doppelpunkte liegen mit den 4 Berührungspunkten des zugehörigen Doppeltangentenpaars und dessen Schnittpunkt (und mit je einem Schnittpunkt der beiden Doppeltangenten mit $\Phi^{(6)}$) auf einer Curve 4^{ter} Ordnung, mit den 8 Berührungspunkten einer zugehörigen $\Phi^{(4)}$ von II Nr. 5 und deren 2 Doppelpunkten auf einer Curve 5^{ter} Ordnung. Die Berührungsgruppen einer ∞^{10} -Schaar von $\Phi^{(6)}$ auf Ω bilden eine ∞^9 -Vollschaar.

Die Abbildungen ergeben sich aus II, Nr. 5 durch Zufügung von $L_3(a_1 \cdots a_7)$ zu

$$a_1) \Phi_{12}^{(6)}; \text{ Bild: } L_6(a_1 a_2 a_3^2 \cdots a_7), \text{ bez. } L_{12}(a_1^5 a_2^5 a_3^4 \cdots a_7); \text{ etc.}$$

XI. $\Phi^{(6)}$, mit je 6 scheinbaren Doppelpunkten.

Dieselben sind nach Nr. 1 einzeln den Schaaren $\Phi^{(4)}$ von III, Nr. 5 zugeordnet, bilden also 16 · 63 ∞^9 -Schaaren, welche aber Ω in Vollschaaren, je 16 in derselben Vollschaar, berühren. Durch die 12 Berührungspunkte einer solchen Curve $\Phi^{(6)}$, durch deren 6 Doppelpunkte, durch die 2 Berührungspunkte irgend einer der Doppeltangenten des zugehörigen Sechssersystems (s. Nr. 5, III) und durch einen Schnittpunkt derselben mit $\Phi^{(6)}$ gehen ∞^2 Curven 5^{ter} Ordnung.

Die Abbildungen erhält man aus III, Nr. 5 wieder durch Zufügung von $L_3(a_1 a_2 \cdots a_7)$ zu

$$a_1) \Phi_{12}^{(6)}; \text{ Bild: } L_5(a_1^2 a_2^2 a_3 \cdots a_7), \text{ bez. } L_{18}(a_1^4 a_2^4 a_3^5 \cdots a_7); \text{ etc.}$$

XII. $\Phi^{(6)}$, mit je 7 scheinbaren Doppelpunkten.

Die Abbildung einer dieser ∞^8 -Schaaren wird:

$$a_1) \Phi_{81}^{(6)}; \text{ Bild: } L_4(a_2 a_3 \cdots a_7), \text{ bez. } L_{14}(a_1^6 a_2^5 \cdots a_7).$$

Diese Schaar ist zunächst der Gruppe [81] zugehörig. Enthalten ist in ihr: 1) t_{81} , verbunden mit einer ∞^7 -Schaar von $\Phi_0^{(5)}$ aus Nr. 5, V, a_1); 2) irgend eine der 6 Doppeltangenten

$$a_1) \quad t_{82}, t_{83}, \cdots t_{87},$$

je verbunden mit einer ∞^6 -Schaar von $\Phi^{(5)}$ aus Nr. 5, VI; 3) irgend eine der 6 Doppeltangenten

$$a_1'') \quad t_{12}, t_{13}, \dots, t_{17},$$

je verbunden mit einer ∞^4 -Schaar von $\Phi^{(5)}$ aus Nr. 5, VIII. Dabei ist t_{81} eine der 16 nicht in [81] enthaltenen Doppeltangenten; $a_1')$ und $a_1'')$ sind die beiden Systeme von 6 Doppeltangenten, welche, mit t_{81} verbunden, zu den 8 Aronhold'schen 7-Systemen gehören, die der geraden Charakteristik [81] $+(81) = (o)$ zugeordnet sind. Da $a_1')$ und $a_1'')$ zu $a_1)$ sich ungleichartig verhalten, erhält man also, zu [81] gehörig, $16 \cdot 2$ Unterschaaren. Im Ganzen gibt es $16 \cdot 2 \cdot 63$ unserer Schaaren.

Man leitet eine solche Schaar nach Nr. 1 dadurch her, dass man von einer zerfallenden Curve 4^{ter} Ordnung, C , mit 4 scheinbaren Doppelpunkten ausgeht; nämlich für $a_1)$ von einer Doppeltangente t_{81} , verbunden mit einer geraden Berührungcurve $\Phi_0^{(3)}$ mit einem scheinbaren Doppelpunkte (Nr. 3, III), wobei auch die 3 Schnittpunkte von t_{81} mit $\Phi_0^{(3)}$ als scheinbare Doppelpunkte zu betrachten sind. Lässt man auch $\Phi_0^{(3)}$ zerfallen in t_{82} und einen von den ∞^1 Berührungskegelschnitten [82], so folgt:

Die 12 Berührungspunkte von $\Phi_{81}^{(6)}$ aus $a_1)$ dieser Nummer liegen mit den 7 Doppelpunkten dieser Curve auf ∞^2 Curven 5^{ter} Ordnung; mit diesen, den 4 Berührungspunkten und dem Schnittpunkte von t_{81} , t_{82} und mit einem Schnittpunkt von t_{82} mit $\Phi_{81}^{(6)}$ auf ∞^1 Curven 5^{ter} Ordnung; diese 2 Punkte mit jenen 7 Doppelpunkten auf ∞^1 Curven 3^{ter} Ordnung.

XIII. $\Phi^{(6)}$, mit je 8 scheinbaren Doppelpunkten.

Die Abbildung einer dieser ∞^7 -Schaaren ist:

$$\Phi_{8123}^{(6)}; \text{ Bild: } L_4(a_1^2 a_4 a_5 a_6 a_7).$$

In derselben sind ausgezeichnet enthalten: t_{82} und t_{83} , je verbunden mit einer ∞^6 -Schaar von Curven $\Phi^{(5)}$ aus VI, Nr. 5. Dies sind zwei in der Gruppe [8123] enthaltene Doppeltangenten, welche aber aus zwei verschiedenen der 6 Paare von [8123] genommen sind. Somit gibt es innerhalb einer Gruppencharakteristik $[\alpha] \frac{6 \cdot 5}{2} \cdot 4 = 60$ verschiedene unserer Schaaren, im Ganzen $60 \cdot 63$ ∞^7 -Schaaren.

Um die obige Schaar mittels Nr. 1 abzuleiten, kann man von einer Curve

$$C = t_{82} \cdot t_{83} \cdot \Phi_{81}^{(2)}$$

ausgehen, indem man die 5 gegenseitigen Schnittpunkte der 3 Curven, aus welchen C besteht, als scheinbare Doppelpunkte von C betrachtet:

Die 12 Berührungspunkte einer $\Phi^{(6)}$, ihre 8 Doppelpunkte, die 4 Berührungspunkte des zugehörigen Doppeltangentenpaars und dessen Schnittpunkt bilden die 25 Basispunkte eines Büschels von Curven 5^{ter} Ordnung; der letztere Punkt liegt mit den acht Doppelpunkten der $\Phi^{(6)}$ auf ∞^1 Curven 3^{ter} Ordnung.

XIV. $\Phi^{(6)}$, mit je 9 scheinbaren Doppelpunkten.

Eine Schaar ist:

$$\Phi_{1234}^{(6)}; \text{ Bild: } L_3(a_5 a_6 a_7).$$

In dieser ∞^6 -Schaar ist ausgezeichnet enthalten: irgend eine der 4 Doppeltangenten

$$t_{81}, t_{82}, t_{83}, t_{84},$$

je verbunden mit einer ∞^5 -Schaar von Curven $\Phi^{(5)}$ aus VII, Nr. 5. Die 4 Doppeltangenten bilden ein Quadrupel derart, dass keine derselben in der Gruppe [1234] vorkommt und irgend drei derselben eine gerade Berührungscurve $\Phi^{(3)}$ bilden. Solcher Quadrupel, [1234] zugeordnet, gibt es $\frac{16 \cdot 15 \cdot 8 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 80$. Es gibt somit $80 \cdot 63$ gleichberechtigte unserer ∞^6 -Schaaren $\Phi^{(6)}$.

Mittels Nr. 1 lässt sich eine solche Schaar aus dem zugehörigen Quadrupel als Curve C ableiten, indem man deren 6 gegenseitige Schnittpunkte als scheinbare Doppelpunkte von C betrachtet:

Die 12 Berührungspunkte einer $\Phi^{(6)}$, ihre 9 Doppelpunkte, die 6 Eckpunkte des aus dem zugehörigen Quadrupel gebildeten Vierseits und die 8 Berührungspunkte dieses Vierseits liegen auf einer Curve 5^{ter} Ordnung; die 9 Doppelpunkte mit jenen 6 Eckpunkten auf einer Curve 3^{ter} Ordnung.

XV. $\Phi^{(6)}$, mit je 10 scheinbaren Doppelpunkten.

Eine ∞^5 -Schaar ist:

$$\Phi_{81}^{(6)}; \text{ Bild: } L_3(a_1 a_2^2).$$

Dieselbe enthält besonders: irgend eine der Doppeltangenten

$$t_{83}, t_{84}, t_{85}, t_{86}, t_{87}, t_{12},$$

je verbunden mit einer ∞^4 -Schaar von $\Phi^{(5)}$ aus VIII, Nr. 5. Die 6 Doppeltangenten, denen unsere Schaar, nach [81], weiter eindeutig zugeordnet ist, bilden eines der in III, Nr. 5 besprochenen Sechserysteme. Es gibt eine einzige Gruppe, [12], welche keine der Doppeltangenten des Sechsersystems enthält; aber zwei verschiedene Gruppen, nämlich ausser [81] auch [82], welche alle 6 Linien des Systems enthalten. Zur Gruppe [81] existiren aber 32 verschiedene Gruppen, welche zu [81] in analoger Beziehung stehen, wie [82].

Somit gibt es $32 \cdot 63$ unserer ∞^5 -Schaaren.

Zur Ableitung einer Schaar nach Nr. 1 kann man ausgehen von einer Curve

$$C = t_{82} \cdot t_{83} t_{84} t_{85} t_{86} t_{87},$$

indem man die 10 Ecken des aus $t_{83} \cdots t_{87}$ gebildeten vollständigen 5-Seits als scheinbare Doppelpunkte von C betrachtet:

Durch die 12 Berührungspunkte und die 10 Doppelpunkte einer $\Phi^{(6)}$, sowie durch die 8 Berührungspunkte von vier Linien des zugehörigen Sechsersystems und deren 6 Schnittpunkte gehen ∞^1 Curven 6^{ter} Ordnung; durch diese 6 Punkte und jene 10 Doppelpunkte ∞^1 Curven 4^{ter} Ordnung.

6. Uneigentliche Berührungsschaaren.

I. Die uneigentlichen, zu $[o]$ gehörenden Berührungscurven sind nur solche von gerader Ordnung, welche vermöge $\Omega_4 = o$ durch doppelt gezählte Curven ersetzt werden können. Indessen gibt es doch darunter ausgezeichnete Schaaren, auf welche ebenfalls die Betrachtungen von Nr. 1 Anwendung finden, und welche der Vollständigkeit halber für $\Psi_0^{(4)}$ und $\Psi_0^{(6)}$ aufgezählt werden sollen.

A. Als $\Psi_0^{(4)}$ hat man so zunächst die Gesamtheit von ∞^6 Berührungscurven 4^{ter} Ordnung:

$$C_2^2 - \lambda \Omega = 0,$$

ohne scheinbare Doppelpunkte; abgebildet durch $L_6(a_1^2 \cdots a_7^2)$; irgend zwei der Curven treffen sich in 8 wirklichen und 8 scheinbaren Schnittpunkten, die je auf einem Kegelschnitt liegen.

B. Darin enthalten sind 63 Unterschaaren, von der Mannigfaltigkeit ∞^3 , von denen jede Schaar Ω so berührt, wie die Paare der Kegelschnitte eines Gruppensystems $[\alpha]$. Nimmt man in einem solchen Paar statt eines der Kegelschnitte den mit ihm im andern Blatte vereinigt liegenden, so erhält man eine ∞^2 -Schaar von $\Psi_0^{(4)}$, je aus zwei Kegelschnitten eines Gruppensystems $[\alpha]$ bestehend, die sich in 4 scheinbaren Schnittpunkten treffen, also $\infty^2 \Psi_0^{(4)}$ mit je 4 scheinbaren Doppelpunkten. Solcher quadratischer ∞^2 -Schaaren gibt es 63; die Berührungsgruppen einer Schaar, einfach genommen, bilden eine lineare ∞^2 -Schaar auf Ω . Die Bilder der 63 Schaaren sind:

a) $\Psi_{0,81}^{(4)}$; Bild: $L_2(a_1^2)$, bez. $L_{10}(a_1^2 a_2^4 \cdots a_7^4)$.

b) $\Psi_{0,1234}^{(4)}$; Bild: $L_4(a_1^2 \cdots a_4^2)$, bez. $L_8(a_1^2 \cdots a_4^2 a_5^4 a_6^4 a_7^4)$.

c) $\Psi_{0,12}^{(4)}$; Bild: $L_6(a_1^4 a_3^2 \cdots a_7^2)$, bez. $L_6(a_2^4 a_3^2 \cdots a_7^2)$.

Ist für das System: $[\alpha]$:

$$C_2 C_2' - B_2^2 \equiv \Omega,$$

wo C_2, C_2', B_2 Kegelschnitte sind, so wird

$$\begin{aligned} (C_2 + 2\lambda B_2 + \lambda^2 C_2')(C_2 + 2\mu B_2 + \mu^2 C_2') - [C_2 + (\lambda + \mu)B_2 + \lambda\mu C_2']^2 &\equiv \\ &\equiv (\lambda - \mu)^2 \Omega. \end{aligned}$$

Hier steht im ersten Term eine beliebige Curve der ∞^2 -Schaar $\Psi_{0,\alpha}^{(4)}$, als deren Parameter $\lambda + \mu, \lambda\mu$ aufzufassen sind. Für $\mu = -\lambda$ folgt daraus, dass die 4 Schnittpunkte von $C_2 = 0, C_2' = 0$ und die 4 Berührungspunkte irgend eines zum selben System gehörigen Kegelschnitts $C_2 + 2\lambda B_2 + \lambda^2 C_2' = 0$ auf einem Kegelschnitt liegen. Dieser bekannte Satz¹⁾ ergibt sich auch als specieller

1) Ein specieller Fall desselben findet sich zuerst bei Hesse, Cr. J. 49, p. 300.

Fall unserer Betrachtungen von Nr. 1, angewandt auf zwei Curven $\Psi_0^{(4)}$ einer Schaar, da man aus denselben unmittelbar schliesst:

Die 8 Berührungspunkte und 4 Schnittpunkte irgend zweier Kegelschnitte eines Systems $[\alpha]$ bilden mit den 4 Berührungspunkten irgend eines dritten Kegelschnitts aus $[\alpha]$ die Basispunkte eines Büschels von Curven 4^{ter} Ordnung. Man hat zu jenem Zweck nur zu beachten, dass die genannten 8 Berührungspunkte auf einem Kegelschnitt liegen.

C. Als $\Psi_0^{(6)}$ hat man zuerst die Gesamtheit der ∞^{12} Curven

$$C_3^2 - Q_1^2 \cdot \Omega = 0$$

mit je drei scheinbaren Doppelpunkten, abgebildet durch $L_9(a_1^3 \cdots a_7^3)$.

D. Sodann hat man 28 verschiedene ∞^9 -Schaaren von Curven $\Psi_{0,\alpha}^{(6)}$ einzeln zugeordnet, ausser $[o]$, den 28 ungeraden Charakteristiken (α) . Jede Curve hat 6 scheinbare Doppelpunkte. Die Abbildungen der Schaaren sind:

a) $\Psi_{0,81}^{(6)}$; Bild: $L_8(a_2^2 \cdots a_7^2)$, bez. $L_{12}(a_1^6 a_2^4 \cdots a_7^4)$.

b) $\Psi_{0,12}^{(6)}$; Bild: $L_8(a_1^4 a_2^4 a_3^2 \cdots a_7^2)$, bez. $L_{10}(a_1^2 a_2^2 a_3^4 \cdots a_7^4)$.

Diese 28 Schaaren sind einzeln auf die 28 Schaaren von ungeraden $\Phi_\alpha^{(3)}$ aus II, Nr. 3 derartig zu beziehen, dass je zwei Curven aus einer Schaar $\Phi_\alpha^{(3)}$ auch eine Curve der entsprechenden $\Psi_{0,\alpha}^{(6)}$ bilden. Daher lässt sich eine Schaar $\Psi_{0,\alpha}^{(6)}$ auch aus einer Curve 4^{ter} Ordnung $\Phi_\alpha^{(3)} \cdot t_\alpha$, wo t_α die zu (α) gehörige Doppeltangente ist, nach Nr. 1 ableiten, indem man die 3 Schnittpunkte von t_α mit $\Phi_\alpha^{(3)}$ als scheinbare Doppelpunkte von $\Psi_\alpha^{(3)} \cdot t_\alpha$ betrachtet.

Die 12 Berührungs- und 6 Doppelpunkte von $\Psi_{0,\alpha}^{(6)}$ liegen mit den 8 Berührungspunkten von $\Phi_\alpha^{(3)} \cdot t_\alpha$ und den drei Schnittpunkten von t_α mit $\Phi_\alpha^{(3)}$ auf einer Curve 5^{ter} Ordnung. Die letzteren 3 Punkte liegen mit den 6 Doppelpunkten von $\Psi_{0,\alpha}^{(6)}$ auf einer Curve 3^{ter} Ordnung, diese 6 Punkte daher auf einem Kegelschnitt.

Durch die genannten $12 + 6$ Punkte von $\Psi_{0,\alpha}^{(6)}$ und die zwei Berührungspunkte von t_α gehen ∞^3 Curven 5^{ter} Ordnung; diese 20 Punkte bilden also den vollständigen Schnitt einer Curve 4^{ter} und 5^{ter} Ordnung. Und da die ersten 12 Punkte auf einer Curve 3^{ter} Ordnung liegen, so

folgt: der Kegelschnitt durch die 6 Doppelpunkte von $\Psi_{0,\alpha}^{(6)}$ geht auch durch die beiden Berührungspunkte von t_α .

Analytisch sei

$$C \equiv t_\alpha \Phi_\alpha^{(3)} = K_2^2 - \Omega;$$

so ist in Nr. 1 zu setzen

$$r = 4, \quad d = 3, \quad s = 5,$$

und

$$P \equiv K_2(t_\alpha S_2 + \lambda \Phi_\alpha^{(3)}) + K_1 \cdot C, \quad Q \equiv t_\alpha S_2 - \lambda \Phi_\alpha^{(3)},$$

wo K_1, S_2 willkürliche Functionen ersten und zweiten Grads. Dann folgt (6), wo

$$C' \equiv (t_\alpha S_2 + \lambda \Phi_\alpha^{(3)})^2 + 2 K_1 K_2 (t_\alpha S_2 + \lambda \Phi_\alpha^{(3)}) + K_1^2 \cdot C + 4 \lambda S_2 \Omega.$$

Für die 6 Doppelpunkte von C' wird $P = 0, Q = 0$, ohne dass $t_\alpha \Phi_\alpha^{(3)}$ oder $S_2 = 0$ dafür 0 wäre; daher folgt dafür

$$2 \lambda K_2 + t_\alpha K_1 = 0,$$

ein auch durch die beiden Berührungspunkte $t_\alpha = 0, K_2 = 0$ von t_α gehender Kegelschnitt.

E. Ferner hat man 63 verschiedene ∞^8 -Schaaren von Curven $\Psi_0^{(6)}$ mit je 7 scheinbaren Doppelpunkten; einzeln nach $[0]$, den 63 Gruppencharakteristiken $[\alpha]$ zugeordnet; mit den Abbildungen:

- a) $\Psi_{0,31}^{(6)}$; Bild: $L_5(a_1^3 a_2 \cdots a_7)$, bez. $L_{13}(a_1^3 a_2^5 \cdots a_7^5)$.
- b) $\Psi_{0,1234}^{(6)}$; Bild: $L_7(a_1^3 \cdots a_4^3 a_5 a_6 a_7)$, bez. $L_{11}(a_1^3 \cdots a_4^3 a_5^5 a_6^5 a_7^5)$.
- c) $\Psi_{0,12}^{(6)}$; Bild: $L_9(a_1^5 a_2 a_3^3 \cdots a_7^3)$, bez. $L_9(a_1 a_2^5 a_3^3 \cdots a_7^3)$.

In einer solchen ∞^8 -Schaar $\Psi_{0,\alpha}^{(6)}$ sind enthalten: die doppeltgezählten Geraden, verbunden mit der vorher genannten ∞^2 -Schaar von $\Psi_{0,\alpha}^{(4)}$, die aus Kegelschnittpaaren $[\alpha]$ besteht. Die ganze Schaar $\Psi_{0,\alpha}^{(6)}$ lässt sich also aus $\Psi_{0,\alpha}^{(4)}$ nach Nr. 1 ableiten, für $r = 4, d = 4, s = 5$:

Die 12 Berührungs- und 7 Doppelpunkte einer $\Psi_{0,\alpha}^{(6)}$ liegen mit den 8 Berührungs- und 4 Schnittpunkten irgend zweier Kegelschnitte des Systems $[\alpha]$ auf einer Curve 5^{ter} Ordnung, diese 4 Schnittpunkte mit jenen 7 Doppelpunkten auf einer Curve 3^{ter} Ordnung.

F. Endlich gibt es $8 \cdot 36$ verschiedene ∞^5 -Schaaren von Curven $\Psi_0^{(6)}$ mit je 10 scheinbaren Doppelpunkten; einzeln den $8 \cdot 36$ Aronhold'schen 7-Systemen von Doppeltangenten zuzuordnen. Die Bilder sind:

- a₁) $\Psi_{0,0}^{(6)}$; Bild: L_2 , bez. $L_{16}(a_1^6 \cdots a_7^6)$,
 a₂) $\Psi_{0,0}^{(6)}$; Bild: $L_8(a_1^6 a_2^2 \cdots a_7^2)$, bez. $L_{10}(a_2^4, \cdots a_7^4)$.
 b₁) $\Psi_{0,8123}^{(6)}$; Bild: $L_4(a_1^2 a_2^2 a_3^2)$, bez. $L_{14}(a_1^4 a_2^4 a_3^4 a_4^6 \cdots a_7^6)$,
 b₂) $\Psi_{0,8123}^{(6)}$; Bild: $L_6(a_1^4 a_4^2 \cdots a_7^2)$, bez. $L_{12}(a_1^2 a_2^6 a_3^6 a_4^4 \cdots a_7^4)$,
 b₃) $\Psi_{0,8123}^{(6)}$; Bild: $L_8(a_1^2 a_2^2 a_3^2 a_4^4 a_5^4 a_6^4)$, bez. $L_{10}(a_1^4 a_2^4 a_3^4 a_4^2 a_5^2 a_6^2 a_7^6)$.

Als ausgezeichnet treten in einer solchen Schaar $\Psi_{0,\alpha}^{(6)}$ auf: die in irgend 2 Curven der zugeordneten Schaar $\Phi_\alpha^{(3)}$ von Nr. 3, III zerfallenden Curven; solche zwei Curven haben 8 scheinbare Schnittpunkte, welche mit den beiden Doppelpunkten der beiden $\Phi_\alpha^{(3)}$ zusammen die 10 scheinbaren Doppelpunkte der speciellen $\Psi_{0,\alpha}^{(6)}$ bilden:

Die 12 Berührungs- und 10 Doppelpunkte einer Curve $\Psi_{0,\alpha}^{(6)}$ liegen mit den 6 Berührungs- und dem Doppelpunkte einer zugeordneten $\Phi_\alpha^{(3)}$ (von III, Nr. 3) und mit 2 Schnittpunkten der $\Phi_\alpha^{(3)}$, $\Psi_{0,\alpha}^{(6)}$ auf ∞^2 Curven 6^{ter} Ordnung; jene 22 Punkte mit den 2 Berührungspunkten irgend einer der 7 Doppeltangenten des zugeordneten 7-Systems auf ∞^4 Curven 6^{ter} Ordnung.

II. Zu uneigentlichen Berührungsschaaren mögen wir auch solche rechnen, welche zwar nicht zu $[o]$, sondern zu einem der übrigen Charakteristikensysteme gehören, aber doch nur aus Curven bestehen, die alle zerfallen. Von den Curven $\Phi^{(6)}$ treten als solche Schaaren noch auf:

Die 63 ∞^3 -Schaaren $\Phi_\alpha^{(6)}$, deren Curven aus je 3 Kegelschnitten einer ∞^1 -Schaar $[\alpha]$ bestehen, den 63 verschiedenen $[\alpha]$ zugeordnet; Curven mit je 12 scheinbaren Doppelpunkten. Die Abbildungen sind:

- a) $\Phi_{81}^{(6)}$; Bild: $L_3(a_1^3)$, bez. $L_{15}(a_1^3 a_2^6 \cdots a_7^6)$,
 b) $\Phi_{1234}^{(6)}$; Bild: $L_6(a_1^3 \cdots a_4^3)$, bez. $L_{12}(a_1^3 \cdots a_4^3 a_5^6 a_6^6 a_7^6)$.
 c) $\Phi_{12}^{(6)}$; Bild: $L_9(a_1^6 a_3^3 \cdots a_7^3)$, bez. $L_9(a_2^6 a_3^3 \cdots a_7^3)$.

Die 12 Berührungs- und 12 gegenseitigen Schnittpunkte von irgend drei Kegelschnitten eines Systems $[\alpha]$ liegen mit den 4 Berührungspunkten irgend eines vierten Kegel-

schnitts desselben Systems $[\alpha]$ auf ∞^2 Curven 6^{ter} Ordnung, mit den 8 Berührungs- und 4 Schnittpunkten irgend zweier Kegelschnitte von $[\alpha]$ auf ∞^1 Curven 6^{ter} Ordnung, mit den 12 Berührungs- und 12 Schnittpunkten irgend dreier Kegelschnitte von $[\alpha]$ auf einer Curve 6^{ter} Ordnung. Die 12 Schnittpunkte von irgend dreien der Kegelschnitte aus $[\alpha]$ bilden mit den 4 Schnittpunkten von irgend zweien der Kegelschnitte aus $[\alpha]$ die Basispunkte von ∞^1 Curven 4^{ter} Ordnung, und liegen mit den 12 Schnittpunkten von irgend drei andern der Kegelschnitte $[\alpha]$ auf einer Curve 4^{ter} Ordnung.

7. Spezielle Schnittpunktsätze.

I. Die Betrachtungen von Nr. 3 führen, nach Nr. 1, nur auf bekanntere Schnittpunktsätze. Nimmt man zuerst in Nr. 1: $r = 1$, $s = 2$ und lässt die Curve C_1' bez. C_2' , von (15) Nr. 1 in je 3 Doppeltangenten zerfallen, so hat man nach den dortigen Sätzen oder dieser Gleichung (15): von den 9 Schnittpunkten von C_1' mit C_2' sind 6 scheinbare auf einem Kegelschnitte, 3 wirkliche auf einer Geraden gelegen. Genaueres liefert die Abbildung in Nr. 3, II:

Es gibt (5040) verschiedene 6-Systeme von ungeraden Charakteristiken

$$(\alpha), (\beta); (\alpha_1), (\beta_1); (\alpha_2), (\beta_2)$$

der Art, dass die Summe aller 6 zu 0 wird, die Summe von dreien aber 2 · 4 mal ungerade, 2 · 6 mal gerade wird. Die geraden Combinationen seien hier:

$$(\alpha \beta \alpha_1), (\alpha \beta \beta_1), (\alpha \beta \alpha_2), (\alpha \beta \beta_2); (\alpha_1 \beta_1 \alpha), (\alpha_1 \beta_1 \beta),$$

die ungeraden:

$$(\alpha \alpha_1 \alpha_2), (\alpha \alpha_1 \beta_2), (\alpha \beta_1 \alpha_2), (\alpha \beta_1 \beta_2);$$

man theile die 6 Charakteristiken in 3 Paare, wie oben, was nur auf eine Weise geht; dann liegen die 3 Schnittpunkte von t_α mit t_β ; von t_{α_1} mit t_{β_1} ; von t_{α_2} mit t_{β_2} auf einer Geraden, die 6 übrigen Schnittpunkte der beiden perspectivischen Dreiecke

$$t_\alpha t_{\alpha_1} t_{\alpha_2}, t_\beta t_{\beta_1} t_{\beta_2},$$

also von t_a mit $t_{\beta_1}t_{\beta_2}$, von t_{a_1} mit $t_{\beta}t_{\beta_2}$, von t_{a_2} mit $t_{\beta}t_{\beta_1}$, auf einem Kegelschnitt. (Hesse, Cr. J. Bd. 55.)

In dem obigen 6-System kann man die 2 ersten Paare willkürlich als 4 Doppeltangenten aus irgend einem Aronhold'schen 7-System wählen, wonach das dritte Paar bestimmt ist (Aronhold, a. c. O.).

Nimmt man aber in Nr. 1 für C und C' zwei gerade, in je 3 Doppeltangenten zerfallende Berührungscurven aus einer Schaar von III, Nr. 3, z. B. mit der vorstehenden Bedeutung die beiden Curven

$$C = t_a t_{\beta} t_{a_1}, \quad C' = t_{\beta_1} t_{a_2} t_{\beta_2},$$

so müssen die scheinbaren Doppelpunkte $t_a = t_{\beta} = 0$ von C , $t_{a_2} = t_{\beta_2} = 0$ von C' und der wirkliche Schnittpunkt $t_{a_1} = t_{\beta_1} = 0$ von C mit C' auf einer Geraden liegen: was nur wieder der vorhergehende Satz ist. Aber es folgt weiter:

Die 12 Berührungspunkte unseres Systems von 3 Doppeltangentenpaaren liegen mit den 3 Doppelpunkten dieser Paare auf einer Curve 3^{ter} Ordnung.¹⁾

II. Hat man ein Sechssystem von Doppeltangenten der Art III, Nr. 5, nämlich

$$t_{a_1}, t_{a_2}, \dots, t_{a_6},$$

wo $[\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_6] = 0$ und die Summe von irgend drei der 6 ungeraden Charakteristiken $\alpha_1, \dots, \alpha_6$ gerade ist (es gibt 1008 solcher Systeme), so hat man für zwei Curven

$$C = t_{a_1} t_{a_2} t_{a_3}, \quad C' = t_{a_4} t_{a_5} t_{a_6}$$

eine Gleichung

$$CC' - B^2 = \Omega \cdot K,$$

wo aber K kein vollständiges Quadrat wird, weil C und C' nicht Curven einer Schaar von III, Nr. 3 sind. Daher umhüllen jene 6 Doppeltangenten einen Kegelschnitt K (Hesse, Cr. J. 55); daraus folgt weiter nach einem bekannten Kegelschnittsatze, dass die drei Eckpunkte des Dreiecks $t_{a_1} t_{a_2} t_{a_3}$ mit den drei Eckpunkten des Dreiecks $t_{a_4} t_{a_5} t_{a_6}$ auf einem Kegelschnitt liegen.

1) De Paolis, a. c. O. Nr. 41.

Dasselbe schliesst man auch aus Nr. 5, III, indem man diese Eckpunkte je zu den 3 scheinbaren Doppelpunkten von zwei der dortigen rationalen Berührungscurven einer Schaar $\Phi^{(4)}$ nimmt. So wähle man etwa aus a₁) III, Nr. 5 die beiden Curven

$$C_4 = t_{83} t_{84} t_{85} \cdot t_{67}, \quad C'_4 = t_{86} t_{87} t_{12} \cdot t'_{67};$$

wobei t_{67} und t'_{67} in beiden Blättern übereinanderlaufen; dann liegen die 3 Eckpunkte von $t_{83} t_{84} t_{85}$ mit denen von $t_{86} t_{87} t_{12}$ auf einem Kegelschnitt. Aber dieser Kegelschnitt geht auch durch die zwei wirklichen Schnittpunkte von C_4 mit C'_4 , welche hier in die von t_{67} mit t'_{67} übergehen, d. h. in die beiden Berührungspunkte der Doppeltangente t_{67} . Verallgemeinert man dieses, so lässt sich also der obige Satz von II dahin ergänzen:

Theilt man ein Sechsersystem $(\alpha_1), \dots, (\alpha_6)$ von 6 ungeraden Charakteristiken, deren Summe = 0 und deren Combinationen zu drei alle gerade sind, irgend wie in zwei Theile

$$(\alpha_1), (\alpha_2), (\alpha_3); (\alpha_4), (\alpha_5), (\alpha_6),$$

so gibt es nur eine ungerade Charakteristik (α) , welche mit irgend zwei Charakteristiken des ersten Theils oder mit irgend zwei des zweiten Theils verbunden Gerades, mit irgend einer der Charakteristiken des ersten und irgend einer des zweiten Theils zugleich verbunden Ungerades liefert. Durch die 3 Eckpunkte von $t_{\alpha_1} t_{\alpha_2} t_{\alpha_3}$ und die 3 Eckpunkte von $t_{\alpha_4} t_{\alpha_5} t_{\alpha_6}$ geht ein Kegelschnitt, welcher auch durch die Berührungspunkte von t_α geht.

Durch dieselben 6 Punkte und durch die 12 Berührungspunkte der beiden Dreiecke geht auch eine Curve 4^{ter} Ordnung, welche Ω_4 in den beiden Berührungspunkten von t_α berührt und welche an jeder der 6 Ecken harmonisch läuft zu jenem Kegelschnitt und dem diese Ecke bildenden Doppeltangentenpaar.

Derselbe Satz ergibt sich endlich auch aus dem Satze von Nr. 6, I D, wenn man eine dortige $\Psi_{0,\alpha}^{(6)}$ in eines unserer Sechsersysteme zerfallen lässt; etwa aus einer dortigen Schaar b) die Curve

$$t_{83} t_{84} t_{85} \cdot t_{86} t_{87} t_{12}$$

herausnimmt, deren Bild wird:

$$\Psi_{0,67}^{(6)}: L_8(a_1^2 a_2^2 a_3^3 a_4^3 a_5^4 a_6^4 a_7^4) = a_3 \cdot a_4 \cdot a_5 \cdot L_3(a_1 \cdots a_6 a_7^2) L_3(a_1 \cdots a_5 a_6^2 a_7) L_2(a_3 \cdots a_7).$$

III. Man lasse in III, Nr. 3 die gerade Curve $\Phi_a^{(3)}$ in 3 Doppeltangenten zerfallen, so liefert der dortige Satz:

Nimmt man irgend 2 Paare von Doppeltangenten

$$t_\alpha, t_\beta; t_{\alpha_1}, t_{\beta_1},$$

derart, dass

$$(\alpha \beta \alpha_1), (\alpha \beta \beta_1)$$

gerade, aber

$$(\alpha \alpha_1 \beta_1), (\beta \alpha_1 \beta_1)$$

ungerade sind, so gehen die ∞^1 Curven 3^{ter} Ordnung, welche man durch die 8 Berührungspunkte der 4 Doppeltangenten legen kann, auch durch den Schnittpunkt von t_α mit t_β .

Noch allgemeiner hat man nach dem Satze von Nr. 5, I:

Seien t_α und t_β irgend zwei Doppeltangenten, und $\Phi_\gamma^{(2)}$ ein Berührungskegelschnitt, der zu irgend einer Gruppe $[\gamma]$ gehört, für welche

$$(\gamma \alpha) \text{ und } (\gamma \beta)$$

ungerade sind und $[\gamma \alpha \beta]$ verschieden von 0; so gehen die ∞^1 Curven 3^{ter} Ordnung, welche man durch die 8 Berührungspunkte von t_α , t_β , $\Phi_\gamma^{(2)}$ legen kann, auch durch den Schnittpunkt von t_α mit t_β .

IV. Aus Nr. 3, III und Gleichung (6) von Nr. 1 folgt:

Sollen drei Gerade, t_α , t_β , t_{α_1} , eine gerade Berührungscurve an eine Curve 4^{ter} Ordnung, Ω_4 , bilden, so können die 3 · 2 Berührungspunkte nicht willkürlich auf denselben angenommen werden; aber es genügt, durch den Schnittpunkt $S_{\alpha\beta}$ von t_α und t_β und durch einen beliebigen Punkt S_{α_1} von t_{α_1} eine Curve 3^{ter} Ordnung zu legen, welche in $S_{\alpha\beta}$ harmonisch läuft zur Geraden $(S_{\alpha\beta} S_{\alpha_1})$ und zum Paar $t_\alpha t_\beta$, und für die 6 Punkte den weiteren Schnitt dieser Curve 3^{ter} Ordnung mit $t_\alpha t_\beta t_{\alpha_1}$ zu nehmen.

Der weitere Schnittpunkt von $(S_{\alpha\beta} S_{\alpha_1})$ mit dieser Curve 3^{ter} Ordnung, $P = o$, ist dann der Doppelpunkt einer Curve 3^{ter} Ordnung, welche Ω_4 in den weiteren 6 Schnittpunkten von Ω_4 und P berührt.

V. Aus Nr. 5, III entnimmt man:

a) Man habe fünf Doppeltangenten

$$t_\alpha, t_\beta; t_\gamma, t_\delta; t_\varepsilon$$

derart, wie

$$t_{81}, t_{82}; t_{24}, t_{13}; t_{85},$$

nämlich so, dass

$$(\alpha\beta\gamma), (\alpha\beta\delta), (\alpha\delta\varepsilon), (\beta\gamma\varepsilon), (\gamma\delta\varepsilon)$$

ungerade,

$$(\alpha\beta\varepsilon), (\alpha\gamma\delta), (\beta\gamma\delta), (\alpha\gamma\varepsilon), (\beta\delta\varepsilon), (\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon)$$

aber gerade sind; so gehen durch die 10 Berührungspunkte derselben und durch die 3 Schnittpunkte von t_α mit t_β , von t_α mit t_γ und von t_β mit t_δ ∞^2 Curven 4^{ter} Ordnung. (Auch nach Nr. 5, V.)

Ferner:

b) Sind 5 Doppeltangenten

$$t_{\alpha'}, t_\beta, t_{\gamma'}; t_\delta, t_\varepsilon,$$

derart, dass

$$(\delta'\varepsilon'\alpha'), (\delta'\varepsilon'\beta'), (\delta'\varepsilon'\gamma')$$

ungerade, die übrigen Combinationen zu 3 und die zu 5 gerade sind (wie $t_{85}, t_{86}, t_{87}; t_{12}, t_{34}$), so gehen durch die 10 Berührungspunkte derselben und durch die Ecken des Dreiecks $(t_{\alpha'} t_\beta t_{\gamma'})$ ∞^2 Curven 4^{ter} Ordnung.

c) Nimmt man 2-4 Doppeltangenten

$$t_\alpha, t_\beta, t_\gamma, t_\delta; t_{\alpha'}, t_{\beta'}, t_{\gamma'}, t_{\delta'}$$

derart wie

$$(\alpha) = (81), (\beta) = (82), \gamma = (24), \delta = (13),$$

$$(\alpha') = (85), (\beta') = (86), \gamma' = (87), \delta' = (12),$$

so liegen deren 16 Berührungspunkte mit den 3 Schnittpunkten $(t_\alpha t_\beta), (t_\alpha t_\gamma), (t_\beta t_\delta)$ und den Ecken des Dreiecks $(t_{\alpha'} t_{\beta'} t_{\gamma'})$ auf einer Curve 4^{ter} Ordnung. Die letzten 3 Ecken liegen

mit den 5 aufeinanderfolgenden Ecken des unvollständigen Fünfsseits $(t_\gamma t_\alpha t_\beta t_\delta t_\gamma)$ auf einem Kegelschnitt.

Der letzte Theil des Satzes ergibt sich auch aus Nr. 5, V, VII oder X.

d) Nimmt man aber 2-4 Doppeltangenten jener ersten Art:

$$t_{81}, t_{82}, t_{24}, t_{13}; t_{86}, t_{34}, t_{83}, t_{36},$$

so liegen deren 16 Berührungspunkte mit den 6 Schnittpunkten

$$(t_{81} t_{82}), (t_{81} t_{24}), (t_{82} t_{13}); (t_{86} t_{34}), (t_{86} t_{83}), (t_{34} t_{36})$$

auf einer Curve 4^{ter} Ordnung; und die 8 aufeinanderfolgenden Ecken des unvollständigen Achtseits

$$(t_{24} t_{81} t_{82} t_{13} t_{83} t_{86} t_{34} t_{36} t_{24})$$

auf einem Kegelschnitt (das Achtseit ist dadurch ausgezeichnet, dass je drei aufeinanderfolgende Linien zusammen eine ungerade Berührungscurve 3^{ter} Ordnung bilden, zugehörig zu einer im Achtseit nicht vorkommenden Doppeltangente).

e) Von 6 Doppeltangenten der Art:

$$t_{81}, t_{82}, t_{24}, t_{13}; t_{85}, t_{86}$$

liegen die 12 Berührungspunkte mit den 4 Schnittpunkten

$$(t_{81} t_{82}), (t_{81} t_{24}), (t_{82} t_{13}), (t_{85} t_{86})$$

auf ∞^1 Curven 4^{ter} Ordnung. Ebenso liegen die 12 Berührungspunkte der 6 Doppeltangenten der Art

$$t_{85}, t_{86}, t_{87}; t_{12}; t_{81}, t_{82}$$

mit den 4 Schnittpunkten

$$(t_{85} t_{86}), (t_{85} t_{87}), (t_{86} t_{87}); (t_{81} t_{82})$$

auf ∞^1 Curven 4^{ter} Ordnung (auch nach § 5, VI, zu schliessen).

VI. Aus Nr. 5, V folgt, indem man zwei Curven einer Schaar in je 5 Doppeltangenten zerfallen lässt:

10 Doppeltangenten der Art:

$$t_{81}, t_{82}, t_{24}, t_{13}, t_{34}; t_{86}, t_{87}, t_{27}, t_{16}, t_{12}$$

haben die Eigenschaft, dass folgende 15 Schnittpunkte (je 3 auf einer derselben)

$$\begin{aligned} & (t_{81} t_{82}), (t_{81} t_{24}), (t_{81} t_{16}), (t_{82} t_{13}), (t_{82} t_{27}), \\ & (t_{24} t_{16}), (t_{24} t_{12}), (t_{16} t_{87}), (t_{13} t_{12}), (t_{13} t_{27}), \\ & (t_{27} t_{86}), (t_{12} t_{34}), (t_{87} t_{34}), (t_{87} t_{86}), (t_{86} t_{34}), \end{aligned}$$

auf einer Curve 3^{ter} Ordnung liegen. Dieselben 15 Punkte liegen mit den 20 Berührungspunkten der 10 Doppeltangenten auf einer Curve 5^{ter} Ordnung.

VII. Aus Nr. 5, VIII erhält man, indem man die beiden Curven einer Schaar

$$t_{81}, t_{82}, t_{83}, t_{84}, t_{87}; t_{85}, t_{86}, t_{87}, t_{56}, t_{57}$$

betrachtet, folgendes sich auf 2 Aronhold'sche Systeme mit denselben 4 Doppeltangenten beziehenden Satz:

a) Die 6 Ecken des vollständigen Vierseits $(t_{81} t_{82} t_{83} t_{84})$ liegen mit den 6 Ecken der beiden Dreiecke $(t_{85} t_{86} t_{87})$ und $(t_{87} t_{57} t_{56})$ und mit den 3 Schnittpunkten

$$(t_{85} t_{87}), (t_{86} t_{57}), (t_{87} t_{56}),$$

auf einer Curve 3^{ter} Ordnung; diese 15 Punkte mit den 20 Berührungspunkten der 10 Doppeltangenten auf einer Curve 5^{ter} Ordnung.

(Die beiden Dreiecke und die genannten 3 Schnittpunkte begründen gerade eine bekannte Grassmann'sche Erzeugung der Curve 3^{ter} Ordnung.)

b) Von den 8 Doppeltangenten

$$t_{81}, t_{82}, t_{83}; t_{85}, t_{86}, t_{87}; t_{56}, t_{57}$$

liegen die 3 Ecken des ersten Dreiecks mit den 6 Schnittpunkten

$$(t_{85} t_{86}), (t_{85} t_{87}), (t_{86} t_{87}), (t_{86} t_{57}), (t_{87} t_{56}), (t_{56} t_{57})$$

auf ∞^1 Curven 3^{ter} Ordnung; diese 9 Punkte mit den 16 Berührungspunkten der 8 Linien auf ∞^1 Curven 5^{ter} Ordnung.

c) Derselbe Satz gilt, wenn man statt der Linie t_{56} die Linie t_{46} setzt und statt der letzten zwei Schnittpunkte:

$$(t_{85} t_{46}), (t_{87} t_{46}).$$

d) Derselbe Satz gilt auch für die 8 Doppeltangenten der Art:

$$t_{81}, t_{82}, t_{13}, t_{12}, t_{24}; t_{86}, t_{87}; t_{67},$$

wenn man die 9 Schnittpunkte nimmt:

$$(t_{81} t_{82}), (t_{82} t_{13}), (t_{13} t_{12}), (t_{12} t_{24}), (t_{24} t_{81}); (t_{86} t_{87}); (t_{67} t_{13}), (t_{67} t_{12}), (t_{67} t_{24}),$$

wie auch aus V, c) dieser Nummer folgt.

e) Aus Nr. 5, XII oder XIV, als Ergänzung von a):

Derselbe Satz b) gibt auch für die 8 Doppeltangenten der Art:

$$t_{81}, t_{82}, t_{83}, t_{84}; t_{85}, t_{86}, t_{57}, t_{56},$$

wenn man als 9 Schnittpunkte die 6 Ecken des vollständigen Vierseits $(t_{81} t_{82} t_{83} t_{84})$ und die drei Punkte

$$(t_{85} t_{86}), (t_{86} t_{57}), (t_{57} t_{56})$$

nimmt.

Derselbe Satz liesse sich noch für verschiedene anderartige Combinationen von 8 Doppeltangenten, als b) · e), aussprechen, wie viele Fälle von Nr. 5 und Nr. 6 durch geeignete Spezialisierung zeigen.

VIII. Man lasse in Nr. 6, I, F. eine der Curven 6^{ter} Ordnung $\Psi_0^{(6)}$ in eines der Sechtersysteme von Nr. 5, III:

$$t_{83}, t_{84}, t_{85}, t_{86}, t_{87}, t_{12}$$

zerfallen; eine zweite Curve derselben Schaar in

$$t_{81}, t_{82}, t_{12},$$

verbunden mit einer ∞^2 -Schaar von $\Phi^{(3)}$ aus Nr. 3, III; so ergibt sich:

Die 10 Ecken des vollständigen Fünfeits $(t_{83} t_{84} \dots t_{87})$ liegen mit dem Schnittpunkt $(t_{81} t_{82})$ und mit den beiden Berührungspunkten von t_{12} mit Ω_4 auf ∞^2 Curven 4^{ter} Ordnung. Folglich gehen auch durch die 6 Ecken des vollständigen Vierseits $(t_{83} t_{84} t_{85} t_{86})$, durch den Schnittpunkt $(t_{81} t_{82})$ und durch die beiden Berührungspunkte von t_{12} ∞^1 Curven 3^{ter} Ordnung.

Diese Beispiele mögen genügen, um die leichte und noch weit auszudehnende Anwendbarkeit unserer Methode aufzuweisen.

Noether, M., zur Theorie der Berührungscurven der ebenen Curve vierter Ordnung. München, 1889. Franz in Comm. (48 S. 4.) *M.* 1, 50.

Seit Veröffentlichung der Arbeiten von Hesse und Steiner im 49. und 55. Bande des Crelle'schen Journals sind die allgemeinsten quadratischen Systeme von Curven n ter Ordnung, welche eine gegebene ebene Curve vierter Ordnung Ω an allen Schnittstellen in erster Ordnung berühren, Gegenstand der Untersuchung verschiedener Geometer gewesen. Insbesondere hat Clebsch im dritten Bande der Mathematischen Annalen bezüglich der Systeme solcher Berührungscurven dritter Ordnung, für welche die je sechs Berührungspuncte nicht auf einem Kegelschnitt liegen, auf bemerkenswerthe quadratische Untersysteme aufmerksam gemacht, und Noether hat in den Berichten der Erlanger physikalisch-medicinischen Societät 1878 angedeutet, daß solche Untersysteme auch bei allen höheren Systemen von Berührungscurven von Ω vorhanden sind. Derselbe hat auch dort eine unmittelbar ausdehnbare Methode zur Auffindung der Unterschaaren von Curven dritter Ordnung gegeben, um die von Clebsch angegebene Abbildbarkeit der Doppalebene, welche Ω als Uebergangscurve hat, auf die einfache Ebene nachzuweisen. Damit waren alle Mittel zur Untersuchung dieser bemerkenswerthen Untersysteme gegeben. Gleichwohl hat eine solche Untersuchung bis jetzt gefehlt, und der Verf. giebt daher in der vorliegenden Abhandlung zunächst eine systematische Behandlung der Theorie der erwähnten Systeme mit einer Reihe von Ausführungen im Anschluß an die Abbildung der Doppalebene. Außerdem aber giebt er eine vollständige algebraische Begründung der Charakteristikentheorie, welche zu den Ω in erster Ordnung berührenden Curven gehört, während diese Theorie bisher entweder aus transcendenten Beziehungen abgeleitet oder, wenn algebraisch, nur unvollständig begründet worden ist.