Ueber die

Grundlagen der Bestimmungsmethode

des

longitudinalen Elastizitätsmoduls.

Von

Andreas Miller.

Aus den Abhandlungen der k. bayer. Akademie der Wiss. II. Cl. XVI. Bd. III. Abth.

München 1888.

Verlag der k. Akademie

in Commission bei G. Franz.

37

Miller, Andreas, **über die Grundlagen der Bestimmungsmethoden** des longitudinalen Elasticitätsmoduls. München, 1888. Franz in Comm. (58 S. 4.) *M.* 1, 70.

Die Abweichungen in den von verschiedenen Beobachtern bestimmten Zahlenwerthen des longitudinalen Elasticitätsmoduls veranlaßten den Verf., die Grundlagen der Bestimmungsmethoden dieses Moduls einer Prüfung zu unterziehen. Er zeigt zunächst, daß gewisse, bei den Versuchen gemachte Voraussetzungen nicht zutreffend sind, erläutert, unter Berufung auf früher von ihm veröffentlichte Abhandlungen, den zu den Beobachtungen verwendeten Apparat und kommt sodann zu den Beobachtungen selbst und zu deren Berechnung. Das Ergebniß wird in 19 Sätzen zusammengefaßt, von denen am bemerkenswerthesten sind 1) daß durch wiederholtes An- und Abspannen eines bereits gespannten Drahtes ein vorübergehend vollkommen elastischer Zustand hergestellt werden kann; 2) daß selbst in diesem Zustande das Proportionalitätsgesetz nicht genau zutrifft. In einem Anhange wird die Theorie des zu den Versuchen verwendeten Apparates näher ausgeführt.

0007-1548

§ 1. Einleitung.

Die Abweichungen, welche in den Zahlenwerten des longitudinalen Elastizitätsmoduls (E—M) sich nicht nur bei verschiedenen Individuen derselben Substanz, sondern selbst bei dem nämlichen Versuchsobjekt zuweilen ergeben, dürften eine Prüfung der Grundlagen der Bestimmungsmethode dieses Moduls nicht nur rechtfertigen, sondern sie in Anbetracht der hervorragenden Bedeutung und Wichtigkeit, welche der Modul auch in der theoretischen Physik erlangt hat, sogar geboten erscheinen lassen.

Arbeiten, die ich über die Dehnungselastizität von Metalldrähten und fadenförmigen organischen Materien früher ausgeführt habe, brachten mich zu der Ueberzeugung, dass das in den physikalischen Handbüchern beschriebene Verfahren zur Bestimmung des longitudinalen E—M nicht dazu geeignet ist, Werte desselben zu liefern, die seiner Definition entsprechen. Selbst bei wiederholten Versuchen an dem gleichen Individuum und unter sonst gleichen Umständen zeigen sich für den Dehnungsmodul der Elastizität Abweichungen in dessen Zahlenwerten von solchem Betrage, dass man Bedenken haben kann, ob das übliche Verfahren zur Bestimmung dieses Moduls auf sicherer Grundlage beruht. Diese Erscheinungen treten um so mehr hervor, je verfeinerter die Mittel sind, deren man sich zur Messung bedient. Auch die Tabellen der anerkannt höchst schätzbaren Untersuchungen von G. Wertheim [1]) über die Elastizität liefern in erklecklicher Anzahl Beispiele zu dem Gesagten. Gleichwohl finden heute noch die Angaben von Wertheim über den Wert des Dehnungsmoduls selbst in theoretischen Problemen ausschliesslich Ver-

1) Wertheim, Annalen d. Physik u. Chemie. Ergänzungsbd. II. 1848.

wendung. Vielleicht liefert vorliegende Untersuchung genügende Anhaltspunkte, ein Verfahren zur Bestimmung des longitudinalen E—M anzubahnen, wodurch die elastische Reaktion der Körper mit jener Exaktheit gemessen werden könnte, die anzustreben der heutige Stand der theoretischen Physik wohl erfordern dürfte.

§ 2. Voraussetzungen bei dem üblichen Verfahren.

Dem üblichen Verfahren zur Bestimmung des longitudinalen E—M liegen u. a. auch folgende Annahmen zu grunde:

1) es diene die ständige oder Anfangsbelastung nur zum Geradehalten des Drahtes und sei von keinem Einflusse auf die Grösse der elastischen Reaktion der durch die Dehnung erregten inneren Kräfte; d. i. der E—M sei unabhängig von der anfänglichen Spannung des Körpers;

2) es setzt voraus, das elastische Verhalten einer Substanz entspreche bei konstanter Temperatur genau dem Proportionalitätsgesetze;

3) nimmt es keine Rücksicht auf die Aenderungen, welche die Elastizität während der Dehnung des Körpers erfährt.

Die Voraussetzungen, deren in Ziffer 1) und 2) gedacht ist, treffen nicht zu. Was den ersten Punkt anlangt, so habe ich dies schon in einer früheren Abhandlung [1]) bewiesen und er soll hier in quantitativer Hinsicht noch genauer studiert werden. Der zweite Punkt soll hier seine, wenigstens teilweise Erledigung finden. Anlangend den dritten Punkt, so wird allerdings in den Handbüchern die Vorschrift gegeben, dass man sich nach jeder Entlastung des Körpers zu überzeugen habe, ob der gedehnte Stab oder Draht seine frühere Länge wieder annehme. Allein letzteres trifft selbst für ganz geringe Dehnungen erst nach verhältnissmässig langer Zeit — Stunden, Tagen, Wochen — wieder ein, ein Umstand, der bei Anwendung nicht hinlänglich feiner Messvorrichtungen freilich entgehen kann. Ueberdies ist eine sichere Kontrolle hierüber wegen der Wirkung selbst kleiner Temperaturänderungen ziemlich schwierig.

---

1) A. Miller, Sitzungsbericht der math.-physikal. Klasse der k. b. Akademie der Wissenschaften. 1885. Heft 1.

NB. (1885. Heft 1.) soll in Zukunft dieses Zitat ersetzen.

§ 3. Vollkommene Elastizität.

Ein vollkommen elastischer Körper ist ein solcher, welcher, wenn er in irgend einen Deformationszustand gebracht ist, zu allen Zeiten denselben Zwang [1]) erfordert, um in diesem Zustande zu bleiben, wie lange er auch deformiert geblieben sein mag, oder wie schnell er auch aus einem Zustande anderer Deformation oder aus seinem undeformierten Zustande in den betrachteten Zustand versetzt sein mag.

Der longitudinale E—M eines vollkommen elastischen Körpers ist somit eine von der Zeit unabhängige Funktion der Grösse der Gestaltsänderung und der deformierenden Kraft. Wenn somit auch der gedehnte Körper nach Verlauf einer gewissen Zeit seine frühere Gestalt wieder vollkommen annimmt, so entspricht das übliche Verfahren zur Bestimmung des longitudinalen E—M doch nicht der ihm zu grunde liegenden Definition. Um dieser zu genügen, darf bei der Messung der Dehnung nur jener Teil derselben in Rechnung genommen werden, welcher der zunehmenden Belastung augenblicklich folgt, und der mit ihrer sofortigen Abnahme auch unverzüglich wieder verschwindet.

§ 4. Ueberführung eines Drahtes in den vollkommen elastischen Zustand.

Versuche, die ich [2]) vor mehreren Jahren mit Eisendrähten anstellte, haben gezeigt, dass man durch etwa 5 malige ununterbrochene An- und Abspannung eines Körpers diesen in einen Zustand versetzen kann, in dem er sich vorübergehend wie ein vollkommen elastischer Körper verhält; d. h. der Draht nimmt nach etwa der 4. und jeder folgenden Entlastung sofort jene Länge wieder vollkommen an, die er vor der vorhergehenden Belastung besass. Dies hat sich auch bei allen anderen Metallen, Legierungen und organischen Substanzen herausgestellt, auf welche ich später die Untersuchung ausdehnte (1885. Heft 1.).

---

1) Thomson u. Tait, Handbuch der theoretischen Physik. II. Teil. S. 193. § 658.

2) A. Miller, Sitzungsbericht der math.-physik. Klasse d. k. b. Akademie der Wissenschaften. 1882. Heft 4.

NB. (1882. Heft 4.) soll in Zukunft dieses Zitat ersetzen.

§ 5. Der Apparat.

Der Apparat, den ich zu den im vorigen Paragraphen erwähnten Versuchen angewendet habe, und mit welchem ich auch die dieser Abhandlung zu grunde liegenden Messungen ausführte, ist in den Aufsätzen (1882. Heft 4.) und (1885. Heft 1.) genau beschrieben und gezeichnet. Eine nähere Beschreibung desselben kann ich daher hier füglich unterlassen und mich auf kurze Andeutungen beschränken. (Siehe Fig. im Anhange.)

Er besteht aus einem ungleicharmigen eisernen Hebel (Schnellwage), der auf indifferentes Gleichgewicht gestellt werden konnte und es auch bei allen Versuchen war. Der Hebel war bei jedem Versuch in einem Punkte ständig belastet und konnte durch Drehung einer vertikalen Schraubenspindel, auf welcher ein Tischchen befestigt war, ohne Stösse auch mit einer Mehrbelastung versehen werden. An drei Thermometern konnte die Temperatur des untersuchten Drahtes und des Apparates, dessen Dimensionen gegen den Querschnitt des ersteren sehr gross waren, mit hinlänglicher Genauigkeit gemessen werden. Die Ablesevorrichtung bestand in einem Spiegel mit Skala, die ca. 0,001 mm der wirklichen Längenveränderung des Drahtes mit ziemlicher Sicherheit zu beobachten gestattete. Ein Kathetometer hätte die hier nötige Genauigkeit der Messung nicht zugelassen. Der Nullpunkt der Skala lag mit der Fernrohrachse in einer horizontalen Ebene. Der zu prüfende Draht ging bei diesen Versuchen durch eine ca. 1 cm weite Glasröhre, um vor plötzlichen Temperaturänderungen geschützt zu sein. In diese Glasröhre ragte das Gefäss eines der drei oben erwähnten Thermometer. Um jede seitliche Spannung des Drahtes, die erhebliche Fehler verursachen könnte, zu vermeiden, war die Röhre oben und unten nur mit Wolle, durch die der Draht lose ging, geschlossen.

§ 6. Beobachtungsweise.

Diese war die gleiche, wie sie bei den in (1885. Heft 1.) ausgeführten Versuchen, sowie in einer anderen derartigen Arbeit[1]) von mir eingehalten worden ist. Nachdem der Draht bleibend gestreckt worden

1) A. Miller, Abhandlungen der k. b. Akademie der Wissenschaften II. Cl. XV. Bd. III. Abteil. NB. (II. Cl. XV. Bd. III. Abteil.) soll dieses Zitat künftig ersetzen.

war und die ständige Belastung noch einige Zeit gewirkt hatte, wurden die eigentlichen Versuche in der Art angestellt, dass zuerst die drei Thermometer, dann die Spiegelskala abgelesen wurde. Hierauf begann die weitere Belastung des Hebelarmes, indem der Gehilfe das Tischchen mittelst der Schraube langsam und gleichmässig in Bewegung setzte. Sobald die Mehrbelastung voll wirkte, wurde sofort wieder die Skala abgelesen, das Tischchen dann unverzüglich ebenso langsam und gleichmässig hinaufgeschraubt, und wenn das Gewicht den Hebelarm nicht mehr berührte, sofort die Skala wiederum abgelesen. Damit war eine „Beobachtungsreihe“ beendet. Solche Beobachtungsreihen folgten mit denselben Ablesungen 5 unmittelbar aufeinander und bildeten eine „Versuchsgruppe“. Die beobachteten Zahlen sowohl, als die hieraus berechneten, sind in den am Schlusse der Abhandlung angefügten Tabellen angegeben. Ich habe diese aus dem Texte ausgeschieden, um ihn nicht mit allzu viel Einzelnheiten zu stören. Aber, obschon es sich im allgemeinen nicht empfiehlt, zu viel Beobachtungsmaterial mitzuteilen, glaubte ich doch, diese Beigabe nicht unterlassen zu sollen, nicht allein um eine Kontrolle zu ermöglichen, sondern auch weil ich meine, es könnte vielleicht dieses Material noch anderweitig ausgenützt werden. Die meisten im Texte vorkommenden Uebersichten oder Zusammenstellungen sind diesen Tabellen entnommen.

§ 7. Einrichtung der Tabellen.

Die sämtlichen Versuche wurden an einem Drahtindividuum von Kupfer ausgeführt. Ich habe diese Substanz gewählt, weil mir aus meinen früheren Arbeiten die besondere Brauchbarkeit des Kupfers für den vorbezeichneten Zweck bekannt war. Auch stand mir fast chemisch reines Kupfers — 99,88 % — zu gebote. Die einzelnen Versuchsgruppen folgten in der Reihenfolge, wie solche durch römische Ziffern bezeichnet ist. Jeder Gruppe ist das Datum beigefügt. Es wurden an einem Tage mehrere Gruppen, und zwar so ausgeführt, dass vom Ende der einen bis zum Beginn der nächsten 5 Minuten verstrichen. Das Nähere ist aus den Tabellen zu entnehmen. In den Gruppen der Tabelle B war für denselben Tag die ständige Belastung (π_1) konstant und die Mehr-

belastung (π_2) variierte von Gruppe zu Gruppe. Das Umgekehrte ist in Tabelle C der Fall. Zwischen dem Ende der Versuche an einem Tage und dem Beginne derselben am nächsten verstrichen 18 und 24 Stunden. Die ständige Belastung für die erste Versuchsgruppe des nächsten Tages wurde schon am Ende der Versuche tags vorher mit der grössten Behutsamkeit (ohne Stösse) angebracht. Den Versuchen in Tabelle B und C gingen jene in Tabelle A, an zwei aufeinanderfolgenden Tagen angestellt, voraus. Die Gruppen I der Tabelle A wurden nach dem gewöhnlichen Verfahren zur Bestimmung des longitudinalen E—M ausgeführt, wobei die Mehrbelastung (π_2) in der einen Gruppe 5 Minuten, in der anderen 15 Minuten wirkte; ebenso wurde wieder 5 beziehungsweise 15 Minuten nach der Entlastung erst abgelesen. Die beiden anderen Gruppen II wurden nach dem Verfahren, wie ich es zur Bestimmung des primären und sekundären E—M (II. Cl. XV. Bd. III. Abteil. § 14) angegeben habe, ausgeführt.

Die Bedeutung der Zeichen in den Tabellen ist folgende:

1) L die Länge des Drahtes zwischen den Klemmen in Metern;

2) d der Durchmesser und

3) F der Querschnitt des Drahtes in mm.

4) T_0, T_1 und τ_0, τ_1 bezeichnen Temperaturen (C^0) der Apparatteile, und zwar die ersten des unteren, die zweiten des oberen Teiles. t_0 und t_1 sind Temperaturen (C^0) des Drahtes. Durch Vorversuche war festgestellt worden, dass die Temperaturangabe des in der Mitte der Röhre angebrachten Thermometers als die mittlere Temperatur des Drahtes — bis mindestens $0{,}1^0$ C genau — genommen werden durfte. Die mit dem Index 0 versehenen Temperaturangaben waren bei Beginn der Versuchsgruppe, die mit 1 versehenen am Schluss derselben abgelesen.

5) a_ν die Skalenablesung am Anfange der Gruppe, b_ν bei voller Wirkung der Mehrbelastung, c_ν jene nach jeder Entlastung. Die Ablesung geschah, wie erwähnt, sofort nach Eintritt jeder vollen Wirkung der Be- oder Entlastung. 1 Skalenteil = 2 mm.

6) π_1 bezeichnet die ständige Belastung und π_2 die Mehrbelastung auf das Quadratmillimeter des Querschnittes des Drahtes in Kilogrammen.

7) λ_1 ist die aus den letzten 2 Versuchsreihen jeder Gruppe sich ergebende mittlere Beobachtung der nahezu gleichen Verlängerungen und

Verkürzungen des Drahtes in Skalenteilen, bezogen auf die Drahtlänge L zwischen den Klemmen.

8) l_1 die Längenzunahme, welche der Draht bei derselben ständigen Belastung π_1 nach den einzelnen Versuchsgruppen zeigt, in Skalenteilen angegeben und ebenfalls auf die ganze Drahtlänge L bezogen. Diese Grösse ist eine Funktion der Zeit; ich werde sie nach dem Vorgange von Weber und Herrn Kohlrausch mit „elastische Nachwirkung“ (E—N) bezeichnen.

9) Die letzte Kolumne enthält das Datum des Tages, an dem die Versuchsgruppe ausgeführt worden ist.

10) Die Zeit, welche eine Versuchsgruppe in Anspruch nahm, ist in den Tabellen nicht angegeben, obwohl sie jedesmal beobachtet worden ist. Sie war bei den verschiedenen aufsteigenden Mehrbelastungen π_2 jedesmal ungefähr bezw. 4, 5, 6 Minuten. Indes habe ich früher an Eisen Versuche mit stark differierenden Geschwindigkeiten in der Belastung und Entlastung vorgenommen, aber einen entschiedenen Einfluss dieser Differenz auf die Werte λ_1 nicht konstatieren können. Nichts destoweniger wurde bei den eben vorliegenden Versuchen die grösste Gleichmässigkeit in den Bewegungen bei dem Be- und Entlasten angestrebt und von meinem Gehilfen infolge seiner häufigen Uebung auch erreicht.

§ 8. Reduktionsformeln.

Die Werte λ_1 in den Tabellen geben, wie oben erwähnt, die mittlere Dehnung bei der 4. und 5. An- und Abspannung des Drahtes an und berechnen sich für die Dehnung der ganzen Drahtlänge L nach der Formel:

$$\lambda_1 = \tfrac{1}{2}\left[(b_4 + b_5) - c_4 - \frac{c_3 + c_5}{2}\right] \qquad 1)$$

Dabei ist der Einfluss der Temperaturänderungen während der Beobachtung auf die Drahtlänge schon eliminiert (1882. Heft 4. § 21.), vorausgesetzt dass, was bei den vorliegenden Versuchen immer zutrifft, die Temperatur während einer Versuchsgruppe sich nur in einem Sinne ändert. Hiernach berechnet sich der mittlere Wert λ_1 aus 5 beobachteten Werten, so dass der 2. Dezimale desselben noch einige Bedeutung beigelegt werden darf. Die während einer Versuchsgruppe entstandene Längenveränderung l_1, (E—N) des Drahtes ist nach Formel 2), (1885.

Heft 1. § 15.) auf die Temperatur (t_0, T_0, τ_0) am Beginne der Versuchsgruppe zu reduzieren. Für unseren Kupferdraht von der Länge L = 1,1 m = 550 Skalenteile und dessen gefundenen thermischen Ausdehnungskoëffizienten $\alpha = 0{,}000016$ ist:

$$l_1 = (c_5 - a_1) - 1{,}406\,(t_1 - t_0) - 0{,}3\,(T_1 - T_0) - 0{,}5\,(\tau_1 - \tau_0) + \frac{0{,}07}{2}\cdot(\tau_1 - \tau_0) \quad 2)$$

§ 9. Berechnung der wirklichen Längenveränderungen des Drahtes.

Für eine allgemeine Beurteilung der hier in Frage kommenden Beziehungen zwischen den Elementen der Erscheinung würden die Angaben der Skalenbeobachtungen genügen, wie in (1885. Heft 1.). Da hier aber zunächst Verhältnisse quantitativ festzustellen sind, so erscheint es notwendig, die wirklichen Dehnungen und Zusammenziehungen des zu untersuchenden Drahtes thunlichst genau zu berechnen, weil sie den Skalendifferenzen nicht genau proportional sind. Ich habe mich deshalb mit der in meinen früheren Arbeiten hiezu verwendeten Formel nicht begnügt, sondern, da die äusserste Genauigkeit geboten, eine noch grössere Annäherung an den wahren Wert der Dehnung zu erzielen gesucht. Die Ableitung der neuen Formel (3) ist in der als Anhang nachfolgenden Theorie des Apparates enthalten. Ist z das Stück des Hebels von dessen Stützpunkt bis zu jenen Punkt, in welchem die elastische Zugkraft des untersuchten Drahtes ihn angreift, L_1 die Entfernung dieses Punktes bis zum unteren Befestigungspunkt des Drahtes, h die Entfernung der Skala vom Spiegel, endlich n_1 der vor und n der nach der Dehnung abgelesene Skalenteil, so ist die wirkliche Längenänderung λ_t des Drahtes von der Länge L bei t^0 C, alle Grössen in Skalenteilen gemessen:

$$\lambda_t = \frac{z}{2h}(n - n_1) - \frac{3}{2}z\left\{\left[\left(\frac{n}{2h}\right)^3 - \left(\frac{n_1}{2h}\right)^3\right] - \frac{z}{L_1}\left[\left(\frac{n}{2h}\right)^4 - \left(\frac{n_1}{2h}\right)^4\right]\right\} \quad 3)$$

Da für unseren Apparat:
$z = 35{,}4$; $h = 2806$; $L_1 = 705$ Skalenteile, so ergibt sich zur Berechnung der wirklichen Längenänderung λ_t und l_t der Ausdruck:

$$= 63079 \cdot 10^{-7}(n - n_1) - 30042 \cdot 10^{-14}(n^3 - n_1^3) + 26880 \cdot 10^{-17}(n^4 - n_1^4) \quad 4)$$

Nur im ersten Glied ist bei den Berechnungen die Berücksichtigung von 5 Stellen des Koëffizienten nötig.

§ 10. Einflüsse auf die Messung der Dehnung und Verkürzung.

Bei der hier erforderlichen Genauigkeit der Messung dürfen aber auch die Einflüsse untergeordneter Art auf dieselbe nicht ausser acht gelassen werden. Sie sind nun entweder zufällige, welche von der jeweiligen Temperatur des Drahtes resp. der ihn umgebenden Luft herrühren, oder solche, die jede Dehnung naturgemäss begleiten. Der erstere dieser Einflüsse äussert sich in einer Veränderung der elastischen Dehnung λ_t und der E—N $\cdot$ l_t des Drahtes sowohl, als auch durch Veränderung seines Querschnittes.

Die Einflüsse, welche jede Dehnung und Verkürzung des Drahtes naturgemäss begleiten und die Grösse derselben verändern müssen. sind die Querkontraktion des Drahtes und die durch die Dehnung und Verkürzung in diesem selbst bewirkte Temperaturveränderung. Es wird sich zeigen, dass diese beiden Einflüsse für die hier hervorgerufenen Dehnungen zu geringfügig ausfallen, um gegenüber den Grenzen der Beobachtungsfehler in Betracht zu kommen. Aber abgesehen hievon, erscheint es sehr fraglich, ob es angezeigt ist, sie in Rechnung zu nehmen, wenn es sich um die Bestimmung des longitudinalen E—M handelt. Beide Einflüsse verändern die Dichtigkeit des Körpers und nach Wertheim damit auch die Elastizität in einer nicht näher bekannten Weise, so dass es geraten erscheinen möchte, sie vorerst schlechterdings als in den jeweiligen elastischen Zustand des Drahtes inbegriffen anzusehen.

§ 11. Der primäre und sekundäre Elastizitätsmodul.

Es seien L_t, F_t Länge und Querschnitt des zu prüfenden Drahtes bei der während des Versuches stattfindenden Temperatur t (in den Tabellen t_1) desselben. Z_1 sei der Zug, welcher von der ständigen Belastung π_1 im Querschnitte F_t bewirkt wird, und l_t' die vor der Versuchsgruppe von ihm hervorgebrachte Dehnung. Der E—M in diesem Zustande sei E_t; ich nenne ihn wie früher (II. Cl. XV. Bd. III. Abteil. § 1.) den primären E—M. Ferner ist unter der successiven Vermehrung und Verminderung des Zuges um den Betrag Z_2 während der 4. und 5. Dehnung und Zusammenziehung des Drahtes das Mittel dieser Verlängerungen und Verkürzungen λ_t. Der E—M, welcher diesem Zu-

stande des Drahtes entspricht sei E_t'; ich nenne ihn, wie in der vorhin erwähnten Abhandlung den sekundären E—M. Endlich zeige sich nach der 5. Abspannung unter dem ständigen Zuge Z_1 eine Längenveränderung des Drahtes vom Betrage l_t, die nach mehr oder minder langer Zeit wieder verschwindet; diesen vorübergehenden Längenzuwachs habe ich bereits als elastische Nachwirkung bezeichnet.

Darnach bestehen für diese drei Zustände des Drahtes folgende Beziehungen:

$$\frac{L_t}{E_t} \cdot \frac{Z_1}{F_t} = l_t' \qquad \text{I.}$$

$$\frac{L_t}{E_t'} \cdot \frac{Z_2}{F_t} = \lambda_t \qquad \text{II.}$$

$$\frac{L_t}{E_t'} \cdot \frac{Z_1}{F_t} = l_t' + l_t \qquad \text{III.}$$

Eliminiert man aus I und III, da es nicht beobachtbar, l_t', so ergibt sich:

$$\frac{L_t \cdot Z_1}{F_t} \cdot \left(\frac{1}{E_t'} - \frac{1}{E_t}\right) = l_t \qquad \text{IV.}$$

Beziehen sich die Indices 0 auf die Temperatur 0^0 und bezeichnet α den linearen, thermischen Ausdehnungskoëffizienten, γ aber die thermische Konstante des sekundären E—M, wie ich sie früher schon (II. Cl. XV. Bd. III. Abt. § 40.) genannt und dort auch ihrem Werte nach festgestellt habe, so ergibt sich aus IV:

$$\frac{L_0 Z_1}{F_0}\left(\frac{1}{E_0'} - \frac{1}{E_0}\right) \cdot \frac{1}{1-\gamma t} \cdot \frac{1+\alpha t}{1+2\alpha t} = l_t \text{ oder}$$

$$\frac{1}{E_0'} - \frac{1}{E_0} = l_t \cdot (1-\gamma t) \cdot \frac{1+2\alpha t}{1+\alpha t} \cdot \frac{F_0}{L_0 Z_1}.$$

Wird ein für allemal L_0 und F_0 bei 0^0 gemessen, und setzt man $\frac{Z_1}{F_0} = \pi_1$, so ergibt sich mit Zulassung von Annäherungen bei nicht zu hohen Werten von t (bei unseren Versuchen stets unter 10^0 C.).

$$\frac{1}{E_0'} - \frac{1}{E_0} = \frac{l_t}{L_0 \pi_1}[1-(\gamma-\alpha)t] = l_0 \qquad 5)$$

In gleicher Weise erhalten wir aus II, wenn $\frac{Z_2}{F_0} = \pi_2$ gesetzt wird:

$$\frac{1}{E_0'} = \frac{\lambda_t}{L_0 \pi_2}[1 - (\gamma - \alpha)t] = \lambda_0 \qquad 6)$$

Es beziehen sich also λ_0 und l_0 auf $L_0 = 1$ Meter, dann $\pi_1 = \pi_2 = 1$ kg. Wir wollen nun den Wert $\frac{1}{E_t'} = \lambda_t$ den obigen Bezeichnungen analog sekundären, $\frac{1}{E_t} = \delta_t$ primären Elastizitätskoëffizienten (E—K) nennen.

Wird 5) und 6) kombiniert, so erhält man

$$\frac{1}{E_0} = \lambda_0 - l_0 = \delta_0 \qquad 7)$$

$$E_0 = \frac{1}{\lambda_0 - l_0} = \frac{1}{\delta_0} \qquad 8)$$

Man hat also zuerst nach Formel 4) die Werte von λ_t und l_t aus den Skalenablesungen und den Werten λ_1 und l_1 der angefügten Tabellen zu berechnen. Aus 6) lässt sich dann der sekundäre E—M ableiten. Berechnet man aus 5) den Wert l_0, so ergibt sich aus 7) δ_0 und dann liefert 8) den primären E—M. Diese Berechnungen wurden für die E—K durchgeführt und die Werte von λ_0, l_0 und δ_0 in kommenden Uebersichten passend zusammengestellt. Von der Berechnung der E—M selbst wurde, weil hier zwecklos, abgesehen.

§ 12. Anordnung der Versuchsgruppen.

Bevor ich auf eine nähere Betrachtung der Uebersichten eingehe, ist die Anordnung der Versuche noch darzulegen.

Nachdem der Draht durch Anwendung einer Belastung, die beträchtlich grösser als die bei den späteren, eigentlichen Versuchen zur Verwendung kommende höchste Belastungssumme $\pi_1 + \pi_2$, bleibend gestreckt worden war, und nachher wieder einige Tage bei der kleinsten ständigen Belastung $\pi_1 = 1{,}6234$ kg pro qmm geruht hatte, ging ich zu den beabsichtigten Versuchen über. Das in den Tabellen angegebene Datum lässt erkennen, wie viele Versuchsgruppen an jedem der unmittelbar aufeinanderfolgenden Versuchstage ausgeführt worden sind.

Die Versuchsgruppen Nr. I in Tabelle A sollen zeigen. welche Verlängerung $+\lambda$ und Verkürzung $-\lambda$ sich ergibt, wenn man die Mehrbelastung π_2 während 5 bezw. 15 Minuten wirken lässt, und 5 Minuten bezw. 15 Minuten nach Aufhebung derselben wieder abliest. Wie man sieht. fallen die Differenzen der Werte $+\lambda$, sowie jener $-\lambda$, nämlich 0,25 bezw. 0,15 Skalenteile, schon nicht mehr entschieden innerhalb der Grenzen der Beobachtungsfehler. Das ist indes nicht die Hauptsache. Vielmehr ist wichtig, dass die Verkürzungen $-\lambda$ ganz erheblich hinter den Verlängerungen $+\lambda$ zurückbleiben. Der Draht nimmt also 5 Minuten bezw. 15 Minuten nach seiner Entlastung die frühere Länge nicht wieder an.

Bei den Versuchsgruppen Nr. II hingegen, in denen der Draht in den vorübergehend vollkommen elastischen Zustand übergeführt worden war. zeigt sich schon in den Zahlen λ eine grössere Uebereinstimmung. Reduziert man aber diese Werte λ nach Formel 6) auf die Temperatur 0^0 etc. so erhält man $\lambda_0 = 0{,}07639$ und $\lambda_0 = 0{,}07646$ mm, deren Differenz nur 0,00007 mm beträgt, so dass diese Werte als vollkommen übereinstimmend erachtet werden können, obschon zwischen diesen Versuchsgruppen eine jener Nr. I liegt.

Die in den Versuchsgruppen Nr. I Tabelle A angewandte und allgemein übliche Methode zur Bestimmung des longitudinalen E—M erweist sich also nicht geeignet zur Erreichung einer Genauigkeit, welche der heutige Stand der Physik erfordert; sie entspricht überdies schon deshalb nicht vollkommen den zu stellenden Anforderungen, weil der E—M darnach eine Funktion auch der Zeit wäre. Beiden Umständen wäre Rechnung getragen, sobald man den sekundären E—M, wie in den Gruppen Nr. II Tabelle A, bestimmt, ein Verfahren, das ich schon in (1885. Heft 1. X. § 46.) angewendet habe.

Allein so einfach ist die Sache trotz alledem nicht; denn es hat sich bei der eben zitierten Arbeit mit aller Bestimmtheit herausgestellt. dass die elastische Reaktion eines Drahtes resp. dessen sekundärer E—M auch von der beständigen Belastung π_1 d. i. von seinem ursprünglichen Spannungszustande abhängt. Ob bei dem üblichen Verfahren zur Bestimmung des E—M das Proportionalitätsgesetz von den Körpern genau befolgt wird, halte ich noch für fraglich. Diesen Punkt

zu untersuchen, hielt ich jedoch nach den dargelegten Anschauungen über den gewöhnlichen E—M für überflüssig. Es handelt sich nach meinem Dafürhalten jetzt vielmehr darum: befolgen die Körper, wenn sie in den vorübergehenden Zustand der vollkommenen Elastizität übergeführt worden sind, in diesen alsdann das Proportionalitätsgesetz genau? Und ferner, wenn ein Körper verschieden grosse Längsdeformationen in verschiedenen Spannungszuständen (π_1) bei wenigstens nahezu konstanter Temperatur durchgemacht hat, zeigt er nachher bei gleicher Spannung π_1 und unter Anwendung der gleichen Mehrbelastung π_2 wenigstens wieder denselben primären und insbesonders sekundären E—M? Sind nicht die vorausgegangenen Deformationen von Einfluss auf die elastische Reaktion, d. h. auf die Werte dieser Modul?

§ 13. Fortsetzung.

Um diesen Fragen experimentell näher zu treten, habe ich mit dem gleichen Individuum eines Kupferdrahtes die in den Tabellen B und C verzeichneten Versuchsgruppen in unmittelbar aufeinanderfolgenden Tagen angestellt. Bei den Versuchsgruppen an den einzelnen Tagen ist eines der Versuchselemente π_1 oder π_2 konstant, indes das andere von Gruppe zu Gruppe, die mit einer zeitlichen Unterbrechung von 5 Minuten aufeinander folgen, wechselt. In der Tabelle B ist täglich die ständige Belastung π_1 konstant, dagegen die Mehrbelastung π_2 wechselt; π_1 ändert sich nur von tag zu tag. Hiedurch soll sich zeigen, ob die Dehnungen das Proportionalitätsgesetz bei konstanter Spannung π_1 genau befolgen, und ob sich die elastische Reaktion mit der Spannung ändert.

Diese sämtlichen Versuchsgruppen wurden alsdann mit denselben Belastungen π_1 und π_2, aber in anderer Aufeinanderfolge und zwar in der Weise nochmal ausgeführt, dass die Mehrbelastung π_2 täglich konstant war und die ständige Belastung π_1 variierte. Diese Versuchsergebnisse sind in Tabelle C enthalten. Aus den Tabellen B und C wurden nach Formel 5), 6) und 7) der primäre und sekundäre E—K nämlich δ_0, λ_0 und deren Unterschied l_0 für die gleiche, ständige Belastung $\pi_1 = 1$ gerechnet und in den Uebersichten B und C (§ 15) zusammengestellt.

§ 14. Die Uebersichten.

Diese — siehe § 15 — lassen die Anordnung und deren Zweck übersichtlicher erscheinen als die Tabellen, wenn ich zur Erläuterung noch hinzufüge, dass in Uebersicht B täglich eine horizontale, in C täglich eine vertikale Zahlenreihe entstanden ist.

Da die Beobachtungen auf die Temperatur 0^0 reduziert worden sind, so haben wir als veränderliche Elemente nur mehr π_1 und π_2 und als drittes die Veränderlichkeit, welcher die elastische Reaktion des Drahtes nach Massgabe der nach verschiedenen, vorhergegangenen Deformationen bestehenden von der Zeit abhängigen elastischen Nachwirkungen unterworfen ist. Gerade wegen dieses Elements wurde die ganze erste Versuchskette (Tabelle B) in der bezeichneten Weise (Tabelle C) wiederholt. Durch diese Anordnung nämlich wurde der Draht bei der gleichen Spannung π_1 und Belastungsmehrung π_2 zweimal geprüft und zugleich mit dem ebenbezeichneten dritten Element der Zeit, kombiniert. So ist z. B. die Versuchsgruppe: Vertikalreihe 1 und Horizontalreihe 3 in Uebersicht B die erste, in Uebersicht C die dritte der an einem Tag entstandenen Gruppen. In Uebersicht B ist also an demselben Tag der gedachten Gruppe noch keine andere, in Uebersicht C sind deren bereits zwei vorausgegangen.

Was die Grenzen der Genauigkeit dieser Zahlen betrifft, so ersieht man aus Formel 4), dass die Messung auf 0,01 mm noch eine vollkommen sichere, indes die 3. Dezimale nicht mehr ganz sicher ist, und die nächste gar keinen Anspruch auf Verlässigkeit machen kann. Es ist in den Resultaten die erste gänzlich unsichere Stelle noch angegeben. Darnach können solche Werte als gleich erachtet werden, die in den beiden ersten Stellen übereinstimmen.

§ 15. Betrachtung der in den Uebersichten B und C enthaltenen Resultate.

Würde das untersuchte Kupfer dem Proportionalitätsgesetz genau folgen, so müssten die Werte λ_0 jeder Horizontalreihe unter sich wenigstens in Uebersicht B übereinstimmen, da sie sich auf die gleiche Drahtlänge (1 m), gleiche Belastung (1 kg) und die Temperatur 0^0 beziehen. Nun

steigen nicht nur die Werte λ_0 jeder Horizontalreihe in Uebersicht B stetig, sondern es ist dies selbst in C, also bei Versuchen, die unter nur zum Teil gleichen Umständen überdies an verschiedenen Tagen ausgeführt wurden, der Fall.

Uebersicht B.

Konstant: π_1.

→		$\pi_2 = 3{,}5813$ 1)	$\pi_2 = 5{,}5527$ 2)	$\pi_2 = 7{,}3938$ 3)
1) $\pi_1 = 1{,}6234$	$\lambda_0 =$	**0,07486**	**0,07529**	**0,07660**
	$l_0 =$	0,00218	0,00366	0,00422
	$\delta_0 =$	*0,07268*	*0,07164*	*0,07238*
2) $\pi_1 = 3{,}6526$	$\lambda_0 =$	**0,07322**	**0,07421**	**0,07541**
	$l_0 =$	0,00019	0,00116	0,00269
	$\delta_0 =$	*0,07303*	*0,07305*	*0,07272*
3) $\pi_1 = 7{,}7110$	$\lambda_0 =$	**0,07194**	**0,07378**	**0,07461**
	$l_0 =$	0,00113	0,00209	0,00656
	$\delta_0 =$	*0,07081*	*0,07169*	*0,06804*
4) $\pi_1 = 15{,}8280$	$\lambda_0 =$	**0,07037**	**0,07285**	**0,07410**
	$l_0 =$	0,00137	0,00254	0,00444
	$\delta_0 =$	*0,06900*	*0,07031*	*0,06967*

Das Kupfer folgt also selbst im vorübergehenden Zustande der vollkommenen Elastizität dem Proportionalitätsgesetz bei konstanter Spannung nicht genau. Der longitudinale sekundäre E—M nimmt vielmehr bei konstanter Spannung π_1 mit zunehmender Amplitude der Dehnung d. i. mit zunehmender Belastungsmehrung π_2 ab.

Die Werte λ_0 jeder Vertikalreihe der Uebersicht C nehmen bei konstantem π_2 mit steigendem π_1 stetig ab. Dies ist sogar ausnahmslos in den Vertikalreihen der Uebersicht B der Fall, obschon diese Werte an verschiedenen Tagen beobachtet wurden.

Uebersicht C.

Konstant: π_2.

↓		$\pi_2 = 3{,}5813$ 1)	$\pi_2 = 5{,}5527$ 2)	$\pi_2 = 7{,}3938$ 3)
1) $\pi_1 = 1{,}6234$	$\lambda_0 =$	**0,07417**	**0,07547**	**0,07607**
	$l_0 =$	−0,00101	0,00120	0,00091
	$\delta_0 =$	*0,07518*	*0,07427*	*0,07516*
2) $\pi_1 = 3{,}6526$	$\lambda_0 =$	**0,07333**	**0,07420**	**0,07534**
	$l_0 =$	0,00228	0,00278	0,00400
	$\delta_0 =$	*0,07105*	*0,07141*	*0,07135*
3) $\pi_1 = 7{,}7110$	$\lambda_0 =$	**0,07211**	**0,07354**	**0,07432**
	$l_0 =$	0,00189	0,00344	0.00419
	$\delta_0 =$	*0,07022*	*0,07019*	*0,07013*
4) $\pi_1 = 15{,}8280$	$\lambda_0 =$	**0,07057**	**0,07307**	**0,07381**
	$l_0 =$	0,00202	0,00324	0,00485
	$\delta_0 =$	*0,06856*	*0,06983*	*0,06896*

Der sekundäre E—M des Kupfers hängt somit von der Spannung π_1 des Drahtes ab und wächst mit derselben.

Dagegen ist der sekundäre E—M von dem dritten Element, der Zeit, während welcher der Draht unter irgend einer Spannung gestanden, und von den Deformationen, die er während derselben erlitten hat, unabhängig. Bei derselben Spannung π_1 und der gleichen Mehrbelastung π_2 zeigt sich immer wieder die gleiche Amplitude λ_0.

Man sieht dies, sobald je zwei in der gleichen Horizontal- und Vertikalreihe der Uebersichten B und C liegende Werte λ_0 verglichen werden. Diese Differenzen sind:

+ 0,00069	− 0,00018	+ 0,00053
− 0,00011	+ 0,00001	+ 0,00007
− 0,00017	+ 0,00024	− 0,00029
− 0,00020	− 0,00022	+ 0,00029.

Nur in zwei Fällen übersteigt die Differenz 5 Einheiten der 4. Dezimale um Geringes; in allen übrigen erreicht sie nicht einmal 3 Einheiten

derselben Stelle. Das Vorzeichen der Unterschiede ist gerade zur einen Hälfte positiv, zur anderen negativ.

Diese Uebereinstimmung zeigen die ersten Dehnungen der korrespondierenden Gruppen in den Tabellen B und C nicht. Nicht nur, dass das Vorzeichen der Differenzen (siehe unten), wie oben, nicht wechselt, und dieselben bei den höheren Werten von π_1 oder π_2 erhebliche Werte annehmen; auch das Vorzeichen der Differenzen der ersten Dehnung ist ein anderes, als jenes der Dehnung (λ) am Schlusse derselben Gruppe. Die ersten Dehnungen bei der höchsten der gebrauchten ständigen Spannung π_1 sind sogar grösser als bei der nächst niederigen ständigen Belastung, Unregelmässigkeiten, die im vollkommen elastischen Zustande des Drahtes niemals in die Erscheinung treten. Gerade die letzte Thatsache macht es recht klar, wie so sich beim gewöhnlichen E—M so auffallende Unterschiede der Werte desselben selbst bei dem gleichen Versuchsobjekte ergeben können, Unterschiede, die man bei verschiedenen Versuchsobjekten der gleichen Substanz auf zufällige physikalische oder chemische Verschiedenheit zurückführen zu müssen glaubte. Ich lasse nun eine Uebersicht der ersten Dehnungen aus den Tabellen B und C folgen, die das Ebengesagte bestätigen soll:

		$b_1 - a_1$ aus der Tabelle		
π_1	π_2	B	C	Δ
1,6234	3,5813	24,0	23,6	+ 0,4
„	5,5527	37,3	37,1	+ 0,2
„	7,3938	49,9	50,0	— 0,1
3,6526	3,5813	23,8	23,9	— 0,1
„	5,5527	36,9	37,2	— 0,3
„	7,3938	49,4	50,1	— 0,7
7,7110	3,5813	23,5	23,9	— 0,4
„	5,5527	36,3	37,7	— 1,4
„	7,3938	49,2	50,6	— 1,4
15,8280	3,5813	24,4	24,2	+ 0,2
„	5,5527	37,0	38,7	— 1,7
„	7,3938	50,0	53,1	— 3.1

§ 16. Betrachtung der Werte l_0 in den Uebersichten B und C.

Hinsichtlich der Werte l_0 muss daran erinnert werden, dass jene in Uebersicht B vom Zeitpunkte des Beginnes der ersten Gruppe einer horizontalen Reihe an gerechnet sind, die nachfolgenden l_0 somit die Werte aller vorhergehenden enthalten, und dass dieses bezüglich der vertikalen Reihen in Uebersicht C nicht der Fall ist, weil eben hier von Gruppe zu Gruppe π_1 sich ändert.

Im allgemeinen scheint der Verlauf der Werte l_0 die Annahme zu rechtfertigen, dass die Molekularvorgänge in den Körpern während und nach einer Deformation sehr komplizierter Art sein mögen. Nach den bisher gemachten Erfahrungen hätte mich in der That eine irgendwie deutlich hervortretende Regelmässigkeit im Verlaufe dieser Zahlen l_0 mehr überrascht, als das sich zeigende Gegenteil. Denn abgesehen davon, dass die in Frage stehenden Werte zum Teil schon ziemlich nahe an die Grenze fallen, wo die Beobachtung unsicher zu werden beginnt, ist es nach den Untersuchungen von F. Kohlrausch,[1]) G. Wiedemann,[2]) F. Braun[3]) etc. wahrscheinlich, dass diese Aenderungen der elastischen Reaktion von sekundären molekularen Vorgängen herrühren, die von verschiedenen Umständen wieder modifiziert sein mögen. Insbesonders darf auch nicht übersehen werden, dass in den in Uebersicht B angegebenen Werten l_0 auch Einwirkungen hineinspielen, die in den Zeitzwischenräumen von 5 Minuten eintreten können, und die bei gleichbleibendem π_1 sich geltend machen. Die Werte l_0 dagegen, welche unter Uebersicht C verzeichnet sind, rühren vorzugsweise nur von einem einzigen Einflusse, der wiederkehrenden Deformation nämlich, her. Die Zeit der Ruhe des Drahtes, die Geschwindigkeit der Dehnung, unvermeidliche Erschütterungen, die Zufälligkeiten beim Uebergang von einer ständigen Belastung zur anderen, mag dieser auch noch so behutsam bewerkstelliget werden, nicht unwahrscheinlich sogar kleine Temperaturänderungen etc. mögen ausser Spannung und Amplitude der Dehnung noch von Einfluss auf den jeweiligen elastischen Zustand des Drahtes d. h. auf die Drehung der Moleküle sein.

---

1) Annalen, 1876. Bd. 158 u. a.
2) Annalen, 1859. Bd. 107, S. 439. — 1879. Bd. 242. S. 485.
3) Annalen, 1876. Bd. 159. S. 337.

§ 17. Die Werte δ_0 und der primäre E—M.

Die Werte δ_0 werden aus den beobachteten λ_0 und l_0 nach Gl. 7) berechnet. Nach dem, was über letztere gesagt werden musste, ist eine Uebereinstimmung der korrespondierenden Werte δ_0 in den Uebersichten B und C, wie diese bei den Werten λ_0 sich herausstellte, im allgemeinen nicht mehr zu erwarten. In der That sind sie auch, besonders bei den niedrigen Spannungen mehr von einander verschieden, als die Grössen λ_0. Indes müsste, wenn der Einfluss der Spannung π_1 ein überwiegender über die mehr zufälligen Einflüsse ist, sich wenigstens in jeder horizontalen Reihe für sich, deren Zahlenwerte von δ_0 sich ja auf dieselbe Spannung π_1 beziehen, eine ziemliche Uebereinstimmung in den Werten δ_0 zeigen. Diese ist in der That auch in dem Masse vorhanden, dass von einem Mittelwerte δ_0 gesprochen werden kann, indem sich weder ein stetiges Fallen noch Steigen dieser Zahlenwerte geltend macht.

Die folgende Zusammenstellung enthält den Mittelwert der δ_0 jeder Horizontalreihe und die Abweichungen der Einzelnwerte δ_0 von diesem.

Aus Uebersicht B:

Mittelwerte δ_0:	Abweichungen:		
0,07223	— 0,00045	+ 0,00059	— 0,00015
0,07293	— 0,00010	— 0,00012	+ 0,00021
0,07018	— 0.00063	— 0,00151	+ 0,00114
0,06966	+ 0,00066	— 0,00065	+ 0,00001

Aus Uebersicht C:

0.07487	— 0,00031	+ 0,00060	— 0,00029
0,07127	+ 0,00022	— 0,00014	— 0,00008
0,07018	— 0,00004	— 0,00001	+ 0,00005
0,06912	+ 0,00056	— 0,00071	+ 0,00016.

Nur in zwei Fällen wächst die Abweichung bis auf eine Einheit der 3. Dezimale an. Und wenn man beachtet, dass die Zahlen aus Uebersicht C sich auf Versuche beziehen, die an verschiedenen Tagen angestellt worden sind, und die Versuche einer Horizontalreihe durch solche bei verschiedenen Spannungen π_1 und Deformationen von verschiedenen Am-

plituden getrennt sind, so ist die ziemliche Uebereinstimmung um so auffallender und es ist kaum zu verkennen, dass doch die Spannung den überwiegenden Einfluss auf den elastischen Zustand vor der jeweiligen Dehnung, d. i. auf den primären E—M übt. Zu dem kommt noch zu beachten, dass selbst die Mittelwerte δ_0 in B und C, die in beiden obigen Zusammenstellungen im allgemeinen sinken, bei den höheren Spannungen π_1 als völlig gleich zu betrachten sind.

Der primäre E—M scheint also ebenfalls, wie der sekundäre, mit der Grösse der Spannung π_1 unter sonst gleichen Umständen zuzunehmen.

Bei gleich bleibender Spannung π_1 jedoch scheint der primäre E—M bei Dehnungen von verschiedenen Amplituden, gleichgiltig, ob diese zeitlich unmittelbar aufeinander folgen oder nicht, nahezu konstant zu bleiben.

Die Konstante kann aber, jenachdem die Dehnungen fast unmittelbar aufeinander folgen (B) oder nicht, (C) verschiedene Werte haben. Für höhere Spannungen scheinen jedoch auch diese Unterschiede zu verschwinden.

§ 18. Zusammenhang zwischen den primären und sekundären E—M.

Um diesen hervortreten zu lassen, kombinieren wir Gl. 5) und 6) und erhalten:

$$E_0 - E_0' = E_0 E_0' l_0$$

$$E_0' = \left(1 - \frac{l_0}{\lambda_0}\right) E_0 \qquad 9)$$

und

$$E_0 = \frac{1}{1 - \frac{l_0}{\lambda_0}} \cdot E_0' \qquad 10)$$

oder, so lange $\frac{l_0}{\lambda_0}$ einen geringen Wert gegen 1 hat:

$$E_0 = \left(1 + \frac{l_0}{\lambda_0}\right) E_0' \qquad 11)$$

woraus die Bedeutung des Verhältnisses der gemessenen Grössen l_0 und λ_0 erhellt.

Da sich E_0 für dieselbe Spannung π_1 als wenig veränderlich erweist, und E_0' für wachsende Amplituden der Dehnung nach den Uebersichten B und C abnimmt, so kann das Verhältnis $\frac{l_0}{\lambda_0}$ nicht konstant sein, sondern es muss mit λ_0 im allgemeinen wachsen. Aus der Uebersicht C berechnet sich für:

$$\pi_1 = 3{,}6526;\ \frac{l_0}{\lambda_0} = 0{,}0311;\ 0{,}0375;\ 0{,}0531.$$
$$= 7{,}7110;\quad = 0{,}0262;\ 0{,}0468;\ 0{,}0564.$$
$$= 15{,}8280;\quad = 0{,}0286;\ 0{,}0443;\ 0{,}0657.$$

Man sieht, dass die Aenderung des elastischen Zustandes mit der Amplitude der wiederkehrenden Dehnungen λ_0 ganz entschieden wächst. indes es unentschieden bleibt, ob sie auch von der Spannung π_1 wesentlich abhängt.

§ 19. Die Unbeständigkeit des elastischen Zustandes bei konstanter Spannung π_1 nach vorhergegangenen Deformationen.

Die Gl. III (§ 11) beruht auf der Annahme, in l_t sei keine für alle Zeiten bleibende Streckung des untersuchten Drahtes enthalten, sondern jedes l_t verschwinde allmählich nachwirkungsweise gänzlich. Dass der Draht während aller Versuchsgruppen die Fähigkeit, sich auf seine ursprüngliche Länge zusammenzuziehen, beibehalten hat, ist schon aus dem Entstehen von Nachwirkungen l_t bei jeder folgenden Gruppe zu schliessen. Nichtsdestoweniger habe ich wegen der Wichtigkeit der Frage nach Abschluss der Versuchsgruppen C, am 4./2. 87 den Draht mit dem bisher verwendeten geringsten $\pi_1 = 1{,}6234$ kg belastet, und seine Nachwirkungsbewegungen alsdann noch mehrere Wochen hindurch verfolgt, indem ich zeitweise Skalen- und Thermometerablesungen vornahm und auf nachfolgende Art berechnete, welchen Stand der Skalenzeiger haben würde, wenn die Temperatur jener Versuchsgruppe, auf deren Zeigerstellung alle weiteren Zeigerstellungen reduziert werden, konstant geblieben wäre.

Werden nämlich in Formel 2) a_1, t_0, T_0, τ_0 und c_5, t_1, T_1, τ_1 je gleichzeitig abgelesen, so gibt l_1 die im zweiten Zeitpunkt der Ablesung noch bestehende elastische Nachwirkung in Skalenteilen, oder den Ab-

stand des Skalenzeigers vom ursprünglichen Skalenteilstrich a_1, unter der Annahme, die zu diesem Skalenteil gehörigen Temperaturen t_0, T_0, τ_0 seien fortwährend bestanden. Der Temperatureinfluss auf die Zeigerstellung ist eliminiert, die Beobachtungen sind auf den Stand in einem bestimmten Zeitpunkt reduziert. Auf diese Weise wurden Reduktionen der Stellung des Skalenzeigers auf den Stand bei der ersten Versuchsreihe der Gruppe Nr. I Tabelle B (am 29./1. 87) nach Formel 2) vorgenommen. Selbstverständlich muss jeder dieser Reduktionen die gleiche Anfangsbelastung π_1 zu grunde liegen. Die während der in Tabelle A verzeichneten 4 Versuchsgruppen entstandene E—N war am folgenden Tage (29./1. 87), wie die Rechnung ergab, völlig verschwunden. Es ergab Formel 2) sogar $l_1 = -0{,}4$ Skalenteile.

Bei den sämtlichen Versuchsgruppen der Tabelle B, ausgeführt vom 29./1. 87 bis 1./2. 87, sind 20,9 Sktl. der Nachwirkung l_1 entstanden; am nächsten Tag (2./2. 87) waren hievon, nach Formel 2) berechnet, noch 7,0 Sktl. vorhanden. Es sind also während der Versuche der Tab. B 20,9 Sktl. entstanden und während der Ruhepausen des Drahtes bis am 2./2. 87 wieder $20{,}9 - 7{,}0 = 13{,}9$ Sklt. verschwunden. Nun folgten die Versuche der Tab. C. Es entstanden während dieser Versuche neuerdings 23,5 Sktl., also während der Dauer der Versuchsgruppen der Tab. B und C $20{,}9 + 23{,}5 = 44{,}4$ Sktl. Am 3./3. 87, also nach 27 tägiger Ruhe bestanden — 2,0 Sktl. E—N. Nun wurden noch weitere Beobachtungen angestellt und ebenfalls auf den Stand am 29./1. 87 nämlich $a_1 = 5{,}0$; $t_0 = 4{,}10$; $T_0 = 4{,}43$; $\tau_0 = 4{,}45$ reduziert. Es war der Abstand des Skalenzeigers vom Teilstriche 5,0:

am	17./3. 87	+ 1,6 Sktl.
„	18./3. 87	— 0,4 „
„	19./3. 87	— 1,5 „
„	20./3. 87	— 1,9 „
„	21./3. 87	— 0,3 „

Das negative Vorzeichen muss dahin verstanden werden, dass schon vor Beginn der Versuchsgruppe I, am 29./1. 87, etwa infolge der anfänglichen Streckung des Drahtes E—N bestanden hat und hievon mindestens ein Teil verschwunden ist.

Wie die vorstehenden Zahlen zeigen, findet fortgesetzt und unabhängig von den Längenänderungen infolge von Temperaturänderungen bei konstanter Belastung $\pi_1 = 1{,}6234$ kg eine Aenderung der elastischen Reaktion des Drahtes statt. Diese Schwankungen der Elastizitätskräfte hätten mich überrascht, wenn mir nicht schon die höchst interessanten Wahrnehmungen bereits bekannt gewesen wären, welche Herr Professor F. Kohlrausch[1]) an Kautschukfäden gemacht hat. In Anbetracht dieser Kenntnis habe ich die sich thatsächlich zeigenden Schwankungen der Elastizität des Kupfers geradezu erwartet. Es sind vermutlich Elastizitätsänderungen infolge sich übereinanderlegender Nachwirkungsbewegungen der Moleküle im Spiele, herrührend von den verschiedenen vorausgegangenen dauernden und plötzlichen Gestaltsänderungen.

So viel aber ist sicher, und das ist hier ausschlaggebend, dass in keiner der angestellten Versuchsgruppen die sog. Elastizitätsgrenze überschritten worden ist. Bleibende Streckungen sind nicht entstanden, die Gl. III § 11 hat ihre volle Giltigkeit für alle hier angestellten Versuche.

§ 20. Fortsetzung der Versuche mit Kupferdrähten.

Die in Tabelle B und C dargestellten Versuchsgruppen wurden nach einem gewissen System auch insoferne ausgeführt, als an einem Tage entweder nur die Anfangsbelastung π_1 oder die Mehrbelastung π_2 geändert worden ist.

Nun habe ich in Tabelle D noch einige Versuche dargestellt, bei denen in beliebiger Ordnung die Belastungen π_1 und π_2, auch beide zugleich, geändert wurden. um zu sehen, ob auch dann der sekundäre E—K, reduziert auf die Temperatur 0^0 wieder denselben Wert λ_0 annimmt, den er in den Uebersichten B und C für dieselben Werte von π_1 und π_2 hat. Die folgende Uebersicht enthält die aus Tab. D berechneten Werte λ_0 und die Differenz Δ zwischen diesem und dem Mittel der entsprechenden Werte in Tab. B und C.

---

1) F. Kohlrausch, Annalen Bd. 158. S. 371. (3). 1876.

π_1	π_2	λ_0	Δ
1,6234	7,3938	0,07588	— 0,00046
7,7110	5,5527	0,07352	— 0,00014
15,8280	5,5527	0,07282	— 0,00013.

Man sieht, dass die Werte λ_0 in den sicheren Dezimalen vollkommen mit den entsprechenden Werten der Tabellen B und C übereinstimmen.

Die Versuche der Tabellen B, C und D wurden an demselben Kupferdrahtindividuum vorgenommen. Es stand mir aus einer meiner früheren Arbeiten (1885. Heft 1.) auch noch Versuchsmaterial mit einem anderen Kupferdrahtindividuum, aber von der nämlichen Spule zur Verfügung. Die nachfolgende Uebersicht gibt die Werte λ_0 in der gleichen Bedeutung wie die vorige.

π_1	π_2	λ_0
10,146	12,467	0,07731
8,117	12,467	0,07755
4,059	12,467	0,07787

Auch hier nimmt bei konstantem π_2 mit der Abnahme von π_1 der Wert von λ_0 zu. Da jedoch die Werte von π_1 und π_2 mit jenen in Uebersicht B und C nicht übereinstimmen, so ist ein genauer Vergleich obiger Werte von λ_0 mit jenen in den Uebersichten B und C nicht möglich. Eine angenäherte Interpolation, die leicht thunlich, zeigt aber, dass auch diese Werte von λ_0 an jene Stellen von Uebersicht B und C fallen, wohin sie, entsprechend den Werten π_1 und π_2 gehören, wenn einem bestimmten π_1 und π_2 unter allen sonstigen Umständen bei konstanter Temperatur dieselbe Amplitude der Dehnung entspricht.

Endlich ist mir noch ein Versuch mit Kupferdraht aus (1885. Heft 1.), aber von einer anderen Spule und anderem Querschnitt zur Verfügung gestanden. Während die bisherigen Zahlen sich auf Material von nahezu chemischer Reinheit beziehen, war dieser Kupferdraht käuflich erworben. Die Reduktion auf λ_0 lieferte:

$$\pi_1 = 1{,}248; \quad \pi_2 = 17{,}430; \quad \lambda_0 = 0{,}08927.$$

Auch dieser Wert λ_0 fällt in Uebersicht C an die ihm entsprechende Stelle.

Aus diesen Thatsachen ersieht man, dass beim Kupfer, wenn es durch fortgesetztes An- und Abspannen in den Zustand vorübergehender vollkommener Elastizität übergeführt wird, dasselbe stets jenen Grad von Elastizität zeigt, der der jeweiligen Temperatur, Spannung (π_1) und Mehrbelastung (π_2) entspricht, gleich viel, welches der Elastizitätsgrad für dieselbe Temperatur vor der Ueberführung zu verschiedenen Zeiten war.

Der sekundäre E—M ist für eine bestimmte Temperatur, Spannung und Mehrbelastung konstant, der primäre jedoch nicht; letzterer ist zunächst eine Funktion der Zeit.

§ 21. Abhängigkeit des sekundären E—M von π_1 und π_2 bei anderen Metallen als Kupfer.

An anderen Metallen als Kupfer habe ich für die vorliegende Abhandlung Versuche nicht angestellt, da ich den Gegenstand nur an dieser Substanz eingehend studieren wollte. Zwar ständen mir aus einer früheren Arbeit (1885. Heft 1.) auch für andere Substanzen Versuche mit konstantem π_1 und veränderlichem π_2 zu gebote. Allein die Werte von π_2 differieren bei den meisten Substanzen so wenig, dass die Versuchsresultate, welche zwar fast ausnahmslos die bei Kupfer gemachten Erfahrungen bestätigen, nicht überzeugend wirken können. Ich übergehe deshalb die nähere Darlegung dieser Ergebnisse. Bei Blei nur lagen die Werte von π_2 günstig. Ich lasse das Ergebnis folgen, jedoch bezieht sich hiebei λ_0 zwar auch auf die Temperatur 0^0, die Drahtlänge 1 Meter und $\pi_2 = 1$ kg, aber angegeben in Teilen der Ablesung auf der Spiegelskala.

$$\pi_1 = 0{,}0889 \begin{cases} \pi_2 = 0{,}1762; & \lambda_0 = 37{,}16 \text{ Sktl.} \\ \pi_2 = 0{,}4423; & \lambda_0 = 46{,}03 \text{ Sktl.} \end{cases}$$

Dieses Resultat bestätiget die Abnahme des sekundären E—M des Bleies mit der Zunahme der Dehnungsamplitude d. h. die Nichtbefolgung des Proportionalitätsgesetzes schlagend. Es hatte dieses Ergebnis für mich noch insoferne ein grosses Interesse, als mir hiedurch jeder Zweifel darüber, ob nicht die von mir gefundene Abweichung vom Proportionalitätsgesetz auf einer Fehlerquelle, beruhend in einer, wenn auch noch so kleinen Durchbiegung des Balkens, an dem der Hebel aufgehängt war, herrühre, genommen wurde. Denn die bei Blei angewendeten Be-

lastungen (π_2) sind zu gering, um solche Differenzen, wie sie sich bei diesem Metall bezüglich λ_0 ergeben haben, hervorzubringen.

Was nun ferner die Aenderung des sekundären E—K mit der Spannung π_1 des Drahtes anderer Substanzen als Kupfer anlangt, so verfügte ich über ein ziemlich umfangreiches Beobachtungsmaterial aus meinen früheren Versuchen (1885. Heft 1.). Ich lasse auch diese Resultate der Vollständigkeit halber im Auszuge hier folgen, bemerke jedoch, dass sich die Verlängerungen λ zwar auch auf 1 Meter Drahtlänge, aber auf die beigefügte Mehrbelastung π_2 (nicht 1 kg) pro qmm beziehen. Auch sind die auf der Spiegelskala sich zeigenden Verlängerungen (λ) nicht auf die Temperatur 0^0 reduziert, da die Verschiedenheit der Temperaturen t nicht so bedeutend ist, um den Zweck der Zusammenstellung zu vereiteln. Die Zahlen sind der Uebersichtlichkeit der Erscheinung wegen von den kleineren zu grösseren π_2 fortschreitend dargestellt, obwohl eine bestimmte Ordnung bei den Versuchen nicht eingehalten ward. Die Versuche sind immer an dem gleichen Exemplar einer Substanz vorgenommen. Zum Teil ist λ das Mittel aus zwei oder mehreren Versuchsgruppen.

Substanz:	π_1	π_2	λ		t.
Silber:	1,6422	6,4192	73,86	Sktl.	
	2,4633	„	71,52		$5—6^0$
	3,2844	„	70,04		
Platina:	2,0773	9,1098	40,23		
	4,1546	„	37,56		
	8,3092	„	36,74		$7—8^0$
	12,4638	„	36,46		
	16,6184	„	36,32		
	20,7730	„	36,21		
Kupfer:	4,0590	12,4670	77,57		
	8,1170	„	77,09		$6—8^0$
	10,1460	„	76,99		
Eisen:	4,8892	16,6110	71,40		
	9,7784	„	70,66		
	14,6676	„	70,42		$5—6^0$
	19,5568	„	70,04		

Blei:	0,0889	0,4423	20,53 Sktl.	3— 4°
	0,1778	„	20,32	
Messing:	2,3216	9,0153	69,75	
	4,6431	„	68,96	
	6,9647	„	68,54	4— 5°
	9,2862	„	68,65!	
	11,6078	„	68,36	
Neusilber:	4,2890	4,4783	26,35	
	5,7187	„	25,66	7— 8°
	7,1484	„	25,30	
Fischbein:	0,0978	0,1200	52,52	
	0,1956	„	52,20	12—13°
	0,3911	„	51,77	
	0,5867	„	51,56	

Es springt in die Augen, dass bei allen diesen Substanzen mit zunehmender Spannung π_1 die Dehnungsamplitude abnimmt, also der sekundäre E—M wächst. Es gewinnt hiebei den Anschein, als ob der sekundäre E—M sich einer Grenze näherte. Allein es ist diese Frage nicht spruchreif; denn fürs erste müssten die Versuche wenigstens an einem Metall hinsichtlich π_1 weiter fortgesetzt und ausserdem die wirklichen Dehnungen berechnet und auf gleiche Temperatur reduziert werden.

§ 22. Ueber die Ursache der Abweichung vom Proportionalitätsgesetz.

Jede Dehnung und Zusammenziehung des untersuchten Drahtes veranlasst eine Aenderung seines Querschnittes sowohl, als auch seiner Temperatur und es entsteht die Frage, ob die Abweichung vom Proportionalitätsgesetz durch eine dieser zwei Zustandsänderungen allein, oder durch deren Zusammenwirken im gleichen Sinne verursacht werden kann. Wir wollen zuerst dem Einflusse der Querkontraktion und zwar an dem hier untersuchten Kupferdrahte näher treten.

Behalten wir die früher (§ 11) gebrauchten Bezeichnungen bei und nennen den ursprünglichen Querschnitt des Drahtes, der bisher als konstant betrachtet wurde, F_t, seinen Radius R_t. Bei der Verlängerung l_t' mag alsdann der Radius r_t' und der Querschnitt F_t' bestehen. Infolge

der weiteren Verlängerung λ_t gehe der Halbmesser in r_t, der Querschnitt in f_t über. Ist ferner für die Verlängerung l_t' der Koëffizient der Querkontraktion ϱ', für jene $l_t' + \lambda_t$ der Wert desselben ϱ, so ist:

$$F_t = R_t^2 \pi$$
$$F_t' = F_t(1 - \varrho')^2 \quad \text{und}$$
$$f_t = F_t(1 - \varrho)^2$$

Wird mit q das Verhältnis zwischen Dilatation und Querkontraktion bezeichnet, so ist, wenn man l_t wegen seiner relativen Kleinheit vernachlässiget:

$$\varrho' = q \cdot \frac{l_t'}{L_0} \text{ und } \varrho = q \cdot \frac{l_t' + \lambda_t}{L_0}$$

Nun ist:

$$\frac{L_t}{E_t'} \cdot \frac{Z_2}{f_t} = \lambda_t = \frac{L_t}{E_t'} \cdot \frac{Z_2}{F_t(1-\varrho)^2}$$

Geht man auf die Temperatur 0^0 über, so wird:

$$\frac{L_0(1+\alpha t)}{E_0'(1-\gamma t)} \cdot \frac{Z_2}{F_0(1+2\alpha t)(1-\varrho)^2} = \lambda_t \quad \text{und}$$

$$\frac{1}{E_0'} = \frac{\lambda_t}{L_0 \pi_2} \cdot [1 - (\gamma - \alpha)t] \cdot (1 - \varrho)^2$$

$$\frac{1}{E_0'} = \lambda_0(1-\varrho)^2 = \lambda_0(1 - 2\varrho)$$

Da für die bei den vorliegenden Versuchen herrschenden niedrigen Werten von t angenähert $l_t' = \pi_1 \lambda_0 L_0$ und $\lambda_t = \pi_2 \lambda_0 L_0$ gesetzt werden darf, ist:

$$\varrho = q(\pi_1 + \pi_2)\lambda_0, \text{ folglich:}$$

$$\frac{1}{E_0'} = \lambda_0[1 - 2q(\pi_1 + \pi_2)\lambda_0] \qquad 9)$$

Der Wert von q ist bekanntlich nicht ganz sicher festgestellt. Das arithmetische Mittel der von Poisson und Wertheim angegebenen Werte ist $\frac{1}{2}(\frac{1}{4} + \frac{1}{3}) = 0{,}3$. Ob q für alle Metalle konstant sei, ist nicht bestätiget. Kirchhoff, Okatow, Schneebeli fanden für Stahl übereinstimmend ungefähr $q = 0{,}3$. Aber gerade für Kupfer fand W. Thomson [1]),

1) Handbuch d. theoretischen Physik v. W. Thomson u. Tait. Uebersetzt v. Helmholz u. G. Wertheim. I. Bd. II. Teil. § 684.

dass das Verhältnis der seitlichen Kontraktion zur longitudinalen Ausdehnung zwischen 0,226 und 0,441 liegt, was als Mittel ebenfalls ca. 0,3 gibt. Nach alledem können wir für Kupfer q = 0,3 setzen und erhalten:

$$\frac{1}{E_0'} = \lambda_0 [1 - 0{,}6\,(\pi_1 + \pi_2)\,\lambda_0] = \lambda_\varrho \qquad 10)$$

In Gl. 10) ist $\frac{1}{E_0'}$ der sekundäre E—K des Kupfers, der sich ergibt, wenn man die Querkontraktion berücksichtiget. Ich habe mit den Zahlenwerten der Uebersichten B und C einige Berechnungen ausgeführt, darunter auch für die höchste der in diesen Versuchen angewendeten Summe $\pi_1 + \pi_2$. Das Ergebnis der Berechnung ist:

	π_1	π_2	λ_ϱ	$\lambda_0 - \lambda_\varrho$
Aus B:	1,6234	3,5813	0,07484	0,00002
	1,6234	5,5527	0,07527	0,00002
	1,6234	7,3938	0,07657	0,00003
Aus C:	15,8280	7,3938	0,07374	0,00007

Man sieht, dass selbst bei der stärksten Querkontraktion ihr Einfluss auf die Dehnung kein 0,0001 mm erreicht. derselbe sich somit überhaupt der direkten Beobachtung in den hier angestellten Versuchen entzog.

Die seitliche Kontraktion allein verursacht also die beobachtete Abweichung von dem Proportionalitätsgesetze mit der Zunahme der Dehnungsamplitude nicht.

Was nun die Temperaturveränderung infolge der wiederkehrenden An- und Abspannungen des Drahtes betrifft, so lässt sich auch ihr Einfluss auf die Messung der Dehnungen mit Benützung einer früher von mir angestellten mathematischen Untersuchung in quantitativer Richtung beurteilen. Bezeichnet man nämlich die Veränderung, welche jede Dehnung infolge dieser Temperaturschwankung erlitten hat, mit F′ und jene, welche jede Verkürzung aus gleichem Grunde erleidet, mit F″, so ist:

$$b_\nu - a_\nu = \lambda' + F' \quad \text{und}$$
$$c_\nu - b_\nu = \lambda'' + F'' \quad \text{oder:}$$
$$\lambda' = (b_\nu - a_\nu) - F'$$
$$\lambda'' = (c_\nu - b_\nu) - F''$$

wenn λ' und λ'' die unabhängig von der Temperaturänderung entstehende Verlängerung resp. Verkürzung des Drahtes bedeutet. Nun wurde von mir gezeigt,[1]) dass

$$F' = \gamma_1 \cdot L\alpha \cdot k \cdot \lambda' \cdot \frac{1}{hz} \cdot \frac{e^{hz}-1}{e^{hz}+1}\left[2 - \frac{1}{(e^{hz})^{2\nu}} \cdot (e^{hz}-1)\, e^{hz}\right] \quad 11)$$

$$F'' = \gamma_1 \cdot L\alpha \cdot k\lambda'' \cdot \frac{1}{hz} \cdot \frac{e^{hz}-1}{e^{hz}+1}\left[2 + \frac{1}{(e^{hz})^{2\nu}}(e^{hz}-1)\right] \quad 12)$$ ist.

Darin haben L und α die bisherige Bedeutung. Der Faktor γ_1 verwandelt die wirkliche Verlängerung resp. Verkürzung des Drahtes in die Anzahl von Skalenteilen, welche die durch sie bewirkte Zeigerverstellung beträgt. Es ist e die Basis des natürlichen Logarithmensystems, z die Zeit einer An- oder Abspannung des Drahtes in Sekunden, ν die Ordnungszahl derselben. Es bedeutet ferner h die Konstante des Newton'schen Abkühlungsgesetzes und k das Verhältnis der Temperaturänderung Δt des Drahtes zur Dilatation λ' resp. λ''. Schon nach einer geringen Anzahl von An- und Abspannungen kann

$$F' = F'' = 2\gamma_1 \cdot L\alpha \cdot k\lambda \cdot \frac{1}{hz} \cdot \frac{e^{hz}-1}{e^{hz}+1} \quad 13)$$

gesetzt werden, wobei nach den Versuchsergebnissen bekanntlich auch $\lambda' = \lambda'' = \lambda$ wird. Bei der 4. und 5. Dilatation kann dies in der Regel schon geschehen. Zahlenwerte für k und h habe ich in einer früheren Arbeit,[2]) jedoch nur für Eisen, ermittelt. Es ergab sich, dass für $z = 24$ Sek. bei Eisen nach der 5. An- und Abspannung $F' = 0{,}16$, $F'' = 0{,}15$ Skalenteile beträgt. Die Zeit ist indes von verschwindendem Einflusse. Für Kupfer stehen mir die Zahlenwerte der Konstanten k und h nicht zu gebote. Wenn aber die Werte dieser Konstanten bei Eisen und Kupfer nicht sehr verschieden vorausgesetzt werden müssen, so lässt sich eine ungefähre Schätzung des fraglichen Einflusses bewerkstelligen, da dann F' und F'' ausser von α zunächst nur noch von λ und zwar in proportionaler Weise abhängt. Aus den von E. Edlund[3])

---

1) A. Miller, Sitzungsbericht der math.-physik. Klasse der k. b. Akademie d. Wissenschaften 1883. Heft 1.

2) A. Miller, Annalen d. Physik etc. 1883. Bd. 20. S. 94.

3) E. Edlund, Annalen d. Physik etc. 1865. Bd. 124. S. 539. Ziff. 7.

angegebenen Zahlen berechnete ich für Eisen k = 96,9,[1]) für Kupfer k = 106,3. also in der That nicht sehr erheblich abweichende Werte. Die zum obigen Wert F'' = 0,15 Sktl. gehörige Dehnung bei Eisen betrug ca. 150 Sktl., bei Kupfer für die grösste Dehnung ca. 50 Sktl. Berücksichtiget man noch, dass die Werte α bei Kupfer und Eisen ca. das Verhältnis $\frac{3}{2}$ haben, so wäre der Einfluss auf die bei unseren Versuchen stattgehabte grösste Dehnung des Kupferdrahtes $F' = F'' = \frac{0,15}{150} \cdot 50 \cdot \frac{3}{2}$ = 0,08 Skalenteile. Es würde hiernach der in Rede stehende Einfluss auch innerhalb der Grenze der Beobachtungsfehler fallen.

Die Abweichung vom Proportionalitätsgesetze dem Einflusse der durch die Dilatation des Drahtes verursachten Temperaturänderung desselben allein zuzuschreiben, ist sonach ausgeschlossen.

Die in diesem Paragraphen dargelegten Ergebnisse bieten aber auch keinen Grund, anzunehmen: beide in gleichem Sinne wirkenden Einflüsse zusammen seien die Ursache der bei unseren Versuchen beobachteten Abweichung von dem Proportionalitätsgesetze. Der Grund dürfte vornehmlich in der drehenden Nachwirkungsbewegung der Moleküle während der Dehnung zu suchen sein. Je grösser die Amplitude der Dehnung, desto grösser ist nach den hier vorliegenden Versuchen die Nachwirkung und damit auch die Abnahme der elastischen Reaktion, welche die Abweichung vom Proportionalitätsgesetze zur Folge haben kann.

§ 23. Allgemeine Betrachtungen über die Bestimmung des longitudinalen E—M.

Gewöhnlich lautet in den physikalischen Handbüchern die Anleitung zur Bestimmung des longitudinalen E—M dahin, dass er aus den Verlängerungen, die einem bekannten Zuge entsprechen. zu bestimmen sei. Die Zahlenwerte, welche Wertheim vor etwa 40 Jahren für den E—M der Metalle angegeben hat, werden heute noch in allen grösseren Lehrbüchern der Physik angeführt. Wertheim hat aber diese Modul aus den Verkürzungen berechnet. Tomlinson legt ebenfalls die Verkürzung

1) Hier mag bemerkt werden, dass ich aus meinen Versuchen der oben zitierten Arbeit für Eisen k = 97,3 berechnet habe.

der fadenförmigen Körper der Beurteilung ihres elastischen Verhaltens zu grunde. Da diese Forscher nicht begründen, warum sie statt der Verlängerung infolge der Belastung die Verkürzung nach der Entlastung zur Ermittelung des longitudinalen E—M anwenden, so scheint mir nicht so fast eine abweichende Meinung darüber zu bestehen, ob es richtiger sei, den E—M aus der Verlängerung statt aus der Verkürzung zu bestimmen; sondern die Anwendung verschiedener Verfahren dürfte vielmehr ihren Grund in der Annahme haben, es sei einerlei, welche von den beiden Längenveränderungen zur Anwendung komme. Dem wäre auch so, wenn sich der untersuchte Körper immer im Zustande vollkommener Elastizität befände. Dann wären Verlängerung und Verkürzung gleich und es ergäbe sich aus beiden Längenveränderungen der gleiche longitudinale E—M. Die mit I bezeichneten Versuchsgruppen in Tab. A zeigen indes, dass dies ebenso wenig der Fall ist, selbst wenn man 5 oder 15 Minuten nach der Entlastung abliest, als wenn man, wie in den Versuchsgruppen II Tab. A. die Ablesung sofort nach der Entlastung vornimmt. Es handelt sich hier freilich um Längen, die noch kaum 0,01 mm betragen, deren Messung somit bei der gebräuchlichen Ablesungsvorrichtung, dem Kathetometer, sehr unsicher wird, wenn sie nicht ganz entgehen, obschon sie, wie unsere Versuche zeigen, thatsächlich existieren.

Es scheint mir geboten, der Sache etwas näher zu treten. Um dies zu können, lasse ich die Verlängerungen und Verkürzungen der ersten Versuchsreihe jeder Gruppe der Tabelle C folgen. Da es kein strenges Kriterium gibt, wann nach der vollen Be- oder der gänzlichen Entlastung abgelesen werden soll, so dürfte die erreichbare Gleichheit hinsichtlich dieses Punktes auch erzielt sein, wenn, wie in den hier aufgeführten Versuchsreihen geschehen, die Ablesung sofort nach jeder vollen Be- und Entlastung geschieht. Dass die Temperaturänderung während der Dehnung ($b_1 - a_1$) und Verkürzung ($c_1 - b_1$), die im Draht selbst entsteht, oder durch die umgebende Luft veranlasst wird, nicht von erheblichem Belange für die vorliegende Frage ist, lässt sich aus einer einfachen Schätzung ermessen. Die Tab. C liefert nun:

π_2	π_1	$b_1 - a_1$	$c_1 - b_1$	$c_1 - a_1$	$\frac{c_1 - a_1}{\pi_1}$	$\frac{m}{\pi_2}$
3,5813	1,6234	23,6	— 23,3	0,3	0,19	
„	3,6526	23,9	— 23,0	0,9	0,25	
„	7,7110	23,9	— 22,7	1,2	0,16	0,052
„	15,8280	24,2	— 22,0	2,2	0,14	
					m = 0,185	
5,5527	1,6234	37,1	— 36,7	0,4	0,25	
„	3,6526	37,2	— 36,0	1,2	0,33	
„	7.7110	37,7	— 35,8	1,9	0,25	0,047
„	15,8280	38,7	— 35,2	3,5	0,22	
					m = 0,263	
7,3938	1,6234	50,0	— 49,2	0,8	0,49	
„	3,6526	50,1	— 48,8	1,3	0,36	
„	7,7110	50,6	— 48,2	2,4	0,31	0,051
„	15,8280	53,1	— 47,8	5,3	0,34	
					m = 0,375	

Beschränkt man die Betrachtung zuerst auf irgend eine Versuchsgruppe allein, so sieht man aus der Zunahme des Wertes $\Sigma (c_\nu - a_\nu)$ — Tabellen — dass der E—M während der Dehnungen und Verkürzungen in den einzelnen Versuchsreihen anfänglich rasch, dann langsam abnimmt und sich einer Grenze nähert. Wird die erste Dehnung und Verkürzung irgend einer Versuchsgruppe in's Auge gefasst, so lässt die obige Uebersicht ersehen, dass stets $b_1 - a_1 > c_1 - b_1$ ist. Würde somit der E—M aus $b_1 - a_1$ berechnet, so würde er kleiner ausfallen als durch die Berechnung aus $c_1 - b_1$. Diese Ungereimtheit zwingt, eine Entscheidung zu treffen, ob der E—M, aus der Verlängerung $b_1 - a_1$ oder der Verkürzung $c_1 - b_1$ bestimmt, seiner Definition mehr entspricht, insofern er, wie dies zur Bestimmung des gewöhnlichen longitudinalen E—M üblich ist, aus der ersten Deformation und nicht wie der sekundäre E—M bestimmt wird. Denn durch die Vorschrift, mit der Ablesung nach der Entlastung einige Zeit abzuwarten, verbessert sich die Sachlage nicht wesentlich, da ja die Versuche I in Tabellen A darthun, dass selbst nach längerer Zeit der Körper seine frühere Länge nicht vollständig

annimmt, obschon die Elastizitätsgrenze sicher (§ 19) nicht überschritten worden ist.

Nachdem aber festgestellt ist, woher der Unterschied $(c_1 - a_1)$ zwischen $(b_1 - a_1)$ und $-(c_1 - b_1)$ rührt, so kann die fragliche Entscheidung nicht mehr schwer fallen. Ich habe schon in früheren Arbeiten (1885. Heft 1. § 44.) und (II. Bl. XV. Bd. III. Abt. § 16.) auseinander gesetzt, dass die Längenzunahme $(c_\nu - a_\nu)$ des Drahtes nach jeder Dehnung und Verkürzung eine Abnahme des E—M während dieser Gestaltsänderung verrät. Es entspricht also dem π_1 während der Dehnnng nicht mehr jene Drahtlänge, die ihm v o r derselben zukam, sondern in der Regel eine um $c_1 - a_1$ grössere. Somit entspricht auch dem Zuge π_2 nicht die Verlängerung $b_1 - a_1$, sondern:

$$(b_1 - a_1) - (c_1 - a_1) = b_1 - c_1 = -(c_1 - b_1).$$

Daher muss man sich dafür entscheiden, den E—M nicht aus der Verlängerung, wie es in Handbüchern gefordert wird, sondern aus der Verkürzung zu berechnen. Es bietet dieses Ergebnis in der That nichts Ueberraschendes, sobald man bedenkt, dass eben nicht die Gestaltsänderung eines Körpers, der äusseren Kräften unterworfen wird, sondern die Wiederannahme der früheren Gestalt das Merkmal des Vorhandenseins der elastischen Eigenschaft der Substanz ausmacht. Der aus den Verkürzungen berechnete E—M kommt dann dem sekundären E—M, welcher dem Zustande vollkommener Elastizität entspricht, näher als der aus der Dehnung abgeleitete.

Vergleichen wir nun in obiger Zusammenstellung die Werte von $b_1 - a_1$ und $c_1 - b_1$ v e r s c h i e d e n e r Versuchsgruppen für ein k o n s t a n t e s π_2, so ersieht man, wie die ersteren mit wachsendem π_1 z u n e h m e n, indes die letzteren a b n e h m e n. Der E—M würde also nicht nur von der Anfangsbelastung π_1 abhängen, sondern sogar beim Uebergang von kleineren π_1 zu grösseren a b n e h m e n oder w a c h s e n, je nachdem man ihn aus den Verlängerungen $b_1 - a_1$ oder den Verkürzungen $c_1 - b_1$ berechnet. Dieser Widerspruch hebt sich, sobald man aus den oben angegebenen Gründen des Einflusses von π_1 auf $b_1 - a_1$ den E—M aus der V e r k ü r z u n g $c_1 - b_1$ bestimmt. Dann nehmen die gewöhnlichen E—M mit der b e s t ä n d i g e n Belastung π_1 zu, wie dies auch der sekundäre E—M thut.

§ 24. Abhängigkeit der Grösse der Nachwirkung $\Sigma\,(c_\nu - a_\nu)$ von π_1 und π_2.

In der letzten Zusammenstellung (§ 23) sind auch die Werte $\frac{c_1 - a_1}{\pi_1}$ berechnet. Ich betrachte sie für ein konstantes π_2 versuchsweise ebenfalls als konstant. Diese Quotienten stellen die E—N. welche der Einheit von π_1 entspricht, dar. Die darin auftretenden erheblicheren Abweichungen könnten in der Kleinheit der zu messenden $c_1 - a_1$ leicht ihre Erklärung finden. Darnach wären diese, nach der ersten Deformation sich zeigenden elastischen Nachwirkungen $c_1 - a_1$ der Grösse der ständigen Belastung π_1 nahezu proportional. Dies wäre ein Zeichen für die Richtigkeit meiner schon früher ausgesprochenen Ansicht, dass, wenn die Weber-Kohlrausch'sche Hypothese von der Drehung der Moleküle neben der Verschiebung wahr ist, die dadurch hervorgerufene Abnahme der inneren Reaktion durch eine proportionale elastische Dehnung zur Herstellung des Gleichgewichtes ausgeglichen werden müsse. Die Mittelwerte m der Quotienten $\frac{c_1 - a_1}{\pi_1}$ steigen mit π_2 proportional, denn der Quotient $\frac{m}{\pi_2}$ scheint für Kupfer konstant zu werden und den beiläufigen Wert $0{,}050 = C_1$ anzunehmen. Es ist diese Zahl C_1 die E—N, welche L Meter des Kupferdrahtes zeigen, wenn er mit 1 kg pro qmm ständig belastet und mit 1 kg einmal gedehnt und dann sofort wieder entlastet wird. Sonach wäre allgemein: $\frac{c_1 - a_1}{\pi_1} : \pi_2 = C_1$ oder $c_1 - a_1 = C_1 \pi_1 \pi_2$. Für einen Draht von 1 Meter Länge ergibt sich als E—N die Grösse $l_1 = \frac{C_1}{L} \cdot \pi_1 \pi_2 = C \pi_1 \pi_2$. Für Kupfer hätte man dann

$$C = \frac{C_1}{L} = \frac{0{,}050}{1{,}1} = 0{,}0455 \text{ Skalenteile} = 0{,}0455 \cdot 0{,}00631 \cdot 2 \text{ mm} = 0{,}00057 \text{ mm}$$

für die 1. Deformation durch einmaliges An- und Abspannen des Drahtes.

Ein ungleich höheres Interesse hätte die Konstante, welche sich etwa ergäbe, wenn die Deformationen bis zum Uebergang des Körpers in den vorübergehend vollkommen elastischen Zustand fortgesetzt würden.

Das nötige Zahlenmaterial für Verfolgung dieser Frage findet sich in Uebersicht C (§ 15) und zwar, entgegen dem oben für die erste Deformation benützten, in Bezug auf Temperatureinfluss etc. bereits

korrigiert. Da jedoch die Zahlen l_0 der ersten Horizontalreihe wegen der Kleinheit der gemessenen Grössen an Zuverlässigkeit hinter jenen der übrigen Reihen sicher zurückstehen, und noch mehr, weil auch die der ersten Reihe vorangehende längere Ruhe des Drahtes unter der Anfangsbelastung π_1 (§ 7), sowie der Uebergang von der grösseren zur kleineren Belastung π_1, die Grösse von l_0 beeinflussen kann, ja voraussichtlich wird, so will ich zur Bestimmung der Mittelwerte m nur die Zahlen l_0 der drei letzten Horizontalreihen gebrauchen.

$m = l_0$	$\frac{m}{\pi_2}$
0,00206	0,000575
0,00315	0,000567
0,00435	0,000588

Der Mittelwert der Quotienten $\frac{m}{\pi_2}$ ist: $C = 0{,}000577$, so dass die Konstante C für eine und fünf Deformationen als gleich angesehen werden darf. Da der letzte Wert von C ein höheres Vertrauen beanspruchen kann als der vorige aus der ersten Gestaltsänderung hervorgegangene, so dürften wir annehmen, dass 1 Meter des Kupferdrahtes für die Kilogramm-Einheit von π_1 und π_2 um 0,00058 mm sich vorübergehend verlängert, wenn er bis zum Uebergang in den vorübergehend vollkommen elastischen Zustand ununterbrochen deformiert wird. Für Kupferdraht von der Länge L und die Belastungen π_1 und π_2 wäre sonach bei der Temperatur 0^0 die Grösse der E—N

$$l_0 = 0{,}00000058\,L : \pi_1 \pi_2 = C \cdot L \cdot \pi_1 \pi_2 \text{ Meter}, \qquad 13)$$

hiemit den Belastungen π_1 und π_2 proportional.

Wenn man allgemein mit E_s den sekundären und mit E_p den primären E—M bezeichnet, so ist (II. Cl. XV. Bd. III. Abt. § 14. Gl. J und L)

$$E_s = \frac{\pi_2}{\lambda} \quad \text{und}$$

$$E_p = \frac{\pi_2}{\lambda - kl} = \frac{\pi_2}{\lambda - \frac{\pi_2}{\pi_1} \cdot C\pi_1\pi_2} = \frac{\pi_2}{\lambda - C\pi_2^2} = \frac{E_s}{1 - C\pi_2 E_s} .$$

Folglich:

$$\frac{E_p}{E_s} = \frac{1}{1 - C\pi_2 E_s}.$$

Hiernach ist das Verhältnis $\frac{E_p}{E_s}$ nicht konstant, sondern alles was bei konstantem π_2 den Wert E_s erhöht, also insbesonders die Zunahme der Spannung π_1, würde dieses Verhältnis vergrössern, oder E_p würde rascher als E_s wachsen.

Allein diese Darlegung macht es nur wahrscheinlich, dass unter sonst gleichen Umständen die Grösse l_0 der E—N bei aufeinanderfolgenden Versuchsgruppen nahezu gleich sei. Sie unter allen Umständen als nur von π_1 und π_2 allein abhängig zu betrachten, ist nach den sonstigen Wahrnehmungen kaum zulässig. Es ist vielmehr anzunehmen, sie hänge auch, abgesehen von der Temperatur, was ja nach meinen früheren Versuchen (II. Cl. XV. Bd. III. Abt.) zweifellos ist, von der Dauer ϑ der vorhergegangenen Ruhe des Drahtes ab. Sobald man Versuche nicht in der geordneten Aufeinanderfolge, wie hier geschehen, vornehmen würde, dürfte sich dies voraussichtlich deutlich zeigen. Der letzte der obigen Ausdrücke liefert

$$C = \frac{1}{\pi_2}\left(\frac{1}{E_s} - \frac{1}{E_p}\right) = \frac{1}{\pi_2^2}(\lambda - \delta).$$

Es müsste also mit π_2 auch $\lambda - \delta = \varrho$ konstant sein, was in unseren Versuchen auch thatsächlich ziemlich zutrifft. Sobald jedoch die Anordnung der Versuchsgruppen in Bezug auf π_1 und π_2 nicht nur, sondern auch in Rücksicht auf die Dauer ϑ der Ruhepausen des Drahtes von Gruppe zu Gruppe eine sehr wechselnde ist, so lässt sich ein konstantes ϱ nicht mehr erwarten. In der That stellt sich dies bei meinen früheren Versuchen (1885. Heft 1.) zweifellos heraus.

Die in Tabelle D dargestellten Versuche wurden mit dem stets gebrauchten Drahtexemplar ausgeführt. Die Zeitzwischenräume der einzelnen Versuchsgruppen sind ebenfalls 5 bis 10 Minuten. Sie wurden also hinsichtlich der Ruhepausen unter den gleichen Bedingungen wie die Versuche der Tab. C ausgeführt, jedoch in Bezug auf die Belastungen π_1 und π_2 davon wesentlich abweichend. Es liesse sich also erwarten, dass die nach Gl. 5) auf 0^0 reduzierten E—N, wie solche beobachtet

worden sind, auch aus Gl. 13) sich ergeben, wenn man $L = 1{,}1$ und für π_1 und π_2 die in Tab. D angeführten Werte nimmt. Die folgende Uebersicht enthält diese Werte in mm:

l_0 beobachtet:	l_0 berechnet:	Δ
0,0095	0,0077	0,0018
0,0298	0,0273	0,0025
0,0653	0,0561	0,0092

Im allgemeinen richten sich die berechneten Werte zwar nach den beobachteten, doch sind jene durchwegs kleiner als diese. Dies wird begreiflich, wenn man erwägt, dass zwischen den Versuchen der Tabelle C und D eine Ruhe des Drahtes vom 4. Februar bis 23. März, also von 46 Tagen liegt. Die Moleküle hätten darnach grössere Drehungen von ihrer ursprünglichen Gleichgewichtslage weg vollführt als bei den Versuchen der Tab. C, weil sie auch genügend Zeit gehabt haben, sich dieser Lage mehr zu näheren, indem den Versuchen der Tab. C fast unmittelbar jene der Tab. B vorausgingen. Der Wert der Konstanten C hängt somit voraussichtlich von der Dauer ϑ ab. Aus den beobachteten Werten l_0 der vorigen Uebersicht berechnet sich denn auch nach Gl. 13) $C = 0{,}00072$; $0{,}00063$; $0{,}00068$ und als Mittel hievon 0,00068, indes sich aus Tab. C 0,00058 (in mm) ergab. Die Differenz ist dem Einflusse der oben erwähnten langen Ruhepause zuzuschreiben. Nahe liegt es anzunehmen, der unbekannte Einfluss der Dauer der Ruhe des Drahtes mache sich mit der Zunahme der Summe $\pi_1 + \pi_2$ mehr geltend und hiedurch würde das Wachsen der Grösse Δ erklärlich.

§ 25. Die Bestimmung des longitudinalen E—M.

Aus den in § 23 dargelegten Ergebnissen geht hervor, dass die Bestimmung des longitudinalen E—M aus der ersten Dehnung, gleich viel, ob sofort nach dem Eintreten der vollen Wirkung der Belastung abgelesen, oder der grösste Teil der Nachwirkung abgewartet wird, zu einem ungenauen Zahlenwert für den Modul führt.

Der auf diese Weise berechnete Modul wird zu klein und ist, was viel mehr von Belang, in ganz erheblicher Art von der ständigen Belastung π_1 abhängig. Will man dennoch aus der ersten Gestalts-

änderung den E—M berechnen, so empfiehlt es sich, hiebei die erste Verkürzung statt der Verlängerung in Rechnung zu ziehen, wodurch man der Wahrheit sich sehr bedeutend nähert. Auf diese Weise ist, wie bereits erwähnt, Wertheim bei seinen bekannten Untersuchungen, abweichend von den jetzigen Vorschriften der physikalischen Handbücher, verfahren. Wenn sich auch bei ihm selbst an dem nämlichen Individuum Unterschiede in den Zahlenwerten des E—M ergeben haben, die in zufälligen Beobachtungsfehlern ihre Erklärung nicht finden können, so rührt dies, von den Temperaturverhältnissen abgesehen, augenscheinlich zum grossen Teil von den von mir konstatierten Einflüssen, die Wertheim nicht beachten konnte, her.

Einen konstanten Wert hat, wie die Ergebnisse dieser Untersuchung darthun dürften, bei gleicher Spannung π_1 und gleicher Amplitude der Dehnung, also gleichem π_2, nur der sekundäre E—M. Dieser Wert ist zu allen Zeiten bei sonst gleichen Umständen derselbe, welche anderen Längsgestaltänderungen der Körper zwischen zwei Versuchen mit den gleichen Werten von π_1 und π_2 erlitten haben mag.

Um also die sekundären E—M verschiedener Individuen einer Substanz vergleichsfähig zu erhalten, müsste eine Normalspannung π_1 vereinbart werden. Eine Vereinbarung einer bestimmten Dehnungsamplitude (π_2) wäre alsdann nicht mehr nötig, sobald als feststehend erachtet werden würde, dass ein für allemal $\pi_2 = \pi_1$ zu nehmen sei. Die Grösse π_1 dürfte zur Erlangung der nötigen Genauigkeit der Messung und der Sicherheit des Geradehaltens des Drahtes nicht zu klein sein und müsste so gewählt werden, dass bei 0^0 der Temperatur des Drahtes $\pi_1 + \pi_2 = 2\,\pi_1$ die Elastizitätsgrenze sicher nicht überschritten werden würde. Anderseits müsste $\pi_2 = \pi_1$ gross genug sein. um eine möglichst sichere Beobachtung zu erzielen. Für Kupfer beispielsweise könnte sich nach meinen Erfahrungen etwa $\pi_1 = 5$ kg empfehlen. Allein damit sind nicht alle Schwierigkeiten gehoben, wenn man auch auf die Vergleichung des sekundären E—M verschiedener Substanzen Rücksicht nimmt; denn bei diesen müsste die Normalspannung sich auch nach ihrer Elastizitätsgrenze richten. Würde man für die verschiedenen Metalle als Normalspannung π_1 jene voraussetzen, die gleiche Verlängerungen liefert, etwa dieselbe, welche 5 kg bei Kupfer hervorbringen, so ergäbe sich

beispielsweise für Platina $\pi_1 = 7{,}544$ kg, Blei $\pi_1 = 0{,}9793$ kg. Während der Wert für Platina für den praktischen Bedarf fast zu klein ist, ist der für Blei geradezu unbrauchbar; denn bei ca. 2 kg pro qmm Belastung reisst Blei schon. Auf diesem Weg wird sonach das Ziel schwerlich erreicht werden können und kaum ein anderer überbleiben, als die Elastizitätsgrenze zum Ausgangspunkt für die Normalspannung π_1 zu wählen. Nehmen wir an, es gäbe für die Elastizitätsgrenze ein sicheres Merkmal und es wäre die ihr entsprechende Dehnungsbelastung π_0 pro qmm des Querschnitts und 1 Meter Länge des Drahtes für die einzelnen Substanzen sicher bestimmt, so könnte man, vorausgesetzt dass, wie oben vorgeschlagen, $\pi_1 = \pi_2$ genommen würde, zur Fixierung des π_1 die Gleichung $3\pi_1 = \pi_0$ zu grunde legen. Es würde sonach ein Draht durch die Belastung $\pi_1 + \pi_2 = 2\pi_1$ Zweidritteile jener elastischen Dehnung erleiden, deren er überhaupt fähig ist. Das übrige Drittel böte die volle Sicherheit, dass man innerhalb der Elastizitätsgrenze arbeitet. Auf diese Weise ständen allerdings die Drähte verschiedener Substanzen nicht unter gleicher Spannung π_1, aber verschiedene Experimentatoren würden unter den gleichen jener Umstände arbeiten, die für die Bestimmung des sekundären E—M überhaupt in erster Linie in Betracht kommen. Alle Körper würden stets gleichsam an korrespondierenden Stellen ihrer grössten elastischen Dehnung geprüft, nämlich immer in demjenigen Zustande, in dem die Moleküle zu dieser grösstmöglichen elastischen Dehnung proportionale Verschiebungen durch die ständige Belastung π_1 bereits erlitten haben, und durch die Dehnungsbelastung π_2 noch erleiden werden. Abweichende Resultate könnten alsdann der zufälligen physikalischen und chemischen Beschaffenheit der Individuen gleicher Substanz mit einiger Berechtigung zugeschrieben werden. Nach dem dermalen üblichen, in den physikalischen Handbüchern vorgeschriebenen Verfahren, den gewöhnlichen longitudinalen E—M zu bestimmen, ist eine genügende Uebereinstimmung der Versuchsergebnisse nicht zu erwarten, und wo diese eintrifft, darf sie meist lediglich als zufällig erachtet werden. Nicht nur Temperatur, sondern auch die Grösse der ständigen Belastung π_1 und der Dehnungsbelastung π_2 ist auf den gewöhnlichen longitudinalen E—M sowohl, als auch auf den sekundären von Einfluss. Der Nachwirkungszustand, mit welchem der Draht in den

Versuch eintritt, ist für den Wert des gewöhnlichen E--M sehr von Belang, und erklärt die abweichenden Wertangaben desselben. Würde man die von Wertheim bestimmten Werte von π_0 zugrunde legen, so ergäbe sich als Normalspannungen π_1, also auch als Dehnungsbelastungen π_2 bei nicht angelassenen Metallen für Temperaturen zwischen 0^0 und 15^0 C. für:

Blei	0,08 kg	Zink	0,25 kg	Eisen	11,0 kg
Gold	4,0 „	Kupfer	4,0 „	pro qmm.	
Silber	4,0 „	Platina	9,0 „		

Für höhere Temperaturen müssten freilich diese Angaben sich ändern. Wenn es sich aber nur um die Kenntnis des sekundären E—M handelt, wird es sich überhaupt empfehlen, ihn für die Temperatur 0^0 zu bestimmen, und mit Zuhilfenahme der thermischen Konstanten seinen Wert für höhere Temperaturen zu berechnen.

Wenn man die Spannung π_1 des Drahtes fortgesetzt erhöht, so steigt sein sekundärer E—M. Es ist nicht ganz unwahrscheinlich, dass dieser sich einer bestimmbaren Grenze nähert und es könnte vielleicht sein, dass die dieser Grenze entsprechende Spannung π_1 ein geeignetes natürliches Merkmal für einen bestimmten elastischen Zustand abgäbe. Diese Andeutung müsste jedoch einer eingehenden experimentellen Prüfung noch unterzogen werden.

§ 26. Ergebnisse.

Um die Uebersicht der Ergebnisse dieser Arbeit zu erleichtern, fasse ich sie in Folgendem zusammen, wobei ich jedoch einige Male auch auf Resultate meiner früheren Arbeiten der Vollständigkeit halber zurückgreife. Zugleich verweise ich in der Regel auf die Paragraphen dieser Abhandlung, worin sich die näheren Ausführungen vorfinden.

1) Durch mehrmals wiederholtes An- und Abspannen oder Ab- und Anspannen eines bereits gespannten Drahtes kann dieser in vorübergehend vollkommen elastischen Zustand übergeführt werden. (§ 4.)

2) Während dieser Gestaltsänderungen ändert der Körper seine elastische Reaktion. Den longitudinalen Elastizitätsmodul (E—M), welchen der Körper vor der Deformation besitzt, heisse ich den primären E—M,

jenen nach derselben, im vollkommen elastischen Zustande also, den sekundären E—M. (§ 11.)

3) Der sekundäre E—M ist kleiner als der primäre, wenn die Deformationen mit einer Anspannung beginnen und mit einer Abspannung endigen; die Elastizität vermindert sich während dieses Vorganges. Bei Umkehrung des Versuches tritt eine Erhöhung der Elastizität ein. (§ 11.)

4) Die in Handbüchern der Physik gegebene Vorschrift, den longitudinalen E—M aus der ersten Dehnung zu berechnen, führt zu einem nicht sehr genauen Zahlenwert desselben. Einen genaueren, sich mehr dem des sekundären E—M nähernden Wert liefert die erste Verkürzung. (§ 23.)

5) Als richtiges Mass der elastischen Reaktion eignet sich der sekundäre E—M. (§ 15.)

6) Der Wert des gewöhnlichen — aus der ersten Dehnung oder Zusammenziehung berechnete — E—M hängt von der ständigen Spannung (π_1) ab; jedoch kann sich sein Wert sogar mit π_1 in verschiedenem Sinne ändern, jenachdem er aus der ersten Dehnung oder Verkürzung berechnet wird. (§ 23.)

7) Auch der sekundäre E—M ändert sich mit der Spannung π_1, jedoch mit dieser stets in gleichem Sinne und erreicht vermutlich ein Maximum für einen gewissen Wert von π_1. (§ 15. § 20. § 21.)

8) Selbst im Zustande temporärer vollkommener Elastizität befolgen die Körper das Proportionalitätsgesetz nicht genau. (§ 15. § 20. § 21.)

9) Mit Zunahme der durch die Mehrbelastung (π_2) erzeugten Dehnungsamplitude nimmt der sekundäre E—M bei konstanter ständiger Spannung (π_1) ab. (§ 15. § 20. § 21.)

10) Dagegen nimmt der sekundäre E—M bei zwei Versuchen mit der gleichen ständigen Belastung π_1 und der gleichen Mehrbelastung π_2 immer wieder den gleichen Wert an, welche Gestaltsänderungen bei beliebigen Werten von π_1 und π_2 der Draht zwischen dem ersten und zweiten Dehnungsversuch auch bestanden haben mag. (§ 15. § 20.)

11) Hierin (Ziff. 10.) liegt die eigentliche Bedeutung des sekundären E—M; denn diese Eigenschaft wohnt dem Körper, so lange er nicht in

den vollen elastischen Zustand übergeführt worden ist, nicht bei. Daraus erklären sich auch die erheblichen Differenzen in den Werten des nach dem gewöhnlichen Verfahren bestimmten longitudinalen E—M, die nicht nur bei der gleichen Substanz, sondern sogar bei dem nämlichen Versuchsobjekt gefunden werden. (§ 12.)

12) Selbst bei nicht überschrittener Elastizitätsgrenze nimmt ein gedehnter Draht, habe die dehnende Kraft dauernd oder nicht gewirkt, nach der Entlastung seiner frühern Länge nicht sogleich, sondern erst nach längerer Zeit wieder an. (§ 12. § 19.)

13) Behufs Erzielung einer Vergleichsfähigkeit der Resultate der experimentellen Bestimmung des longitudinalen E—M ist es notwendig, für jede Substanz eine Normalspannung π_1 pro qmm — Belastung zum Geradehalten — festzusetzen, bei welcher verschiedene Experimentatoren untersuchen. (§ 25.)

14) Desgleich ist auch für jede Substanz die Mehrbelastung π_2 pro qmm zu vereinbaren; es empfiehlt sich, für jede Substanz $\pi_2 = \pi_1$ zu nehmen. (§ 25.)

15) Nur bei Beachtung der in Ziff. 13) und 14) gemachten Vorschläge ist bei thatsächlich gleicher elastischer Beschaffenheit zweier Körper der gleichen Substanz auch der gleiche sekundäre E—M zu erwarten. Diese Vorsicht ist in noch höherem Masse für den gewöhnlichen E—M (aus der ersten Dehnung oder Verkürzung berechnet) geboten, der aber selbst dann kein sehr zuverlässiges Mass der elastischen Reaktion bietet. (§ 23.)

16) Als alleinige Ursache der Abweichung der Grösse der elastischen Dehnung vom Proportionalitätsgesetze kann die die Dehnung begleitende Querkontraktion nicht angesehen werden. (§ 22.)

17) Die durch mehrmals wiederholte Dehnung und Zusammenziehung des Drahtes bewirkte Temperaturerhöhung desselben beeinflusst zwar in geringem Grade die Messung der Dehnung und Verkürzung in gleichem Sinne wie die Querkontraktion; jedoch auch dieser Einfluss kann nicht als alleinige Ursache der Abweichung vom Proportionalitätsgesetze betrachtet werden. (§ 22.)

18) Die Quantität beider in Ziff. 16) und 17) erwähnten Einflüsse zusammen, obwohl in gleichem Sinne wirkend, reicht kaum hin, um die Abweichung vom Proportionalitätsgesetze zu erklären. (§ 22.)

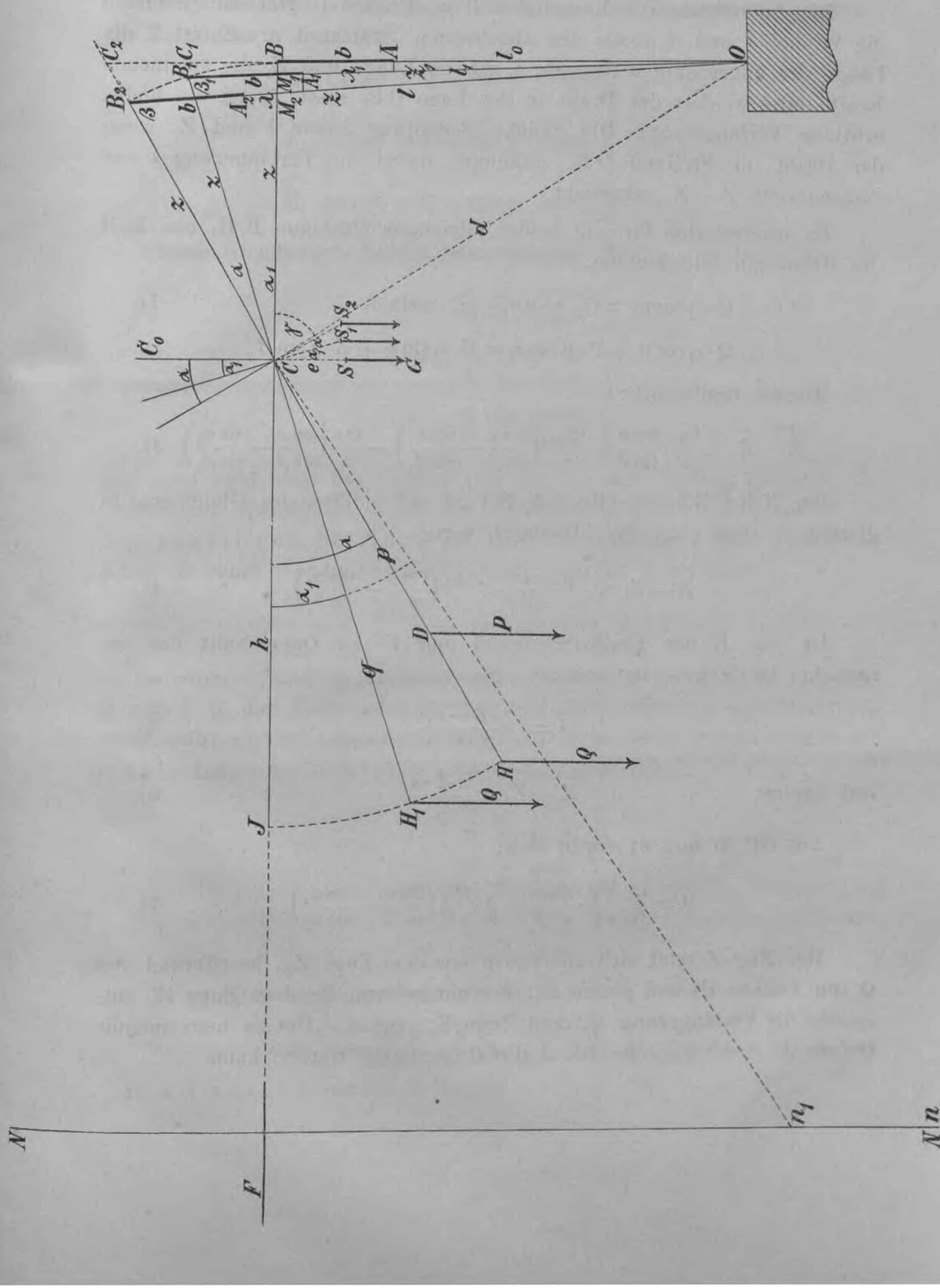
19) Der Grund dieser Abweichung dürfte in der mit der Zunahme der Dehnungsamplitude sich erhöhenden elastischen Nachwirkung zunächst zu suchen sein, da diese die elastische Reaktion vermindert. (§ 22.)

Anhang.

Die Theorie des zu den vorhergehenden Versuchen verwendeten Apparates.

Ein Bild der Vorrichtung findet sich in den Sitzungsberichten der mathematisch-physikalischen Klasse der k. b. Akademie der Wissenschaften 1882. Heft 4. Die nachfolgende Untersuchung nimmt auf die hier beigefügte schematische Zeichnung Bezug.

Die Vorrichtung ist ein ungleicharmiger, in C unterstützter Hebel B J vom Gewichte G. Das Drahtstück O A ist bei O und A eingeklemmt. Der Punkt O ist fest. Anfänglich ist B J horizontal. Senkrecht zu B J steht der Spiegel $C C_0$. Die Spiegelskala N N ist senkrecht, und rechtwinkelig dazu steht das Ablesefernrohr F, in dessen horizontalen Achsenebene der Nullpunkt liegt. O B ist vertikal. Durch die Anfangsbelastung (ständige Belastung) Q kommt B J in die Lage $B_1 H_1$ und der Draht in die Richtung $O B_1$. Infolge des Anhängens eines weiteren Gewichtes P im Punkte D erhält die Achse der Hebelstange die Lage $B_2 H$ und der Draht die Richtung $O B_2$. Alle in Betracht kommenden Dimensionen des Apparates sind in Skalenteilen gemessen. Die Entfernung der Skala N N vom Spiegel $C C_0$ sei h. Ferner ist $C B = z$, $C H_1 = C H = q$, $C D = p$ und $C S = e$ die Entfernung des Schwerpunktes S des Hebels samt dem um B drehbaren Stück $B A = b$ von C. Durch Anhängen des Gewichtsstückes Q (Kilogramm) in H_1 dreht sich die Achse der Hebelstange aus der horizontalen Lage um den Winkel α_1 und es entsteht zugleich der Winkel β_1; im Fernrohr wird nun der Skalenteil n_1 abgelesen.



C_2
B_2
B_1
C_1
B
A
b
l_0
O
l_1
l
A_1
M_1
M_2
A_2
β
β_1
λ
λ_1
z
a
a_1
d
C_0
C
e
γ
S
S_1
S_2
G
p
q
h
D
H
H_1
Q
J
F
N
n_1
n

Die Anbringung des Laststückes P im Punkte D gibt entsprechend die Winkel α und β, sowie den abgelesenen Skalenteil n. Es ist l_0 die Länge des ungespannten Drahtes; l_1 ist die Länge und Z_1 die spannende Kraft, unter welcher der Draht in der Lage OB_1 steht; λ_1 sei die hiebei erlittene Verlängerung. Die gleiche Bedeutung haben l und Z, wenn der Draht die Stellung OB_2 einnimmt, wobei die Verlängerung λ der Zugänderung $Z - Z_1$ entspricht.

Es ergeben sich für die beiden Gleichgewichtslagen B_1H_1 und B_2H des Hebels die Gleichungen:

$$Q \cdot q \cos\alpha_1 = G \cdot e \sin\alpha_1 + Z_1 \cdot z \sin\beta_1 \qquad 1)$$

$$Q \cdot q \cos\alpha + P \cdot p \cos\alpha = G \cdot e \sin\alpha + Z \cdot z \sin\beta \qquad 2).$$

Hieraus ergibt sich:

$$Z - Z_1 = \frac{P\,p}{z} \cdot \frac{\cos\alpha}{\sin\beta} + \frac{Q\,q}{z} \cdot \left(\frac{\cos\alpha}{\sin\beta} - \frac{\cos\alpha_1}{\sin\beta_1}\right) - \frac{G\,e}{z}\left(\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} - \frac{\sin\alpha_1}{\sin\beta_1}\right) \quad 3).$$

Der Hebel BJ einschliesslich BA ist auf indifferentes Gleichgewicht gestellt, so dass $e = o$ ist. Hiedurch wird:

$$Z - Z_1 = \frac{P\,p}{z} \cdot \frac{\cos\alpha}{\sin\beta} + \frac{Q\,q}{z}\left(\frac{\cos\alpha}{\sin\beta} - \frac{\cos\alpha_1}{\sin\beta_1}\right) \qquad 4).$$

Ist nun E der Elastizitätsmodul und F der Querschnitt des gespannten Drahtes, so hat man:

$$\lambda = \frac{l_1 \cdot (Z - Z_1)}{E \cdot F} \qquad 5)$$

und daraus:

$$Z - Z_1 = \frac{E \cdot F \cdot \lambda}{l_1} \qquad 6).$$

Aus Gl. 4) und 6) ergibt sich:

$$\lambda = \frac{l_1}{E} \cdot \frac{P\,p}{z\,F} \cdot \frac{\cos\alpha}{\sin\beta} + \frac{l_1}{E} \cdot \frac{Q\,q}{z\,F}\left(\frac{\cos\alpha}{\sin\beta} - \frac{\cos\alpha_1}{\sin\beta_1}\right) \qquad 7).$$

Der Zug Z setzt sich zusammen aus dem Zuge Z_Q, herrührend von Q (im Punkte H) und jenem Z_P, herrührend von P; dem Zuge Z_Q entspricht die Verlängerung λ_1', dem Zuge Z_P jene λ'. Die zu bestimmende Grösse ist somit λ', indes nur λ direkt gemessen werden kann.

Nun bestehen ohne Berücksichtigung der Querschnittkontraktion die Relationen:

$$Z_Q \cdot z \sin\beta = Q \cdot q \cos\alpha, \text{ sowie } \frac{l_0 \cdot Z_Q}{E \cdot F} = \lambda_1';$$

$$Z_P \cdot z \sin\beta = P \cdot p \cos\alpha, \text{ sowie } \frac{l_0 \cdot Z_P}{E \cdot F} = \lambda';$$

$$Z_1 \cdot z \sin\beta_1 = Q \cdot q \cos\alpha_1, \text{ sowie } \frac{l_0 \cdot Z_1}{E \cdot F} = \lambda_1.$$

Diese Gleichungen liefern paarweise die Werte:

$$\lambda_1' = \frac{l_0}{E} \cdot \frac{Q\,q}{F\,z} \cdot \frac{\cos\alpha}{\sin\beta} \qquad 8)$$

$$\lambda' = \frac{l_0}{E} \cdot \frac{P\,p}{F\,z} \cdot \frac{\cos\alpha}{\sin\beta} \qquad 9)$$

$$\lambda_1 = \frac{l_0}{E} \cdot \frac{Q\,q}{F\,z} \cdot \frac{\cos\alpha_1}{\sin\beta_1} \qquad 10)$$

und man sieht, dass das Produkt der zweiten und dritten Faktoren die Grösse der spannenden Kraft der Flächeneinheit des Querschnittes in der jeweiligen Stellung des Drahtes ausdrückt. Diese spannende Kraft ist somit veränderlich. Setzt man die Konstanten:

$$\frac{Q\,q}{F\,z} = \pi_1 \text{ und } \frac{P\,p}{F\,z} = \pi_2,$$

so bedeuten π_1 und π_2 die spannenden Kräfte, welche durch die Gewichte Q und P in der Flächeneinheit des Querschnittes hervorgebracht würden, wenn während der Anspannung der Draht seine ursprüngliche vertikale Lage beibehielte. Darnach ergibt sich:

$$\lambda_1' = \frac{l_0}{E} \cdot \pi_1 \cdot \frac{\cos\alpha}{\sin\beta}$$

$$\lambda' = \frac{l_0}{E} \cdot \pi_2 \cdot \frac{\cos\alpha}{\sin\beta}$$

$$\lambda_1 = \frac{l_0}{E} \cdot \pi_1 \cdot \frac{\cos\alpha_1}{\sin\beta_1}$$

Es gestaltet sich die Gleichung 7) um in:

$$\lambda = \frac{l_1}{E} \cdot \pi_2 \cdot \frac{\cos\alpha}{\sin\beta} + \frac{l_1}{E} \cdot \pi_1 \cdot \frac{\cos\alpha}{\sin\beta} - \frac{l_1}{E} \cdot \pi_1 \cdot \frac{\cos\alpha_1}{\sin\beta_1} \qquad 11)$$

Führt man die obigen Werte in 11) ein, so wird:

$$\lambda = \frac{l_1}{l_0} \cdot \lambda' + \frac{l_1}{l_0} \cdot \lambda_1' - \frac{l_1}{l_0} \cdot \lambda_1, \qquad 12)$$

woraus sich

$$\lambda' = \frac{l_0}{l_1} \lambda + (\lambda_1 - \lambda_1') \qquad 13)$$

ergibt.

Da aber $l_1 = l_0 + \lambda_1$ und $l = l_1 + \lambda = l_0 + \lambda_1 + \lambda$ ist, so geht Gl. 13) über in:

$\lambda' = \frac{l_0}{l_0 + \lambda_1} \cdot \lambda + (\lambda_1 - \lambda_1')$ oder

$\lambda' = \left(1 - \frac{\lambda_1}{l_0}\right) \lambda + (\lambda_1 - \lambda_1')$ und, wenn man das Glied $\frac{\lambda}{l_0} \cdot \lambda_1$ vernachlässiget:

$$\lambda' = \lambda - (\lambda_1' - \lambda_1). \qquad 14)$$

Nimmt man somit für die zu messende Grösse λ' den gemessenen Wert λ, so frägt es sich, wie gross der Fehler

$$f = \lambda_1' - \lambda_1 = \frac{l_0}{E} \cdot \pi_1 \left(\frac{\cos \alpha}{\sin \beta} - \frac{\cos \alpha_1}{\sin \beta_1}\right) \qquad 15) \text{ ist.}$$

Setzen wir: $\frac{\cos \alpha}{\sin \beta} - \frac{\cos \alpha_1}{\sin \beta_1} = \chi$, so ist zunächst χ zu ermitteln und der Fehlerbetrag

$$f = \frac{l_0}{E} \cdot \pi_1 \cdot \chi. \qquad 16)$$

Wenn man nun $OC = d$ und $\sphericalangle OCB = \gamma$ setzt, so ist:

$\sin \beta_1 = \frac{d}{OB_1} \cdot \sin (\gamma + \alpha_1) = \frac{1}{OB_1} [OB \cdot \cos \alpha_1 + z \sin \alpha_1]$, ferner:

$\sin \beta = \frac{d}{OB_2} \cdot \sin (\gamma + \alpha) = \frac{1}{OB_2} [OB \cdot \cos \alpha + z \sin \alpha]$.

Folglich wird:

$\frac{\cos \alpha_1}{\sin \beta_1} = \frac{OB_1 \cdot \cos \alpha_1}{OB \cdot \cos \alpha_1 + z \sin \alpha_1} = \frac{OB_1}{OB + z \operatorname{tg} \alpha_1} = \frac{OB_1}{OC_1}$ und

$\frac{\cos \alpha}{\sin \beta} = \frac{OB_2 \cdot \cos \alpha}{OB \cdot \cos \alpha + z \sin \alpha} = \frac{OB_2}{OB + z \operatorname{tg} \alpha} = \frac{OB_2}{OC_2}$.

Nun ist:

$$O\,B = b + l_0 = L$$
$$O\,B_1 = L + \lambda_1$$
$$O\,B_2 = L + \lambda_1 + \lambda \text{ daher:}$$
$$\chi = \frac{L + \lambda_1 + \lambda}{L + z\,\mathrm{tg}\,\alpha} - \frac{L + \lambda_1}{L + z\,\mathrm{tg}\,\alpha_1}. \qquad 17)$$

Für λ_1 und λ genügen vorerst angenäherte Werte. Nun ist $\mathrm{tg}\,2\alpha_1 = \frac{n_1}{h}$ und, da $\measuredangle C\,M_1\,B_1$ als rechtwinkelig angesehen werden kann, $\sin\alpha_1 = \frac{\lambda_1}{z}$. Weil selbst $\measuredangle 2\alpha_1$ nach den thatsächlichen Verhältnissen noch als klein angenommen werden darf, so hat man:

$$2\alpha_1 = \frac{n_1}{h} \text{ und}$$
$$\alpha_1 = \frac{\lambda_1}{z}, \text{ sowie entsprechend:}$$
$$2\alpha = \frac{n}{h} \text{ und}$$
$$\alpha = \frac{\lambda_1 + \lambda}{z}$$

Hieraus berechnet sich:

$$\lambda_1 = \frac{z}{2h} \cdot n_1 = \eta\, n_1 \text{ und}$$
$$\lambda = \frac{z}{2h}(n - n_1) = \eta(n - n_1), \text{ wenn}$$
$$\frac{z}{2h} = \eta \text{ gesetzt wird.}$$

Die Gl. 17) liefert, wenn man die vorigen Werte darin substituiert:

$$\chi = \frac{L + \eta\, n}{L + z\,\mathrm{tg}\,\alpha} - \frac{L + \eta\, n_1}{L + z\,\mathrm{tg}\,\alpha_1} \text{ oder}$$
$$\chi = \frac{1 + \frac{\eta\, n}{L}}{1 + \frac{z\,\mathrm{tg}\,\alpha}{L}} - \frac{1 + \frac{\eta\, n_1}{L}}{1 + \frac{z\,\mathrm{tg}\,\alpha_1}{L}}. \qquad 18)$$

Wird beachtet, dass man $\mathrm{tg}\,\alpha = \sin\alpha = \frac{\lambda_1 + \lambda}{z}$ und $\mathrm{tg}\,\alpha_1 = \sin\alpha_1 = \frac{\lambda_1}{z}$ nehmen darf, so erkennt man die Kleinheit der von 1 verschiedenen Grössen in Gl. 18) und es geht diese über in:

$$\chi = \frac{\eta}{L}(n - n_1) - \frac{z}{L}(\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\alpha_1). \qquad 19)$$

In Rücksicht auf die bekannte Beziehung:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{n}{2h}\left[1 - \left(\frac{n}{2h}\right)^2\right] \text{ und}$$

$$\operatorname{tg}\alpha_1 = \frac{n_1}{2h}\left[1 - \left(\frac{n_1}{2h}\right)^2\right] \text{ reduziert sich Gl. 19) auf:}$$

$$\chi = \frac{z}{L}\left[\left(\frac{n}{2h}\right)^3 - \left(\frac{n_1}{2h}\right)^3\right] \qquad 20) \text{ oder:}$$

$$\chi = \frac{z}{L} \cdot \frac{1}{(2h)^3}(n^3 - n_1^3) \qquad 21).$$

Nach Gl. 16) ist sonach

$$f = \frac{\pi_1}{E} \cdot \frac{z}{(2h)^3} \cdot \frac{l_0}{b + l_0}(n^3 - n_1^3) \qquad 22).$$

In dem verwendeten Apparate ist: $z = 35{,}4$ Skalenteile, $h = 2806$ Sktl., $b = 158$ Sktl. und l_0 darf durchschnittlich $= 547$ Sktl. also $L = 705$ Sktl. genommen werden. Darnach ergibt sich:

$$\frac{z}{(2h)^3} \cdot \frac{l_0}{b + l_0} = \frac{35{,}4}{(2 \cdot 2806)^3} \cdot \frac{547}{547 + 158} = 0{,}000\,000\,000\,1554.$$

Somit ist der Fehler

$$f = \frac{\pi_1}{E} \cdot 0{,}000\,000\,000\,1554\,(n^3 - n_1^3) \qquad 23).$$

Bei Metallen wird $\frac{\pi_1}{E}$ den Wert 0,001 nicht erreichen; aber selbst für diesen Wert dürfte $n^3 - n_1^3 = 10^7$ sein, und es würde

$$f = 0{,}0001554 \text{ Sktl.} = 0{,}0001554 \cdot 2 \text{ mm} = 0{,}000311 \text{ mm}.$$

Der Fehler f würde somit bei weitem noch kein 0,001 mm betragen. Die Dehnung 0,001 mm ist aber bei der in Rede stehenden Vorrichtung die kleinste noch mit einiger Sicherheit messbare; denn es ist:

$\lambda_1 = \frac{z}{2h} \cdot n_1 = \frac{35{,}4}{2 \cdot 2806} = 0{,}0063079 \cdot n_1$ und, weil 0,1 Sktl. noch geschätzt werden kann, für $n_1 = 0{,}1$ $\quad \lambda_1 = 0{,}0063079 \cdot 0{,}1$ Sktl. $= 0{,}0013$ mm.

Es darf also in Gl. 14) das Glied $\lambda_1' - \lambda = f$ vernachlässiget werden. Um λ' zu bestimmen, kommt daher alles darauf an, λ möglichst genau

zu messen, um so die von P allein herrührende Dehnung λ' zu erhalten.

Der Wert von λ muss durch die abgelesenen Skalenteile n und n_1, sowie die Konstanten h, z und L des Apparates ausgedrückt werden. Die Formel 11) eignet sich hiezu wegen der darin enthaltenen Grösse E nicht. Es ist vielmehr λ auf rein geometrischem Wege, wie folgt, zu ermitteln. Nun ist:

$$O B_2 - O B_1 = (l_0 + \lambda_1 + \lambda + b) - (l_0 + \lambda_1 + b) = \lambda, \quad 24)$$

und folglich ist $O B_1$ und $O B_2$ zu berechnen.

Ferner ist:

$$O B_1^2 = d^2 + z^2 - 2 d z \cos(\gamma + \alpha_1) \quad 25)$$

$$O B_1^2 = d^2 + z^2 - 2 z^2 \cos \alpha_1 + 2 z \cdot L \cdot \sin \alpha_1 . \quad 26)$$

Bekanntlich ist ferner:

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{n_1}{2h}\left[1 - \left(\frac{n_1}{2h}\right)^2\right] \text{ und } \sin \alpha_1 = \frac{n}{2h}\left[1 - \frac{3}{2}\left(\frac{n_1}{2h}\right)^2\right],$$

$$\text{folglich ist } \cos \alpha_1 = 1 - \tfrac{1}{2} \cdot \left(\frac{n_1}{2h}\right)^2.$$

Diese Werte in Gl. 26) eingesetzt und reduziert wird:

$$O B_1^2 = \left[L + z\left(\frac{n_1}{2h}\right)\right]^2 - 3 z L \left(\frac{n_1}{2h}\right)^3 \text{ und analog:}$$

$$O B_2^2 = \left[L + z\left(\frac{n}{2h}\right)\right]^2 - 3 z L \cdot \left(\frac{n}{2h}\right)^3.$$

Es ist also:

$$O B_1 = \sqrt{\left[L + z \cdot \left(\frac{n_1}{2h}\right)\right]^2 - 3 z L \cdot \left(\frac{n_1}{2h}\right)^3}$$

$$O B_1 = \left[L + z\left(\frac{n_1}{2h}\right)\right]\left\{1 - \frac{3 z L \cdot \left(\frac{n_1}{2h}\right)^3}{\left[L + z\left(\frac{n_1}{2h}\right)\right]^2}\right\}^{\frac{1}{2}}$$

Der Subtrahend des Radikanden ist gegen die 1 klein, daher:

$$O B_1 = \left[L + z \cdot \frac{n_1}{2h}\right] \cdot \left\{1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{3 z \cdot L \cdot \left(\frac{n_1}{2h}\right)^3}{\left[L + z \cdot \left(\frac{n_1}{2h}\right)\right]^2}\right\} \quad 27)$$

und ebenso:

$$O B_2 = \left[L + z \cdot \frac{n}{2h}\right] \cdot \left\{1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{3z \cdot L \cdot \left(\frac{n}{2h}\right)^3}{\left[L + z\left(\frac{n}{2h}\right)\right]^2}\right\} . \qquad 28).$$

Werden diese Werte in Gl. 24) substituiert, so liefert sie:

$$\lambda = \frac{z}{2h}(n - n_1) - \frac{3}{2}z\left[\left(\frac{n}{2h}\right)^3 \cdot \frac{L}{L + z\left(\frac{n}{2h}\right)} - \left(\frac{n_1}{2h}\right)^3 \cdot \frac{L}{L + z\left(\frac{n_1}{2h}\right)}\right]. \qquad 29).$$

Da jedoch $\frac{z \cdot \frac{n_1}{2h}}{L}$ und $\frac{z \cdot \frac{n}{2h}}{L}$ gegen 1 kleine Werte sind, ist:

$$\lambda = \frac{z}{2h}(n - n_1) - \frac{3}{2} \cdot z \cdot \left[\left(\frac{n}{2h}\right)^3 \left(1 - \frac{z \cdot \frac{n}{2h}}{L}\right) - \left(\frac{n_1}{2h}\right)^3 \left(1 - \frac{z \cdot \frac{n_1}{2h}}{L}\right)\right] \qquad 30)$$

$$\lambda = \frac{z}{2h}(n - n_1) - \frac{3}{2} \cdot z \left\{\left[\left(\frac{n}{2h}\right)^3 - \left(\frac{n_1}{2h}\right)^3\right] - \frac{z}{L}\left[\left(\frac{n}{2h}\right)^4 - \left(\frac{n_1}{2h}\right)^4\right]\right\} \qquad 31).$$

Um die Formel für die Zahlenrechnung geeigneter zu gestalten, geben wir ihr die Form:

$$\lambda = \frac{1}{2} \cdot \frac{z}{h}(n - n_1) - \frac{3}{16} \cdot \frac{z}{h^3}(n^3 - n_1^3) + \frac{3}{32} \cdot \frac{1}{L} \cdot \frac{z^2}{h^4}(n^4 - n_1^4) \qquad 32).$$

Dies ist der Ausdruck für $\lambda = O B_2 - O B_1$, wobei auf die während der Dehnung des Drahtes entstehende Abweichung seiner Richtung von der ursprünglichen, vertikal vorausgesetzten, Rücksicht genommen ist. Es kann dieser Ausdruck gegenüber den beiden nachfolgenden die grössere Genauigkeit als Vorzug beanspruchen.

Betrachtet man nämlich $\measuredangle C M_1 B_1$ und $\measuredangle C M_2 B_2$ als rechtwinkelig, so ist:

$$\lambda = M_2 B_2 - M_1 B_1 = z(\sin\alpha - \sin\alpha_1) \text{ oder}$$

$$\lambda = \tfrac{1}{2} \cdot \frac{z}{h}(n - n_1) - \frac{3}{16} \cdot \frac{z}{h^3}(n^3 - n_1^3) \qquad 33).$$

Ein Vergleich des Ausdruckes 33) mit jenem 32) lässt die Bedeutung des 3. Gliedes in dem ersteren erkennen.

Nimmt man zur Auffindung von λ statt der Strecken $M_1 B_1$ und $M_2 B_2$ die Sehnen der entsprechenden Bogen $B B_1$ und $B B_2$, so ergibt sich

$$\lambda = \tfrac{1}{2} \cdot \frac{z}{h}(n - n_1) - \frac{11}{64} \cdot \frac{z}{h^3}(n^3 - n_1^3) \qquad 34).$$

Aus 34) berechnet sich sonach λ um den Betrag $\frac{1}{64} \cdot \frac{z}{h^3}(n^3 - n_1^3)$ grösser als aus 33); Gl. 34) schliesst sich genauer als 33) dem Ausdrucke 32) an.

Zur Bestimmung der Zahlenwerte der Konstanten in den Formeln 32), 33) und 34) haben wir bekanntlich:

$$z = 35{,}4 \text{ Sktl.}, \quad h = 2806 \text{ Sktl.}, \quad L = 705 \text{ Sktl.}$$

Darnach wird:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{z}{h} = 0{,}0063079;$$

$$\frac{3}{16} \cdot \frac{z}{h^3} = 0{,}000\,000\,000\,30042;$$

$$\frac{3}{32} \cdot \frac{1}{L} \cdot \frac{z^2}{h^4} = 0{,}000\,000\,000\,000\,2688.$$

Somit gestaltet sich Gl. 32) zu:

$$\lambda = 63079 \cdot 10^{-7}(n - n_1) - 30042 \cdot 10^{-14}(n^3 - n_1^3) + 26880 \cdot 10^{-17}(n^4 - n_1^4) \quad 35).$$

Ferner ist: $\frac{11}{64} \cdot \frac{z}{h^3} = 0{,}000\,000\,000\,27539$; also geht Gl. 34) über in:

$$\lambda = 63079 \cdot 10^{-7}(n - n_1) - 27539 \cdot 10^{-14}(n^3 - n_1^3) \qquad 36).$$

Die Gl. 35) wurde bei der vorliegenden Arbeit ausschliesslich benützt [Gl. 4. § 9.]. Aus Gl. 32) ersieht man, dass nur das letzte Glied derselben von L abhängig ist; ferner zeigt $\frac{d\lambda}{dL}$, wie ganz erhebliche Fehler bei der Messung von L noch gar keinen Einfluss auf das Resultat bei der Berechnung von λ haben würden.

Tabellen.

Tabelle A.

Untersuchte Substanz: **Kupfer.** L = 1,100 m F = 0,3696 qmm d = 0,686 mm

Gruppe	τ_0 u. τ_1	T_0 u. T_1	t_0 u. t_1	a_ν	b_ν	c_ν	π_1	π_2	λ_1	l_1	Datum
I	4,55	4,60	4,60	6,2			1,6234				27./1. 87
	nach .	. . 0 . .	. Min.		67,5			8,8946			
	„ .	. . 5 . .	. „		68,7	8,8			+ 62,07		
	„ .	. 10 .	. „			8,0			— 61,14	—	
	4,90	5,00	5,00								
II	5,00	4,90	5,00	8,2	68,6	8,9	„				„
					68,6	9,0		„			
					68,6	9,0					
					68,6	9.1				—	
	5,20	5,10	5,25		68,9	9,0			59.70		
I	4,15	4,10	3,80	4,3			„				28./1. 87
	nach .	. . 0 . .	. Min.		64,9			„			
	„ .	. 15 .	. „		66,9	7.1			+ 61,82		
	„ .	. 30 .	. „			6.7			— 60,99	—	
	4,70	4,65	4,60								
II	4,70	4,65	4,60	6,7	66,9	7,1	„				„
					67,0	7,3		„			
					67,1	7,4					
					67,1	7,5				—	
	5,03	4.90	5,00		67.1	7,6			59,60		

Tabelle D.

Untersuchte Substanz: **Kupfer.** L = 1,100 m F = 0,3696 qmm d = 0,686 mm

Gruppe	τ_0 u. τ_1	T_0 u. T_1	t_0 u. t_1	a_ν	b_ν	c_ν	π_1	π_2	λ_1	l_1	Datum
I	8,08	8,10	7,80	12,3	62,8	13,2	1,6234				23./3. 87
					62,9	13,3		7,3938			
					63,0	13,7					
					63,1	13,8				0,76	
	8,43	8,20	8,18		63.1	13,8			49,33		
II	8,80	8.38	8,38	55.9	93,3	58,0	7,7110				„
					94,1	58,2		5,5527			
					94,2	58,5					
					94,5	58,7				2,38	
	9,18	8,53	8,58		94,7	58,8			35,63		
III	9,23	8,70	8,65	116,2	155,6	120,2	15,8280				„
					156,4	121,0		5,5527			
					157,0	121.2					
					157.1	121,5				5,22	
	9.50	8,80	8,80		157,2	121,8			35,65		

Untersuchte Substanz: **Kupfer.** **Tabelle B.** L = 1,100 m F = 0,3696 qmm d = 0,686 mm

Gruppe	τ_0 u. τ_1	T_0 u. T_1	t_0 u. t_1	a_ν	b_ν	c_ν	π_1	π_2	λ_1	l_1	Datum
I	4,45	4,43	4,10	5,0	29,0	5,7	1,6234				29./1. 87
					29.0	5,9		3,5813			
					29,1	5,9					
					29,2	5,9				0,31	
	4.60	4,58	4,50		29,2	6,0			23,48		
II	4,60	4,58	4,50	5,9	43,2	6,6	„				„
					43,2	6,7		5,5527			
					43,3	6,7					
					43,4	6.8				0,52	
	4.83	4,80	4,80		43,4	6.8			36,63		
III	4,83	4,80	4,80	6,7	56.6	7,1	„				„
					56.7	7,2		7,3938			
					56,8	7,2					
					56,8	7,2				0,60	
	5,15	5,05	4,93		56,9	7,3			49.63		
I	3,18	3,13	3,30	18,0	41.8	18,9	3,6526				30./1. 87
					41,9	19,0		3,5813			
					41,9	19,0					
					41,9	19,0				0,06	
	3,50	3,40	3,80		42,0	19.0			22,95		
II	3,50	3,40	3,80	19,1	56,0	19,9	„				„
					56,0	19,9		5,5527			
					56,0	19,9					
					56,0	20,0				0,37	
	3,80	3,80	4,10		56,1	20,0			36,08		
III	3,80	3.80	4,10	20,0	69,4	20.6	„				„
					69,6	20,7		7,3938			
					69,6	20,8					
					69.7	20,9				0,86	
	4,08	4,08	4,23		69.7	20.9			48,83		
I	3,20	3,15	2,98	47,9	71.4	49,0	7,7110				31./1. 87
					71,6	49,1		3,5813			
					71,8	49.2					
					71.8	49.3				0,76	
	3,40	3,30	3.40		71.9	49.4			22,55		
II	3,40	3,30	3,40	50,0	86,3	50,7	„				„
					86,4	50.8		5,5527			
					86.7	50,9					
					86,8	51,0				1,41	
	3,85	3,65	3,85		86,9	51.0			35,88		
III	3,85	3,65	3,85	50,9	100,1	52,0	„				„
					100,6	52.1		7,3938			
					100,8	52,4					
					100,9	52.7				4,43	
	4,20	4,20	4,13		101.0	52.7			48,33		
I	3,40	3,50	3,38	112,9	137,2	115,1	15,8280				1./2. 87
					137.4	115.3		3,5813			
					137,7	115.5					
					137,7	115.7				1,90	
	3,68	3,70	3,88		137,8	115.7			22.10		
II	3,68	3,70	3,88	115,8	152,8	117,4	„				„
					153.1	117,8		5,5527			
					153,1	117,9					
					153,4	118,0				3,52	
	4,00	4,05	4,25		153,6	118,1			35,50		
III	4,00	4,05	4,25	118,0	168,0	120,1	„				„
					168,6	120,7		7,3938			
					168.9	120,8					
					169,0	121,0				6.15	
	4,30	4,40	4,40		169,2	121.1			48,10		

Untersuchte Substanz: **Kupfer.** **Tabelle C.** L = 1,100 m F = 0,3696 qmm d = 0,686 mm

Gruppe	τ_0 u. τ_1	T_0 u. T_1	t_0 u. t_1	a_ν	b_ν	c_ν	π_1	π_2	λ_1	l_1	Datum
I	3,50	3,60	3,50	10,4	34,0	10,7	1,6234				2./2. 87
					34,0	10,7		3,5813			
					34,0	10,8					
					34,1	10,9				— 0,14	
	3,73	3,83	3,90		34,2	11,0			23,25		
II	3,90	3,98	4,13	25,0	48,9	25,9	3,6526				„
					49,0	26,0		„			
					49,0	26,0					
					49,0	26,0				0,73	
	3,95	4,10	4,30		49,0	26,0			23,00		
III	4,13	4,25	4,38	53,9	77,8	55,1	7,7110				„
					77,9	55.2		„			
					77,9	55,3					
					78,0	55,4				1,28	
	4,28	4,40	4,45		78,0	55,4			22,63		
IV	4,38	4,55	4,53	113,0	137,2	115,2	15,8280				„
					137,7	115,7		„			
					137,9	115,9					
					138,0	115,9				2,80	
	4,50	4,70	4,60		138,2	116,0			22,18		
I	4,15	4,30	4,00	10,0	47,1	10.4	1,6234				3./2. 87
					47,2	10,6		5,5527			
					47,2	10,7					
					47,4	10,7				0,17	
	4,38	4.48	4,40		47,5	10,9			36,70		
II	4,48	4,58	4,55	24,7	61,9	25,9	3,6526				„
					62,0	25,9		„			
					62.1	26,0					
					62,1	26,0				0,89	
	4,65	4,72	4,75		62,1	26,0			36,10		
III	4,70	4,80	4,80	53,3	91,0	55,2	7,7110				„
					91,1	55,4		„			
					91,2	55,6					
					91,4	55,7				2,26	
	4,83	4,93	4,90		91,6	55,8			35,80		
IV	4,90	5.03	4,98	112,7	151,4	116,2	15,8280				„
					152,1	116,7		„			
					152,3	117,0					
					152,7	117.2				4,49	
	5,10	5,18	5,10		153,0	117,5			35,63		
I	5,50	5,75	5,25	12,1	62,1	12,9	1,6234				4./2. 87
					62,2	12,9		7,3938			
					62,2	13,0					
					62,3	13,0				0,13	
	5,70	5,90	5,70		62,4	13.1			49,33		
II	5,80	6,00	5,80	26,8	76,9	28.1	3,6526				„
					76,9	28,3		„			
					77.1	28,4					
					77,3	28,5				1,28	
	6,00	6,15	6,00		77,4	28.5			48.88		
III	6,08	6,23	6.10	55,9	106,5	58,3	7,7110				„
					106,8	58,4		„			
					107,0	58,8					
					107,1	58,9				2,83	
	6,25	6,38	6,20		107,2	59,0			48,25		
IV	6,28	6,45	6,20	115,0	168,1	120,3	15,8280				„
					168,9	120,9		„			
					169,4	121.6					
					169,8	122,0				6,73	
	6,45	6,60	6,30		170,0	122,0			48,00		