

Die
Beugungerscheinungen
einer kreisrunden Oeffnung
und
eines kreisrunden Schirmchens

theoretisch und experimentell

bearbeitet

von

E. Lommel.

Mit lithographirten Tafeln.

Die
Beugungserscheinungen

einer kreisförmigen Öffnung
und
eines kreisförmigen Schirmchens

theoretisch und experimentell

behandelt

von

E. Lommel

Mit lithographirten Tafeln

Am Alten Markt in Weimar

Seinem

hochverehrten Lehrer und Freunde

Herrn Professor Dr. Ph. von Jolly

zur

Feier des hundertsten Semesters

seiner

akademischen Lehrthätigkeit

in dankbarer Verehrung

gewidmet

vom Verfasser.

Seinem
hochverehrten Lehrer und Freunde
Herrn Professor Dr. Ed. von Jolly
an
Feier des hundertsten Semesters
seiner
akademischen Thätigkeit
in dankbarer Verehrung
gewidmet
vom Verfasser.

Vorbemerkung.

Die Beugungserscheinungen, welche durch eine kreisförmige Oeffnung oder durch ein kreisförmiges Schirmchen hervorgebracht werden, haben bisher nur für den besonderen Fall, dass die einfallende Welle eben ist und der Auffangschirm sich in unendlicher Entfernung befindet, oder, was auf dasselbe hinauskommt, im Falle der Fraunhofer'schen Beobachtungsmethode, eine erschöpfende Bearbeitung gefunden¹⁾. In dem allgemeinen der Fresnel'schen Beobachtungsmethode entsprechenden Falle dagegen, wo sich Lichtpunkt und Auffangschirm in beliebigen endlichen Entfernungen vom beugenden Schirme befinden, schienen die Integrale, durch welche die Lichtstärke in einem beliebigen Punkte des Beugungsbildes ausgedrückt wird, unüberwindliche Schwierigkeiten darzubieten. Jedoch hatte schon Poisson, als Mitglied der akademischen Commission, welche Fresnels grosse Arbeit über die Diffraction zu prüfen hatte, bemerkt, dass sich diese Integrale wenigstens für den Mittelpunkt des Beugungsbildes leicht berechnen lassen, und im Falle eines kreisrunden Schirmchens die nämliche Lichtstärke ergeben, welche auch bei völliger Abwesenheit des Schirmchens herrschen würde, im Falle einer kreisförmigen Oeffnung dagegen eine mit der Entfernung vom beugenden Schirm veränderliche Intensität, welche für gewisse durch ein

1) Schwerd, die Beugungserscheinungen. Mannheim 1835.

Airy, über die Diffraction eines Objectivs mit kreisrunder Apertur. Pogg. Ann. Bd. 45. 1838.

Knochenhauer, die Undulationstheorie des Lichtes. Berlin, 1839.

Lommel, Schlömilchs Zeitsch. f. Math. u. Phys. 15. p. 141. 1870.

einfaches Gesetz bestimmte Entfernungen sogar Null ist. Fresnel¹⁾ und später Abria²⁾ haben diese unerwarteten und auf den ersten Blick anscheinend paradoxen Consequenzen der Theorie experimentell geprüft und vollständig bestätigt gefunden.

Auch die Behandlung des allgemeinen Problems blieb nicht unversucht; Knochenhauer³⁾, der sie unternahm, gelangte jedoch zu Formeln, die so weitschweifig und so wenig übersichtlich sind, dass er allgemeinere Schlussfolgerungen aus ihnen nicht zu ziehen vermochte, und vor der mühevollen numerischen Berechnung mit Recht zurückscheute. Es stehen daher noch immer jenes nur für die Mitte des Beugungsbildes gewonnene Resultat einerseits, und andererseits die vollständige theoretische Kenntniss der Erscheinung im Fraunhofer'schen Grenzfall unvermittelt und ohne Zusammenhang neben einander. Diese Lücke der Theorie auszufüllen, die ganze unerschöpfliche Mannigfaltigkeit der Erscheinungen aus der Wellenlehre abzuleiten, endlich die theoretischen Ergebnisse experimentell zu prüfen, bildet die Aufgabe der gegenwärtigen Abhandlung.

1) Fresnel, Calcul de l'intensité de la lumière au centre de l'ombre d'un écran et d'une ouverture circulaires éclairés par un point lumineux; Oeuvres complètes de Fresnel, t. I. p. 365. 1819.

2) Abria, Sur la diffraction de la lumière, Journal de Math. de Liouville, IV, p. 248. 1838.

3) Knochenhauer, die Undulationstheorie des Lichtes. Berlin 1839.

I. Abschnitt.

Aufstellung und Entwicklung der Integrale.

1. Wir wählen den Auffangschirm zur xy -Ebene und die vom Mittelpunkt der einfallenden Kugelwelle, deren Radius $= a$ sei, auf ihn gefällte Senkrechte zur z -Axe eines Systems rechtwinkliger Coordinaten. Diese Senkrechte sei zugleich die Polaraxe eines Systems sphärischer Coordinaten, so dass der Ort eines Punktes der Kugel einerseits durch seine rechtwinkligen Coordinaten x, y, z , andererseits durch seine Pol-distanz ψ , seine Länge φ und den Kugelradius a bestimmt ist. Ist $2\pi t/T$, wo t die laufende Zeit und T die Schwingungsdauer bezeichnet, die im Augenblick t auf der Kugelwelle herrschende Phase, so erzeugt das im Punkte x, y, z gelegene Flächenelement

$$a^2 \sin \psi \, d\psi \, d\varphi$$

derselben im Punkte ξ, η des Auffangschirmes, dessen Abstand vom Punkte x, y, z mit d bezeichnet werde, mit Rücksicht darauf, dass die Vibrationsintensitäten den Entfernungen a und d umgekehrt proportional sind, die Schwingungsgeschwindigkeit:

$$\frac{a}{d} \cdot \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{d}{\lambda} \right) \cdot \sin \psi \, d\psi \, d\varphi,$$

wo λ wie üblich die Wellenlänge bedeutet, und die Vibrationsintensität für die Flächeneinheit der mit dem Radius 1 um den Lichtpunkt beschriebenen Kugelwelle $= 1$ angenommen ist.

Die von einem beliebigen Theil der Kugelwelle in dem Punkte ξ, η des Schirms hervorgebrachte Bewegung wird alsdann ausgedrückt durch das Doppelintegral:

$$a \iint \frac{1}{d} \cdot \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{d}{\lambda} \right) \cdot \sin \psi \, d\psi \, d\varphi,$$

wenn dasselbe über alle wirksamen Theile der Kugelwelle a ausgedehnt wird.

2. Im Falle einer kreisförmigen Oeffnung, deren Mittelpunkt auf der Polaraxe liegt, und deren Ebene mit dem Auffangschirm parallel ist, wird der wirksame Theil der Kugelwelle von dem Rande der Kreisöffnung begrenzt, und die Vibrationsgeschwindigkeit im Punkte ξ, η wird ausgedrückt durch:

$$a \int_0^{2\pi} \int_0^{\psi_1} \frac{1}{d} \cdot \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{d}{\lambda} \right) \cdot \sin \psi \, d\psi \, d\varphi,$$

wenn ψ_1 der Winkel ist, den ein vom Lichtpunkt nach dem Rande der Oeffnung gehender Strahl mit der Axe des Strahlenkegels bildet.

Darin ist die Entfernung d gegeben durch die Gleichung:

$$d^2 = (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + z^2$$

oder:

$$d^2 = x^2 + y^2 + z^2 + \xi^2 + \eta^2 - 2\xi x - 2\eta y.$$

Wird die Entfernung des Poles der Kugelwelle vom Auffangschirm mit b bezeichnet, so ist:

$$x = a \sin \psi \cos \varphi, \quad y = a \sin \psi \sin \varphi, \quad z = a + b - a \cos \psi,$$

und demnach:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= a^2 + (a + b)^2 - 2a(a + b) \cos \psi \\ &= b^2 + 4a(a + b) \sin^2 \frac{1}{2} \psi; \end{aligned}$$

bezeichnet man ferner mit ζ den Abstand des Bildpunktes ξ, η von der Bildmitte, indem man setzt:

$$\xi = \zeta \cos \varphi_0, \quad \eta = \zeta \sin \varphi_0,$$

so ist:

$$\xi^2 + \eta^2 = \zeta^2, \quad \xi x + \eta y = a \zeta \sin \psi \cos(\varphi - \varphi_0).$$

Man hat also:

$$d^2 = b^2 + \zeta^2 - 2a\zeta \sin \psi \cos(\varphi - \varphi_0) + 4a(a + b) \sin^2 \frac{1}{2} \psi.$$

Da die von einer kreisförmigen Oeffnung hervorgebrachte Beugungserscheinung nach allen Richtungen rings um die Bildmitte nothwendig von der gleichen Beschaffenheit ist, so bleibt es gleichgiltig, von welcher dieser Richtungen aus man den Winkel φ_0 zählt; setzen wir ihn $= 0$, so ergibt sich:

$$d^2 = b^2 \left(1 + \frac{\zeta^2}{b^2} - \frac{2a\zeta \sin \psi \cos \varphi}{b^2} + \frac{4a(a + b)}{b^2} \sin^2 \frac{1}{2} \psi \right).$$

3. Wir nehmen nun an, dass der Winkel ψ , und dann um so mehr der Winkel ψ , so klein sei, dass sein Sinus mit dem Bogen vertauscht, oder, was dasselbe heisst, seine höheren Potenzen von der dritten an gegen die niedrigeren vernachlässigt werden dürfen, und dass das Verhältniss ζ/b von derselben Grössenordnung sei wie ψ . Dann darf man schreiben:

$$d = b + \frac{\zeta^2}{2b} - \frac{a\zeta \sin \psi \cos \varphi}{b} + \frac{2a(a+b)}{b} \sin^2 \frac{1}{2} \psi.$$

Setzt man nun noch:

$$a \sin \psi = \varrho \text{ oder } a \psi = \varrho,$$

also auch:

$$\sin^2 \frac{1}{2} \psi = \frac{\varrho^2}{4a^2},$$

und bezeichnet den Radius der kreisförmigen Oeffnung mit r , so nimmt unser Doppelintegral, wenn wir noch das im Nenner unter dem Integralzeichen vorkommende d mit b vertauschen (was erlaubt ist, wenn die Betrachtung auf Punkte beschränkt wird, die der Polaraxe nahe liegen), folgende Gestalt an:

$$\frac{1}{ab} \int_0^{2\pi} \int_0^r \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{b}{\lambda} - \frac{\zeta^2}{2b\lambda} + \frac{\zeta \cos \varphi}{b\lambda} \varrho - \frac{a+b}{2ab\lambda} \varrho^2 \right) \cdot \varrho d\varrho d\varphi.$$

4. Bringen wir jetzt das vorstehende Integral, welches die resultirende schwingende Bewegung in einem Punkte des Auffangschirmes ausdrückt, unter Weglassung des Factors $1/ab$ auf die Form:

$$M \sin(p - \chi),$$

indem wir

$$2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{b}{\lambda} - \frac{\zeta^2}{2b\lambda} \right) = p,$$

ferner:

$$\int_0^{2\pi} \int_0^r \cos \frac{2\pi}{\lambda} \left(\frac{a+b}{2ab} \varrho^2 - \frac{\zeta \cos \varphi}{b} \varrho \right) \cdot \varrho d\varrho d\varphi = C,$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^r \sin \frac{2\pi}{\lambda} \left(\frac{a+b}{2ab} \varrho^2 - \frac{\zeta \cos \varphi}{b} \varrho \right) \cdot \varrho d\varrho d\varphi = S$$

setzen, so ergibt sich:

$$\operatorname{tg} \chi = \frac{S}{C},$$

und die Lichtstärke, welche auf einem mit dem Radius ζ um die Bildmitte beschriebenen Kreise herrscht, ist dem Ausdruck:

$$M^2 = C^2 + S^2$$

proportional.

5. Setzen wir nun zur Abkürzung

$$\frac{2\pi}{\lambda} \cdot \frac{a+b}{2ab} = \frac{1}{2}k \quad \text{und} \quad \frac{2\pi\zeta}{\lambda b} = 1,$$

so ist:

$$\begin{aligned} C &= \int_0^{2\pi} \int_0^r \cos\left(\frac{1}{2}k\rho^2 - l\rho \cos \varphi\right) \cdot \rho \, d\rho \, d\varphi \\ &= \int_0^r \cos\left(\frac{1}{2}k\rho^2\right) \int_0^{2\pi} \cos(l\rho \cos \varphi) \cdot d\varphi \cdot \rho \, d\rho + \int_0^r \sin\left(\frac{1}{2}k\rho^2\right) \int_0^{2\pi} \sin(l\rho \cos \varphi) \cdot d\varphi \cdot \rho \, d\rho, \end{aligned}$$

oder, da offenbar

$$\int_0^{2\pi} \sin(l\rho \cos \varphi) \, d\varphi = 0$$

ist:

$$C = \int_0^r \cos\left(\frac{1}{2}k\rho^2\right) \int_0^{2\pi} \cos(l\rho \cos \varphi) \cdot d\varphi \cdot \rho \, d\rho.$$

Es ist aber:

$$\int_0^{2\pi} \cos(l\rho \cos \varphi) \, d\varphi = 2 \int_0^{\pi} \cos(l\rho \cos \varphi) \, d\varphi = 2\pi I_0(l\rho),$$

wenn I_0 die Bessel'sche Function erster Art mit dem Index 0 bedeutet.

Wir haben demnach:

$$C = 2\pi \int_0^r I_0(l\rho) \cos\left(\frac{1}{2}k\rho^2\right) \cdot \rho \, d\rho,$$

und finden ebenso:

$$S = 2\pi \int_0^r I_0(l\rho) \sin\left(\frac{1}{2}k\rho^2\right) \cdot \rho \, d\rho.$$

6. Um diese transscendenten Integrale in Reihen zu entwickeln, wenden wir die Methode der theilweisen Integration an, indem wir zunächst $I_0(l\rho)\rho d\rho$ als zu integrierenden Factor betrachten, und von der Formel ¹⁾:

$$\int_0^z z^\nu I_{\nu-1}(z) dz = z^\nu I_\nu(z)$$

Gebrauch machen. Es ergibt sich:

$$C = 2\pi \cdot \frac{r}{1} \cdot I_1(lr) \cos(\frac{1}{2}kr^2) + 2\pi \cdot \frac{k}{1} \int_0^r \rho^2 I_1(l\rho) \sin(\frac{1}{2}k\rho^2) \cdot d\rho,$$

wo nun auf den in letzterem Integral vorkommenden Factor $\rho^2 I_1(l\rho) d\rho$ die obige Formel von neuem Anwendung findet. So fortfahrend erhalten wir:

$$C = 2\pi \cos(\frac{1}{2}kr^2) \left[\frac{r}{1} I_1(lr) - \frac{k^2 r^3}{1^3} I_3(lr) + \frac{k^4 r^5}{1^5} I_5(lr) - + \dots \right] \\ + 2\pi \sin(\frac{1}{2}kr^2) \left[\frac{kr^2}{1^2} I_2(lr) - \frac{k^3 r^4}{1^4} I_4(lr) + \frac{k^5 r^6}{1^6} I_6(lr) - + \dots \right],$$

oder, in mehr übersichtlicher Schreibweise:

$$C = \pi r^2 \cdot \frac{\cos(\frac{1}{2}kr^2)}{\frac{1}{2}kr^2} \left[\frac{kr^2}{lr} I_1(lr) - \left(\frac{kr^2}{lr}\right)^3 I_3(lr) + \left(\frac{kr^2}{lr}\right)^5 I_5(lr) - + \dots \right] \\ + \pi r^2 \cdot \frac{\sin(\frac{1}{2}kr^2)}{\frac{1}{2}kr^2} \left[\left(\frac{kr^2}{lr}\right)^2 I_2(lr) - \left(\frac{kr^2}{lr}\right)^4 I_4(lr) + \left(\frac{kr^2}{lr}\right)^6 I_6(lr) - + \dots \right].$$

Setzen wir der Einfachheit wegen:

$$kr^2 = y \quad \text{und} \quad lr = z,$$

so dass

$$y = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \frac{a+b}{ab} \cdot r^2 \quad \text{und} \quad z = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \frac{z}{b} \cdot r$$

ist, so erscheint C unter folgender Form:

1) Lommel, Studien über die Bessel'schen Functionen, p. 20. Leipzig 1868.

$$C = \pi r^2 \cdot \frac{\cos \frac{1}{2}y}{\frac{1}{2}y} \left[\frac{y}{z} I_1(z) - \left(\frac{y}{z}\right)^3 I_3(z) + \left(\frac{y}{z}\right)^5 I_5(z) - + \dots \right] \\ + \pi r^2 \cdot \frac{\sin \frac{1}{2}y}{\frac{1}{2}y} \left[\left(\frac{y}{z}\right)^2 I_2(z) - \left(\frac{y}{z}\right)^4 I_4(z) + \left(\frac{y}{z}\right)^6 I_6(z) - + \dots \right].$$

Auf demselben Wege findet man:

$$S = \pi r^2 \cdot \frac{\sin \frac{1}{2}y}{\frac{1}{2}y} \left[\frac{y}{z} I_1(z) - \left(\frac{y}{z}\right)^3 I_3(z) + \left(\frac{y}{z}\right)^5 I_5(z) - + \dots \right] \\ - \pi r^2 \cdot \frac{\cos \frac{1}{2}y}{\frac{1}{2}y} \left[\left(\frac{y}{z}\right)^2 I_2(z) - \left(\frac{y}{z}\right)^4 I_4(z) + \left(\frac{y}{z}\right)^6 I_6(z) - + \dots \right].$$

7. Bezeichnet man die beiden in diesen Ausdrücken vorkommenden nach Potenzen von y/z und nach Besselschen Functionen fortlaufenden Reihen resp. mit $U_1(y, z)$ und $U_2(y, z)$, oder auch kürzer mit U_1 und U_2 , so dass:

$$U_1 = \frac{y}{z} I_1(z) - \left(\frac{y}{z}\right)^3 I_3(z) + \left(\frac{y}{z}\right)^5 I_5(z) - + \dots$$

$$= \sum (-1)^p \left(\frac{y}{z}\right)^{2p+1} I_{2p+1}(z),$$

$$U_2 = \left(\frac{y}{z}\right)^2 I_2(z) - \left(\frac{y}{z}\right)^4 I_4(z) + \left(\frac{y}{z}\right)^6 I_6(z) - + \dots$$

$$= \sum (-1)^p \left(\frac{y}{z}\right)^{2p+2} I_{2p+2}(z)$$

ist, so hat man schliesslich:

$$C = \pi r^2 \left(\frac{\cos \frac{1}{2}y}{\frac{1}{2}y} U_1 + \frac{\sin \frac{1}{2}y}{\frac{1}{2}y} U_2 \right),$$

$$S = \pi r^2 \left(\frac{\sin \frac{1}{2}y}{\frac{1}{2}y} U_1 - \frac{\cos \frac{1}{2}y}{\frac{1}{2}y} U_2 \right).$$

8. Eine andere Entwicklung der Integrale C und S erhält man, wenn man sie in Bezug auf den Factor $\cos(\frac{1}{2}k\rho^2) \cdot \rho d\rho$ und beziehungsweise $\sin(\frac{1}{2}k\rho^2) \cdot \rho d\rho$ theilweise integrirt, und dabei die Formel

$$\frac{\partial (z^{-\nu} I_{\nu}(z))}{\partial z} = -z^{-\nu} I_{\nu+1}(z)$$

fortgesetzt in Anwendung bringt. Es ergibt sich auf diese Weise der Reihe nach:

$$\begin{aligned}
 C &= 2\pi \int_0^r I_0(l\varrho) \cdot \cos\left(\frac{1}{2}k\varrho^2\right) \cdot \varrho d\varrho \\
 &= \frac{2\pi}{k} I_0(lr) \sin\left(\frac{1}{2}kr^2\right) + \frac{2\pi l^2}{k^2} \int_0^r (l\varrho)^{-1} I_1(l\varrho) \cdot \sin\left(\frac{1}{2}k\varrho^2\right) \cdot k\varrho d\varrho \\
 &= \frac{2\pi}{k} I_0(lr) \cdot \sin\left(\frac{1}{2}kr^2\right) + \frac{2\pi l^2}{k^2} \left(\frac{1}{2} - \frac{I_1(lr)}{lr} \cos\left(\frac{1}{2}kr^2\right) \right) \\
 &\quad - \frac{2\pi l^4}{k^3} \int_0^r (l\varrho)^{-2} I_2(l\varrho) \cdot \cos\left(\frac{1}{2}k\varrho^2\right) \cdot k\varrho d\varrho,
 \end{aligned}$$

u. s. f., also schliesslich:

$$\begin{aligned}
 C &= \pi r^2 \cdot \frac{\sin\left(\frac{1}{2}kr^2\right)}{\frac{1}{2}kr^2} \left[I_0(lr) - \left(\frac{lr}{kr^2}\right)^2 I_2(lr) + \left(\frac{lr}{kr^2}\right)^4 I_4(lr) - + \dots \right] \\
 &\quad - \pi r^2 \cdot \frac{\cos\left(\frac{1}{2}kr^2\right)}{\frac{1}{2}kr^2} \left[\frac{lr}{kr^2} I_1(lr) - \left(\frac{lr}{kr^2}\right)^3 I_3(lr) + \left(\frac{lr}{kr^2}\right)^5 I_5(lr) - + \dots \right] \\
 &\quad + \pi r^2 \cdot \frac{1}{\frac{1}{2}kr^2} \left[\frac{l^2}{2k} - \frac{1}{3!} \left(\frac{l^2}{2k}\right)^3 + \frac{1}{5!} \left(\frac{l^2}{2k}\right)^5 - + \dots \right].
 \end{aligned}$$

Bedenkt man nun, dass

$$\frac{l^2}{2k} - \frac{1}{3!} \left(\frac{l^2}{2k}\right)^3 + \frac{1}{5!} \left(\frac{l^2}{2k}\right)^5 - + \dots = \sin \frac{l^2}{2k}$$

ist, und setzt wieder:

$$kr^2 = y \text{ und } lr = z,$$

so ergibt sich:

$$\begin{aligned}
 C &= \pi r^2 \cdot \frac{\sin \frac{1}{2}y}{\frac{1}{2}y} \left[I_0(z) - \left(\frac{z}{y}\right)^2 I_2(z) + \left(\frac{z}{y}\right)^4 I_4(z) - + \dots \right] \\
 &\quad - \pi r^2 \cdot \frac{\cos \frac{1}{2}y}{\frac{1}{2}y} \left[\frac{z}{y} I_1(z) - \left(\frac{z}{y}\right)^3 I_3(z) + \left(\frac{z}{y}\right)^5 I_5(z) - + \dots \right] + \frac{\pi r^2}{\frac{1}{2}y} \sin \frac{z^2}{2y}.
 \end{aligned}$$

In gleicher Weise findet man:

$$S = -\pi r^2 \cdot \frac{\cos \frac{1}{2}y}{\frac{1}{2}y} \left[I_0(z) - \left(\frac{z}{y}\right)^2 I_2(z) + \left(\frac{z}{y}\right)^4 I_4(z) - + \dots \right] \\ - \pi r^2 \cdot \frac{\sin \frac{1}{2}y}{\frac{1}{2}y} \left[\frac{z}{y} I_1(z) - \left(\frac{z}{y}\right)^3 I_3(z) + \left(\frac{z}{y}\right)^5 I_5(z) - + \dots \right] + \frac{\pi r^2}{\frac{1}{2}y} \cos \frac{z^2}{2y}.$$

9. Werden die hierin vorkommenden nach Potenzen von z/y und nach Besselschen Functionen fortschreitenden unendlichen Reihen resp. mit $V_0(y, z)$ und $V_1(y, z)$, oder kürzer mit V_0 und V_1 bezeichnet, so dass

$$V_0 = I_0(z) - \left(\frac{z}{y}\right)^2 I_2(z) + \left(\frac{z}{y}\right)^4 I_4(z) - + \dots$$

$$= \sum (-1)^p \left(\frac{z}{y}\right)^{2p} I_{2p}(z),$$

$$V_1 = \frac{z}{y} I_1(z) - \left(\frac{z}{y}\right)^3 I_3(z) + \left(\frac{z}{y}\right)^5 I_5(z) - + \dots$$

$$= \sum (-1)^p \left(\frac{z}{y}\right)^{2p+1} I_{2p+1}(z)$$

ist, so erscheinen die Grössen C und S auch noch in folgender Gestalt:

$$C = \pi r^2 \left(\frac{2}{y} \sin \frac{z^2}{2y} + \frac{\sin \frac{1}{2}y}{\frac{1}{2}y} V_0 - \frac{\cos \frac{1}{2}y}{\frac{1}{2}y} V_1 \right),$$

$$S = \pi r^2 \left(\frac{2}{y} \cos \frac{z^2}{2y} - \frac{\cos \frac{1}{2}y}{\frac{1}{2}y} V_0 - \frac{\sin \frac{1}{2}y}{\frac{1}{2}y} V_1 \right).$$

10. Aus den gewonnenen Ausdrücken für C und S geht zunächst hervor, dass zwischen den Functionen U und V folgende Beziehungen:

$$U_1 \cos \frac{1}{2}y + U_2 \sin \frac{1}{2}y = \sin \frac{z^2}{2y} + V_0 \sin \frac{1}{2}y - V_1 \cos \frac{1}{2}y,$$

$$U_1 \sin \frac{1}{2}y - U_2 \cos \frac{1}{2}y = \cos \frac{z^2}{2y} - V_0 \cos \frac{1}{2}y - V_1 \sin \frac{1}{2}y,$$

oder, was dasselbe ist:

$$V_1 + U_1 = \sin \left(\frac{1}{2}y + \frac{z^2}{2y} \right),$$

$$V_0 - U_2 = \cos \left(\frac{1}{2}y + \frac{z^2}{2y} \right)$$

stattfinden.

11. Der Ausdruck für die Lichtstärke

$$M^2 = C^2 + S^2,$$

welche eine kreisförmige Oeffnung in irgend einem Punkte des Beugungsbildes hervorbringt, ergibt sich jetzt, wenn man den Flächeninhalt πr^2 der Oeffnung gleich 1 annimmt, in folgenden zwei Formen:

$$M^2 = \left(\frac{2}{y}\right)^2 (U_1^2 + U_2^2),$$

oder

$$M^2 = \left(\frac{2}{y}\right)^2 \left(1 + V_0^2 + V_1^2 - 2V_0 \cos\left(\frac{1}{2}y + \frac{z^2}{2y}\right) - 2V_1 \sin\left(\frac{1}{2}y + \frac{z^2}{2y}\right)\right),$$

welche vermöge vorstehender Relationen identisch sind.

Ehe wir jedoch zur Discussion dieses Ausdrucks übergehen, erscheint es nothwendig, einige Eigenschaften der Functionen U und V kennen zu lernen.

II. Abschnitt.

Die Functionen U_n und V_n .

12. Statt der im vorigen Abschnitte eingeführten speciellen Functionen U_1 , U_2 , V_0 , V_1 betrachten wir jetzt die allgemeineren Functionen:

$$\begin{aligned} U_n(y, z) &= \left(\frac{y}{z}\right)^n I_n(z) - \left(\frac{y}{z}\right)^{n+2} I_{n+2}(z) + \left(\frac{y}{z}\right)^{n+4} I_{n+4}(z) - + \dots \\ &= \sum (-1)^p \left(\frac{y}{z}\right)^{n+2p} I_{n+2p}(z) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{und } V_n(y, z) &= \left(\frac{z}{y}\right)^n I_n(z) - \left(\frac{z}{y}\right)^{n+2} I_{n+2}(z) + \left(\frac{z}{y}\right)^{n+4} I_{n+4}(z) - + \dots \\ &= \sum (-1)^p \left(\frac{z}{y}\right)^{n+2p} I_{n+2p}(z) \end{aligned}$$

wo n beliebig positiv oder negativ ganz oder Null ist.

Diese Reihen sind convergent für alle Werthe von y und z . Denn da dem absoluten Werthe nach

$$z^{-(n+2p)} I_{n+2p}(z) \text{ stets kleiner ist als } \frac{1}{2^{n+2p} (n+2p)!},$$

so bleibt der absolute Werth von U_n immer kleiner als die stets convergente Reihe:

$$\sum \frac{\left(\frac{1}{2}y\right)^{n+2p}}{(n+2p)!};$$

und da V_n auch wie folgt geschrieben werden kann:

$$V_n = \sum (-1)^p \left(\frac{z^2}{y}\right)^{n+2p} z^{-(n+2p)} I_{n+2p}(z),$$

so muss der absolute Werth von V_n kleiner sein als derjenige der immer convergirenden Reihe:

$$\sum \frac{\left(\frac{z^2}{y}\right)^{n+2p}}{(n+2p)!}.$$

13. Da vermöge der bekannten Gleichung:

$$(I_0)^2 + 2(I_1)^2 + 2(I_2)^2 + 2(I_3)^2 + \dots = 1$$

der absolute Werth der Function I_0 niemals grösser als 1, und die absoluten Werthe der übrigen Bessel'schen Functionen niemals grösser als $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ werden können, so erkennt man unmittelbar, dass, wenn $y/z < 1$ ist, die Reihe U_n rascher convergirt als die geometrische Reihe

$$\sum \left(\frac{y}{z}\right)^{n+2p}.$$

Ist dagegen $y/z > 1$, so convergirt die Reihe V_n schneller als die geometrische Reihe

$$\sum \left(\frac{z}{y}\right)^{n+2p}.$$

Zur numerischen Berechnung sind daher im ersteren Fall die U -, im letzteren die V -Reihen bequemer.

14. Wenn $y = z$ ist, so hat man:

$$U_0(z, z) = V_0(z, z) = I_0 - I_2 + I_4 - I_6 + \dots$$

$$U_1(z, z) = V_1(z, z) = I_1 - I_3 + I_5 - I_7 + \dots$$

$$\text{Da nun} \quad I_0 - 2I_2 + 2I_4 - 2I_6 + \dots = \cos z$$

$$\text{und} \quad 2I_1 - 2I_3 + 2I_5 - 2I_7 + \dots = \sin z$$

ist, so ergibt sich:

$$U_0(z, z) = \frac{1}{2}(I_0(z) + \cos z), \quad V_0(z, z) = \frac{1}{2}(I_0(z) + \cos z)$$

$$U_1(z, z) = \frac{1}{2} \sin z \quad V_1(z, z) = \frac{1}{2} \sin z$$

$$U_2(z, z) = \frac{1}{2}(I_0(z) - \cos z), \quad V_2(z, z) = \frac{1}{2}(I_0(z) - \cos z)$$

u. s. f.

u. s. f.

oder allgemein

$$U_{2n}(z, z) = V_{2n}(z, z) = \frac{(-1)^n}{2} (I_0(z) + \cos z) - \sum_{p=0}^{p=n-1} (-1)^{n+p} I_{2p}(z)$$

und

$$U_{2n+1}(z, z) = V_{2n+1}(z, z) = \frac{(-1)^n}{2} \sin z - \sum_{p=0}^{p=n-1} (-1)^{n+p} I_{2p+1}(z).$$

15. Addirt man die beiden Gleichungen:

$$U_n(y, z) = \left(\frac{y}{z}\right)^n I_n - \left(\frac{y}{z}\right)^{n+2} I_{n+2} + \left(\frac{y}{z}\right)^{n+4} I_{n+4} - + \dots$$

$$U_{n+2}(y, z) = \left(\frac{y}{z}\right)^{n+2} I_{n+2} - \left(\frac{y}{z}\right)^{n+4} I_{n+4} + - \dots,$$

so ergibt sich sofort:

$$U_n + U_{n+2} = \left(\frac{y}{z}\right)^n I_n.$$

Ebenso findet man:

$$V_n + V_{n+2} = \left(\frac{z}{y}\right)^n I_n$$

Hiernach besteht zwischen den Functionen U und V die Relation:

$$z^{2n}(U_n + U_{n+2}) = y^{2n}(V_n + V_{n+2}).$$

Da

$$I_{-n} = (-1)^n I_n$$

ist, so hat man:

$$V_{-n} + V_{-n+2} = (-1)^n \cdot \left(\frac{y}{z}\right)^n I_n,$$

folglich:

$$U_n + U_{n+2} = (-1)^n (V_{-n} + V_{-n+2})$$

und

$$V_n + V_{n+2} = (-1)^n (U_{-n} + U_{-n+2}).$$

16. Wir setzen nun:

$$z = \sqrt{\xi},$$

und erhalten:

$$U_n(y, \sqrt{\xi}) = \sum (-1)^p y^{n+2p} \xi^{-\frac{n+2p}{2}} I_{n+2p}(\sqrt{\xi}).$$

Differentiirt man diese Gleichung m mal nach ζ , indem man berücksichtigt, dass

$$\frac{\partial^m (\zeta^{-\frac{\nu}{2}} I_\nu(V\zeta))}{\partial \zeta^m} = (-\frac{1}{2})^m \cdot \zeta^{-\frac{\nu+m}{2}} I_{\nu+m}(V\zeta)$$

ist, so ergibt sich:

$$\frac{\partial^m U_n(y, V\zeta)}{\partial \zeta^m} = \sum (-1)^p y^{n+2p} (-\frac{1}{2})^m \zeta^{-\frac{n+m+2p}{2}} I_{n+m+2p}(V\zeta)$$

oder

$$\frac{\partial^m U_n(y, V\zeta)}{\partial \zeta^m} = (-\frac{1}{2})^m y^{-m} U_{n+m}(y, V\zeta),$$

woraus für $m = 1$:

$$\frac{\partial U_n(y, V\zeta)}{\partial \zeta} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{y} U_{n+1}(y, V\zeta),$$

oder, wenn man mit

$$\frac{\partial \zeta}{\partial z} = 2z$$

multipliziert und wieder z^2 statt ζ schreibt,

$$\frac{\partial U_n(y, z)}{\partial z} = -\frac{z}{y} U_{n+1}(y, z)$$

hervorgeht. Hieraus folgt weiter noch:

$$\frac{\partial^m U_n}{\partial z^m} = -\frac{z}{y} \cdot \frac{\partial^{m-1} U_{n+1}}{\partial z^{m-1}} - \frac{m-1}{y} \cdot \frac{\partial^{m-2} U_{n+1}}{\partial z^{m-2}}.$$

17. Differentiirt man in gleicher Weise

$$V_n(y, V\zeta) = \sum (-1)^p y^{-(n+2p)} \zeta^{\frac{n+2p}{2}} I_{n+2p}(V\zeta)$$

m mal nach ζ unter Anwendung der Formel:

$$\frac{\partial^m (\zeta^{\frac{\nu}{2}} I_\nu(V\zeta))}{\partial \zeta^m} = (\frac{1}{2})^m \cdot \zeta^{\frac{\nu-m}{2}} I_{\nu-m}(V\zeta),$$

so erhält man:

$$\frac{\partial^m V_n(y, V\zeta)}{\partial \zeta^m} = \sum (-1)^p \cdot y^{-(n+2p)} (\frac{1}{2})^m \zeta^{\frac{n-m+2p}{2}} I_{n-m+2p}(V\zeta)$$

oder:

$$\frac{\partial^m V_n(y, V\zeta)}{\partial \zeta^m} = (\frac{1}{2})^m y^{-m} V_{n-m}(y, V\zeta),$$

woraus wie vorhin

$$\frac{\partial V_n(y, z)}{\partial z} = \frac{z}{y} V_{n-1}(y, z)$$

und

$$\frac{\partial^m V_n}{\partial z^m} = \frac{z}{y} \cdot \frac{\partial^{m-1} V_{n-1}}{\partial z^{m-1}} + \frac{m-1}{y} \cdot \frac{\partial^{m-2} V_{n-1}}{\partial z^{m-2}}$$

hervorgeht.

18. Wir haben oben (10) bereits gefunden:

$$U_1(y, z) + V_1(y, z) = \sin\left(\frac{1}{2}y + \frac{z^2}{2y}\right).$$

Setzen wir hierin $\sqrt{\zeta}$ statt z , und differentiiren wir die Gleichung

$$U_1(y, \sqrt{\zeta}) + V_1(y, \sqrt{\zeta}) = \frac{1}{2i} \left(e^{\left(\frac{1}{2}y + \frac{\zeta}{2y}\right)i} - e^{-\left(\frac{1}{2}y + \frac{\zeta}{2y}\right)i} \right)$$

n mal nach ζ , so erhalten wir zur Linken:

$$\left(-\frac{1}{2}\right)^n y^{-n} U_{n+1}(y, \sqrt{\zeta}) + \left(\frac{1}{2}\right)^n y^{-n} V_{-n+1}(y, \sqrt{\zeta})$$

und zur Rechten:

$$\frac{1}{2i} \left(\frac{i}{2y}\right)^n \left(e^{\left(\frac{1}{2}y + \frac{\zeta}{2y}\right)i} - (-1)^n e^{-\left(\frac{1}{2}y + \frac{\zeta}{2y}\right)i} \right).$$

Wir gelangen demnach, wenn wir wiederum z^2 statt ζ schreiben, zu der Gleichung

$$(-1)^n U_{n+1}(y, z) + V_{-n+1}(y, z) = \frac{i^n}{2i} \left(e^{\left(\frac{1}{2}y + \frac{z^2}{2y}\right)i} - (-1)^n e^{-\left(\frac{1}{2}y + \frac{z^2}{2y}\right)i} \right).$$

Für $2n$ statt n ergibt sich hieraus:

$$U_{2n+1} + V_{-2n+1} = (-1)^n \sin\left(\frac{1}{2}y + \frac{z^2}{2y}\right),$$

und für $2n+1$ statt n :

$$-U_{2n+2} + V_{-2n} = (-1)^n \cos\left(\frac{1}{2}y + \frac{z^2}{2y}\right),$$

welche Gleichungen die bereits oben (10) hingestellten:

$$U_1 + V_1 = \sin\left(\frac{1}{2}y + \frac{z^2}{2y}\right)$$

$$-U_2 + V_0 = \cos\left(\frac{1}{2}y + \frac{z^2}{2y}\right)$$

als Specialfälle für $n=0$ in sich schliessen.

19. Die letzteren zwei Gleichungen sagen aus, dass für die Besselschen Functionen die bemerkenswerthen Gleichungen:

$$\sum (-1)^p \left(\left(\frac{y}{z} \right)^{2p+1} + \left(\frac{z}{y} \right)^{2p+1} \right) I_{p+1}(z) = \sin \left(\frac{1}{2}y + \frac{z^2}{2y} \right)$$

$$I_0(z) - \sum (-1)^p \left(\left(\frac{y}{z} \right)^{2p+2} + \left(\frac{z}{y} \right)^{2p+2} \right) I_{2p+2}(z) = \cos \left(\frac{1}{2}y + \frac{z^2}{2y} \right)$$

stattfinden. Die beiden Gleichungen:

$$2I_1 - 2I_3 + 2I_5 - 2I_7 + \dots = \sin z,$$

$$I_0 - 2I_2 + 2I_4 - 2I_6 + \dots = \cos z,$$

von welchen wir oben (14) Gebrauch machten, sind als besondere Fälle für $y = z$ in denselben enthalten.

20. Durch Anwendung des Taylor'schen Lehrsatzes ergibt sich zunächst:

$$U_n(y, \sqrt{\zeta + h}) = \sum \frac{h^p}{p!} \cdot \frac{\partial^p U_n(y, \sqrt{\zeta})}{\partial \zeta^p},$$

sodann mit Rücksicht auf (16):

$$U_n(y, \sqrt{\zeta + h}) = \sum (-1)^p \cdot \frac{h^p}{(2y)^p \cdot p!} U_{n+p}(y, \sqrt{\zeta}).$$

Setzt man darin z^2 statt ζ , und bestimmt h aus der Gleichung:

$$\sqrt{z^2 + h} = z + \varepsilon,$$

so findet man:

$$U_n(y, z + \varepsilon) = \sum (-1)^p \cdot \frac{h^p}{(2y)^p \cdot p!} U_{n+p},$$

wo h aus

$$h = 2\varepsilon z + \varepsilon^2$$

zu bestimmen ist, und die Coefficienten U_{n+p} , wenn zwei aufeinanderfolgende derselben bekannt sind, mittels der Recursionsformel (15):

$$U_n + U_{n+2} = \left(\frac{y}{z} \right)^n I_n$$

leicht berechnet werden.

21. In der nämlichen Weise führt der Taylor'sche Lehrsatz unter Berücksichtigung von (17) zu der Gleichung:

$$V_n(y, z + \varepsilon) = \sum \frac{h^p}{(2y)^p \cdot p!} V_{n-p},$$

wo h in derselben Weise wie oben zu berechnen ist, und die Coefficienten V_{n-p} successive aus der Gleichung (15):

$$V_n + V_{n+2} = \left(\frac{z}{y}\right)^n I_n$$

hervorgehen.

22. Differentiirt man

$$U_n(y, z) = \sum (-1)^p \left(\frac{y}{z}\right)^{n+2p} I_{n+2p}(z)$$

nach y , so kommt zunächst:

$$\frac{\partial U_n(y, z)}{\partial y} = \frac{1}{y} \sum (-1)^p (n+2p) \left(\frac{y}{z}\right)^{n+2p} I_{n+2p}(z),$$

oder, da bekanntlich:

$$(n+2p) I_{n+2p} = \frac{1}{2} z I_{n+2p-1} + \frac{1}{2} z I_{n+2p+1}$$

ist:

$$\frac{\partial U_n}{\partial y} = \frac{1}{2} \sum (-1)^p \left(\frac{y}{z}\right)^{n-1+2p} I_{n-1+2p} + \frac{1}{2} \left(\frac{z}{y}\right)^2 \sum (-1)^p \left(\frac{y}{z}\right)^{n+1+2p} I_{n+1+2p}.$$

Man hat demnach:

$$\frac{\partial U_n}{\partial y} = \frac{1}{2} U_{n-1} + \frac{1}{2} \left(\frac{z}{y}\right)^2 U_{n+1}.$$

Durch dasselbe Verfahren findet man:

$$\frac{\partial V_n}{\partial y} = -\frac{1}{2} V_{n+1} - \frac{1}{2} \left(\frac{z}{y}\right)^2 V_{n-1}.$$

23. Nach dem Vorhergehenden ist:

$$\frac{1}{2} z^2 U_{n+1} = y^2 \left(\frac{\partial U_n}{\partial y} - \frac{1}{2} U_{n-1} \right).$$

Differentiirt man diese Gleichung m mal nach y , indem man zur Rechten den Satz:

$$\frac{\partial^m PQ}{\partial y^m} = \sum_{p=0}^{p=m} \frac{m!}{p!} \cdot \frac{\partial^p P}{\partial y^p} \cdot \frac{\partial^{m-p} Q}{\partial y^{m-p}}$$

anwendet, so ergibt sich:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} z^2 \cdot \frac{\partial^m U_{n+1}}{\partial y^m} &= y^2 \left(\frac{\partial^{m+1} U_n}{\partial y^{m+1}} - \frac{1}{2} \frac{\partial^m U_{n-1}}{\partial y^m} \right) + 2my \left(\frac{\partial^m U_n}{\partial y^m} - \frac{1}{2} \frac{\partial^{m-1} U_{n-1}}{\partial y^{m-1}} \right) \\ &\quad + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} \cdot 2 \left(\frac{\partial^{m-1} U_n}{\partial y^{m-1}} - \frac{1}{2} \frac{\partial^{m-2} U_{n-1}}{\partial y^{m-2}} \right), \end{aligned}$$

woraus hervorgeht:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^{m+1} U_n}{\partial y^{m+1}} &= \frac{1}{2} \frac{\partial^m U_{n-1}}{\partial y^m} - \frac{2m}{y} \cdot \frac{\partial^m U_n}{\partial y^m} + \frac{1}{2} \left(\frac{z}{y} \right)^2 \frac{\partial^m U_{n+1}}{\partial y^m} \\ &\quad + \frac{m}{y} \cdot \frac{\partial^{m-1} U_{n-1}}{\partial y^{m-1}} - \frac{m(m-1)}{y^2} \frac{\partial^{m-1} U_n}{\partial y^{m-1}} + \frac{m(m-1)}{2y^2} \frac{\partial^{m-2} U_{n-1}}{\partial y^{m-2}}. \end{aligned}$$

Auf demselben Wege gelangt man, indem man von der Gleichung:

$$\frac{1}{2} z^2 V_{n-1} = -y^2 \left(\frac{\partial V_n}{\partial y} + \frac{1}{2} V_{n+1} \right)$$

ausgeht, zu der Formel:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^{m+1} V_n}{\partial y^{m+1}} &= -\frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^m V_{n+1}}{\partial y^m} - \frac{2m}{y} \cdot \frac{\partial^m V_n}{\partial y^m} - \frac{1}{2} \left(\frac{z}{y} \right)^2 \frac{\partial^m V_{n-1}}{\partial y^m} \\ &\quad - \frac{m}{y} \cdot \frac{\partial^{m-1} V_{n+1}}{\partial y^{m-1}} - \frac{m(m-1)}{y^2} \frac{\partial^{m-1} V_n}{\partial y^{m-1}} - \frac{m(m-1)}{2y^2} \frac{\partial^{m-2} V_{n-1}}{\partial y^{m-2}}. \end{aligned}$$

24. Betrachten wir y als eine Function von z , so ist der totale Differentialquotient von $U_n(y, z)$ nach z :

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial U_n}{\partial z} \right) &= \frac{\partial U_n}{\partial z} + \frac{\partial U_n}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial z} \\ &= -\frac{z}{y} U_{n+1} + \frac{1}{2} \left(U_{n-1} + \left(\frac{z}{y} \right)^2 U_{n+1} \right) \cdot \frac{\partial y}{\partial z}. \end{aligned}$$

Ist nun

$$y = cz,$$

wo c eine Constante ist, und demnach:

$$\frac{z}{y} = \frac{1}{c}, \quad \frac{\partial y}{\partial z} = c,$$

so hat man:

$$\frac{\partial U_n(cz, z)}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(cU_{n-1} - \frac{1}{c} U_{n+1} \right).$$

Hieraus folgt weiter:

$$\frac{\partial^2 U_n(cz, z)}{\partial z^2} = \frac{1}{4} c \left(cU_{n-2} - \frac{1}{c} U_n \right) - \frac{1}{4c} \left(cU_n - \frac{1}{c} U_{n+2} \right),$$

oder:

$$\frac{\partial^2 U_n(cz, z)}{\partial z^2} = \frac{1}{4} (c^2 U_{n-2} - 2U_n + c^{-2} U_{n+2}).$$

Bildet man so fortschreitend die höheren Differentialquotienten, so lässt sich auf inductorischem Wege leicht beweisen, dass allgemein:

$$\frac{\partial^m U_n(cz, z)}{\partial z^m} = \frac{1}{2^m} \sum (-1)^p \cdot \frac{m!-1}{p!} \cdot c^{m-2p} U_{n-m+2p}$$

ist.

25. Ist insbesondere $c = 1$, oder $y = z$, so hat man:

$$\frac{\partial U_n(z, z)}{\partial z} = \frac{1}{2} (U_{n-1} - U_{n+1})$$

$$\frac{\partial^2 U_n(z, z)}{\partial z^2} = \frac{1}{4} (U_{n-2} - 2U_n + U_{n+2})$$

$$\frac{\partial^3 U_n(z, z)}{\partial z^3} = \frac{1}{8} (U_{n-3} - 3U_{n-1} + 3U_{n+1} - U_{n+3})$$

⋮

⋮

und allgemein:

$$\frac{\partial^m U_n(z, z)}{\partial z^m} = \frac{1}{2^m} \sum (-1)^p \cdot \frac{m!-1}{p!} \cdot U_{n-m+2p}.$$

Hieraus ergibt sich also, dass diese Differentialquotienten das nämliche Bildungsgesetz befolgen, wie die nach n genommenen endlichen Differenzen zwischen je der zweiten Function, mit dem einzigen Unterschied, dass jede dieser Differenzen noch mit der sovielten Potenz von 2 dividirt erscheint, als die jedesmalige Ordnung des Differentialquotienten angibt.

Kennt man daher für irgend einen Werth von z zwei aufeinanderfolgende der Functionen $U_n(z, z)$, und verschafft sich die übrigen, soweit sie erforderlich sind, mittels der Gleichung (15):

$$U_n + U_{n+2} = I_n,$$

so lassen sich obige Differentialquotienten durch einen einfachen Mechanismus berechnen.

26. Aehnliches gilt für die Function V_n . Denn man findet, von (17) und (22) Gebrauch machend:

$$\frac{\partial V_n(cz, z)}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{c} V_{n-1} - c V_{n+1} \right),$$

$$\frac{\partial^2 V_n(cz, z)}{\partial z^2} = \frac{1}{4} (c^{-2} V_{n-2} - 2V_n + c^2 V_{n+2})$$

u. s. f.,

also allgemein:

$$\frac{\partial^m V_n(cz, z)}{\partial z^m} = \frac{1}{2^m} \sum (-1)^p \cdot \frac{m! p!}{p!} c^{-m+2p} V_{n-m+2p}.$$

27. Da

$$\frac{\partial U_n(z, z)}{\partial z} = \frac{1}{2} (U_{n-1} - U_{n+1}),$$

und (nach 15) für $y = z$:

$$I_{n-1} = U_{n-1} + U_{n+1}$$

ist, so ergibt sich noch die bemerkenswerthe Beziehung:

$$2I_{n-1} \frac{\partial U_n(z, z)}{\partial z} = U_{n-1}^2 - U_{n+1}^2,$$

welche ebenso auch für $V_n(z, z)$ gilt, da ja $V_n(z, z) = U_n(z, z)$ ist.

28. Wie die Reihen U_1, U_2, V_0, V_1 aus der Entwicklung der bestimmten Integrale

$$C = 2\pi \int_0^r I_0(l\rho) \cos\left(\frac{1}{2}k\rho^2\right) \cdot \rho d\rho = 2\pi r^2 \int_0^1 I_0\left(z \frac{\rho}{r}\right) \cos\left(\frac{1}{2}y \frac{\rho^2}{r^2}\right) \frac{\rho}{r} \cdot \frac{d\rho}{r},$$

oder

$$C = 2\pi r^2 \int_0^1 I_0(zu) \cos\left(\frac{1}{2}yu^2\right) \cdot u du$$

und

$$S = 2\pi r^2 \int_0^1 I_0(zu) \sin\left(\frac{1}{2}yu^2\right) \cdot u du$$

hervorgegangen sind, müssen auch die verallgemeinerten Reihen U_n und V_n mit analogen bestimmten Integralen in Zusammenhang stehen.

Aus (7) ergibt sich ohne weiteres:

$$C \cos \frac{1}{2}y + S \sin \frac{1}{2}y = \frac{\pi r^2}{\frac{1}{2}y} U_1,$$

$$C \sin \frac{1}{2}y - S \cos \frac{1}{2}y = \frac{\pi r^2}{\frac{1}{2}y} U_2,$$

oder:

$$\int_0^1 I_0(zu) \cos \left[\frac{1}{2}y(1-u^2) \right] \cdot u \, du = \frac{1}{y} U_1,$$

und:

$$\int_0^1 I_0(zu) \sin \left[\frac{1}{2}y(1-u^2) \right] \cdot u \, du = \frac{1}{y} U_2.$$

Setzt man hierin $\sqrt{\zeta}$ statt z , und differentiirt beiderseits m mal nach ζ , indem man zur Linken von der Formel:

$$\frac{\partial^m I_0(\sqrt{\zeta})}{\partial \zeta^m} = \left(-\frac{1}{2}\right)^m \cdot \zeta^{-\frac{m}{2}} I_m(\sqrt{\zeta}),$$

zur Rechten aber von der Formel (15):

$$\frac{\partial^m U_n(y, \sqrt{\zeta})}{\partial \zeta^m} = \left(-\frac{1}{2}\right)^m y^{-m} U_{n+m}(y, \sqrt{\zeta})$$

Gebrauch macht, so erhält man zunächst:

$$\zeta^{-\frac{m}{2}} \int_0^1 I_m(u\sqrt{\zeta}) \cos \left[\frac{1}{2}y(1-u^2) \right] \cdot u^{m+1} \cdot du = \frac{1}{y} \cdot y^{-m} U_{m+1}(y, \sqrt{\zeta}),$$

$$\zeta^{-\frac{m}{2}} \int_0^1 I_m(u\sqrt{\zeta}) \sin \left[\frac{1}{2}y(1-u^2) \right] \cdot u^{m+1} \cdot du = \frac{1}{y} \cdot y^{-m} U_{m+2}(y, \sqrt{\zeta}),$$

und schliesslich, wenn man wieder z^2 statt ζ und in der ersten Gleichung $n-1$, in der zweiten $n-2$ statt m schreibt:

$$\int_0^1 I_{n-1}(zu) \cdot \cos\left[\frac{1}{2}y(1-u^2)\right] \cdot u^n du = \frac{1}{y} \cdot \left(\frac{z}{y}\right)^{n-1} \cdot U_n,$$

$$\int_0^1 I_{n-2}(zu) \cdot \sin\left[\frac{1}{2}y(1-u^2)\right] \cdot u^{n-1} du = \frac{1}{y} \cdot \left(\frac{z}{y}\right)^{n-2} U_n.$$

Vermöge der Beziehungen, welche (gemäss 18) zwischen den Functionen U_n und V_n bestehen, ist hiemit auch der Zusammenhang dieser Integrale mit der Function V_n gegeben. Es ist übrigens ersichtlich, dass diese Gleichungen sich auch direct ergeben, wenn man vorstehende Integrale derselben Behandlung durch successive theilweise Integration unterwirft, wie die Integrale C und S im ersten Abschnitt.

29. Da (nach 14) für $y = z$ die Function U_n in endlicher Form durch goniometrische und Bessel'sche Functionen ausgedrückt wird, indem man nämlich hat:

$$U_{2n}(z, z) = \frac{(-1)^n}{2} (I_0(z) + \cos z) - \sum_{p=0}^{p=n-1} (-1)^{n+p} I_{2p}(z),$$

$$U_{2n+1}(z, z) = \frac{(-1)^n}{2} \sin z - \sum_{p=0}^{p=n-1} (-1)^{n+p} I_{2p+1}(z),$$

so ergeben sich für diesen Fall aus obigen Formeln folgende bemerkenswerthe Resultate:

$$\int_0^1 I_{2n-1}(zu) \cdot \cos\left[\frac{1}{2}z(1-u^2)\right] \cdot u^{2n} du = \int_0^1 I_{2n-2}(zu) \cdot \sin\left[\frac{1}{2}z(1-u^2)\right] \cdot u^{2n-1} du$$

$$= \frac{(-1)^n}{2z} (I_0 + \cos z) - \frac{1}{z} \sum_{p=0}^{p=n-1} (-1)^{n+p} I_{2p},$$

$$\int_0^1 I_{2n}(zu) \cos\left[\frac{1}{2}z(1-u^2)\right] \cdot u^{2n+1} du = \int_0^1 I_{2n-1}(zu) \sin\left[\frac{1}{2}z(1-u^2)\right] \cdot u^{2n} du$$

$$= \frac{(-1)^n}{2z} \sin z - \frac{1}{z} \sum_{p=0}^{p=n-1} (-1)^{n+p} I_{2p+1},$$

welche sich (für resp. $n = 1$ und $n = 0$) noch wie folgt:

$$\int_0^1 I_1(zu) \cos\left[\frac{1}{2}z(1-u^2)\right] \cdot u^2 du = \int_0^1 I_0(zu) \cdot \sin\left[\frac{1}{2}z(1-u^2)\right] \cdot u du$$

$$= \frac{1}{2z} (I_0 - \cos z),$$

$$\int_0^1 I_0(zu) \cos\left[\frac{1}{2}z(1-u^2)\right] u du = - \int_0^1 I_1(zu) \sin\left[\frac{1}{2}z(1-u^2)\right] \cdot du$$

$$= \frac{\sin z}{2z}$$

vereinfachen.

30. Gemäss (5) und (9) haben wir, mit Rücksicht darauf, dass

$$\text{ist:} \quad y = kr^2, \quad z = lr$$

$$\int_0^r I_0(l\varrho) \cos\left(\frac{1}{2}k\varrho^2\right) \cdot \varrho d\varrho = \frac{1}{k} \sin \frac{l^2}{2k} + \frac{1}{k} \sin \frac{1}{2}kr^2 \cdot V_0 - \frac{1}{k} \cos \frac{1}{2}kr^2 \cdot V_1$$

und

$$\int_0^r I_0(l\varrho) \cdot \sin\left(\frac{1}{2}k\varrho^2\right) \cdot \varrho d\varrho = \frac{1}{k} \cos \frac{l^2}{2k} - \frac{1}{k} \cos \frac{1}{2}kr^2 \cdot V_0 - \frac{1}{k} \sin \frac{1}{2}kr^2 \cdot V_1.$$

Ist nun weder k noch l der Null gleich, und lassen wir die obere Grenze r der Integrale unendlich gross werden, so verschwinden die Functionen V_0 und V_1 . Denn für $r = \infty$ verschwindet nicht nur

$$\frac{z}{y} = \frac{l}{kr},$$

sondern es verschwinden, da $z = lr$ unendlich gross wird, auch sämtliche Bessel'sche Functionen.

Wir gelangen daher zu den folgenden beiden bestimmten Integralen:

$$\int_0^\infty I_0(l\varrho) \cos\left(\frac{1}{2}k\varrho^2\right) \cdot \varrho d\varrho = \frac{1}{k} \sin \frac{l^2}{2k},$$

$$\int_0^\infty I_0(l\varrho) \sin\left(\frac{1}{2}k\varrho^2\right) \cdot \varrho d\varrho = \frac{1}{k} \cos \frac{l^2}{2k},$$

welche, wie wir weiterhin sehen werden, für das vorliegende Problem von Bedeutung sind.

31. Auch diese Formeln sind der Verallgemeinerung fähig. Addirt man sie nämlich, nachdem man die zweite mit $i = \sqrt{-1}$ multiplicirt hat, und schreibt $\sqrt{\zeta}$ statt 1, so erhält man:

$$\int_0^{\infty} I_0(\varrho \sqrt{\zeta}) e^{\frac{1}{2} k \varrho^2 i} \cdot \varrho d\varrho = \frac{i}{k} \cdot e^{-\frac{\zeta}{2k} i}.$$

Differentiirt man diese Gleichung beiderseits m mal nach ζ , indem zur Linken die Relation:

$$\frac{\partial^m I_0(\varrho \sqrt{\zeta})}{\partial \zeta^m} = \frac{(-1)^m}{2^m} \varrho^m \zeta^{-\frac{m}{2}} I_m(\varrho \sqrt{\zeta})$$

anwendet, so findet man zunächst:

$$\frac{(-1)^m}{2^m} \zeta^{-\frac{m}{2}} \int_0^{\infty} I_m(\varrho \sqrt{\zeta}) \cdot e^{\frac{1}{2} k \varrho^2 i} \cdot \varrho^{m+1} d\varrho = i \frac{(-1)^m}{k} \cdot \left(\frac{i}{2k}\right)^m e^{-\frac{\zeta}{2k} i}$$

oder, wenn man wieder 1^2 statt ζ setzt:

$$\int_0^{\infty} I_m(1\varrho) \cdot e^{\frac{1}{2} k \varrho^2 i} \cdot \varrho^{m+1} d\varrho = \frac{i^{m+1}}{k} \left(\frac{1}{k}\right)^m e^{-\frac{1^2}{2k} i}.$$

Hieraus aber gehen, wenn man zuerst $2m$, dann $2m+1$ statt m setzt, die folgenden vier Gleichungen hervor:

$$\int_0^{\infty} I_{2m}(1\varrho) \cdot \cos\left(\frac{1}{2} k \varrho^2\right) \cdot \varrho^{2m+1} d\varrho = \frac{(-1)^m}{k} \cdot \left(\frac{1}{k}\right)^{2m} \cdot \sin \frac{1^2}{2k};$$

$$\int_0^{\infty} I_{2m}(1\varrho) \cdot \sin\left(\frac{1}{2} k \varrho^2\right) \cdot \varrho^{2m+1} d\varrho = \frac{(-1)^m}{k} \cdot \left(\frac{1}{k}\right)^{2m} \cdot \cos \frac{1^2}{2k};$$

$$\int_0^{\infty} I_{2m+1}(1\varrho) \cos\left(\frac{1}{2} k \varrho^2\right) \cdot \varrho^{2m+2} d\varrho = \frac{(-1)^{m+1}}{k} \cdot \left(\frac{1}{k}\right)^{2m+1} \cdot \cos \frac{1^2}{2k};$$

$$\int_0^{\infty} I_{2m+1}(1\varrho) \cdot \sin\left(\frac{1}{2} k \varrho^2\right) \cdot \varrho^{2m+2} d\varrho = \frac{(-1)^m}{k} \cdot \left(\frac{1}{k}\right)^{2m+1} \cdot \sin \frac{1^2}{2k},$$

in deren beiden ersteren die obigen zwei Formeln (30) für $m=0$ als specielle Fälle enthalten sind.

III. Abschnitt.

Der Fraunhofer'sche Grenzfall.

32. Wir betrachten zuerst den Fall, dass $y = 0$, oder

$$\frac{2\pi}{\lambda} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) r^2 = 0$$

ist.

Diess tritt ein, entweder wenn $a = b = \infty$, oder wenn $b = -a$ ist.

Ersteres findet statt, wenn der Lichtpunkt in unendlicher Ferne liegt, die einfallende Welle sonach eben ist, und die von der beugenden Oeffnung nach irgend einer Richtung unter sich parallel ausgehenden und nach dem in dieser Richtung gelegenen unendlich fernen Punkt hinielenden Elementarstrahlen zur Interferenz kommen.

Da Linsen in Strahlenbündel zwischen ihren conjugirten Punkten keine neuen Gangunterschiede einführen, so kann dieser Fall verwirklicht werden, wenn die Beugungserscheinung durch ein Spectrometer beobachtet wird, dessen Collimator und Fernrohr auf unendliche Entfernung eingestellt sind, und den beugenden Schirm zwischen sich enthalten.

33. Wenn $b = -a$ ist, so haben wir zwei Fälle zu unterscheiden, nämlich, dass entweder a negativ, oder a positiv ist.

Ist a negativ und sonach das ebenso grosse b positiv, so ist die einfallende Kugelwelle nach ihrer Fortpflanzungsrichtung zu concav, und der Auffangschirm geht durch ihren Mittelpunkt.

Dieser Fall wird realisirt, wenn mittels einer Sammellinse, welche um mehr als ihre Brennweite von dem Lichtpunkt absteht, dessen scharfes Bild auf dem durch den conjugirten Punkt gelegten Auffangschirm entworfen und die beugende Oeffnung zwischen die Linse und diesen Schirm gebracht wird.

34. Ist dagegen a positiv und das gleichgrosse b negativ, so wendet die einfallende Kugelwelle ihre convexe Seite nach der Fortpflanzungsrichtung, und die zur Interferenz kommenden Elementarstrahlenbündel gehen so von der beugenden Oeffnung aus, als kämen sie von Punkten, welche in einer durch den Lichtpunkt selbst als Mittelpunkt der Kugelwelle gelegten Ebene liegen.

Dieser Fall tritt z. B. ein, wenn man die beugende Oeffnung vor das auf den Lichtpunkt accommodirte Auge hält.

Um denselben Fall objectiv zu verwirklichen, bringt man die beugende Oeffnung zwischen den Lichtpunkt und eine Sammellinse, welche von demselben um mehr als ihre Brennweite absteht, und stellt den Auffangschirm da auf, wo die Linse das scharfe Bild des Lichtpunktes entwirft.

In diesem wie in dem vorigen Falle kann man auch eines materiellen Auffangschirmes ganz entrathen, indem man von der Hinterseite her das freie oder mit einer Lupe bewaffnete Auge auf die Ebene, welche der Schirm einnahm, accommodirt. Auf der Netzhaut entstehen alsdann die scharfen Bilder aller Punkte dieser Ebene.

Da in einem astronomischen Fernrohr Sammellinse und Lupe sich vereinigt finden, so genügt es, um die in diesem Falle sich zeigende Erscheinung zu beobachten, ein solches Fernrohr, vor dessen Objectiv die beugende Oeffnung angebracht ist, auf den Lichtpunkt einzustellen.

Hierin besteht die Beobachtungsmethode Fraunhofer's. Danach sind die Beugungserscheinungen, bei welchen

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 0$$

ist, mit Recht Fraunhofer'sche Beugungserscheinungen genannt worden.

35. Die drei besprochenen Fälle (32, 33, 34) dieser Art von Beugungserscheinungen haben den Umstand mit einander gemein, dass der Beobachtungsapparat, sei es bei objectiver Darstellung der Auffangschirm, oder bei subjectiver Betrachtung das blosse oder mit Lupe bewaffnete Auge, oder ein Fernrohr, stets auf das scharfe Bild des Lichtpunktes accommodirt oder eingestellt ist.

Man könnte daher die Fraunhofer'schen Beugungserscheinungen auch als accommodirte oder eingestellte bezeichnen, die Fresnel'schen Beugungserscheinungen dagegen als nicht accommodirte. Jene bilden den besonderen Grenzfall, welchem diese sich stetig nähern, wenn y gegen Null rückt.

36. Obgleich der Fraunhofer'sche Grenzfall für die kreisförmige Oeffnung, wie oben bereits bemerkt, schon mehrfach und erschöpfend

behandelt worden ist, so erscheint es doch, eben wegen dieses Zusammenhangs mit dem weiterhin zu behandelnden allgemeinen Problem, unumgänglich nothwendig, denselben hier in Kürze nochmals zu besprechen.

Für $y = 0$ ist:

$$\begin{aligned}\frac{2}{y}U_1 &= \frac{2}{z}I_1(z) - 2 \cdot \frac{y^2}{z^3}I_3(z) + 2 \cdot \frac{y^4}{z^5}I_5(z) - + \dots \\ &= \frac{2}{z}I_1(z),\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\frac{2}{y}U_2 &= 2 \cdot \frac{y}{z^2}I_2(z) - 2 \cdot \frac{y^3}{z^4}I_4(z) + 2 \cdot \frac{y^5}{z^6}I_6(z) - + \dots \\ &= 0.\end{aligned}$$

Der Ausdruck für die Lichtstärke M^2 (11) des Beugungsbildes ergibt sich daher in der folgenden einfachen Gestalt:

$$M^2 = \left(\frac{2}{z}I_1\right)^2.$$

Schon Airy¹⁾ hat die convergente unendliche Reihe:

$$1 - \frac{z^2}{2 \cdot 4} + \frac{z^4}{2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6} - \frac{z^6}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} + \dots,$$

welche nichts anderes ist als $2z^{-1}I_1$, und von ihm durch Entwicklung des bestimmten Integrals:

$$\frac{2}{\pi} \int_{-1}^{+1} \cos zu \sqrt{1-u^2} \cdot du$$

erhalten wurde, zur Berechnung einer Tabelle benutzt, welche die Functionswerthe für alle um 0,2 von einander verschiedene Werthe des Arguments von $z = 0$ bis $z = 12$ enthält. Aus derselben Reihe hat Knochenhauer²⁾ die Maxima und Minima der Lichtstärke annähernd berechnet. Schon vor ihnen hatte Schwerd³⁾ auf dem mühsamen Wege der Zerlegung des Kreises in 180 trapezförmige Zonen eine Tabelle hergestellt, welche mit einem Increment von $15^0 = 0,2618$ bis $z = 1125^0 = 19,635$ reicht.

1) Airy, l. c.

2) Knochenhauer, l. c. p. 24.

3) Schwerd, l. c. p. 67.

37. Die Bemerkung aber, dass M^2 im gegenwärtigen Fall durch die Bessel'sche Function I_1 dargestellt wird, führt uns mit Leichtigkeit zu einer noch umfassenderen und genaueren Tabelle der Werthe von M und M^2 . Schon Bessel¹⁾ hat Tabellen der Functionen I_0 und I_1 gegeben, welche jedoch nur bis $z = 3,2$ gehen und desshalb für das vorliegende Problem nicht ausreichen. Hansen²⁾ dagegen berechnete später für diese beiden Bessel'schen Functionen Tafeln von grösserem Umfang, welche auch meinem oben bereits citirten Schriftchen³⁾ über die Bessel'schen Functionen als Anhang beigegeben sind. Aus diesen ergibt sich fast mühelos eine Tabelle der Werthe von $2z^{-1}I_1$, indem man die verdoppelten Werthe von I_1 durch das zugehörige Argument dividirt. Die so berechnete Tafel⁴⁾ folgt am Schlusse dieser Abhandlung (Tab. I); sie reicht mit einem Incremente $= 0,1$ bis $z = 20$. In der dritten Columnne finden sich die Werthe von M^2 , d. i. die Lichtintensitäten selbst, auf diejenige der Bildmitte als Einheit bezogen. Die Fig. 1 gibt eine graphische Darstellung dieser Intensitäten, oder vielmehr der Werthe $1000 M^2$, von $z = 3$ bis $z = 20$.

Für den Gebrauch der Tabelle in speciellen Fällen erinnern wir uns, dass (nach 6 und 5):

$$z = lr = \frac{2\pi\zeta}{\lambda b} r$$

ist. Wird der Beugungswinkel mit χ bezeichnet, so ist

$$\frac{\zeta}{b} = \operatorname{tg} \chi,$$

oder auch, wenn der Beugungswinkel sehr klein ist, ebensogut:

$$\frac{\zeta}{b} = \sin \chi.$$

1) Bessel, Untersuchung des Theils der planetarischen Störungen, welcher aus der Bewegung der Sonne entsteht. Abh. der Berl. Akad. der Wiss. 1824.

2) Hansen, Ermittlung der absoluten Störungen in Ellipsen von beliebiger Excentricität und Neigung; Schriften der Sternwarte Seeberg, Gotha 1843.

3) Lommel, Studien über die Bessel'schen Functionen. Leipzig 1868.

4) Dieselbe ist aus einer früheren Abhandlung: „Lommel, Ueber die Anwendung der Bessel'schen Functionen in der Theorie der Beugung; Schlömilch's Zeitschr. f. Math. u. Phys. 15. p. 164. 1870.“ reproducirt.

Man hat daher:

$$z = \frac{2\pi}{\lambda} r \operatorname{tg} \chi \quad \text{oder auch:} \quad z = \frac{2\pi}{\lambda} r \sin \chi.$$

Wird ein Zwischenwerth von $2z^{-1}I_1$ verlangt, der in der Tabelle nicht vorkommt, so geht man auf die Hansen'sche Tabelle von I_1 zurück, und rechnet nach der Formel:

$$I_1(z + \varepsilon) = I_1(z) + a \cdot \frac{\varepsilon}{h} + b \left(\frac{\varepsilon}{h} \right)^2 + c \left(\frac{\varepsilon}{h} \right)^3,$$

wo a, b, c resp. die der Hansen'schen Tabelle beigegeführten Werthe von:

$$\frac{\partial I_1}{\partial z}, \quad \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2 I_1}{\partial z^2}, \quad \frac{1}{6} \cdot \frac{\partial^3 I_1}{\partial z^3},$$

bezogen auf das Increment $h = 0,1$ der Tafel, bedeuten.

38. Um die Nullwerthe der Function I_1 zu ermitteln, wurde ebenfalls die vorstehende Formel für $I_1(z + \varepsilon)$ benutzt. Nachdem diejenigen Werthe von I_1, a, b und c , welche einem Nullwerthe von I_1 am nächsten liegen, der Hansen'schen Tabelle entnommen waren, wurde die numerische Gleichung dritten Grades:

$$I_1(z) + a \cdot \frac{\varepsilon}{h} + b \left(\frac{\varepsilon}{h} \right)^2 + c \left(\frac{\varepsilon}{h} \right)^3 = 0$$

nach ε/h aufgelöst, und so die zu dem tabellarischen Werthe von z hinzuzufügende Grösse ε aufgefunden.

39. Behufs Ermittlung der Maxima und Minima der Function $z^{-1}I_1(z)$ wurde der nach ε genommene Differentialquotient von $(z + \varepsilon)^{-1}I_1(z + \varepsilon)$ gleich Null gesetzt. Man gelangt so, unter Vernachlässigung der dritten Potenz von ε/h , zur quadratischen Gleichung:

$$\left(b + \frac{3cz}{h} \right) \left(\frac{\varepsilon}{h} \right)^2 + \frac{2bz}{h} \cdot \frac{\varepsilon}{h} + \frac{az}{h} - I_1(z) = 0,$$

in welcher der dem Maximum oder Minimum nächstliegende Werth von z unserer Tab. I, die zugehörigen Werthe von I_1, a, b und c aber der Hansen'schen Tabelle zu entnehmen sind.

40. Eine bekannte Eigenschaft der Bessel'schen Functionen ge-

währt die Möglichkeit, die so gefundenen Werthe einer Controle zu unterwerfen. Es ist nämlich allgemein ¹⁾:

$$\frac{\partial [z^{-\nu} I_{\nu}(z)]}{\partial z} = -z^{-\nu} I_{\nu+1}(z),$$

oder speciell für $\nu = 1$:

$$\frac{\partial [z^{-1} I_1(z)]}{\partial z} = -z^{-1} I_2(z).$$

Ist nun $z^{-1} I_1$ ein Maximum oder Minimum, so verschwindet der Differentialquotient zur Linken, und es muss für denselben Werth von z auch:

$$I_2(z) = 0$$

sein. Nun ist aber:

$$I_1(z) = \frac{2}{z} I_1(z) - I_0(z);$$

also muss im Falle des Maximums oder Minimums:

$$\frac{2}{z} I_1(z) = I_0(z)$$

sein. Vergleicht man daher die Maximal- und Minimalwerthe von $2z^{-1} I_1$ mit den aus der Hansen'schen Tabelle berechneten zu denselben z gehörigen Werthen von I_0 , so hat man in ihrer Uebereinstimmung eine Probe für die Richtigkeit der Rechnung.

Die gefundenen Resultate, Nullwerthe und Maxima oder Minima, sind in Tab. I a zusammengestellt; die Rubrik M^2 enthält die relativen Lichtstärken der hellsten Stellen der Ringe, von welchen das mittlere Lichtscheibchen umgeben erscheint, bis zum fünften Ringe inclusive.

41. In der Tab. I a findet sich noch eine Columnne mit der Ueberschrift „Vielfache von λ “; sie enthält die Werthe $2\lambda^{-1} \text{rtg} \chi$ oder z/π , d. i. die Gangunterschiede der beiden äussersten Randstrahlen in Wellenlängen ausgedrückt.

Da die Wurzelwerthe der Gleichung $I_1 = 0$ den Werthen $z = (m + \frac{1}{4})\pi$, und diejenigen der Gleichung $I_2 = 0$ den Werthen $z = (m + \frac{3}{4})\pi$ um so näher kommen, je grösser z wird ²⁾, so erkennt man, dass die Gang-

1) Lommel, Studien über die Bessel'schen Functionen p. 8.

2) Ib. p. 64.

unterschiede der Randstrahlen, bei welchen schwarze Ringe auftreten mit wachsendem Beugungswinkel den Werthen $(m + \frac{1}{4})\lambda$, und diejenigen, bei welchen helle Ringe sich zeigen, den Werthen $(m + \frac{3}{4})\lambda$ als oberen Grenzen sich nähern, und dass die Differenz der aufeinanderfolgenden Gangunterschiede in beiden Fällen einer ganzen, diejenige zwischen einem Nullwerth und dem darauffolgenden Maximum einer halben Wellenlänge um so näher kommt, je grösser der Beugungswinkel wird.

Alles diess wird aus der vierten Columne der Tab. Ia ersichtlich.

42. Für Werthe von z , welche die Grenze unserer Tab. I überschreiten, wird die Function $2z^{-1}I_1$ mit hinreichender Genauigkeit, nämlich mindestens auf fünf Decimalen, durch die Gleichung:

$$\frac{2}{z} I_1(z) = \frac{2}{z} \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cdot \sin(z - \frac{1}{4}\pi) + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{z^2} \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cdot \cos(z - \frac{1}{4}\pi)$$

dargestellt ¹⁾, und zwar um so genauer, je grösser z wird.

Mit derselben Genauigkeit ergeben sich die ferneren Wurzeln von $I_1 = 0$ durch Auflösung der Gleichung:

$$\operatorname{tg}(z - \frac{1}{4}\pi) = -\frac{3}{8z}.$$

1) Bekanntlich sind die Bessel'schen Functionen mittels halbconvergenter unendlicher Reihen durch folgende Formeln (Lommel, Stud. üb. die Bessel'schen Funct. p. 58) ausdrückbar:

$$I_{2n}(z) = (-1)^n \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cdot \cos(z - \frac{1}{4}\pi) \sum (-1)^p \cdot \frac{(4n+1)^{2p/2} (4n-1)^{2p/2-2}}{8^{2p/8}} \cdot \frac{1}{z^{2p}} \\ - (-1)^n \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cdot \sin(z - \frac{1}{4}\pi) \sum (-1)^p \cdot \frac{(4n+1)^{2p+1/2} (4n-1)^{2p+1/2-2}}{8^{2p+1/8}} \cdot \frac{1}{z^{2p+1}},$$

und

$$I_{2n+1}(z) = (-1)^n \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cdot \sin(z - \frac{1}{4}\pi) \sum (-1)^p \cdot \frac{(4n+3)^{2p/2} (4n+1)^{2p/2-2}}{8^{2p/8}} \cdot \frac{1}{z^{2p}} \\ + (-1)^n \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cdot \cos(z - \frac{1}{4}\pi) \sum (-1)^p \cdot \frac{(4n+3)^{2p+1/2} (4n+1)^{2p+1/2-2}}{8^{2p+1/8}} \cdot \frac{1}{z^{2p+1}},$$

welche zur numerischen Berechnung für grössere Werthe von z sehr brauchbar sind. Die Formeln für $2z^{-1}I_1$ und I_2 oben im Text sind nur specielle Fälle dieser allgemeineren Formeln, und abgekürzt mit Rücksicht auf die Genauigkeit, welche erreicht werden, und auf die Werthe von z , für welche sie gebraucht werden sollen.

Da für $z > 20$ mit dem nämlichen Grade der Annäherung:

$$I_2(z) = \frac{15}{8} \cdot \frac{1}{z} \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cdot \sin(z - \frac{1}{4}\pi) - \left(1 - \frac{105}{128} \cdot \frac{1}{z^2}\right) \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cdot \cos(z - \frac{1}{4}\pi)$$

gilt, so erhält man ebenso aus der Gleichung:

$$\cotg(z - \frac{1}{4}\pi) = \frac{15}{8z - \frac{105}{16z}}$$

mit hinreichender Genauigkeit die Werthe von z , welche M^2 zu einem Maximum machen.

43. Je grösser z wird, desto genauer wird $2z^{-1}I_1(z)$ durch den einfachen Ausdruck:

$$\frac{2}{z} \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cdot \sin(z - \frac{1}{4}\pi)$$

und sonach die Lichtstärke M^2 durch die Gleichung:

$$M^2 = \frac{8}{\pi} \cdot \frac{\sin^2(z - \frac{1}{4}\pi)}{z^3}$$

wiedergegeben.

Da, wie bereits oben erwähnt wurde, die Werthe von z , für welche M^2 zu einem Maximum wird, den Werthen $(m + \frac{3}{4})\pi$ immer näher kommen, so nähert sich in diesem Falle $\sin^2(z - \frac{1}{4}\pi)$ mit wachsendem z der Einheit, und wir erhalten:

$$\lim z^3 M^2 = \frac{8}{\pi},$$

d. h. die Producte der Intensitätsmaxima mit den dritten Potenzen der entsprechenden Werthe von z nähern sich mit zunehmendem z dem constanten Werthe:

$$\frac{8}{\pi} = 2,546479$$

als oberer Grenze.

Multiplirt man die in Tab. Ia aufgeführten Maxima mit den Cuben der zugehörigen Werthe von z , so erhält man die Reihe der Zahlen:

$$2,3701; \quad 2,4796; \quad 2,5113; \quad 2,5248; \quad 2,5316,$$

welche dem Werthe $8/\pi$ in der That immer näher kommen.

Wir können demnach sagen, dass sich die Intensitätsmaxima angenähert umgekehrt wie die dritten Potenzen der zugehörigen Gangunterschiede verhalten, und zwar um so genauer, je grösser die Gangunterschiede werden.

IV. Abschnitt.

Der Fresnel'sche allgemeine Fall.

44. Um in diesem Falle die Lichtstärke

$$M^2 = \left(\frac{2}{y}\right)^2 (U_1^2 + U_2^2)$$

zu bestimmen, müssen die Functionen U_1 und U_2 zu dem jeweils gegebenen Werth von y für jeden Werth von z berechnet werden.

Diess geschieht mittels der Formeln (vergl. 7, 9 und 10):

$$U_1 = \frac{y}{z} I_1 - \left(\frac{y}{z}\right)^3 I_3 + \left(\frac{y}{z}\right)^5 I_5 - + \dots,$$

$$U_2 = \left(\frac{y}{z}\right)^2 I_2 - \left(\frac{y}{z}\right)^4 I_4 + \left(\frac{y}{z}\right)^6 I_6 - + \dots,$$

oder:

$$U_1 = \sin\left(\frac{1}{2}y + \frac{z^2}{2y}\right) - V_1$$

$$= \sin\left(\frac{1}{2}y + \frac{z^2}{2y}\right) - \left(\frac{z}{y} I_1 - \left(\frac{z}{y}\right)^3 I_3 + \left(\frac{z}{y}\right)^5 I_5 - + \dots\right),$$

$$U_2 = -\cos\left(\frac{1}{2}y + \frac{z^2}{2y}\right) + V_0$$

$$= -\cos\left(\frac{1}{2}y + \frac{z^2}{2y}\right) + \left(I_0 - \left(\frac{z}{y}\right)^2 I_2 + \left(\frac{z}{y}\right)^4 I_4 - + \dots\right),$$

von welchen das erste Paar zur Anwendung kommt, wenn $y/z < 1$, das zweite dagegen, wenn $z/y < 1$ ist.

45. Um diese Berechnung auszuführen, müssen vor allem die numerischen Werthe der Bessel'schen Functionen bekannt sein.

In der Tabelle II sind dieselben von I_0 bis I_{20} für alle ganzzahligen Werthe des Arguments von $z = 0$ bis $z = 12$ angegeben.

Die Werthe von I_0 und I_1 konnten unmittelbar der Hansen'schen Tabelle entnommen werden. Von diesen ausgehend lassen sich alsdann die Werthe der Functionen mit höheren Indices mittels der Gleichung:

$$I_{n+1} = \frac{2n}{z} I_n - I_{n-1}$$

leicht berechnen. Hierbei nimmt jedoch die Genauigkeit ab, sobald $2n$ grösser als z geworden ist, und der Fehler, mit welchem die letzte Decimale von I_0 und I_1 behaftet ist, vergrössert sich derart, dass schliesslich alle merklichen Ziffern unrichtig werden.

Der Gebrauch dieser Formel wurde daher für $2n > z$ vermieden, und in diesen Fällen die Function I_n direct aus der convergenten unendlichen Reihe:

$$I_n(z) = \sum (-1)^p \cdot \frac{z^{n+2p}}{2^{p^2} 2^{n+p^2}}$$

berechnet.

Es brauchten jedoch auf diese Weise nur diejenigen Functionen berechnet zu werden, deren Indices um zwei Einheiten von einander verschieden sind. Denn die dazwischen liegende Function ergibt sich alsdann vermöge der Formel:

$$I_n = \frac{z}{2n} (I_{n-1} + I_{n+1})$$

völlig genau.

46. Wird ein Functionswerth für ein Argument $z + \varepsilon$, das in der Tafel nicht vorkommt, verlangt, so erinnern wir uns der Formel¹⁾:

$$(\zeta + h)^{-\frac{n}{2}} I_n(\sqrt{\zeta + h}) = \sum (-1)^p \cdot \left(\frac{h}{2\sqrt{\zeta}}\right)^p \cdot \frac{1}{p!} \cdot \zeta^{-\frac{n}{2}} I_{n+p}(\sqrt{\zeta}).$$

Setzen wir darin z^2 statt ζ , und

$$\sqrt{z^2 + h} = z + \varepsilon,$$

so wird:

$$\frac{h}{2z} = \varepsilon + \frac{\varepsilon^2}{2z},$$

und wir erhalten:

$$I_n(z + \varepsilon) = \left(\frac{z + \varepsilon}{z}\right)^n \sum (-1)^p \left(\frac{h}{2z}\right)^p \cdot \frac{1}{p!} I_{n+p}(z),$$

woraus der gewünschte Werth, namentlich für die Functionen mit kleinerem Index, leicht berechnet werden kann.

Diese Formel hat jedoch den Uebelstand, dass sie für die Functionen, welche hinsichtlich ihres Index der oberen Grenze unserer Tabelle nahe

1) Lommel, Studien über die Bessel'schen Functionen. p. 11.

liegen, nicht mehr gebraucht werden kann, weil die erforderlichen Coefficienten I_{n+p} für $n+p > 20$ nicht mehr zu Gebote stehen.

Dagegen erhalten wir eine in allen Fällen brauchbare Interpolationsformel, wenn wir von der Gleichung¹⁾:

$$(\zeta + h)^{\frac{n}{2}} I_n(\sqrt{\zeta + h}) = \sum \left(\frac{h}{2\sqrt{\zeta}} \right)^p \cdot \frac{1}{p!} \cdot \zeta^{\frac{n}{2}} I_{n-p}(\sqrt{\zeta})$$

ausgehen, und ganz ebenso wie vorhin verfahren. In der so gewonnenen Formel:

$$I_n(z + \varepsilon) = \left(\frac{z}{z + \varepsilon} \right)^n \sum \left(\frac{h}{2z} \right)^p \cdot \frac{1}{p!} I_{n-p}(z)$$

steigen die Coefficienten von I_n zunächst herab bis I_0 , um sich dann wieder vermöge der Gleichung:

$$I_{-n} = (-1)^n I_n$$

in umgekehrter Reihenfolge und mit abwechselnden Vorzeichen zu erheben, und sind demnach durch die Tabelle II selbst in jedem Falle in genügender Anzahl gegeben.

47. In der oben (44) näher bezeichneten Weise wurden nun die Werthe von:

$$\frac{2}{y} U_1(y, z) \text{ und } \frac{2}{y} U_2(y, z)$$

für $y = \pi, 2\pi, 3\pi$ u. s. w. bis 10π und für die ganzzahligen Werthe von z von $z = 0$ bis $z = 12$ berechnet, und nebst den zugehörigen Lichtintensitäten:

$$M^2 = \left(\frac{2}{y} U_1 \right)^2 + \left(\frac{2}{y} U_2 \right)^2$$

in den Tabellen III bis XII niedergelegt.

In den Figuren 2 bis 11 ist der Gang dieser letzteren Werthe graphisch dargestellt, und zwar ist in den Figuren 2 bis 7 $100 M^2$, in den folgenden $1000 M^2$ als Ordinate aufgetragen.

48. Die Lichtstärke M^2 wird zu einem Maximum oder Minimum für diejenigen Werthe von z , für welche

$$\frac{\partial M^2}{\partial z} = 0$$

ist.

1) Ib. p. 12.

Nun ist

$$\frac{\partial M^2}{\partial z} = 2 \left(\frac{2}{y} \right)^2 \left(U_1 \frac{\partial U_1}{\partial z} + U_2 \frac{\partial U_2}{\partial z} \right);$$

nach (16) aber hat man:

$$\frac{\partial U_1}{\partial z} = -\frac{z}{y} U_2 \quad \text{und} \quad \frac{\partial U_2}{\partial z} = -\frac{z}{y} U_3,$$

folglich:

$$\frac{\partial M^2}{\partial z} = -\left(\frac{2}{y} \right)^2 \cdot \frac{2z}{y} U_2 (U_1 + U_3),$$

oder, da (zufolge 15):

$$U_1 + U_3 = \frac{y}{z} \cdot I_1$$

ist, einfach:

$$\frac{\partial M^2}{\partial z} = -2 \left(\frac{2}{y} \right)^2 I_1 U_2.$$

Die Lichtstärke wird daher zu einem Maximum oder Minimum, entweder wenn $I_1 = 0$, oder wenn $U_2 = 0$ ist.

Da

$$I_1 = -\frac{\partial I_0}{\partial z}$$

und

$$U_2 = -\frac{y}{z} \frac{\partial U_1}{\partial z}$$

ist, so kann man auch sagen, dass die Lichtstärke ein Maximum oder Minimum wird, wenn entweder I_0 oder U_1 ein Maximum oder Minimum werden.

49. Die Werthe von z , welche $I_1 = 0$ machen, sind die nämlichen, welchen die Intensitätsminima des Fraunhofer'schen Grenzfalls entsprechen, und sind daher aus dem vorhergehenden Abschnitt schon bekannt; sie sind:

$$z = 3,831706,$$

$$z = 7,015587,$$

$$z = 10,173467,$$

u. s. w.,

und bleiben die nämlichen für alle Werthe von y .

Um die zu diesen Argumenten gehörigen Werthe von $2y^{-1} U_1$, $2y^{-1} U_2$ und M^2 zu ermitteln, bedient man sich bequem der aus (20) hervorgehenden Formeln:

$$\frac{2}{y}U_1(y, z + \varepsilon) = \frac{2}{y}U_1 - \frac{h}{2y} \cdot \frac{2}{y}U_2 + \left(\frac{h}{2y}\right)^2 \cdot \frac{1}{2!} \cdot \frac{2}{y}U_3 - \left(\frac{h}{2y}\right)^3 \cdot \frac{1}{3!} \cdot \frac{2}{y}U_4 + - \dots,$$

$$\frac{2}{y}U_2(y, z + \varepsilon) = \frac{2}{y}U_2 - \frac{h}{2y} \cdot \frac{2}{y}U_3 + \left(\frac{h}{2y}\right)^2 \cdot \frac{1}{2!} \cdot \frac{2}{y}U_4 - \left(\frac{h}{2y}\right)^3 \cdot \frac{1}{3!} \cdot \frac{2}{y}U_5 + - \dots,$$

wo h sich aus der Gleichung:

$$h = 2\varepsilon z + \varepsilon^2$$

ergibt, und die Coefficienten $2y^{-1}U_3$, $2y^{-1}U_4$, $2y^{-1}U_5$ u. s. w., ausgehend von den nächstgelegenen tabellarischen Werthen von $2y^{-1}U_1$ und $2y^{-1}U_2$, vermöge der Gleichung (15):

$$\frac{2}{y}U_n + \frac{2}{y}U_{n+2} = \frac{2}{y}\left(\frac{y}{z}\right)^n I_n$$

durch successive Summationen leicht gefunden werden.

Sollen z. B. für $y = 2\pi$ und $z = 10,173467$ die Werthe von $2y^{-1}U_1$ und $2y^{-1}U_2$ berechnet werden, so ist, wenn man von $z = 10$ ausgeht:

$$\varepsilon = 0,173467, \quad \log \frac{h}{2y} = 9,4447875 - 10,$$

und die für beide Reihen giltigen Coefficienten finden sich nach folgendem Schema:

$$\begin{array}{lll} \frac{2}{y} \cdot \frac{y}{z} I_1 = + 0,0086946 & \frac{2}{y} U_1 = - 0,0046796 & \frac{2}{y} U_2 = + 0,0407127 \\ \frac{2}{y} \cdot \left(\frac{y}{z}\right)^2 I_2 = + 0,0319979 & \frac{2}{y} U_3 = + 0,0133742 & \frac{2}{y} U_4 = - 0,0087148 \\ \frac{2}{y} \cdot \left(\frac{y}{z}\right)^3 I_3 = + 0,0046094 & \frac{2}{y} U_5 = - 0,0087648 & \frac{2}{y} U_6 = - 0,0021798 \\ \frac{2}{y} \cdot \left(\frac{y}{z}\right)^4 I_4 = - 0,0108946 & & \end{array}$$

und aus den obigen Reihen berechnet sich nun:

$$\frac{2}{y}U_1 = - 0,0154693, \quad \frac{2}{y}U_2 = + 0,0366814, \quad M^2 = 0,0015848.$$

Dabei sind, wenn $y/z < 1$ ist, die Werthe:

$$\frac{2}{y} \cdot \frac{y}{z} I_1, \quad \frac{2}{y} \cdot \left(\frac{y}{z}\right)^2 I_2, \quad \frac{2}{y} \cdot \left(\frac{y}{z}\right)^3 I_3, \dots$$

durch die vorausgegangene Berechnung der tabellarischen Werthe $2y^{-1}U_1$ und $2y^{-1}U_2$ mittels der U-Reihen schon unmittelbar gegeben.

Ist dagegen $y/z > 1$, und werden zur Berechnung von $2y^{-1}U_1$ und $2y^{-1}U_2$ die V-Reihen, somit die Werthe:

$$\frac{2}{y} \cdot \frac{z}{y} I_1, \quad \frac{2}{y} \left(\frac{z}{y}\right)^2 I_2, \quad \frac{2}{y} \left(\frac{z}{y}\right)^3 I_3, \dots$$

benutzt, so lassen sich jene Zahlen aus diesen immerhin ohne allzugrosse Mühe ableiten.

50. Die Wurzelwerthe der Gleichung $U_2 = 0$ werden gefunden, indem man die Gleichung:

$$U_2(y, z + \epsilon) = 0,$$

d. i. die Gleichung:

$$\frac{2}{y} U_2 - \frac{h}{2y} \cdot \frac{2}{y} U_3 + \left(\frac{h}{2y}\right)^2 \cdot \frac{1}{2!} \cdot \frac{2}{y} U_4 - \left(\frac{h}{2y}\right)^3 \cdot \frac{1}{3!} \cdot \frac{2}{y} U_5 + \dots = 0,$$

deren Coefficienten $2y^{-1}U_3$, $2y^{-1}U_4$, u. s. w. ausgehend von dem tabellarischen Werthe von $2y^{-1}U_2$, welcher einem Nullwerthe am nächsten kommt, und dem zugehörigen Werthe von $2y^{-1}U_1$ in derselben Weise wie oben abgeleitet werden, nach $h/2y$ auflöst, und, nachdem h bekannt ist, ϵ aus der Gleichung:

$$\epsilon^2 + 2z\epsilon - h = 0$$

bestimmt. Mittels der obigen Formel für $2y^{-1}U_1(y, z + \epsilon)$ wird alsdann der zugehörige Werth von $2y^{-1}U_1$ berechnet, der zum Quadrat erhoben die entsprechende Lichtstärke gibt.

Die so gefundenen Zahlenwerthe von z , $2y^{-1}U_1$ und $2y^{-1}U_2$, für welche die Lichtstärke M^2 ein Maximum oder Minimum wird, sind nebst dieser Lichtstärke selbst jeweils am Fusse der Tabellen III bis XII zusammengestellt.

51. Ein Blick auf diese Tabellen oder auf die entsprechenden Figuren 2 bis 11 zeigt, dass die Maxima und Minima der Intensität anscheinend regellos vertheilt sind, indem sie bald nahe beisammen, bald weit auseinander liegen, und dass überhaupt der Verlauf der Intensitätscurven ein überaus sonderbarer ist.

Um Einsicht in die dennoch vorhandene Gesetzmässigkeit der Erscheinungen zu gewinnen, nehmen wir z als Abscisse, y als Ordinate eines rechtwinkligen Coordinatensystems an, und denken uns in jedem Punkte der yz -Ebene die zugehörige Lichtstärke M^2 als dritte Coordinate senk-

recht errichtet. So erhebt sich über dieser Ebene gleichsam eine Gebirgslandschaft mit mannigfaltigen Kämmen und Gipfeln, Thälern und Einsenkungen.

Auf der yz -Ebene verzeichnen wir die Linien, welche den Gleichungen $I_1 = 0$ und $U_2 = 0$ entsprechen (Fig. 12).

Denken wir uns nun in der yz -Ebene eine gerade Linie parallel zur z -Axe gezogen, so geben ihre Schnittpunkte mit den Linien $I_1 = 0$ und $U_2 = 0$ die Oerter an, wo für den zugehörigen Werth von y die Intensität ein Maximum oder Minimum wird, und eine Ebene, welche durch jene Parallele senkrecht zur yz -Ebene gelegt wird, gibt durch ihren Schnitt mit dem Lichtgebirge die entsprechende Intensitätscurve.

52. Die Linien $I_1(z) = 0$ sind nichts anderes als Gerade, welche in den Punkten $z = 3,831706$, $z = 7,015587$, $z = 10,173467$, u. s. f. senkrecht auf der Abscissenaxe errichtet sind (Fig. 12).

Die Linien dagegen, welche der Gleichung:

$$U_2(y, z) = 0$$

entsprechen, sind transcendente Curven von höchst merkwürdigem Verlauf.

Um diese Curven zu entwerfen, wurden nicht nur die in den Tabellen III bis XII bereits aufgeführten Wurzeln der Gleichung $U_2 = 0$ benutzt, sondern es wurden, wo es nöthig schien, noch weitere Wurzelwerthe berechnet.

Ausserdem wurde für jeden dieser Curvenpunkte die Neigung seiner Berührungslinie gegen die Abscissenaxe bestimmt.

Durch Differentiation der Gleichung $U_2 = 0$ erhält man nämlich:

$$\frac{\partial U_2}{\partial z} + \frac{\partial U_2}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial z} = 0.$$

Nach (16) aber ist:

$$\frac{\partial U_2}{\partial z} = -\frac{z}{y} U_3,$$

und nach (22):

$$\frac{\partial U_2}{\partial y} = \frac{1}{2} U_1 + \frac{1}{2} \left(\frac{z}{y} \right)^2 U_3.$$

Man findet sonach:

$$\frac{\partial y}{\partial z} = \frac{2 \frac{z}{y} U_3}{U_1 + \left(\frac{z}{y} \right)^2 U_3},$$

oder, da in unseren Tabellen nicht die Werthe der U selbst, sondern diejenigen von $2y^{-1}U$ angegeben sind, für die numerische Rechnung bequemer:

$$\frac{\partial y}{\partial z} = \frac{\frac{2z}{y} \cdot \frac{2}{y} U_3}{\frac{2}{y} U_1 + \left(\frac{z}{y}\right)^2 \cdot \frac{2}{y} U_3}$$

als Ausdruck für die Tangente jenes Neigungswinkels.

Diese sämtlichen Daten, welche zur Construction der Curven $U_2 = 0$ dienen, sind in Tab. XIII zusammengestellt.

53. Da für $z = 0$ offenbar:

$$[V_0]_{z=0} = 1, \quad [V_1]_{z=0} = 0$$

ist, so hat man, weil gemäss (18):

$$U_1 + V_1 = \sin\left(\frac{1}{2}y + \frac{z^2}{2y}\right),$$

$$-U_2 + V_0 = \cos\left(\frac{1}{2}y + \frac{z^2}{2y}\right)$$

ist:

$$[U_1]_{z=0} = \sin \frac{1}{2}y, \quad [U_2]_{z=0} = 1 - \cos \frac{1}{2}y = 2 \sin^2 \frac{1}{4}y.$$

Auf der y -Axe wird also $U_2 = 0$, so oft $y = 4m\pi$ ist. Für diese Werthe verschwinden aber auch U_1 und $zy^{-1}U_3$, weil ja:

$$\frac{z}{y} U_3 = I_1 - \frac{z}{y} U_1$$

ist. Man hat daher für diese Werthe sowohl:

$$\frac{\partial U_2}{\partial z} = 0,$$

als auch:

$$\frac{\partial U_2}{\partial y} = 0.$$

Die Punkte $z = 0$, $y = 4m\pi$ sind demnach Doppelpunkte der Curve $U_2 = 0$.

54. Die Gleichung der Doppeltangenten in diesen Punkten lautet alsdann:

$$\frac{\partial^2 U_2}{\partial z^2} z'^2 + 2 \frac{\partial^2 U_2}{\partial y \partial z} z' (y' - y) + \frac{\partial^2 U_2}{\partial y^2} (y' - y)^2 = 0.$$

Nun ist aber allgemein (vermöge 16, 22 und 23):

$$\frac{\partial^2 U_2}{\partial z^2} = -\frac{z}{y} \frac{\partial U_3}{\partial z} - \frac{1}{y} U_3 = \left(\frac{z}{y}\right)^2 U_4 - \frac{1}{y} U_3$$

$$= I_2 - \frac{1}{z} I_1 - \left(\frac{z}{y}\right)^2 U_2 + \frac{1}{y} U_1;$$

$$\frac{\partial^2 U_2}{\partial y \partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{2} U_1 + \frac{1}{2} \left(\frac{z}{y}\right)^2 U_3 \right) = -\frac{1}{2} \cdot \frac{z}{y} U_2 + \frac{z}{y} \cdot \frac{1}{y} U_3 - \frac{1}{2} \left(\frac{z}{y}\right)^3 U_4$$

$$= \frac{1}{y} I_1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{z}{y} I_2 - \frac{z}{y} \cdot \frac{1}{y} U_1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{z}{y} U_2 + \frac{1}{2} \left(\frac{z}{y}\right)^3 U_2;$$

$$\frac{\partial^2 U_2}{\partial y^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial U_1}{\partial y} - \frac{2}{y} \cdot \frac{\partial U_2}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{z}{y}\right)^2 \frac{\partial U_3}{\partial y} + \frac{1}{y} U_1$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} U_0 + \frac{1}{2} \left(\frac{z}{y}\right)^2 U_2 \right) - \frac{2}{y} \left(\frac{1}{2} U_1 + \frac{1}{2} \left(\frac{z}{y}\right)^2 U_3 \right)$$

$$+ \frac{1}{2} \left(\frac{z}{y}\right)^2 \left(\frac{1}{2} U_2 + \frac{1}{2} \left(\frac{z}{y}\right)^2 U_4 \right) + \frac{1}{y} U_1$$

$$= \frac{1}{4} U_0 + \frac{1}{2} \left(\frac{z}{y}\right)^2 U_2 - \frac{1}{y} \left(\frac{z}{y}\right)^2 U_3 + \frac{1}{4} \left(\frac{z}{y}\right)^4 U_4$$

$$= \frac{1}{4} I_0 - \frac{z}{y^2} I_1 + \frac{1}{4} \left(\frac{z}{y}\right)^2 I_2 + \frac{1}{y} \left(\frac{z}{y}\right)^2 U_1 - \frac{1}{4} U_2 + \frac{1}{2} \left(\frac{z}{y}\right)^2 U_2 - \frac{1}{4} \left(\frac{z}{y}\right)^4 U_2.$$

Hieraus folgt für $z=0$ und $y=4m\pi$:

$$\frac{\partial^2 U_2}{\partial z^2} = -\frac{1}{2}, \quad \frac{\partial^2 U_2}{\partial y \partial z} = 0, \quad \frac{\partial^2 U_2}{\partial y^2} = \frac{1}{4};$$

folglich ist:

$$(y' - 4m\pi)^2 = 2z'^2$$

die Gleichung der beiden Tangenten in jenen Doppelpunkten; die zwei Winkel φ , welche sie mit der z -Axe bilden, und die für alle Doppelpunkte die nämlichen sind, werden bestimmt durch die Gleichung:

$$\operatorname{tg} \varphi = \pm \sqrt{2},$$

und betragen:

$$\varphi = \pm 54^\circ 44' 8'', 2.$$

55. Da der Ausdruck $U_2(y, z)$ in die beiden Factoren:

$$y^2 \text{ und } \frac{1}{z^2} I_2 - \frac{y^2}{z^4} I_4 + \frac{y^4}{z^6} I_6 - + \dots = \frac{1}{y^2} U_2$$

sich zerlegen lässt, so zerfällt die Curve $U_2 = 0$ einerseits in zwei aufeinanderliegende mit der z -Axe zusammenfallende Gerade, entsprechend der Gleichung:

$$y^2 = 0,$$

und die durch die Gleichung:

$$\frac{1}{y^2} U_2 = 0$$

ausgedrückten transcendenten Curvenäste andererseits. Letztere schneiden die z -Axe in den Punkten, welche der Gleichung $I_2 = 0$ genügen, nämlich bei:

$$z = 5,135630,$$

$$z = 8,417236,$$

$$z = 11,619857,$$

u. s. f.,

d. i. in den Punkten, wo im Fraunhofer'schen Grenzfall die Intensitätsmaxima liegen. Diese Schnittpunkte der transcendenten Curvenäste mit der z -Axe sind sonach dreifache Punkte der Gesammtcurve $U_2 = 0$.

Nun wird die Tangente des Winkels, welchen die Berührungslinie an der Curve $y^{-2}U_2 = 0$ mit der z -Axe einschliesst, gefunden durch die Gleichung:

$$\frac{\partial y}{\partial z} = \frac{\frac{\partial(y^{-2}U_2)}{\partial z}}{\frac{\partial(y^{-2}U_2)}{\partial y}}.$$

Da nun:

$$\frac{\partial(y^{-2}U_2)}{\partial z} = -\frac{z}{y^3} U_3,$$

und:

$$\frac{\partial(y^{-2}U_2)}{\partial y} = -\frac{2y}{z^4} I_4 + \frac{4y^3}{z^6} I_6 - + \dots,$$

sonach für $y = 0$:

$$\left[\frac{\partial(y^{-2}U_2)}{\partial z} \right]_{y=0} = -z^{-2} I_3,$$

und:

$$\left[\frac{\partial(y^{-2}U_2)}{\partial y} \right]_{y=0} = 0$$

ist, so ergibt sich, da I_3 nicht gleichzeitig mit I_2 verschwinden kann:

$$\left[\frac{\partial y}{\partial z} \right]_{y=0} = \infty.$$

Die transcendenten Curvenzweige schneiden also die z -Axe rechtwinklig.

Wie ein Blick auf Fig. 12 erkennen lässt, laufen diese Curvenzweige, welche sich zuerst von den dreifachen Punkten der Abscissenaxe, wo sie von den Geraden $I_2 = 0$ berührt werden, senkrecht erheben, paarweise in den Doppelpunkten der Ordinatenaxe zusammen.

56. Die Doppelpunkte auf der y -Axe und die Punkte $I_1 = 0$ auf der z -Axe sind die einzigen Punkte, in welchen U_1 und U_2 gleichzeitig verschwinden, und die Intensität sonach Null ist. Denn überall sonst, wo $U_2 = 0$ ist, ist wegen:

$$\frac{\partial U_1}{\partial z} = -\frac{z}{y} U_2.$$

gleichzeitig $(U_1)^2$ nicht Null, sondern ein Maximum.

57. Um zu ermitteln, welche von den Wurzelwerthen der Gleichungen $I_1 = 0$ und $U_2 = 0$ Maximis oder Minimis der Lichtstärke entsprechen, bilden wir den zweiten Differentialquotienten von M^2 nach z , und erhalten zunächst:

$$\frac{\partial^2 M^2}{\partial z^2} = -2 \left(\frac{2}{y}\right)^2 \left(I_1 \frac{\partial U_2}{\partial z} + U_2 \frac{\partial I_1}{\partial z}\right),$$

oder, da:

$$\frac{\partial U_2}{\partial z} = -\frac{z}{y} U_3 = -I_1 + \frac{z}{y} U_1$$

und:

$$\frac{\partial I_1}{\partial z} = -\frac{1}{z} I_1 + I_0$$

ist:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 M^2}{\partial z^2} &= 2 \left(\frac{2}{y}\right)^2 \left(\frac{z}{y} I_1 U_3 + \frac{1}{z} I_1 U_2 - I_0 U_2\right) \\ &= 2 \left(\frac{2}{y}\right)^2 \left(I_1^2 - \frac{z}{y} I_1 U_1 - I_0 U_2 + \frac{1}{z} I_1 U_2\right). \end{aligned}$$

Hieraus ergibt sich, dass auf den Geraden $I_1 = 0$ Maxima oder Minima liegen, je nachdem:

$$I_0 U_2$$

positiv oder negativ ist.

Ueber den Curven $U_2 = 0$ dagegen treten Maxima oder Minima auf, wenn

$$I_1 U_3$$

oder, was dasselbe heisst:

$$I_1 \left(I_1 - \frac{z}{y} U_1 \right)$$

negativ oder positiv ist.

58. Der zweite Differentialquotient von M^2 wird Null für diejenigen Werthe von y und z , welche gleichzeitig den Gleichungen $I_1 = 0$ und $U_2 = 0$ genügen. Da in diesem Falle der dritte Differentialquotient von M^2 , nämlich:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 M^2}{\partial z^3} &= 2 \left(\frac{2}{y} \right)^2 \left(I_1 U_2 - \frac{1}{z} I_2 U_2 + \frac{2z}{y} I_0 U_3 - \frac{1}{y} I_1 U_3 - \left(\frac{z}{y} \right)^2 I_1 U_4 \right) \\ &= 2 \left(\frac{2}{y} \right)^2 \left(3 I_1 \left(I_0 - \frac{1}{z} I_1 \right) + \left(\frac{1}{y} I_1 - \frac{2z}{y} I_0 \right) U_1 + \left[\frac{z^2}{y^2} - \frac{2}{z^2} + 1 \right] I_1 + \frac{1}{z} I_0 \right) U_2 \end{aligned}$$

nicht verschwindet, sondern den von Null nothwendig verschiedenen Werth:

$$\left[\frac{\partial^3 M^2}{\partial z^3} \right] = 2 \cdot \left(\frac{2}{y} \right)^2 \cdot \frac{2z}{y} I_0 U_3 = -2 \cdot \left(\frac{2}{y} \right)^2 \cdot \frac{2z}{y} I_0 U_1$$

annimmt, so erkennt man, dass über den Durchschnittspunkten der beiden Liniensysteme $I_1 = 0$ und $U_2 = 0$ Wendepunkte der Intensitätscurve liegen.

59. Da, wenn man längs einer Geraden $I_1 = 0$ über einen ihrer Durchschnittspunkte mit der Curve $U_2 = 0$ weggeht, das Vorzeichen von U_2 wechselt, nicht aber dasjenige von I_0 , so wechselt hier auch das Vorzeichen des Ausdrucks:

$$I_0 U_2,$$

durch welches gemäss (57) die Maximalwerthe der Intensität sich von den Minimalwerthen unterscheiden. Liegen also über dieser Geraden diesseits ihres Schnittpunktes mit der Curve $U_2 = 0$ Maxima der Lichtstärke, so liegen jenseits Minima.

Überschreitet man ferner längs einer Curve $U_2 = 0$ einen ihrer Schnittpunkte mit einer der Geraden $I_1 = 0$, so wechselt das Vorzeichen von I_1 , nicht aber dasjenige von U_3 , weil für $I_1 = 0$:

$$U_3 = -U_1$$

und U_1 wegen $U_2 = 0$ ein Maximum oder Minimum ist. Es tritt demnach in dem Schnittpunkt auch ein Zeichenwechsel des Ausdrucks:

$$I_1 U_3$$

ein, der in diesem Falle durch sein Vorzeichen zwischen Maximis und Minimis entscheidet (57), und es findet auch hier ein Uebergang von grössten zu kleinsten Werthen der Lichtstärke, oder umgekehrt, statt.

Schreitet man also längs einem Theile der Linien $I_1 = 0$ oder $U_2 = 0$, welchem z. B. Intensitätsmaxima entsprechen, über einen ihrer gemeinschaftlichen Durchschnittspunkte fort, so springt hier das Maximum auf die Linie der anderen Gattung über, und der Fortsetzung der bisher verfolgten Linie gehören von nun an Minima der Lichtstärke an, bis beim nächsten Schnittpunkt ein neues Ueberspringen erfolgt.

60. Der zweite Differentialquotient der Intensität wird ferner Null, wenn nebst U_2 auch noch $U_3 = 0$, nicht aber $U_1 = 0$ (welch letzteres übrigens nur in den Doppelpunkten der y -Axe und den Punkten $I_1 = 0$ der z -Axe eintreten kann) ist. Da alsdann:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial z^2} = \frac{2 \frac{z}{y} U_3}{U_1 + \left(\frac{z}{y}\right)^2 U_3} = 0$$

ist, so findet dies statt in den Punkten, wo die Ordinaten der Curvenäste $U_2 = 0$ ihre grössten oder kleinsten Werthe erreichen.

Auch diesen Punkten entsprechen, da für $U_2 = 0$ und $U_3 = 0$ der dritte Differentialquotient von M^2 nicht verschwindet, sondern den Werth

$$-2 \left(\frac{2}{y}\right)^2 \left(\frac{z}{y}\right)^2 I_1 U_4 = -2 \left(\frac{2}{y}\right)^2 I_1 I_2$$

annimmt, Wendepunkte der Intensitätscurve.

Da an diesen Punkten U_3 sein Vorzeichen ändert, I_1 aber nicht, weil ja für $U_3 = 0$:

$$I_1 = \frac{z}{y} U_1$$

und U_1 Maximum oder Minimum ist, so erleidet hier der Ausdruck $I_1 U_3$, dessen Vorzeichen für Maximum oder Minimum entscheidend ist, ebenfalls einen Zeichenwechsel. Die Punkte der transcendenten Curven-

äste, wo sich diese am höchsten über die Abscissenaxe erheben, oder am tiefsten zu ihr herabsenken, bilden also auf diesen Curven selbst eine Grenzscheide zwischen Intensitäts-Maximis und -Minimis.

In der Figur 12 sind vier solche Punkte wahrzunehmen, ein Gipfel-punkt bei dem ersten im Punkt $y = 4\pi$ der Ordinatenaxe zusammenlaufenden Aestepaar, zwei Gipfel und eine Senkung bei dem zweiten Aestepaar, welches im Punkte $y = 8\pi$ sich vereinigt.

61. Der zweite Differentialquotient von M^2 wird endlich noch Null in den Doppelpunkten der Ordinatenaxe ($z = 0$, $y = 4m\pi$), weil hier I_1 , U_1 , U_2 und U_3 gleichzeitig verschwinden. Da in diesem Falle auch der dritte Differentialquotient (s. oben 58) Null wird, nicht aber der vierte:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^4 M^2}{\partial z^4} = 2 \cdot \left(\frac{2}{y}\right)^2 & \left\{ 3 I_1 \frac{\partial}{\partial z} \left(I_0 - \frac{1}{z} I_1 \right) + 3 \left(I_0 - \frac{1}{z} I_1 \right)^2 + U_1 \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{y} I_1 - \frac{2z}{y} I_0 \right) \right. \\ & - \frac{z}{y} \left(\frac{1}{y} I_1 - \frac{2z}{y} I_0 \right) U_2 + U_2 \frac{\partial}{\partial z} \left(\left[\left(\frac{z}{y} \right)^2 - \frac{2}{z^2} + 1 \right] I_1 + \frac{1}{z} I_0 \right) \\ & \left. - \frac{z}{y} \left(\left[\left(\frac{z}{y} \right)^2 - \frac{2}{z^2} + 1 \right] I_1 + \frac{1}{z} I_0 \right) U_3 \right\}, \end{aligned}$$

welcher vielmehr den positiven Werth:

$$\left[\frac{\partial^4 M^2}{\partial z^4} \right] = \frac{3}{2m^2 \pi^2}$$

annimmt, so finden hier Minima statt; es ist nämlich in diesen Punkten $M^2 = 0$.

62. Uebrigens genügen sämtliche Punkte der y -Axe, weil $I_1 = 0$ ist für $z = 0$, der Bedingung:

$$\frac{\partial M^2}{\partial z} = 0;$$

da alsdann:

$$\left[\frac{\partial^2 M^2}{\partial z^2} \right] = -\frac{1}{2} \left(\frac{\sin \frac{1}{4} y}{\frac{1}{4} y} \right)^2$$

wird und sonach einen negativen Werth annimmt, so liegen über der Ordinatenaxe, mit Ausnahme der Doppelpunkte, lauter Intensitätsmaxima.

63. Um den Ueberblick über die Orte der Intensitätsmaxima und -Minima zu erleichtern, sind in Fig. 12 die Stücke der Linien $I_1 = 0$

und $U_2 = 0$, welche den Minimis der Lichtstärke entsprechen, stärker ausgezogen als diejenigen, über welchen die Maxima liegen.

Es gestaltet sich hiedurch ein Bild mit so sonderbaren und eigenartigen Umrissen, wie selbst die lebhafteste Phantasie sie nicht zu ersinnen vermöchte. Dieses Bild versinnlicht in anschaulicher Weise die verwickelten Gesetze dieser Erscheinungen. Denn denkt man sich eine zur z -Axe parallele Gerade über die Figur hingleitend, die durch ihre Schnittpunkte mit den Linien $I_1 = 0$ und $U_2 = 0$ die Orte der Maxima und Minima der Lichtstärke angibt, und vergegenwärtigt sich zugleich die in den Figuren 1 bis 12 dargestellten Intensitätscurven sammt ihren Zwischenstufen, so übersieht man die ganze Reihenfolge von wechselnden Formen und Schattirungen, deren unerschöpfliche Mannigfaltigkeit den Beobachter in Staunen setzt.

64. Da

$$U_2 = V_0 - \cos\left(\frac{1}{2}y + \frac{z^2}{2y}\right) \\ = I_0 - \left(\frac{z}{y}\right)^2 I_2 + \left(\frac{z}{y}\right)^4 I_4 - + \dots - \cos\left(\frac{1}{2}y + \frac{z^2}{2y}\right)$$

ist, so kommt der Ausdruck:

$$I_0 - \cos \frac{1}{2}y$$

der Function U_2 um so näher, je grösser y bei gleichbleibendem z , oder je kleiner z bei unverändertem y wird. Unter diesen Umständen kann daher die Gleichung der Curve $U_2 = 0$ durch die einfachere Gleichung:

$$u_2 = I_0(z) - \cos \frac{1}{2}y = 0$$

näherungsweise ersetzt werden. Diese letztere Curve besitzt auf der y -Axe die nämlichen Doppelpunkte mit denselben Doppeltangenten wie die Curve $U_2 = 0$ selbst. Denn man hat:

$$\frac{\partial u_2}{\partial z} = -I_1, \quad \frac{\partial u_2}{\partial y} = \frac{1}{2} \sin \frac{1}{2}y, \\ \frac{\partial^2 u_2}{\partial z^2} = \frac{1}{z} I_1 - I_0, \quad \frac{\partial^2 u_2}{\partial y \partial z} = 0, \quad \frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} = \frac{1}{4} \cos \frac{1}{2}y,$$

und erkennt, dass für $z = 0$ und $y = 4m\pi$ sowohl $\partial u_2 / \partial z$ als $\partial u_2 / \partial y$ verschwindet, und die Gleichung der Doppeltangenten:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} z'^2 + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} z' (y' - y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} (y' - y)^2 = 0$$

dieselbe Form wie oben, nämlich:

$$(y' - 4m\pi)^2 = 2z'^2$$

annimmt.

65. Lassen wir hingegen y stets kleiner werden, oder z immer wachsen, so nähern sich die Reihen $2y^{-1}U_1$ und $2y^{-1}U_2$ immer mehr ihren ersten Gliedern:

$$\frac{2}{z} I_1, \quad \text{und} \quad 2 \frac{y}{z^2} I_2,$$

und man sieht, dass die transcendenten Zweige der Curve $U_2 = 0$ mit wachsendem z , oder mit abnehmendem y , den geraden Linien:

$$I_2 = 0,$$

von welchen sie auf der z -Axe berührt werden, immer näher kommen.

Für jeden gegebenen Werth von y nähern sich übrigens mit wachsendem z , d. i. mit wachsendem Beugungswinkel, beide Functionen $2y^{-1}U_1$ und $2y^{-1}U_2$, und mit ihnen die Lichtstärke M^2 der Grenze Null.

66. Wir denken uns jetzt in der yz -Ebene durch den Coordinatenanfang gerade Linien gezogen, und betrachten die Lichterscheinungen, welche längs einer solchen Geraden nach und nach stattfinden, wenn man den Auffangschirm aus der accommodirten Stellung ($y = 0$) in die nicht accommodirten überführt.

Bildet eine beliebige dieser Geraden mit der z -Axe den Winkel α , so lautet ihre Gleichung:

$$\frac{y}{z} = \operatorname{tg} \alpha = c.$$

Diejenige Gerade hingegen, welche mit der y -Axe den Winkel α , mit der z -Axe also den Winkel $90^\circ - \alpha$ bildet, und welche wir als zu ersterer coordinirt bezeichnen wollen, entspricht der Gleichung:

$$\frac{y}{z} = \operatorname{cotg} \alpha = \frac{1}{c}.$$

Für irgend einen Punkt der ersteren Geraden haben wir nun:

$$\begin{aligned} U_1 &= cI_1 - c^3I_3 + c^5I_5 - + \dots \\ &= \sin \frac{1}{2}z \left(c + \frac{1}{c} \right) - \left(\frac{1}{c}I_1 - \frac{1}{c^3}I_3 + \frac{1}{c^5}I_5 - + \dots \right), \\ U_2 &= c^2I_2 - c^4I_4 + c^6I_6 - + \dots \\ &= -\cos \frac{1}{2}z \left(c + \frac{1}{c} \right) + \left(I_0 - \frac{1}{c^2}I_2 + \frac{1}{c^4}I_4 - + \dots \right), \end{aligned}$$

und für den zu demselben Werthe von z gehörigen Punkt der zweiten Geraden, indem man c mit $\frac{1}{c}$ vertauscht:

$$\begin{aligned} U'_1 &= \frac{1}{c}I_1 - \frac{1}{c^3}I_3 + \frac{1}{c^5}I_5 - + \dots \\ &= \sin \frac{1}{2}z \left(c + \frac{1}{c} \right) - \left(cI_1 - c^3I_3 + c^5I_5 - + \dots \right), \\ U'_2 &= \frac{1}{c^2}I_2 - \frac{1}{c^4}I_4 + \frac{1}{c^6}I_6 - + \dots \\ &= -\cos \frac{1}{2}z \left(c + \frac{1}{c} \right) + \left(I_0 - c^2I_2 + c^4I_4 - + \dots \right). \end{aligned}$$

Hienach bestehen zwischen Functionswerthen U_1 und U'_1 , U_2 und U'_2 , welche auf zwei coordinirten Geraden zu demselben Werthe von z gehören, die Beziehungen:

$$\begin{aligned} U_1 + U'_1 &= \sin \frac{1}{2}z \left(c + \frac{1}{c} \right), \\ U_2 + U'_2 &= I_0 - \cos \frac{1}{2}z \left(c + \frac{1}{c} \right). \end{aligned}$$

67. Bezeichnen wir, wie oben bereits geschehen ist, den Abstand eines beliebigen Bildpunktes von der Bildmitte mit ζ , und den Radius des geometrischen Schattens mit ζ_0 , so ist offenbar:

$$\zeta_0 = \frac{a+b}{a} r.$$

Allgemein aber ist (vermöge 6):

$$\frac{y}{z} = \frac{a+b}{a} \cdot \frac{r}{\zeta}.$$

Hieraus folgt:

$$\frac{y}{z} = \frac{\zeta_0}{\zeta} = c.$$

Liegt ein anderer Punkt des nämlichen Beugungsbildes, dessen Entfernung von der Mitte ζ' ist, auf der coordinirten Geraden, so ist für ihn:

$$\frac{y}{z'} = \frac{\zeta_0}{\zeta'} = \frac{1}{c}.$$

Für diese beiden Punkte gilt demnach die Beziehung:

$$\zeta\zeta' = \zeta_0^2.$$

Gehören also zwei Punkte des Beugungsbildes coordinirten Geraden an, was wir dadurch bezeichnen wollen, dass wir sie „zu einander coordinirt“ nennen, so ist der Radius der Schattengrenze die mittlere geometrische Proportionale zwischen ihren Abständen von der Bildmitte.

68. Unter den Geraden $y = cz$ sind insbesondere drei von hervorragender Bedeutung, und namentlich dadurch ausgezeichnet, dass sich die Lichtstärke auf ihnen durch geschlossene Ausdrücke darstellen lässt; nämlich erstens die Abscissenaxe ($y = 0$), welche dem im vorigen Abschnitt behandelten Fraunhofer'schen Grenzfall entspricht; zweitens die (zu ihr coordinirte) Ordinatenaxe ($z = 0$), längs welcher die Intensitäten der Bildmitte gereiht sind; drittens die (zu sich selbst coordinirte) Gerade $y = z$, welche unter 45° zu den Coordinatenaxen geneigt ist, und die Grenze des geometrischen Schattens darstellt. Sie ist in Fig. 12 punktirt eingezeichnet.

Dieser letztere Fall kommt zu den beiden ersteren, deren geschlossene Intensitätsausdrücke schon früher bekannt waren, hier als neu hinzu.

69. Obwohl der zweite Fall, wie schon Eingangs erwähnt wurde, sowohl theoretisch als experimentell bereits erledigt ist, so mag derselbe doch der Vollständigkeit und des Zusammenhangs wegen auch hier nochmals kurz besprochen werden.

Für $z = 0$ haben wir (s. oben 53):

$$[U_1]_{z=0} = \sin \frac{1}{2} y, \quad [U_2]_{z=0} = 2 \sin^2 \frac{1}{4} y,$$

und demnach:

$$M^2 = \left(\frac{\sin \frac{1}{4} y}{\frac{1}{4} y} \right)^2.$$

Die successiven Intensitäten im Mittelpunkte der Beugungsbilder einer kreisförmigen Oeffnung befolgen also das nämliche Gesetz wie die simultanen Intensitäten der durch einen geradlinigen Spalt hervorgebrachten Diffractionsstreifen. Die für letztere (z. B. von Schwerd) berechneten Tabellen können also unmittelbar auch für diese Erscheinung angewendet werden.

Die Minima dieses Ausdrucks, welche Null sind und auf die oben besprochenen Doppelpunkte der Curve $U_2 = 0$ fallen, finden statt, wenn:

$$\frac{1}{4}y = m\pi, \text{ oder } \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \frac{r^2}{2} = m\lambda$$

ist, d. h. wenn der Gangunterschied zwischen Rand- und Centralstrahl eine Anzahl ganzer Wellenlängen ausmacht.

Die Maxima treten ein für die Werthe von y , welche der Gleichung:

$$\operatorname{tg} \frac{1}{4}y = \frac{1}{4}y$$

genügen; dieselben sind, sammt den zugehörigen Werthen der Lichtstärke in der kleinen Tabelle XIV angegeben. Sie nähern sich mit wachsendem y immer mehr den Werthen:

$$\frac{1}{4}y = \frac{2m+3}{2}\pi \text{ oder } \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \frac{r^2}{2} = \frac{2m+3}{2}\lambda,$$

bei welchen der Wegunterschied zwischen Randstrahl und Centralstrahl eine ungerade Anzahl halber Wellenlängen beträgt. Die entsprechenden Maximalintensitäten betragen etwa das Vierfache von derjenigen ($4/y^2$), welche die unversehrte Welle hervorbringen würde.

Fresnel und später Abria¹⁾ haben diese Ergebnisse der Theorie durch Beobachtungen mit weissem Lichte geprüft. Aus obigem Intensitätsausdruck wurde die Lichtstärke für die einzelnen Hauptfarben berechnet, nach Newton's Regel die Mischfarbe bestimmt, und das Resultat mit dem bei der betreffenden Einstellung im Mittelpunkte des Beugungsbildes wahrgenommenen Farbenton verglichen. Es ergab sich auf diese Weise eine sehr befriedigende Uebereinstimmung zwischen Theorie und Erfahrung.

70. Die Gerade $y = z$, welche die Grenze des geometrischen Schattens darstellt, so dass alle Punkte der yz -Ebene, welche zwischen ihr und der

1) Abria, Journal de Math. de Liouville, IV, p. 248. 1838.

z -Axe liegen, in die Schattenregion fallen, ist dadurch ausgezeichnet, dass ihre Punkte zu sich selbst coordinirt sind.

Aus den obigen für die Punkte coordinirter Geraden allgemein giltigen Relationen (66) ergeben sich in diesem Falle (für $c = 1$) die übrigens aus (14) bereits bekannten Formeln:

$$U_1(z, z) = \frac{1}{2} \sin z,$$

$$U_2(z, z) = \frac{1}{2} (I_0 - \cos z),$$

und hieraus die Lichtstärke längs der Schattengrenze:

$$M^2 = \left(\frac{\sin z}{z} \right)^2 + \left(\frac{I_0 - \cos z}{z} \right)^2.$$

Dieselbe kann, wie man sieht (und wie übrigens aus 56 bereits bekannt ist) niemals Null werden. Denn hiezu wäre erforderlich, dass $\sin z$ und $I_0 - \cos z$ gleichzeitig verschwinden, oder dass $I_0 = \pm 1$ würde, was unmöglich ist, da der absolute Werth von I_0 (ausser für $z = 0$) stets kleiner ist als die Einheit.

Die Werthe von $2z^{-1}U_1(z, z)$, $2z^{-1}U_2(z, z)$ und M^2 sind in der Tab. XV für die Werthe des Arguments von $z = 0$ bis $z = 12$ mit dem Incremente 0,5 berechnet und in Fig. 13 von $z = 2,5$ an graphisch dargestellt.

In den Fig. 2, 3 und 4 ist die Grenze des geometrischen Schattens durch eine punktirte Ordinate angedeutet.

71. Aus dem Verlaufe der transcendenten Curvenzweige:

$$y^{-2} U_2 = 0$$

(Fig. 12) ist ersichtlich, dass entlang denselben innerhalb des Schattengebietes, d. i. für $y < z$, die Function:

$$\frac{\partial y}{\partial z} = \frac{2 \frac{z}{y} U_3}{U_1 + \left(\frac{z}{y} \right)^2 U_3}$$

stets negativ bleibt.

Längs einer der Geraden $I_1 = 0$ aber nimmt dieser Ausdruck, da hier:

$$U_3 = -U_1$$

ist, die Form:

$$- \frac{2 \frac{z}{y}}{1 - \left(\frac{z}{y} \right)^2}$$

an, und ist demnach positiv, solange $y < z$ ist. Schnittpunkte jener transcendenten Curvenäste mit den Geraden $I_1 = 0$ können also innerhalb des Schattenraumes, wo $y < z$ ist, nicht eintreten, und ebensowenig kann hier $\partial y / \partial z$ Null werden. Von den Stellen, an welchen die Intensitätscurven Wendepunkte besitzen, liegt also keine innerhalb des geometrischen Schattens, sondern sämmtliche befinden sich in dem von directen Strahlen erleuchteten Gebiete.

V. Abschnitt.

Beugungserscheinungen eines kreisrunden undurchsichtigen Schirmchens.

72. In diesem Falle hat man die Integrale C und S (5) über den ganzen von dem Schirmchen nicht verdeckten Theil der Welle auszudehnen, oder von den Integralen, welche der Gesamtwelle entsprechen, die von 0 bis r, wo r den Radius des kreisförmigen Schirmchens bedeutet, genommen abzuziehen.

Die obere Grenze der Integrale für die Gesamtwelle ist im Vergleiche zu r als sehr gross anzusehen. Obgleich nun unsere Ausdrücke unter der Voraussetzung abgeleitet sind, dass es sich nur um Theile der Welle handle, welche dem Pole derselben nahe liegen, so kann man doch, weil die Elemente der Integrale mit wachsendem Argumente rasch abnehmen und die späteren daher zum Werthe derselben nichts Erhebliches beitragen, auch weitere Grenzen zulassen. Ja man kann sogar aus diesem Grunde die oberen Grenzen unendlich gross annehmen.

Wir erhalten hienach für die Gesamtwelle (gemäss 30):

$$C_{\infty} = 2\pi \int_0^{\infty} I_0(l\varrho) \cos\left(\frac{1}{2}k\varrho^2\right) \cdot \varrho d\varrho = \pi \cdot \frac{2}{k} \sin \frac{l^2}{2k},$$

$$S_{\infty} = 2\pi \int_0^{\infty} I_0(l\varrho) \sin\left(\frac{1}{2}k\varrho^2\right) \cdot \varrho d\varrho = \pi \cdot \frac{2}{k} \cos \frac{l^2}{2k}.$$

Um hieraus die wirkliche Intensität in irgend einem Punkte der vollständigen Welle zu erhalten, ist zu berücksichtigen, dass diesen Com-

ponenten der Vibrationsintensität (zufolge 3) noch der Factor $1/ab$ beizufügen ist. Darin ergibt sich die Intensität des vollen Lichts der unverdeckten Welle:

$$\frac{1}{a^2 b^2} (C_\infty^2 + S_\infty^2) = \frac{\pi^2}{a^2 b^2} \left(\frac{2}{k}\right)^2 = \frac{\pi^2}{a^2 b^2} \cdot \frac{a^2 b^2 \lambda^2}{\pi^2 (a+b)^2} = \frac{\lambda^2}{(a+b)^2}.$$

Messen wir dagegen lieber nach dem bisher angewendeten Masse, unter Weglassung des Nenners $a^2 b^2$, so wird dieselbe ausgedrückt durch:

$$(\pi r^2)^2 \left(\frac{2}{kr^2}\right)^2,$$

oder, wenn wir den Flächeninhalt πr^2 des Schirmchens, wie vorher den der kreisförmigen Oeffnung, der Einheit gleichsetzen, durch:

$$C_\infty^2 + S_\infty^2 = \left(\frac{2}{y}\right)^2.$$

73. Die Integrale, welche die Wirkung des kreisförmigen undurchsichtigen Schirmchens darstellen, gestalten sich alsdann (mit Rücksicht auf 9) wie folgt:

$$C_1 = C_\infty - C_r = \pi \frac{2}{k} \sin \frac{l^2}{2k} - \left(\pi \frac{2}{k} \sin \frac{l^2}{2k} + \pi r^2 \cdot \frac{\sin \frac{1}{2} y}{\frac{1}{2} y} V_0 - \pi r^2 \cdot \frac{\cos \frac{1}{2} y}{\frac{1}{2} y} V_1 \right),$$

$$S_1 = S_\infty - S_r = \pi \frac{2}{k} \cos \frac{l^2}{2k} - \left(\pi \frac{2}{k} \cos \frac{l^2}{2k} - \pi r^2 \cdot \frac{\cos \frac{1}{2} y}{\frac{1}{2} y} V_0 - \pi r^2 \cdot \frac{\sin \frac{1}{2} y}{\frac{1}{2} y} V_1 \right).$$

oder wenn, wie bereits erwähnt, der Flächeninhalt des Schirmchens gleich 1 angenommen wird:

$$C_1 = -\frac{2}{y} (V_0 \sin \frac{1}{2} y - V_1 \cos \frac{1}{2} y),$$

$$S_1 = \frac{2}{y} (V_0 \cos \frac{1}{2} y + V_1 \sin \frac{1}{2} y).$$

Hieraus folgt als Ausdruck für die Lichtstärke des Beugungsbildes:

$$M_1^2 = \left(\frac{2}{y}\right)^2 (V_0^2 + V_1^2),$$

oder, wenn wir die U- statt der V-Functionen einführen:

$$M_1^2 = \left(\frac{2}{y}\right)^2 \left(1 + U_1^2 + U_2^2 - 2U_1 \sin \left(\frac{1}{2} y + \frac{z^2}{2y} \right) + 2U_2 \cos \left(\frac{1}{2} y + \frac{z^2}{2y} \right) \right).$$

Der Intensitätsausdruck für die kreisförmige Oeffnung verwandelt sich also in denjenigen für das kreisförmige Schirmchen, wenn man U_1 mit V_1 und U_2 mit $-V_2$ vertauscht.

74. Für $z = 0$ hat man:

$$V_0 = 1, \quad V_1 = 0,$$

folglich:

$$[M_1^2]_{z=0} = \left(\frac{2}{y}\right)^2.$$

d. h. die Lichtstärke in jedem Punkte der Axe des geometrischen Schattens ist immer gleich der Lichtstärke der vollen Welle, als wenn das beugende Schirmchen gar nicht vorhanden wäre.

75. Da die numerischen Werthe von V_0 und V_1 aus dem vorhergehenden Abschnitt entweder direct berechnet vorliegen, oder mittels der Gleichungen:

$$V = \cos\left(\frac{1}{2}y + \frac{z^2}{2y}\right) + U_2,$$

$$V_1 = \sin\left(\frac{1}{2}y + \frac{z^2}{2y}\right) - U_1$$

aus den direct berechneten Werthen von U_1 und U_2 leicht abzuleiten sind, so lassen sich Tafeln dieser Functionen (oder vielmehr der Functionen $2y^{-1}V_0$ und $2y^{-1}V_1$) sowie der Lichtstärke M_1^2 , wie sie in den Tab. XVI bis XXIII von $y = \pi$ bis $y = 8\pi$ gegeben sind, ohne erhebliche neue Mühe entwerfen. Eine weitere Ausdehnung der Tafeln auf grössere Werthe von y erschien nicht nothwendig, da sich der Gang der Intensitäten, welcher im gegenwärtigen Fall überhaupt weit einförmiger ist als bei der kreisförmigen Oeffnung, weiterhin leicht übersehen lässt.

In den Fig. 14 bis 19 ist dieser Gang für $y = \pi$ bis $y = 6\pi$ graphisch dargestellt, und zwar ist $10 M_1^2$ für $y = \pi$, $100 M_1^2$ für $y = 2\pi$ bis $y = 4\pi$, $1000 M_1^2$ für $y = 5\pi$ und $y = 6\pi$ als Ordinate aufgetragen.

Da U_1 und U_2 mit wachsendem z gegen Null rücken, so nähern sich gleichzeitig, wie aus obigen Gleichungen ersichtlich ist, V_0 und V_1 immer mehr den Werthen:

$$\cos\left(\frac{1}{2}y + \frac{z^2}{2y}\right) \quad \text{und} \quad \sin\left(\frac{1}{2}y + \frac{z^2}{2y}\right)$$

und die Lichtstärke selbst dem Werthe:

$$[M_1^2]_{z=\infty} = \left(\frac{2}{y}\right)^2.$$

Die Ringe verlieren sich also mit wachsendem Beugungswinkel zuletzt in der vollen Beleuchtung.

76. Die Intensität M_1^2 erreicht ein Maximum oder Minimum, wenn:

$$\frac{\partial M_1^2}{\partial z} = 2 \left(\frac{2}{y}\right)^2 \left(V_0 \frac{\partial V_0}{\partial z} + V_1 \frac{\partial V_1}{\partial z}\right) = 0$$

ist. Nun hat man aber (zufolge 17):

$$\frac{\partial V_0}{\partial z} = \frac{z}{y} V_{-1} \quad \text{und} \quad \frac{\partial V_1}{\partial z} = \frac{z}{y} V_0,$$

und demnach:

$$\frac{\partial M_1^2}{\partial z} = \frac{2z}{y} \left(\frac{2}{y}\right)^2 V_0 (V_{-1} + V_1),$$

oder, da nach (15):

$$V_{-1} + V_1 = -\frac{y}{z} I_1$$

ist:

$$\frac{\partial M_1^2}{\partial z} = -2 \left(\frac{2}{y}\right)^2 I_1 V_0.$$

Die Lichtstärke wird also zu einem Maximum oder Minimum, wenn entweder $I_1 = 0$ oder wenn $V_0 = 0$ ist.

Da

$$I_1 = -\frac{\partial I_0}{\partial z} \quad \text{und} \quad V_0 = \frac{y}{z} \frac{\partial V_1}{\partial z}$$

ist, so kann man auch sagen, dass M_1^2 ein Maximum oder Minimum wird, wenn entweder I_0 oder V_1 zu einem Maximum oder Minimum werden.

77. Also auch im gegenwärtigen Fall sind es unter anderen wieder die aus dem Vorhergehenden genugsam bekannten Wurzelwerthe der Gleichung $I_1 = 0$, welchen Maxima oder Minima der Lichtstärke entsprechen.

Um die zugehörigen Werthe der Functionen $2y^{-1} V_0$ und $2y^{-1} V_1$ zu berechnen, dient ein Verfahren, welches dem oben hinsichtlich der U-Functionen angewendeten vollkommen analog ist. Zufolge (21) haben wir nämlich:

$$\frac{2}{y} V_0(y, z + \varepsilon) = \frac{2}{y} V_0 + \frac{h}{2y} \cdot \frac{2}{y} V_{-1} + \left(\frac{h}{2y}\right)^2 \frac{1}{2!} \cdot \frac{2}{y} V_{-2} + \left(\frac{h}{2y}\right)^3 \frac{1}{3!} \cdot \frac{2}{y} V_{-3} + \dots,$$

$$\frac{2}{y} V_1(y, z + \varepsilon) = \frac{2}{y} V_1 + \frac{h}{2y} \cdot \frac{2}{y} V_0 + \left(\frac{h}{2y}\right)^2 \frac{1}{2!} \cdot \frac{2}{y} V_{-1} + \left(\frac{h}{2y}\right)^3 \frac{1}{3!} \cdot \frac{2}{y} V_{-2} + \dots,$$

wo wiederum:

$$h = 2\varepsilon z + \varepsilon^2$$

ist, und die Coefficienten der Reihen aus den nächstgelegenen tabellari-
schen Werthen von $2y^{-1}V_0$ und $2y^{-1}V_1$ durch successive Anwendung der
Gleichung (15):

$$V_{-n} + V_{-n+2} = (-1)^n \left(\frac{y}{z}\right)^n I_n$$

leicht zu bestimmen sind.

Die erstere der beiden obigen Reihen dient auch dazu, die Wurzel-
werthe der Gleichung $V_0 = 0$ zu ermitteln, indem man $V_0(y, z + \varepsilon) = 0$
setzt, worauf die zugehörigen Werthe von $2y^{-1}V_1$ mittels der zweiten
Reihe berechnet werden.

Die Zahlenwerthe von z , für welche die Lichtstärke ein Maximum
oder Minimum erreicht, sind nebst diesen extremen Lichtstärken selbst
am Fusse der Tabellen XVI bis XXIII aufgeführt.

78. Um den Ueberblick über die Erscheinungen zu erleichtern, ent-
werfen wir, analog wie im vorigen Fall, auf der yz -Ebene sowohl die
durch die Gleichung $I_1 = 0$ ausgedrückten Geraden, als auch die trans-
scendenten Curven $V_0 = 0$ (Fig. 20).

Zur Construction der letzteren wurden, wie im vorigen Abschnitt
bei den Curven $U_2 = 0$, auch die Winkel zu Hilfe genommen, welche die
Berührungslinien in jedem berechneten Curvenpunkte mit der Abscissenaxe
einschliessen. Aus der Gleichung $V_0 = 0$ folgt nämlich:

$$\frac{\partial V_0}{\partial z} + \frac{\partial V_0}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial z} = 0,$$

und hieraus, da (nach 17):

$$\frac{\partial V_0}{\partial z} = \frac{z}{y} V_{-1}$$

und (nach 22):

$$\frac{\partial V_0}{\partial y} = -\frac{1}{2} V_1 - \frac{1}{2} \left(\frac{z}{y}\right)^2 V_{-1}$$

ist:

$$\frac{\partial y}{\partial z} = \frac{2 \cdot \frac{z}{y} V_{-1}}{V_1 + \left(\frac{z}{y}\right)^2 V_{-1}},$$

oder, mit Rücksicht auf unsere Tabellen für die numerische Rechnung bequemer:

$$\frac{\partial y}{\partial z} = \frac{2 \frac{z}{y} \cdot \frac{2}{y} V_{-1}}{\frac{2}{y} V_1 + \left(\frac{z}{y}\right)^2 \frac{2}{y} V_{-1}}.$$

Die zusammengehörigen Werthe von y, z und

$$\operatorname{arctg} \frac{\partial y}{\partial z},$$

welche der Construction der Fig. 20 zu Grunde liegen, finden sich in der Tab. XXIV vereinigt.

79. Da:

$$\frac{z}{y} V_{-1} = -I_1 - \left(\frac{z}{y}\right)^2 I_1 + \left(\frac{z}{y}\right)^4 I_3 - + \dots$$

mit wachsendem y sich dem Werthe $-I_1$ nähert, während:

$$V_1 = \frac{z}{y} I_1 - \left(\frac{z}{y}\right)^3 I_3 + \left(\frac{z}{y}\right)^5 I_5 - + \dots$$

und:

$$\left(\frac{z}{y}\right)^2 V_{-1} = -\frac{z}{y} I_1 - \left(\frac{z}{y}\right)^3 I_1 + \left(\frac{z}{y}\right)^5 I_3 - + \dots$$

verschwinden, so wird:

$$\frac{\partial y}{\partial z} = \infty$$

für $y = \infty$, d. h. die Aeste der Curve $V_0 = 0$ nähern sich mit wachsendem y dem Parallelismus mit der y -Axe.

Da ferner:

$$V_0 = I_0 - \left(\frac{z}{y}\right)^2 I_2 + \left(\frac{z}{y}\right)^4 I_4 - + \dots$$

mit wachsendem y der Function I_0 unaufhörlich näher rückt, so sind die zur y -Axe parallelen Geraden, deren Abscissen der Gleichung:

$$I_0 = 0$$

genügen, Asymptoten jener Curvenäste. Die Wurzelwerthe dieser Gleichung aber sind:

$$z = 2,405$$

$$5,520$$

$$8,654$$

$$11,792$$

$$14,931$$

$$18,071$$

u. s. f.

Da I_0 mit wachsendem z sich dem Ausdruck:

$$\sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cdot \cos(z - \frac{1}{4}\pi)$$

nähert, so kommen diese Wurzeln den Werthen:

$$z = (m + \frac{3}{4})\pi$$

um so näher, je grösser z wird.

In der Fig. 20 sind diese Asymptoten punktirt angegeben; sie gewähren die Möglichkeit, den ferneren Verlauf der Curvenzweige $V_0 = 0$ in der Richtung der wachsenden y auch über den Rahmen der Zeichnung hinaus zu übersehen.

80. In der Gleichung (10, 18):

$$V_0 - U_2 = \cos\left(\frac{1}{2}y + \frac{z^2}{2y}\right)$$

wird der Cosinus zur Rechten gleich Null, wenn:

$$\frac{1}{2}y + \frac{z^2}{2y} = \frac{2m+1}{2}\pi,$$

oder:

$$y^2 + z^2 = (2m+1)\pi y$$

ist. Diese Gleichung stellt aber eine Schaar von Kreisen dar, welche von den Punkten:

$$y = \frac{1}{2}\pi, \quad \frac{3}{2}\pi, \quad \frac{5}{2}\pi, \quad \dots \quad \frac{2m+1}{2}\pi, \quad \dots$$

der y -Axe aus resp. mit den Halbmessern

$$\frac{1}{2}\pi, \quad \frac{3}{2}\pi, \quad \frac{5}{2}\pi, \quad \dots \quad \frac{2m+1}{2}\pi, \quad \dots$$

beschrieben sind, und daher sämmtlich durch den Coordinatenanfang gehen.

Längs dieser Kreislinien ist immer:

$$V_o = U_2,$$

und man sieht insbesondere, dass jeder Punkt, in welchem die Curve $U_2 = 0$ von diesen Kreisen geschnitten wird, auch der Curve $V_o = 0$ angehört, so dass, nachdem die Curven $U_2 = 0$ entworfen sind, Punkte der Curven $V_o = 0$ mittels dieser Kreise auf einfache Weise constructiv gefunden werden können.

81. Da:

$$\begin{aligned} V_o &= \cos\left(\frac{1}{2}y + \frac{z^2}{2y}\right) + U_2 \\ &= \cos\left(\frac{1}{2}y + \frac{z^2}{2y}\right) + \left(\frac{y}{z}\right)^2 I_2 - \left(\frac{y}{z}\right)^4 I_4 + \dots \end{aligned}$$

ist, so erkennt man, dass die Zweige der Curve $V_o = 0$ mit abnehmendem y sich den Kreisen:

$$y^2 + z^2 = (2m + 1)\pi y$$

immer mehr nähern, und demnach sämmtlich im Coordinatenanfang, der ein unendlich vielfacher Punkt der Curve $V_o = 0$ ist, zusammenlaufen.

Nachdem wir hiemit den gesammten Verlauf der Curve $V_o = 0$ zu überblicken im Stande sind, erkennen wir insbesondere auch, dass $\partial y / \partial z$ niemals negativ oder Null (letzteres nur im Coordinatenanfang) werden kann, sondern stets positiv bleibt.

82. Die Entscheidung, über welchen Theilen der Linien $I_1 = 0$ und $V_o = 0$ Maxima oder Minima der Lichtstärke auftreten, liefert der zweite Differentialquotient von M_1^2 nach z . Man findet aber:

$$\frac{\partial^2 M_1^2}{\partial z^2} = -2 \left(\frac{2}{y}\right)^2 \left(I_1 \frac{\partial V_o}{\partial z} + V_o \frac{\partial I_1}{\partial z}\right),$$

oder, weil:

$$\frac{\partial V_o}{\partial z} = \frac{z}{y} V_{-1} = -I_1 - \frac{z}{y} V_1$$

und:

$$\frac{\partial I_1}{\partial z} = -\frac{1}{z} I_1 + I_o$$

ist:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^3 M_1^2}{\partial z^3} &= 2 \left(\frac{2}{y}\right)^2 \left(-\frac{z}{y} I_1 V_{-1} + \frac{1}{z} I_1 V_o - I_o V_o\right) \\ &= 2 \left(\frac{2}{y}\right)^2 \left(I_1^2 + \frac{z}{y} I_1 V_1 + \frac{1}{z} I_1 V_o - I_o V_o\right).\end{aligned}$$

Ueber den Geraden $I_1 = 0$ liegen demnach Maxima oder Minima der Intensität, je nachdem:

$$I_o V_o$$

positiv oder negativ ist.

Auf den Curven $V_o = 0$ dagegen finden sich Maxima oder Minima, wenn:

$$-\frac{z}{y} I_1 V_{-1}$$

oder:

$$I_1 \left(I_1 + \frac{z}{y} V_1\right)$$

negativ oder positiv ist.

Die Intensität auf der y -Axe, d. i. im Centrum des geometrischen Schattens, ist immer ein Maximum, weil für $z = 0$:

$$I_1 = 0, \quad I_o = 1, \quad V_o = 1,$$

und demnach:

$$\left[\frac{\partial^3 M_1^2}{\partial z^3}\right]_{z=0} = -2 \left(\frac{2}{y}\right)^2$$

negativ ist.

83. In den Durchschnittspunkten der beiden Liniensysteme $I_1 = 0$ und $V_o = 0$ verschwindet der zweite Differentialquotient von M_1^2 , nicht aber der dritte. Denn dieser, nämlich:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^3 M_1^2}{\partial z^3} &= 2 \left(\frac{2}{y}\right)^2 \left(I_1 V_o - \frac{1}{z} I_2 V_o - \frac{2z}{y} I_o V_{-1} + \frac{1}{y} I_1 V_{-1} - \left(\frac{z}{y}\right)^2 I_1 V_{-2}\right) \\ &= 2 \left(\frac{2}{y}\right)^2 \left(3 I_1 \left(I_o - \frac{1}{z} I_1\right) - \left(\frac{1}{y} I_1 - \frac{2z}{y} I_o\right) V_1 + \left[\frac{z^2}{y^2} - \frac{2}{z} + 1\right] I_1 + \frac{1}{z} I_o\right) V_o\end{aligned}$$

nimmt hier den von Null verschiedenen Werth

$$\left[\frac{\partial^3 M_1^2}{\partial z^3}\right] = -2 \left(\frac{2}{y}\right)^2 \cdot \frac{2z}{y} I_o V_{-1} = 2 \left(\frac{2}{y}\right)^2 \cdot \frac{2z}{y} I_o V_1$$

an. Ueber den Durchschnittspunkten der Linien $I_1 = 0$ und $V_o = 0$ liegen demnach Wendepunkte der Intensitätscurve.

84. Bei diesen Punkten findet, ganz wie im vorigen Fall, ein Ueberspringen der Maxima oder Minima von der einen Liniengattung auf die andere statt. Denn schreitet man längs einer der Geraden $I_1 = 0$ fort, so ändert sich beim Uebergang über die Curve $V_0 = 0$ das Vorzeichen von V_0 , nicht aber dasjenige von I_0 , so dass auch das Product:

$$I_0 V_0,$$

dessen Vorzeichen zwischen Maximum oder Minimum entscheidet, hier einen Zeichenwechsel erfährt.

Geht man dagegen längs der Curve $V_0 = 0$ über einen ihrer Durchschnittspunkte mit den Geraden $I_1 = 0$ hinweg, so wechselt das Vorzeichen von I_1 , nicht aber dasjenige von V_{-1} , da für $I_1 = 0$:

$$V_{-1} = -V_1$$

ist, V_1 aber wegen:

$$\frac{\partial V_1}{\partial z} = \frac{z}{y} V_0 = 0$$

ein Maximum oder Minimum ist. Sonach erleidet auch das in diesem Falle charakteristische Product:

$$I_1 V_{-1}$$

einen Zeichenwechsel, und zeigt dadurch ein Ueberspringen der Maximal- oder Minimalwerthe von der einen auf die andere Liniengattung an.

85. Ausser diesen Durchschnitten der beiden Liniensysteme $I_1 = 0$ und $V_0 = 0$ gibt es keine Punkte mehr, in welchen der zweite Differentialquotient von M_1^2 verschwindet, und sonach Wendepunkte der Intensitätscurve eintreten könnten; denn auf der Curve $V_0 = 0$ kann, wie wir oben (81) gesehen haben, V_{-1} nicht Null werden. Für die zweite Art von Wendepunkten, die wir im vorigen Abschnitt bei der kreisförmigen Oeffnung kennen gelernt haben, nämlich für diejenigen, welche der Bedingung $\partial y / \partial z = 0$ entsprechen, existirt also bei dem dunklen Schirmchen kein Analogon, wohl aber für die erste Art, welche den Durchschnittspunkten der beiden Liniensysteme zugehören.

In Fig. 20 ist das bei diesen Schnittpunkten eintretende Uebergehen der Maxima oder Minima der Lichtstärke auf die andere Liniengattung in derselben Weise wie in Fig. 12 durch stärkeres Ausziehen der Linien-theile, welche Träger der Minima sind, ersichtlich gemacht.

86. Was im vorigen Abschnitt von den coordinirten Geraden gesagt wurde, gilt in analoger Weise auch im gegenwärtigen Fall.

Für zwei Punkte, welche zu dem nämlichen Werth von z gehörig auf zwei coordinirten Geraden liegen, gelten die Beziehungen:

$$V_1 + V'_1 = \sin \frac{1}{2} z \left(c + \frac{1}{c} \right),$$

$$V_o + V'_o = I_o + \cos \frac{1}{2} z \left(c + \frac{1}{c} \right).$$

Diese Relationen sind mit den analogen oben (66) für die U-Functionen aufgestellten identisch, denn es gelten ja offenbar die Gleichungen:

$$\begin{aligned} V_1 &= U'_1, & V'_1 &= U_1, \\ V_o &= I_o - U'_2, & V'_o &= I_o - U_2. \end{aligned}$$

87. Aus diesen aber folgt:

$$V_o^2 + V_1^2 = U_1'^2 + U_2'^2 - 2I_o U'_2 + I_o^2,$$

$$V_o'^2 + V_1'^2 = U_1^2 + U_2^2 - 2I_o U_2 + I_o^2,$$

und wenn man letztere zwei Gleichungen addirt:

$$V_o^2 + V_1^2 + V_o'^2 + V_1'^2 = U_1^2 + U_2^2 + U_1'^2 + U_2'^2 - 2I_o (U_2 + U'_2) + 2I_o^2.$$

Nun ist aber nach (66):

$$U_2 + U'_2 = I_o - \cos \frac{1}{2} z \left(c + \frac{1}{c} \right),$$

folglich:

$$V_o^2 + V_1^2 + V_o'^2 + V_1'^2 = U_1^2 + U_2^2 + U_1'^2 + U_2'^2 + 2I_o \cos \frac{1}{2} z \left(c + \frac{1}{c} \right).$$

Da nun:

$$U_1^2 + U_2^2 = \frac{c^2 z^2}{4} M^2, \quad V_o^2 + V_1^2 = \frac{c^2 z^2}{4} M_1^2,$$

$$U_1'^2 + U_2'^2 = \frac{z^2}{4c^2} M'^2, \quad V_o'^2 + V_1'^2 = \frac{z^2}{4c^2} M_1'^2$$

ist, so erkennt man, dass zwischen den Intensitäten, welche auf coordinirten Geraden der Beugungsbilder einer kreisförmigen Oeffnung und

eines kreisförmigen Schirmchens dem nämlichen Werthe von z zugehören, die Beziehung:

$$c^2(M_1^2 - M^2) + \frac{1}{c^2}(M_1'^2 - M'^2) = \frac{8}{z^2} I_0 \cos \frac{1}{2} z \left(c + \frac{1}{c} \right)$$

obwaltet.

88. Die Gerade $y = z$ bildet wie im vorigen Fall die Grenze des geometrischen Schattens, welcher das zwischen ihr und der y -Axe eingeschlossene Gebiet einnimmt. Die Fig. 20, in welcher die Schattengrenze punktirt angegeben ist, lässt unmittelbar erkennen, dass mit wachsendem y eine immer grössere Anzahl dunkler Ringe in den Schattenraum eintritt.

Für zwei coordinirte Punkte, welche im Beugungsbild innerhalb und ausserhalb der Schattengrenze auf coordinirten Geraden liegen, gilt wie dort (67) die Beziehung:

$$\zeta \zeta' = \zeta_0^2$$

89. Längs der Schattengrenze selbst ist auch hier die Lichtstärke in geschlossener Form ausdrückbar. Denn man hat für $y = z$ oder $c = 1$:

$$V_1(z, z) = \frac{1}{2} \sin z,$$

$$V_0(z, z) = \frac{1}{2} (I_0 + \cos z),$$

folglich:

$$M_1^2 = \left(\frac{\sin z}{z} \right)^2 + \left(\frac{I_0 + \cos z}{z} \right)^2.$$

Die Werthe von $2z^{-1} V_1(z, z)$, $2z^{-1} V_0(z, z)$ und M_1^2 sind in Tab. XXV von $z = 0$ bis $z = 12$ mit einem Incremente $= 0,5$ angegeben, und in Fig. 21 von $z = 2$ an graphisch dargestellt.

90. Da an der Schattengrenze, wo $c = 1$ ist,

$$M_1'^2 = M_1^2 \quad \text{und} \quad M'^2 = M^2$$

wird, so verwandelt sich hier die oben (87) für zwei coordinirte Gerade aufgestellte allgemeine Relation in folgende einfachere:

$$M_1^2 - M^2 = \left(\frac{2}{z} \right)^2 I_0 \cos z.$$

Hieraus ergibt sich, dass an der Grenze des geometrischen Schattens die Intensität im Beugungsbilde eines kreisförmigen Schirmchens der-

jenigen im Beugungsbilde einer gleichgrossen kreisförmigen Oeffnung gleich wird, so oft entweder $\cos z = 0$, oder $I_0 = 0$ ist, also in den Punkten der Figuren 12 und 20, wo einerseits die zur y -Axe parallelen Geraden $z = (m + \frac{1}{2})\pi$ und andererseits die Asymptoten der Curve $V_0 = 0$ die Schattengrenze $y = z$ durchschneiden.

91. Die oben besprochenen Wendepunkte der Intensitätscurven können nur ausserhalb des Schattenraumes, wo $y < z$ ist, vorkommen. Denn da für $I_1 = 0$:

$$V_{-1} = V_1$$

ist, so nimmt entlang den Geraden $I_1 = 0$ die Function:

$$\frac{\partial y}{\partial z} = \frac{2 \cdot \frac{z}{y} V_{-1}}{V_1 + \left(\frac{z}{y}\right)^2 V_{-1}}$$

den Werth:

$$= \frac{2 \frac{z}{y}}{1 - \left(\frac{z}{y}\right)^2}$$

an, welcher positiv ist, solange $y < z$ bleibt, im Schattenraum dagegen, wo $y > z$ ist, negativ wird. Nun wissen wir (81), dass längs den Curven $V_0 = 0$ der Werth von $\partial y / \partial z$ nur positiv sein kann. Durchschnittspunkte dieser Curven mit den Geraden $I_1 = 0$, d. i. Wendepunkte der Intensitätscurve, können also nur ausserhalb des Schattens vorkommen.

VI. Abschnitt.

Beobachtungsergebnisse.

92. Die durch eine kleine kreisförmige Oeffnung hervorgebrachten Fresnel'schen Beugungserscheinungen wurden beobachtet und gemessen durch ein einem älteren Fernrohr entnommenes Ocular mit Glasmikrometer. Das Ocular wurde getragen von einem Messingsäulchen, das sich auf einem mit Nonius versehenen kleinen Schlitten erhob, der in einer

Nuth längs einer Millimetertheilung sowohl grob mit der Hand als auch fein mittels einer Schraube verschoben werden konnte. Mit dieser Vorrichtung auf demselben Gestell war ein zweites Säulchen angebracht, welches den beugenden Schirm, eine dünne geschwärzte Messingplatte mit kleiner kreisrunder Oeffnung, trug. Die jeweilige Entfernung (b) des Auffangschirmes, nämlich der Mikrometerplatte des Oculars, von dem beugenden Schirm konnte an der Theilung mittels des Nonius auf Zehntel-millimeter genau abgelesen werden.

93. Um die Erscheinungen aus der Theorie berechnen und sodann mit den Beobachtungen vergleichen zu können, musste homogenes Licht von bekannter Wellenlänge zur Anwendung kommen. Es wurde daher mittels Uhrwerkheliostat, Spalt, achromatischer Linse und Flintglasprisma ein reines scharfes Sonnenspectrum entworfen, und zwar auf einem Schirm, in welchem sich ein kleines rundes Loch von $\frac{1}{2}$ mm Durchmesser befand. Dieses kleine Loch wurde durch Verschieben des Schirms nach der Reihe auf die verschiedenen Fraunhofer'schen Linien eingestellt, so dass die dunkle Linie jedesmal durch die Mitte des Loches ging, und sonach Licht aus der unmittelbaren Nähe zu beiden Seiten der Fraunhofer'schen Linie durch dasselbe drang. Das kleine Loch diente so als nahezu punktförmige homogene Lichtquelle für den in geeigneter Entfernung dahinter aufgestellten Beugungsapparat.

94. Bei sämtlichen Versuchen wurde die nämliche Entfernung ($a = 2120^{\text{mm}}$) der Lichtquelle von der beugenden Oeffnung unverändert beibehalten, und nur die Entfernung b zwischen dieser und der auffangenden Mikrometerplatte variiert.

Auch die beugende Kreisöffnung war bei allen Versuchen die nämliche. Ihr Durchmesser, mittels Glasmikrometer unter dem Mikroskope gemessen, ergab sich zu $0^{\text{mm}},56$, ihr Radius war demnach: $r = 0^{\text{mm}},28$.

Die Messungen erstreckten sich auf die Fraunhofer'schen Linien C, D, E und F. Für die Linien B und G fielen die Erscheinungen zu lichtschwach aus, um sichere Messungen zu gestatten.

Von den grösseren für die Dimensionen des Apparats zulässigen Entfernungen b ausgehend wurde das Ocular der beugenden Oeffnung

allmählig nähergeschoben, und jedesmal, wenn ein charakteristisches, von dem vorher beobachteten hinreichend verschiedenes Beugungsbild sich zeigte, die Durchmesser der dunklen Ringe und die zugehörige Entfernung b abgelesen.

95. Auf der Mikrometerplatte des Oculars waren vier Pariser Linien in 80 gleiche Theile getheilt, so dass jeder Theilstrich $\frac{1}{20}'''$ Par. oder $0^{\text{mm}},1128$ betrug. Die Zehntel eines Theilstrichs wurden durch Schätzung bestimmt. Bei fehlerloser Ablesung würden demnach die Durchmesser der Ringe auf $0^{\text{mm}},01128$ oder ihre Halbmesser auf $0^{\text{mm}},00564$ genau erhalten werden. Bedenkt man jedoch, dass die Ringe nicht immer schmal und scharf, sondern häufig schwach und verschwommen erscheinen, so werden Fehler in der Schätzung des Durchmessers bis zu $\frac{1}{10}$ Theilstrich, also im Halbmesser bis $\pm 0^{\text{mm}},00564$ nicht zu vermeiden sein, so dass sich in einzelnen Fällen die Abweichung von den völlig genauen Werthen auf $0^{\text{mm}},011$ belaufen kann.

Die unmittelbar in Zwanzigstel Pariser Linien abgelesenen Durchmesser d der dunkeln Ringe sind in den folgenden Tabellen 1 bis 4 in der fünften Columne unter der Ueberschrift „ d beobachtet“ aufgeführt. Manchmal erschienen die Ringe so breit, dass, statt wie gewöhnlich auf ihre dunkelste Stelle einzustellen, ihr innerer und äusserer Durchmesser abgelesen und aus beiden Werthen das Mittel genommen werden musste.

Aus den Durchmessern ergaben sich dann die Halbmesser ζ in Millimetern durch die einfache Rechnung:

$$\zeta = \frac{1}{2} d \cdot 0,1128,$$

welche Werthe sich in der mit „ ζ beobachtet“ überschriebenen Columne angegeben finden.

96. Diese beobachteten Werthe von ζ mussten nun mit den aus der Theorie berechneten Werthen verglichen werden.

Zu diesem Zwecke wurde zunächst zu jedem gemessenen Werthe des Abstandes b (zweite Columne der folgenden Tabellen) und mit Hilfe der bekannten Grössen a , λ und r der entsprechende Werth von y (dritte Columne) mittels der Formel:

$$y = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \frac{a+b}{ab} \cdot r^2$$

berechnet. Zu jedem Werthe von y wurden diejenigen Werthe von z (vierte Columne) aufgesucht, welchen Minima der Lichtstärke entsprechen; dieselben konnten mit hinreichender Genauigkeit der Zeichnung Fig. 12, welche den Verlauf der Linien $I_1 = 0$ und $U_2 = 0$ graphisch darstellt, entnommen werden.

Aus diesen Werthen von z wurden nun die Radien ζ der dunklen Ringe mittels der Gleichung:

$$\zeta = \frac{\lambda}{2\pi} \cdot \frac{b}{r} \cdot z$$

abgeleitet, und in der siebenten Columne neben die beobachteten Werthe von ζ gestellt.

Die in der achten Columne eingetragenen Differenzen D zwischen den berechneten und den beobachteten Werthen von ζ überschreiten nirgends die oben (95) festgestellte Fehlergrenze.

Durch diese Beobachtungsreihen wird demnach die im Vorhergehenden vorgetragene Theorie durchaus bestätigt.

97. Eine weitere Bestätigung aber liefert das charakteristische und überaus mannigfaltige Aussehen der Beugungsbilder selbst, die scheinbar regellose Aufeinanderfolge sehr dunkler und äusserst schwacher Ringe und die eigenthümlichen Abstufungen der Lichtstärke, welche dem Beobachter alle jene Besonderheiten im Gange der Intensität vor Augen führen, welche in den Intensitätscurven Fig. 2 bis 11 hervortreten, und durch diese besser wiedergegeben sind, als jede Beschreibung es auszudrücken vermöchte. In der letzten Columne „Bemerkungen“ finden sich kurze dieses Aussehen der Ringe betreffende Notizen. Von besonderem Interesse sind die eigenthümlichen Schattirungen, welche den Wendepunkten der Intensitätscurven, wo die Beobachtung zufällig auf solche traf, entsprechen (D, 1; E, 5; F, 7).

Tabelle 1.

Linie C; $\lambda = 0^{\text{mm}},0006562$; $a = 2120^{\text{mm}}$; $r = 0^{\text{mm}},28$.

Nr.	b mm	y	z	d beobachtet Par. "'	ζ beobachtet mm	ζ berechnet mm	D	Bemerkungen
1.	165,8	4,882	3,832	4,1	0,231	0,237	— 0,006	sehr stark, breit
			7,016	6,7 } 7,6	0,429	0,434	— 0,005	breit, schwächer
			10,174	8,5 }	0,640	0,629	+ 0,011	breit, schwach
				10,2 } 12,5 }				
2.	152,5	5,277	3,832	3,7	0,209	0,218	— 0,009	schwach
			7,016	6,3 } 7,1	0,400	0,399	+ 0,001	breit, stark
			10,174	7,9 }	0,578	0,579	— 0,001	breit, stark
				9,3 } 11,2 }				
3.	99,4	7,906	2,850	1,8	0,102	0,106	— 0,004	schwach
			7,016	4,5	0,254	0,260	— 0,006	stark
			10,174	6,6	0,372	0,377	— 0,005	stark
			13,324	8,7	0,491	0,494	— 0,003	stark
4.	90,4	8,658	2,440	1,45	0,082	0,082	0,000	
			7,016	4,1	0,231	0,237	— 0,006	
			10,174	6,0	0,338	0,343	— 0,005	
			13,324	8,0	0,451	0,449	+ 0,002	
5.	85,1	9,175	2,140	1,2	0,068	0,068	0,000	
			7,016	3,9	0,220	0,223	— 0,003	
			10,174	5,7	0,321	0,323	— 0,002	
			13,324	7,5	0,423	0,423	0,000	
6.	75,0	10,363	1,500	0,8	0,045	0,042	+ 0,003	Enges Ringelchen
			6,750	3,3	0,186	0,189	— 0,003	schwach
			10,174	4,9	0,276	0,285	— 0,009	stark
			13,324	6,8	0,383	0,373	+ 0,010	stark
7.	73,3	10,596	1,300	0,6	0,034	0,036	— 0,002	Enges Ringelchen
			6,650	3,2	0,180	0,182	— 0,002	
			10,174	4,9	0,276	0,278	— 0,002	
			13,324	6,4	0,361	0,364	— 0,003	
8.	67,2	11,525	0,700	—	—	0,018	—	Dunkler Fleck mit
			6,300	2,7	0,152	0,158	— 0,006	hellerer Mitte
			10,174	4,4	0,248	0,255	— 0,007	
			13,324	5,9	0,333	0,334	— 0,001	

Nr.	b mm	y	z	d beobachtet Par. ...	ζ beobachtet mm	ζ berechnet mm	D	Bemerkungen
9.	62,5	12,365	0,160	—	—	0,004	—	Schwarz. Mittelfleck
			5,900	2,3	0,130	0,135	— 0,005	schwach
			10,174	4,1	0,231	0,237	— 0,006	schwach
			13,324	5,6	0,316	0,311	+ 0,005	stark
			16,471	6,8	0,383	0,384	— 0,001	stark
10.	56,8	13,570	0,700	—	—	0,015	—	Dunkler Fleck mit
			5,400	2,0	0,113	0,114	— 0,001	hellerer Mitte
			10,050	3,7	0,209	0,213	— 0,004	
			13,324	5,0	0,282	0,282	0,000	
11.	47,0	16,326	3,832	1,2	0,063	0,067	+ 0,001	schwach
			9,200	2,9	0,164	0,161	+ 0,003	sehr schwach
			13,324	4,0	0,226	0,234	— 0,003	schwach
			16,471	5,0	0,282	0,289	— 0,007	stark
12.	40,6	18,843	3,832	0,75 } 1,30 } 1,025	0,058	0,058	0,000	Breites schwarzes Ringelchen
			8,089	2,2	0,124	0,123	+ 0,001	schwach
			12,600	3,4	0,192	0,191	+ 0,001	sehr schwach
			16,471	4,5	0,254	0,249	+ 0,005	stark
13.	35,1	21,740	2,300	0,5	0,028	0,030	— 0,002	Zwischenraum zwi- schen dem 1. und
			7,016	1,7	0,096	0,092	+ 0,004	2. Ring schattig
			11,800	2,8	0,158	0,155	+ 0,003	schwach
14.	29,3	25,975	0,610	0,1	0,006	0,007	— 0,001	Schwarz. Mittelfleck
			6,600	1,2	0,068	0,072	— 0,004	stark
			10,174	1,9	0,107	0,111	— 0,004	schwach
			13,550	2,7	0,152	0,148	+ 0,004	sehr schwach
15.	25,7	29,564	3,832	0,6	0,034	0,037	— 0,003	Enges Ringelchen
			10,174	1,6	0,090	0,098	— 0,008	stark
			13,324	2,2	0,124	0,128	— 0,004	schwach
16.	20,1	37,700	—	—	—	—	—	Schwarzer Mittel- punkt
17.	15,0	50,400	—	—	—	—	—	Schwarzer Mittel- punkt

Tabelle 2.

Linie D; $\lambda = 0^{\text{mm}},0005889$; $a = 2120^{\text{mm}}$; $r = 0^{\text{mm}},28$.

Nr.	b mm	y	z	d beobachtet Par. ""	ζ beobachtet mm	ζ berechnet mm	D	Bemerkungen
1.	90,4	9,638	1,900	1,0	0,056	0,057	— 0,001	Zweiter Ring innen schattig gesäumt bis d = 3,4, ent- sprechend einem Wendepunkt bei z = 7,02
			10,174	5,4	0,305	0,308	— 0,003	
			13,324	7,2	0,406	0,403	+ 0,003	
2.	85,1	10,224	1,600	0,8	0,045	0,046	— 0,001	Enges Ringelchen, schwach
			6,800	3,4	0,192	0,194	— 0,002	
			10,174	5,1	0,288	0,290	— 0,002	
			13,324	6,7	0,378	0,380	— 0,002	
3.	73,3	11,806	0,500	0,2	0,011	0,012	— 0,001	Schwarzes Ringel- chen mit dunklem Innenraum
			6,180	2,7	0,152	0,152	0,000	
			10,174	4,4	0,248	0,250	— 0,002	
			13,324	5,8	0,327	0,327	0,000	
4.	67,2	12,842	0,200	—	—	0,004	—	Dunkler Mittelfleck
			5,770	2,3	0,130	0,130	0,000	
			10,174	4,0	0,226	0,229	— 0,003	
			13,324	5,3	0,299	0,300	— 0,001	
			16,471	6,6	0,372	0,370	+ 0,002	
5.	56,8	15,121	2,100	0,7	0,039	0,040	— 0,001	Enges Ringelchen
			4,400	1,5	0,085	0,084	+ 0,001	
			9,650	3,3	0,186	0,183	+ 0,003	
			13,324	4,5	0,254	0,253	+ 0,001	
			16,471	5,5	0,310	0,313	— 0,003	
6.	53,3	16,088	3,832	1,2	0,068	0,068	0,000	
			9,310	3,0	0,169	0,166	+ 0,003	
7.	46,2	18,500	3,832	1,1	0,062	0,059	+ 0,003	breit, sehr dunkel schwach schwach
			8,300	2,3	0,130	0,128	+ 0,002	
			12,800	3,6	0,203	0,198	+ 0,005	
8.	40,0	21,310	2,750	0,5	0,028	0,037	— 0,009	Dunkles Ringelchen Zwischenraum zwi- schen dem 1. und 2. Ring schattig
			7,016	1,8	0,102	0,094	+ 0,008	
			11,900	2,7	0,152	0,159	— 0,007	

Nr.	b mm	y	z	d beobachtet Par. "'	ζ beobachtet mm	ζ berechnet mm	D	Bemerkungen
9.	37,1	22,941	1,430	0,3	0,017	0,018	— 0,001	Enges Ringelchen
			7,016	1,5	0,085	0,087	— 0,002	dick, schwarz
			11,320	2,5	0,141	0,141	0,000	schwach
10.	33,2	25,588	0,310	—	—	0,003	—	Schwarz. Mittelfleck
			7,016	1,3	0,073	0,078	— 0,005	dick, schwarz
			10,174	2,0	0,113	0,113	0,000	schwach Zwischenraum zwischen beiden Ringen schattig
11.	29,9	28,370	2,800	0,5	0,028	0,028	0,000	Klein. kräftig. Ring
			4,250	0,7	0,039	0,043	— 0,004	schwach, Zwischenraum zwisch. ihm und dem vorigen schattig
			10,174	1,8	0,102	0,102	0,000	breit, schwarz
12.	27,9	30,376	3,832	0,6	0,034	0,036	— 0,002	Kleiner schwarzer Ring
			10,174	1,7	0,096	0,095	+ 0,001	breit, grau
13.	22,5	37,572	—	—	—	—	—	Schwarzer Mittelpunkt
14.	16,7	50,482	—	—	—	—	—	Schwarzer Mittelpunkt

Tabelle 3.

Linie E; $\lambda = 0^{\text{mm}},0005269$; $a = 2120^{\text{mm}}$; $r = 0^{\text{mm}},28$.

Nr.	b mm	y	z	d beobachtet Par. "'	ζ beobachtet mm	ζ berechnet mm	D	Bemerkungen
1.	125,9	7,867	2,800	1,9	0,107	0,106	+ 0,001	Ringe ziemlich gleichmässig
			7,016	4,5	0,254	0,265	— 0,011	
			10,174	6,8	0,383	0,384	— 0,001	
			13,324	8,9	0,502	0,502	0,000	

Nr.	b mm	y	z	d beobachtet Par. ""	ζ beobachtet mm	ζ berechnet mm	D	Bemerkungen
2.	97,7	10,010	1,700	0,9	0,051	0,050	+ 0,001	Innenraum des 1. Ringes schattig
			6,900	3,5	0,197	0,202	— 0,005	
			10,174	5,2	0,293	0,298	— 0,005	
			13,324	6,9	0,389	0,390	— 0,001	
			16,471	8,5	0,479	0,482	— 0,003	
3.	90,4	10,783	1,200	0,6	0,034	0,032	+ 0,002	Innenraum des 1. Ringes schattig
			6,600	3,1	0,175	0,179	— 0,004	
			10,174	4,9	0,276	0,275	+ 0,001	
			13,324	6,4	0,361	0,361	0,000	
4.	85,1	11,427	0,800	0,4	0,023	0,020	+ 0,003	Kräftiges Ringel- chen, Innenraum schattig
			6,350	2,8	0,158	0,162	— 0,004	
			10,174	4,6	0,259	0,259	0,000	
			13,324	6,0	0,338	0,340	— 0,002	
5.	73,3	13,196	0,450	—	—	0,010	—	Schwarz.Mittelfleck Der 2. Ring nach innenschattig ge- säumt; Wende- punkt
			5,600	2,1	0,118	0,123	— 0,005	
			13,324	5,1	0,288	0,292	— 0,004	
			16,471	6,4	0,361	0,362	— 0,001	
6.	72,4	13,354	0,550	—	—	0,012	—	Schwarz.Mittelfleck Ringe schwach
			5,500	2,1	0,118	0,119	— 0,001	
			10,174	3,9	0,220	0,221	— 0,001	
			13,324	5,1	0,288	0,289	— 0,001	
			16,471	6,3	0,355	0,357	— 0,002	
7.	67,2	14,353	1,350	0,5	0,028	0,027	+ 0,001	Schwarzes Ringel- chen
			5,000	1,8	0,102	0,101	+ 0,001	
			9,850	3,5	0,197	0,198	— 0,001	
			13,324	4,7	0,265	0,268	— 0,003	
8.	62,8	15,338	2,350	0,8	0,079	0,080	— 0,001	Der ganze vom 2. Ring eingeschlos- sene Innenraum schattig. Die fol- genden 2 Ringe schwach
			4,250	1,4	0,045	0,044	+ 0,001	
			9,580	3,1	0,175	0,180	— 0,005	
			13,324	4,4	0,248	0,251	— 0,003	

Nr.	b mm	y	z	d beobachtet Par. "'	ζ beobachtet mm	ζ berechnet mm	D	Bemerkungen
9.	56,8	16,900	3,832	0,7 } 1,15 1,6 }	0,065	0,065	0,000	Breit, sehr dunkel
			9,000	2,7	0,152	0,153	— 0,001	schwach
			13,000	3,8	0,214	0,221	— 0,007	schwach
			16,471	5,0	0,282	0,280	+ 0,002	schwach
10.	49,0	19,520	3,832	1,0	0,056	0,056	0,000	stark, Zwischenraum zwischen dem 1. u. 2. Ring schattig
			7,680	2,0	0,113	0,113	0,000	schwach
			12,400	3,2	0,180	0,182	— 0,002	schwach
11.	44,9	21,263	2,800	0,6	0,034	0,038	— 0,004	Schwach. Ringelch.
			7,016	1,7	0,096	0,094	+ 0,002	Schattig. Zwischen- raum
			12,000	2,9	0,164	0,161	+ 0,003	Folg. Ringe schwach
12.	41,8	22,807	1,500	0,4	0,023	0,019	+ 0,004	Schwach. Ringelch.
			7,016	1,5	0,085	0,089	— 0,004	Breit, schwarz
			11,400	2,5	0,141	0,143	— 0,002	sehr schwach
13.	35,2	27,001	1,400	0,3	0,017	0,015	+ 0,002	Dunkler Mittelfleck
			5,600	1,0	0,056	0,059	— 0,003	stark, folgt schatti- ger Zwischenraum
			10,174	1,9	0,107	0,107	0,000	stark
			13,324	2,5	0,141	0,140	+ 0,001	schwach
14.	25,0	37,837	—	—	—	—	—	Schwarzer Mittel- punkt
15.	18,8	50,170	—	—	—	—	—	Schwarzer Mittel- punkt

Tabelle 4.

Linie F; $\lambda = 0^{\text{mm}},0004861$; $a = 2120^{\text{mm}}$; $r = 0^{\text{mm}},28$.

Nr.	b mm	y	z	d beobachtet Par. "'	ζ beobachtet mm	ζ berechnet mm	D	Bemerkungen
1.	156,2	6,966	3,300	2,5	0,141	0,142	— 0,001	Ringe gleichartig
			7,016	5,3	0,299	0,303	— 0,004	
			10,174	7,9	0,446	0,439	+ 0,007	
			13,324	10,3	0,581	0,575	+ 0,006	

Nr.	b mm	y	z	d beobachtet Par. ''	ζ beobachtet mm	ζ berechnet mm	D	Bemerkungen
2.	105,0	10,130	1,620	0,9	0,051	0,047	+ 0,004	Ringelchen mit et- was schattigem Innenraum
			6,800	3,4	0,192	0,197	- 0,005	
			10,174	5,3	0,299	0,295	+ 0,004	
			13,324	7,0	0,395	0,387	+ 0,008	
3.	90,4	11,689	0,600	—	—	0,015	—	Dunkler Mittelfleck Ringe ziemlich gleichartig
			6,250	2,8	0,158	0,156	+ 0,002	
			10,174	4,5	0,254	0,254	0,000	
			13,324	5,9	0,333	0,333	0,000	
4.	85,1	12,387	0,100	—	—	0,002	—	Dunkler Mittelfleck Ringe schwach
			6,000	2,5	0,141	0,141	0,000	
			10,174	4,2	0,237	0,239	- 0,002	
			13,324	5,5	0,310	0,313	- 0,003	
5.	73,3	14,304	1,300	0,5	0,028	0,026	+ 0,002	Dunkler Fleck mit hellem Mittel- punkt
			5,000	1,8	0,102	0,101	+ 0,001	
			9,900	3,5	0,197	0,201	- 0,004	
			13,324	4,8	0,271	0,270	+ 0,001	
6.	70,0	14,956	1,900	0,7	0,039	0,037	+ 0,002	Innenraum dunkel ziemlich stark schwächer schwach
			4,500	1,6	0,090	0,087	+ 0,003	
			9,700	3,3	0,186	0,188	- 0,002	
			13,324	4,5	0,254	0,258	- 0,004	
7.	67,2	15,559	2,700	0,9	0,051	0,050	+ 0,001	Das 1. Ringelchen umgeben v. einem schattigen Hof, der sich bis d = 1,9 er- streckt. (Wende- punkt)
			9,500	3,1	0,175	0,176	- 0,001	
			13,324	4,4	0,248	0,247	+ 0,001	
8.	57,9	17,981	3,832	1,1	0,062	0,061	+ 0,001	breit, schwarz schwach etwas stärker ebenso
			8,500	2,4	0,135	0,136	- 0,001	
			12,800	3,6	0,203	0,205	- 0,002	
			16,471	4,7	0,265	0,264	+ 0,001	
9.	56,8	18,320	3,832	1,1	0,062	0,060	+ 0,002	breit, schwarz Uebrige Ringe schwach
			8,400	2,3	0,130	0,132	- 0,002	
			12,800	3,6	0,203	0,201	+ 0,002	
			16,471	4,6	0,259	0,258	+ 0,001	

Nr.	b mm	y	z	d beobachtet Par. ''	ζ beobachtet mm	ζ berechnet mm	D	Bemerkungen
10.	50,2	20,666	3,450	0,9	0,051	0,048	+ 0,003	stark, Zwischen- raum schattig
			7,016	1,8	0,102	0,097	+ 0,005	schwächer
			12,150	3,0	0,169	0,169	0,000	schwach
11.	37,1	27,795	2,150	0,4	0,023	0,002	+ 0,001	Innenraum dunkel
			4,850	0,9	0,051	0,050	+ 0,001	schwach
			10,174	1,8	0,102	0,104	- 0,002	stark

98. Die Erscheinungen, welche ein kreisförmiges undurchsichtiges Schirmchen hervorbringt, wurden mit dem nämlichen Apparat ganz in derselben Weise beobachtet. Ein kreisrundes dunkles Schirmchen auf hellem Grunde wurde sehr einfach dadurch erzeugt, dass man auf einer planparallelen Glasplatte ein kleines Tuschtröpfchen eintrocknen liess. Der Durchmesser des zu den Versuchen benutzten Tröpfchens betrug $0^{\text{mm}},64$, demnach sein Radius:

$$r = 0^{\text{mm}},32.$$

Die Glasplatte wurde an die Stelle des beugenden Schirmes mit kleiner Oeffnung gebracht; sie befand sich von dem kleinen Loch, das als homogene Lichtquelle diente, in der Entfernung:

$$a = 1485^{\text{mm}}.$$

99. Im übrigen wurden die Beobachtungen genau in derselben Weise wie im vorigen Fall durchgeführt. Die Erscheinungen sind weit einförmiger als bei der kleinen Oeffnung; in der Mitte befindet sich stets ein heller Punkt, umgeben von einem dunklen Hofe, dem Schatten, in welchem noch dunklere Ringe wahrgenommen werden, die nach aussen hin an Dunkelheit abnehmen, während die Helligkeit ihrer Zwischenräume zunimmt. Ausserhalb des Schattens sieht man auf sehr hellem Grunde schwache dunkle Ringe. Je mehr die auffangende Mikrometerplatte dem beugenden Schirmchen genähert wird, d. h. je kleiner b oder je grösser y wird, desto mehr dunkle Ringe treten in den Schatten ein; die Abstände dieser Ringe erscheinen nahezu gleich und werden mit wachsendem y immer kleiner.

100. Die zu jedem der Werthe von y , welche wie oben berechnet wurden, zugehörigen Werthe von z wurden der Fig. 20, welche den Verlauf der Linien $I_1 = 0$ und $V_0 = 0$ darstellt, entnommen, und die Radien ζ der dunklen Ringe alsdann nach der Formel:

$$\zeta = \frac{\lambda}{2\pi} \cdot \frac{b}{r} \cdot z$$

berechnet.

Da mit abnehmendem b die den Minimis der Intensität entsprechenden Werthe von z den Wurzeln der Gleichung $I_0 = 0$ (79), diese aber den constanten Werthen $z = (m + \frac{3}{4})\pi$ immer näher kommen, so zeigt diese Gleichung, dass mit wachsendem y die Differenz der Radien ζ_1 und ζ zweier aufeinanderfolgenden Ringe dem constanten Werthe:

$$\zeta_1 - \zeta = \frac{\lambda}{2} \cdot \frac{b}{r} \cdot \frac{7}{4}$$

immer näher rückt, und der Entfernung b proportional wird, was, wie oben bereits erwähnt, durch die Beobachtungen bestätigt wird.

Ein Blick auf die folgenden Tabellen 5 bis 9, welche ganz wie die vorhergehenden (1 bis 4) angelegt sind, und daher einer weiteren Erläuterung nicht bedürfen, zeigt, dass auch in diesem Falle die Beobachtungen mit der Theorie in befriedigender Weise übereinstimmen.

Tabelle 5.

Linie C; $\lambda = 0^{\text{mm}},0006562$; $a = 1485^{\text{mm}}$; $r = 0^{\text{mm}},32$.

Nr.	b mm	y	z	d beobachtet Par. "'	ζ beobachtet mm	ζ berechnet mm	D	Bemerkungen
1.	158,2	6,858	2,30	2,2	0,124	0,119	+ 0,005	Zwischenraum sehr dunkel
			5,20	4,7	0,265	0,268	— 0,003	Zwischenr. schattig
			7,80	7,1	0,400	0,403	— 0,003	schwach
			10,17	9,3	0,525	0,525	0,000	
2.	99,0	10,564	2,35	1,3	0,073	0,076	— 0,003	Zwischenraum sehr dunkel
			5,40	3,0	0,169	0,174	— 0,005	} Schatten
			8,30	4,8	0,271	0,268	+ 0,003	
			11,10	6,4	0,361	0,359	+ 0,002	
3.	42,3	23,839	2,40	0,6	0,034	0,033	+ 0,001	Zwischenraum sehr dunkel
			5,50	1,3	0,073	0,076	— 0,003	} Schatten
			8,60	2,1	0,118	0,119	— 0,001	
			11,70	2,8	0,158	0,162	— 0,004	
			14,90	3,7	0,209	0,206	+ 0,003	

Tabelle 6.

Linie D; $\lambda = 0^{\text{mm}},0005889$; $a = 1485^{\text{mm}}$; $r = 0^{\text{mm}},32$.

Nr.	b mm	y	z	d beobachtet Par. "'	ζ beobachtet mm	ζ berechnet mm	D	Bemerkungen
1.	158,3	7,638	2,35	2,0	0,113	0,109	+ 0,004	Zwischenraum sehr dunkel schwach sehr schwach
			5,22	4,2	0,237	0,242	- 0,005	
			7,95	6,5	0,367	0,369	- 0,002	
			10,30	8,5	0,479	0,478	+ 0,001	
2.	118,0	9,995	2,35	1,5	0,085	0,081	+ 0,004	Zwischenraum sehr dunkel Schatten
			5,38	3,3	0,186	0,186	0,000	
			8,25	5,1	0,288	0,285	+ 0,003	
			10,95	6,7	0,378	0,378	0,000	
3.	72,0	15,910	2,36	0,9	0,051	0,050	+ 0,001	Zwischenraum sehr dunkel Schatten
			5,47	2,0	0,113	0,115	- 0,002	
			8,54	3,2	0,180	0,180	0,000	
			11,54	4,3	0,242	0,243	- 0,001	
4.	48,3	23,356	2,39	0,6	0,034	0,034	0,000	Zwischenraum sehr dunkel Schatten
			5,49	1,4	0,079	0,078	+ 0,001	
			8,60	2,2	0,124	0,122	+ 0,002	
			11,70	2,9	0,164	0,166	- 0,002	

Tabelle 7.

Linie E; $\lambda = 0^{\text{mm}},0005269$; $a = 1485^{\text{mm}}$; $r = 0^{\text{mm}},32$.

Nr.	b mm	y	z	d beobachtet Par. "'	ζ beobachtet mm	ζ berechnet mm	D	Bemerkungen
1.	157,6	8,570	2,35	1,7	0,096	0,096	0,000	Zwischenraum sehr dunkel Zwischenraum schattig
			5,30	3,9	0,220	0,219	+ 0,001	
			8,10	5,9	0,333	0,335	- 0,002	
			10,60	7,8	0,440	0,438	+ 0,002	
2.	124,3	10,646	2,36	1,4	0,079	0,077	+ 0,002	Zwischenraum sehr dunkel Zwischenraum schattig
			5,40	3,1	0,175	0,176	- 0,001	
			8,30	4,8	0,271	0,270	+ 0,001	
			11,10	6,4	0,361	0,362	- 0,001	

Nr.	b mm	y	z	d beobachtet Par. ""	ζ beobachtet mm	ζ berechnet mm	D	Bemerkungen
3.	96,0	13,542	2,37	1,1	0,062	0,060	+ 0,002	} Zwischenraum sehr dunkel
			5,45	2,4	0,135	0,137	— 0,002	
			8,47	3,7	0,209	0,213	— 0,004	} Zwischenraum schattig
			11,40	5,0	0,282	0,287	— 0,005	
4.	71,8	17,829	2,39	0,8	0,045	0,045	0,000	} Zwischenraum sehr dunkel
			5,48	1,8	0,102	0,103	— 0,001	
			8,57	2,8	0,158	0,161	— 0,003	} Schatten
			11,60	3,8	0,214	0,218	— 0,004	
5.	50,6	24,955	2,40	0,6	0,034	0,032	+ 0,002	} Zwischenraum sehr dunkel
			5,50	1,2	0,068	0,073	— 0,005	
			8,61	2,0	0,113	0,114	— 0,001	} Schatten
			11,74	2,7	0,152	0,156	— 0,004	

Tabelle 8.

Linie F; $\lambda = 0^{\text{mm}},0004861$; $a = 1485^{\text{mm}}$; $r = 0^{\text{mm}},32$.

Nr.	b mm	y	z	d beobachtet Par. ""	ζ beobachtet mm	ζ berechnet mm	D	Bemerkungen
1.	154,9	9,4365	2,35	1,6	0,090	0,088	+ 0,002	} Zwischenraum sehr dunkel
			5,35	3,5	0,197	0,200	— 0,003	
			8,21	5,5	0,310	0,307	+ 0,003	} Zwischenraum schattig
			10,84	7,2	0,406	0,406	0,000	
2.	77,1	18,060	2,39	0,8	0,045	0,045	0,000	} Zwischenraum sehr dunkel
			5,48	1,8	0,102	0,102	0,000	
			8,57	2,8	0,158	0,160	— 0,002	} Schatten
			11,61	3,8	0,214	0,216	— 0,002	

Tabelle 9.

Linie G; $\lambda = 0^{\text{mm}},0004307$; $a = 1485^{\text{mm}}$; $r = 0^{\text{mm}},32$.

Nr.	b mm	y	z	d beobachtet Par. "'	ζ beobachtet mm	ζ berechnet mm	D	Bemerkungen
1.	150,1	10,958	2,36	1,4	0,079	0,076	+ 0,003	} Zwischenraum sehr dunkel } Zwischenraum schattig
			5,40	3,0	0,169	0,174	— 0,005	
			8,33	4,8	0,271	0,268	— 0,003	
			11,15	6,4	0,361	0,359	+ 0,002	
2.	89,7	17,660	2,39	0,8	0,045	0,046	— 0,001	} Zwischenraum sehr dunkel } Schatten
			5,48	1,9	0,107	0,105	+ 0,002	
			8,56	2,9	0,164	0,164	0,000	
			11,60	4,0	0,226	0,223	+ 0,003	

VII. Abschnitt.

Tabellen.

Tabelle I.

z	$\frac{2}{z} I_1$	M^2	z	$\frac{2}{z} I_1$	M^2
0,0	+ 1,000000	1,000000	1,5	+ 0,743916	0,553411
0,1	0,998750	0,997501	1,6	0,712370	0,507471
0,2	0,995008	0,990041	1,7	0,679723	0,462023
0,3	0,988792	0,977709	1,8	0,646130	0,417484
0,4	0,980133	0,960660	1,9	0,611743	0,374229
0,5	0,969074	0,939104	2,0	0,576725	0,332611
0,6	0,955670	0,913305	2,1	0,541231	0,292931
0,7	0,939988	0,883577	2,2	0,505421	0,255450
0,8	0,922105	0,850277	2,3	0,469455	0,220388
0,9	0,902109	0,813800	2,4	0,433488	0,187911
1,0	0,880101	0,774577	2,5	0,397675	0,158141
1,1	0,856186	0,733054	2,6	0,362169	0,131166
1,2	0,830482	0,689700	2,7	0,327112	0,107002
1,3	0,803113	0,644990	2,8	0,292649	0,085643
1,4	+ 0,774211	0,599402	2,9	+ 0,258915	0,067037

z	$\frac{2}{z} I_1$	M^2	z	$\frac{2}{z} I_1$	M^2
3,0	+ 0,226039	0,051093	7,0	- 0,001338	0,000001
3,1	0,194143	0,037691	7,1	+ 0,007085	0,000050
3,2	0,163339	0,026679	7,2	0,015090	0,000227
3,3	0,133735	0,017885	7,3	0,022622	0,000511
3,4	0,105427	0,011114	7,4	0,029628	0,000877
3,5	0,078502	0,006162	7,5	0,036066	0,001300
3,6	0,053037	0,002812	7,6	0,041898	0,001755
3,7	0,029099	0,000846	7,7	0,047094	0,002217
3,8	+ 0,006748	0,000045	7,8	0,051630	0,002665
3,9	- 0,013971	0,000195	7,9	0,055488	0,003078
4,0	0,033022	0,001090	8,0	0,058659	0,003440
4,1	0,050377	0,002537	8,1	0,061138	0,003737
4,2	0,066022	0,004358	8,2	0,062926	0,003959
4,3	0,079952	0,006392	8,3	0,064033	0,004100
4,4	0,092171	0,008495	8,4	0,064473	0,004156
4,5	0,102694	0,010546	8,5	0,064264	0,004129
4,6	0,111545	0,012442	8,6	0,063431	0,004023
4,7	0,118758	0,014103	8,7	0,062004	0,003844
4,8	0,124375	0,015469	8,8	0,060017	0,003602
4,9	0,128447	0,016498	8,9	0,057506	0,003306
5,0	0,131032	0,017169	9,0	0,054514	0,002971
5,1	0,132195	0,017475	9,1	0,051084	0,002609
5,2	0,132009	0,017426	9,2	0,047263	0,002233
5,3	0,130551	0,017043	9,3	0,043100	0,001857
5,4	0,127906	0,016359	9,4	0,038645	0,001493
5,5	0,124159	0,015415	9,5	0,033950	0,001152
5,6	0,119405	0,014257	9,6	0,029068	0,000844
5,7	0,113736	0,012935	9,7	0,024049	0,000578
5,8	0,107251	0,011502	9,8	0,018947	0,000359
5,9	0,100048	0,010009	9,9	0,013812	0,000190
6,0	0,092228	0,008506	10,0	0,008695	0,000075
6,1	0,083890	0,007037	10,1	+ 0,003643	0,000013
6,2	0,075135	0,005645	10,2	- 0,001297	0,000001
6,3	0,066059	0,004363	10,3	0,006081	0,000037
6,4	0,056762	0,003221	10,4	0,010668	0,000113
6,5	0,047335	0,002240	10,5	0,015019	0,000225
6,6	0,037873	0,001434	10,6	0,019100	0,000364
6,7	0,028460	0,000810	10,7	0,022878	0,000523
6,8	0,019182	0,000368	10,8	0,026327	0,000693
6,9	- 0,010117	0,000102	10,9	- 0,029422	0,000865

z	$\frac{2}{z} I_1$	M^2	z	$\frac{2}{z} I_1$	M^2
11,0	— 0,032143	0,001033	15,0	+ 0,027347	0,000747
11,1	0,034474	0,001188	15,1	0,026664	0,000710
11,2	0,036402	0,001325	15,2	0,025730	0,000662
11,3	0,037921	0,001438	15,3	0,024559	0,000603
11,4	0,039026	0,001523	15,4	0,023169	0,000536
11,5	0,039718	0,001577	15,5	0,021576	0,000465
11,6	0,040000	0,001600	15,6	0,019800	0,000399
11,7	0,039880	0,001590	15,7	0,017862	0,000319
11,8	0,039370	0,001549	15,8	0,015784	0,000249
11,9	0,038485	0,001481	15,9	0,013588	0,000184
12,0	0,037241	0,001386	16,0	0,011300	0,000127
12,1	0,035661	0,001271	16,1	0,008941	0,000079
12,2	0,033768	0,001140	16,2	0,006539	0,000041
12,3	0,031587	0,000997	16,3	0,004115	0,000016
12,4	0,029147	0,000849	16,4	+ 0,001695	0,000003
12,5	0,026477	0,000701	16,5	— 0,000699	0,000000
12,6	0,023610	0,000557	16,6	0,003042	0,000009
12,7	0,020577	0,000423	16,7	0,005313	0,000028
12,8	0,017411	0,000303	16,8	0,007491	0,000056
12,9	0,014147	0,000200	16,9	0,009556	0,000091
13,0	0,010318	0,000117	17,0	0,011490	0,000132
13,1	0,007458	0,000055	17,1	0,013277	0,000176
13,2	0,004101	0,000016	17,2	0,014901	0,000222
13,3	— 0,000778	0,000001	17,3	0,016349	0,000267
13,4	+ 0,002477	0,000006	17,4	0,017611	0,000310
13,5	0,005637	0,000031	17,5	0,018677	0,000348
13,6	0,008671	0,000075	17,6	0,019539	0,000381
13,7	0,011554	0,000133	17,7	0,020193	0,000407
13,8	0,014260	0,000203	17,8	0,020636	0,000425
13,9	0,016766	0,000281	17,9	0,020868	0,000435
14,0	0,019054	0,000363	18,0	0,020888	0,000436
14,1	0,021104	0,000445	18,1	0,020702	0,000428
14,2	0,022903	0,000523	18,2	0,020313	0,000412
14,3	0,024438	0,000597	18,3	0,019729	0,000389
14,4	0,025699	0,000660	18,4	0,018960	0,000359
14,5	0,026680	0,000711	18,5	0,018014	0,000324
14,6	0,027377	0,000749	18,6	0,016906	0,000285
14,7	0,027789	0,000772	18,7	0,015648	0,000244
14,8	0,027918	0,000779	18,8	0,014254	0,000203
14,9	+ 0,027769	0,000771	18,9	— 0,012742	0,000162

z	$\frac{2}{z} I_1$	M^2	z	$\frac{2}{z} I_1$	M^2
19,0	— 0,011127	0,000123	19,5	— 0,002141	0,000004
19,1	0,009426	0,000088	19,6	— 0,000292	0,000000
19,2	0,007659	0,000058	19,7	+ 0,001533	0,000002
19,3	0,005844	0,000034	19,8	0,003315	0,000010
19,4	0,003998	0,000015	19,9	0,005037	0,000025
			20,0	+ 0,006683	0,000045

Tabelle Ia.

z	$\frac{2}{z} I_1$	M^2	Vielfache von λ	
0	+ 1	1	0	Max.
3,831706	0	0	1,219670	Min.
5,135630	— 0,132279	0,017498	1,634722	Max.
7,015587	0	0	2,233130	Min.
8,417236	+ 0,064482	0,004158	2,679300	Max.
10,173467	0	0	3,238315	Min.
11,619857	— 0,040008	0,001601	3,698715	Max.
13,323690	0	0	4,241062	Min.
14,795938	+ 0,027919	0,000779	4,709693	Max.
16,470631	0	0	5,242765	Min.
17,959820	— 0,020905	0,000437	5,716788	Max.
19,615861	0	0	6,243923	Min.

Tabelle II.

z	I_0	I_1	I_2	I_3	I_4	I_5	I_6
0	1	0	0	0	0	0	0
1	+ 0,765198	+ 0,440051	+ 0,114903	+ 0,019563	+ 0,002477	+ 0,000250	+ 0,000021
2	+ 0,223891	0,576725	0,352834	0,128943	0,033996	0,007040	0,001202
3	— 0,260052	+ 0,339059	0,486091	0,309063	0,132034	0,043028	0,011394
4	0,397150	— 0,066043	0,364128	0,430172	0,281129	0,132087	0,049088
5	— 0,177597	0,327579	+ 0,046565	0,364831	0,391232	0,261140	0,131049
6	+ 0,150645	0,276684	— 0,242873	+ 0,114768	0,357642	0,362087	0,245837
7	0,300079	— 0,004683	0,301417	— 0,167556	+ 0,157798	0,347896	0,339197
8	+ 0,171651	+ 0,234636	— 0,112992	0,291132	— 0,105357	+ 0,185775	0,337576
9	— 0,090334	0,245312	+ 0,144843	— 0,180935	0,265471	— 0,055039	+ 0,204317
10	0,245936	+ 0,043473	0,254631	+ 0,058379	0,219606	0,234064	— 0,014458
11	— 0,171190	— 0,176785	+ 0,139047	0,227348	— 0,015039	0,238284	0,201584
12	+ 0,047689	— 0,223447	— 0,084930	+ 0,195137	+ 0,182499	— 0,073471	— 0,243725

z	I_7	I_8	I_9	I_{10}	I_{11}	I_{12}	I_{13}
0	0	0	0	0	0	0	0
1	+0,000001	+0	+0	+0	+0	+0	+0
2	0,000175	0,000022	0,000003	0	0	0	0
3	0,002547	0,000493	0,000084	0,000013	0,000002	0	0
4	0,015176	0,004029	0,000939	0,000195	0,000037	0,000006	0,000001
5	0,053376	0,018405	0,005520	0,001468	0,000351	0,000076	0,000015
6	0,129587	0,056532	0,021165	0,006964	0,002048	0,000545	0,000133
7	0,233584	0,127971	0,058921	0,023539	0,008335	0,002656	0,000770
8	0,320589	0,223455	0,126321	0,060767	0,025596	0,009623	0,003275
9	0,327461	0,305067	0,214881	0,124694	0,062217	0,027393	0,010830
10	0,216714	0,317858	0,291858	0,207486	0,123117	0,063370	0,028972
11	+0,018374	0,224969	0,308854	0,280428	0,201014	0,121600	0,064295
12	-0,170254	+0,045095	+0,230381	+0,300476	+0,270412	+0,195280	+0,120148

z	I_{14}	I_{15}	I_{16}	I_{17}	I_{18}	I_{19}	I_{20}
0	0	0	0	0	0	0	0
1	+0	+0	+0	+0	+0	+0	+0
2	0	0	0	0	0	0	0
3	0	0	0	0	0	0	0
4	0	0	0	0	0	0	0
5	0,000003	0	0	0	0	0	0
6	0,000030	+0,000001	0	0	0	0	0
7	0,000205	0,000497	0,000011	0,000002	0	0	0
8	0,001019	0,000293	0,000078	0,000019	0,000003	0	0
9	0,003895	0,001286	0,000393	0,000112	0,000030	0,000007	0,000001
10	0,011957	0,004508	0,001567	0,000506	0,000152	0,000043	0,000011
11	0,030369	0,013009	0,005110	0,001856	0,000628	0,000199	0,000059
12	+0,065040	+0,031612	+0,013991	+0,005698	+0,002152	+0,000759	+0,000251

Tabelle III.

$$y = \pi$$

z	$\frac{2}{y} U_1$	$\frac{2}{y} U_2$	M ²	
0	+ 0,636620	+ 0,636620	0,810570	Max.
1	0,539802	0,580702	0,628601	
2	0,298890	0,433460	0,277223	
3	+ 0,032376	0,247396	0,062253	
4	— 0,142282	+ 0,081868	0,026946	
5	0,173625	— 0,022258	0,030641	
6	— 0,094496	0,056474	0,012119	
7	+ 0,011819	0,041090	0,001828	
8	0,070711	— 0,008787	0,005077	
9	0,059110	+ 0,013939	0,003688	
10	+ 0,007050	0,017334	0,000350	
11	— 0,035803	+ 0,007209	0,001334	
12	— 0,039518	— 0,004308	0,001580	
3,831706	— 0,122609	+ 0,106159	0,026305	Min.
4,715350	— 0,178789	0	0,031966	Max.
7,015587	+ 0,013239	— 0,040631	0,001826	Min.
8,306007	+ 0,074093	0	0,005490	Max.
10,173467	— 0,002313	+ 0,016225	0,000269	Min.
11,578479	— 0,043104	0	0,001858	Max.

Tabelle IV.

$$y = 2\pi$$

z	$\frac{2}{y} U_1$	$\frac{2}{y} U_2$	M ²	
0	0	+ 0,636620	0,405285	Max.
1	— 0,047572	0,559947	0,315803	
2	0,156737	0,362318	0,155841	
3	0,250135	+ 0,124194	0,077992	
4	0,259807	— 0,066375	0,071905	
5	0,172632	0,155073	0,053850	
6	— 0,036806	0,141277	0,021314	
7	+ 0,073194	— 0,068236	0,010014	
8	0,106459	+ 0,007067	0,011383	
9	+ 0,065126	0,044723	0,006242	
10	— 0,004680	0,040713	0,001679	
11	0,049843	+ 0,012196	0,002633	
12	— 0,046338	— 0,013333	0,002325	
3,597652	— 0,268351	0	0,072012	Min.
3,831706	— 0,265452	— 0,040589	0,072112	Max.
7,015587	+ 0,074369	— 0,065942	0,009879	Min.
7,887900	+ 0,106994	0	0,011448	Max.
10,173467	— 0,015469	+ 0,036681	0,001585	Min.
11,413520	— 0,054221	0	0,002940	Max.

Tabelle V.

$y = 3\pi.$

z	$\frac{2}{y} U_1$	$\frac{2}{y} U_2$	M^2
0	- 0,212207	+ 0,212207	0,090063 Max.
1	0,221811	+ 0,150843	0,071954
2	0,233157	- 0,000541	0,054362
3	0,209291	0,162866	0,070328
4	0,127691	0,255583	0,081628
5	- 0,005131	0,240383	0,057810
6	+ 0,107300	0,137968	0,030548
7	0,156654	- 0,010139	0,024643
8	0,124279	+ 0,079105	0,021703
9	+ 0,038751	0,098281	0,011161
10	- 0,043777	0,057435	0,005215
11	0,077056	+ 0,001894	0,005941
12	- 0,052826	- 0,035554	0,004055
1,996855	- 0,233157	0	0,054362 Min.
3,831706	- 0,145285	- 0,247233	0,082232 Max.
7,015587	+ 0,156761	- 0,008310	0,024581 Min.
7,087780	+ 0,156984	0	0,024644 Max.
10,173467	- 0,053528	+ 0,047575	0,005129 Min.
11,036130	- 0,077136	0	0,005950 Max.

Tabelle VI.

$y = 4\pi.$

z	$\frac{2}{y} U_1$	$\frac{2}{y} U_2$	M^2
0	0	0	0 Min.
1	+ 0,000759	- 0,037360	0,001396
2	0,010698	0,122929	0,015226
3	0,043564	0,194789	0,039840
4	0,100101	0,196607	0,048674
5	0,157469	- 0,114657	0,037882
6	0,179329	+ 0,013349	0,032337
7	0,141278	0,122492	0,034964
8	+ 0,052246	0,161179	0,028708
9	- 0,046242	0,119653	0,016455
10	0,104762	+ 0,033666	0,012103
11	0,097782	- 0,043575	0,011460
12	- 0,039653	- 0,073719	0,007007
3,831706	+ 0,089630	- 0,202474	0,049029 Max.
5,897757	+ 0,179654	0	0,032276 Min.
7,015587	+ 0,140203	+ 0,123721	0,034965 Max.
10,173467	- 0,108364	+ 0,018204	0,012074 Min.
10,386075	- 0,109932	0	0,012085 Max.

Tabelle VII.

$$y = 5\pi.$$

z	$\frac{2}{y} U_1$	$\frac{2}{y} U_2$	M^2	
0	+ 0,127324	+ 0,127324	0,032423	Max.
1	0,123693	0,101421	0,025586	
2	0,116978	0,043946	0,015615	
3	0,114163	0,000633	0,013034	
4	0,114193	0,010009	0,013140	
5	0,103761	0,068242	0,015423	
6	+ 0,066399	0,140571	0,024169	
7	- 0,000892	0,173623	0,030146	
8	0,077848	0,137780	0,025044	
9	0,128770	+ 0,046262	0,018722	
10	0,125074	- 0,053370	0,018492	
11	- 0,066712	0,110066	0,016565	
12	+ 0,014393	- 0,100916	0,010391	
3,030827	+ 0,114161	0	0,013033	Min.
3,625773	+ 0,114593	0	0,013132	Max.
3,831706	+ 0,114492	+ 0,004496	0,013128	Min.
7,015587	- 0,002099	+ 0,173617	0,030147	Max.
9,440724	- 0,134688	0	0,018141	Min.
10,173467	- 0,118330	- 0,067421	0,018548	Max.

Tabelle VIII.

$$y = 6\pi.$$

z	$\frac{2}{y} U_1$	$\frac{2}{y} U_2$	M^2	
0	0	+ 0,212207	0,045032	Max.
1	- 0,005291	0,187222	0,035080	
2	0,017713	0,128841	0,016914	
3	0,030684	0,074204	0,006448	
4	0,041775	0,052871	0,004540	
5	0,055411	0,064625	0,007247	
6	0,076993	0,080250	0,012368	
7	0,103193	0,064885	0,014859	
8	0,118375	+ 0,007126	0,014063	
9	0,103084	- 0,072681	0,015909	
10	- 0,050141	0,129002	0,019156	
11	+ 0,024503	0,128183	0,017031	
12	+ 0,086795	- 0,069153	0,012298	
3,831706	- 0,039917	+ 0,053703	0,004477	Min.
7,015587	- 0,103568	+ 0,064290	0,014860	Max.
8,088643	- 0,118510	0	0,014045	Min.
10,173467	- 0,037943	- 0,133493	0,019260	Max.

Tabelle IX.

$y = 7\pi.$

z	$\frac{2}{y} U_1$	$\frac{2}{y} U_2$	M^2	
0	-0,090946	+0,090946	0,016542	Max.
1	0,092742	0,067502	0,013158	
2	0,095331	+0,011836	0,009228	
3	0,093165	-0,042950	0,010525	
4	0,083669	0,069547	0,011837	
5	0,069496	0,065233	0,009085	
6	0,055115	0,050886	0,005627	
7	0,040586	0,051440	0,004293	
8	-0,019618	0,073600	0,005802	
9	+0,014183	0,098796	0,009962	
10	0,057961	0,097344	0,012835	
11	0,095375	-0,053091	0,011915	
12	+0,104159	+0,020684	0,011277	
2,194827	-0,095439	0	0,009109	Min.
3,831706	-0,085725	-0,067518	0,011908	Max.
7,015587	-0,040330	-0,051637	0,004293	Min.
10,173467	+0,065532	-0,092771	0,012901	Max.
11,733558	+0,105653	0	0,011163	Min.

Tabelle X.

$y = 8\pi.$

z	$\frac{2}{y} U_1$	$\frac{2}{y} U_2$	M^2	
0	0	0	0	Min.
1	+0,000190	-0,018684	0,000349	
2	0,002679	0,061687	0,003812	
3	0,010993	0,099549	0,010031	
4	0,025878	0,107904	0,012313	
5	0,043361	0,084168	0,008964	
6	0,057603	0,046848	0,005513	
7	0,065631	0,018864	0,004663	
8	0,069350	0,008873	0,004888	
9	0,071904	-0,005808	0,005204	
10	0,071829	+0,009152	0,005243	
11	0,061297	0,043412	0,005642	
12	+0,031978	+0,082866	0,007889	
3,831706	+0,023033	-0,108992	0,012410	Max.
7,015587	+0,065712	-0,018576	0,004663	Min.
9,549377	+0,072574	0	0,005267	Max.
10,173467	+0,071032	+0,013827	0,005237	Min.

Tabelle XI.

$y = 9\pi.$

z	$\frac{2}{y} U_1$	$\frac{2}{y} U_2$	M^2
0	+ 0,070736	+ 0,070736	0,010007 Max.
1	0,069624	0,055367	0,007913
2	0,067676	+ 0,020712	0,005009
3	0,067323	— 0,007570	0,004590
4	0,068660	— 0,008787	0,004791
5	0,068172	+ 0,017625	0,004958
6	0,061099	0,053530	0,006590
7	0,045680	0,076446	0,007931
8	0,024884	0,076750	0,006510
9	+ 0,003842	0,062426	0,003912
10	— 0,014690	0,049474	0,002664
11	0,032149	0,046026	0,003152
12	— 0,050776	+ 0,044629	0,004570
2,649454	+ 0,067178	0	0,004513 Min.
3,831706	+ 0,068485	— 0,010782	0,004806 Max.
4,431978	+ 0,068964	0	0,004756 Min.
7,015587	+ 0,045384	+ 0,076624	0,007931 Max.
10,173467	— 0,017711	+ 0,048204	0,002637 Min.

Tabelle XII.

$y = 10\pi.$

z	$\frac{2}{y} U_1$	$\frac{2}{y} U_2$	M^2
0	0	+ 0,127324	0,016211 Max.
1	— 0,001905	0,112361	0,012629
2	0,006385	0,077695	0,006077
3	0,011132	0,046173	0,002256
4	0,015445	0,035955	0,001531
5	0,021256	0,047323	0,002640
6	0,031103	0,063679	0,005022
7	0,044829	0,065343	0,006279
8	0,058328	0,044755	0,005405
9	0,065889	+ 0,011066	0,004464
10	0,064357	— 0,018761	0,004494
11	0,055052	0,034099	0,004193
12	— 0,041669	— 0,037907	0,003173
3,831706	— 0,014693	+ 0,035913	0,001506 Min.
7,015587	— 0,045056	+ 0,065189	0,006280 Max.
9,330828	— 0,066413	0	0,004411 Min.
10,173467	— 0,063204	— 0,022554	0,004503 Max.

Tabelle XIII.

 $U_2 = 0.$

y	z	$\operatorname{arctg} \frac{\partial y}{\partial z}$	y	z	$\operatorname{arctg} \frac{\partial y}{\partial z}$
0	5,135630 8,417236 11,619857	90° 90 90	5π	3,030827 3,625773 9,440724	+ 18° 26' 40 — 15 46 0 — 70 33 16
π	4,715350 8,306007 11,578479	— 75° 32' 25" — 85 34 53 — 88 33 33	6π	8,088643	— 60° 57' 48"
2π	3,597652 7,887900 11,413520	— 66° 10' 39" — 79 7 14 — 85 20 10	20,5	3,644580 5,390556 6,647970	— 28° 41' 30" + 13 2 20 — 23 29 34
3π	1,996855 7,087780 11,036130	— 60° 12' 28" — 72 29 1 — 80 51 18	7π	2,194827 11,733558	— 53° 22' 25" — 67 30 14
4π	0 5,897757 10,386075	+ 54° 44' 8" — 65 48 37 — 75 49 38	8π	0 9,549377	+ 54° 44' 8" — 25 3 40
12	0,391957	— 55° 52' 19"	26,2	6,377985	— 43° 38' 35"
13	0,312198	+ 53 44 17	9π	2,649454 4,431978	+ 36° 46' 13" — 38 29 40
14	1,099179	+ 50 46 23	10π	9,330828	— 48° 29' 19"

Tabelle XIV.

 $z = 0.$

$\frac{1}{4} y$	$M^2 = \left(\frac{\sin \frac{1}{4} y}{\frac{1}{4} y} \right)^2$
0,000000	1,000000
4,493409	0,047190
7,725252	0,016480
10,904120	0,008340
14,066194	0,005029
17,220758	0,003361
20,371302	0,002404
23,519446	0,001805
26,666054	0,001404

Tabelle XV.

 $y = z.$

z	$\frac{2}{z} U_1(z, z)$	$\frac{2}{z} U_2(z, z)$	M^2	z	$\frac{2}{z} U_1(z, z)$	$\frac{2}{z} U_2(z, z)$	M^2
0	+ 1,000000	0,000000	1,000000	6,5	+ 0,033095	- 0,110230	0,013246
0,5	0,958851	+ 0,121775	0,934224	7,0	0,093855	0,064832	0,013011
1,0	0,841471	0,224896	0,758652	7,5	0,125067	- 0,010706	0,015756
1,5	0,664997	0,294060	0,528692	8,0	0,123670	+ 0,039644	0,016866
2,0	0,454649	0,320019	0,309118	8,5	0,093940	0,075759	0,014564
2,5	0,239389	0,301104	0,147970	9,0	+ 0,045791	0,091200	0,010414
3,0	+ 0,047040	0,243314	0,061414	9,5	- 0,007911	0,084552	0,007212
3,5	- 0,100224	0,158951	0,035312	10,0	0,054402	0,059314	0,006478
4,0	0,189201	+ 0,064124	0,039909	10,5	0,083781	+ 0,022751	0,007537
4,5	0,217229	- 0,024388	0,047783	11,0	0,090908	- 0,015965	0,008519
5,0	0,191785	0,092252	0,045292	11,5	0,076126	0,047909	0,008091
5,5	0,128280	0,130093	0,033380	12,0	- 0,044714	- 0,066347	0,006401
6,0	- 0,046569	- 0,134921	0,020374				

Tabelle XVI.

 $y = \pi.$

z	$\frac{2}{y} V_1$	$\frac{2}{y} V_0$	M_1^2	
0	0	+ 0,636620	0,405285	Max.
1	+ 0,088772	0,479808	0,238096	
2	0,213022	+ 0,055002	0,048404	
3	+ 0,055452	- 0,383136	0,149868	
4	- 0,384893	- 0,275023	0,223781	
5	- 0,252583	+ 0,450640	0,266874	
6	+ 0,636026	+ 0,278235	0,481944	
7	+ 0,023425	- 0,676734	0,458517	
8	- 0,531656	+ 0,430319	0,467833	
9	+ 0,544147	- 0,189447	0,331986	
10	- 0,630010	+ 0,148505	0,418966	
11	+ 0,620117	- 0,245499	0,444815	
12	- 0,342522	+ 0,503938	0,371274	
2,109007	+ 0,214967	0	0,046211	Min.
3,831706	- 0,318693	- 0,352676	0,225945	Max.
4,408711	- 0,463583	0	0,214909	Min.
6,238883	+ 0,702334	0	0,493272	Max.
7,015587	- 0,000113	- 0,677116	0,458485	Min.
7,706947	- 0,697260	0	0,486171	Max.
8,892654	+ 0,573357	0	0,328738	Min.
9,925800	- 0,647545	0	0,419315	Max.
10,173467	- 0,457162	+ 0,456870	0,417726	Min.
10,886717	+ 0,669235	0	0,447875	Max.
11,755839	- 0,593370	0	0,352088	Min.

Tabelle XVII.

$y = 2\pi.$

z	$\frac{2}{y} V_1$	$\frac{2}{y} V_0$	M_1^2	
0	0	+ 0,318310	0,101321	Max.
1	+ 0,022268	0,242644	0,059372	
2	0,057118	+ 0,059998	0,006862	
3	+ 0,041158	- 0,115909	0,015129	
4	- 0,044515	0,159699	0,027485	
5	0,118189	- 0,025675	0,014628	
6	- 0,050182	+ 0,164916	0,029716	
7	+ 0,145567	+ 0,162989	0,047755	
8	+ 0,189077	- 0,111169	0,048109	
9	- 0,116652	- 0,269389	0,086178	
10	- 0,311918	+ 0,073683	0,102722	
11	+ 0,114359	+ 0,323899	0,117989	
12	+ 0,331053	- 0,155667	0,133828	
2,301754	+ 0,060124	0	0,003615	Min.
3,831706	- 0,027428	- 0,165261	0,028063	Max.
5,126976	- 0,119505	0	0,014281	Min.
7,015587	+ 0,148378	+ 0,161446	0,048081	Max.
7,653560	+ 0,213224	0	0,045465	Min.
9,847172	- 0,320816	0	0,102923	Max.
10,173467	- 0,279869	+ 0,155411	0,102479	Min.
11,741016	+ 0,369863	0	0,136799	Max.

Tabelle XVIII.

$y = 3\pi.$

z	$\frac{2}{y} V_1$	$\frac{2}{y} V_0$	M_1^2	
0	0	+ 0,212207	0,045032	Max.
1	+ 0,009903	0,162096	0,026373	
2	0,025710	+ 0,044154	0,002611	
3	+ 0,020817	- 0,065351	0,004704	
4	- 0,012549	0,096321	0,009435	
5	0,046240	- 0,034488	0,003328	
6	- 0,036719	+ 0,062157	0,005212	
7	+ 0,025132	0,099339	0,010500	
8	0,081135	+ 0,025841	0,007251	
9	+ 0,046848	- 0,095896	0,011391	
10	- 0,074775	- 0,118568	0,019650	
11	- 0,133189	+ 0,030679	0,018681	
12	+ 0,007645	+ 0,171787	0,029569	
2,354824	+ 0,027450	0	0,000754	Min.
3,831706	- 0,005734	- 0,098152	0,009667	Max.
5,349056	- 0,049549	0	0,002455	Min.
7,015587	+ 0,026281	+ 0,099054	0,010502	Max.
8,208965	+ 0,083474	0	0,006968	Min.
10,173467	- 0,095475	- 0,103520	0,019832	Max.
10,839567	- 0,136036	0	0,018506	Min.

Tabelle XIX.

$$y = 4\pi.$$

z	$\frac{2}{y} V_1$	$\frac{2}{y} V_0$	M_1^2	
0	0	+ 0,159155	0,025330	Max.
1	+ 0,005572	0,121669	0,014834	
2	0,014526	+ 0,034215	0,001382	
3	+ 0,012219	— 0,045730	0,002241	
4	— 0,005486	0,068629	0,004740	
5	0,024001	— 0,027959	0,001358	
6	— 0,021696	+ 0,035306	0,001717	
7	+ 0,006592	0,063628	0,004092	
8	0,036976	+ 0,029335	0,002227	
9	+ 0,033318	— 0,038977	0,002629	
10	— 0,013463	0,072886	0,005494	
11	0,060545	— 0,027361	0,004414	
12	— 0,044025	+ 0,061663	0,005741	
2,375753	+ 0,015598	0	0,000243	Min.
3,831706	— 0,001850	— 0,069715	0,004864	Max.
5,430385	— 0,026493	0	0,000702	Min.
7,015587	+ 0,007144	+ 0,063574	0,004093	Max.
8,438331	+ 0,041258	0	0,001702	Min.
10,173467	— 0,023504	— 0,070909	0,005580	Max.
11,312676	— 0,064406	0	0,004148	Min.

Tabelle XX.

$$y = 5\pi.$$

z	$\frac{2}{y} V_1$	$\frac{2}{y} V_0$	M_1^2	
0	0	+ 0,127324	0,016211	Max.
1	+ 0,003566	0,097369	0,009493	
2	0,009316	+ 0,027780	0,000359	
3	+ 0,007972	— 0,035346	0,001313	
4	— 0,003028	0,052070	0,002720	
5	0,014668	— 0,022719	0,000731	
6	— 0,013915	+ 0,024568	0,000797	
7	+ 0,002302	0,046307	0,002150	
8	0,020595	+ 0,024054	0,001003	
9	+ 0,021117	— 0,021724	0,000918	
10	— 0,002141	0,048087	0,002317	
11	0,029850	— 0,027076	0,001624	
12	— 0,030738	+ 0,025355	0,001588	
2,385914	+ 0,010031	0	0,000101	Min.
3,831706	— 0,000821	— 0,052865	0,002795	Max.
5,466020	— 0,016424	0	0,000270	Min.
7,015587	+ 0,002624	+ 0,046295	0,002150	Max.
8,532469	+ 0,024022	0	0,000577	Min.
10,173467	— 0,007509	— 0,048029	0,002363	Max.
11,536020	— 0,035216	0	0,001240	Min.

Tabelle XXI.

$y = 6\pi.$

z	$\frac{z}{y} V_1$	$\frac{z}{y} V_0$	M_1^2	
0	0	+ 0,106103	0,011258	Max.
1	+ 0,002477	0,081156	0,006592	
2	0,006476	+ 0,023335	0,000586	
3	+ 0,005594	- 0,028890	0,000866	
4	- 0,001917	0,043819	0,001924	
5	0,009906	- 0,018991	0,000459	
6	- 0,009616	+ 0,018958	0,000452	
7	+ 0,000963	0,036479	0,001332	
8	0,013124	+ 0,020549	0,000595	
9	0,014204	- 0,014730	0,000419	
10	+ 0,000298	0,035334	0,001249	
11	- 0,017291	0,022325	0,000797	
12	- 0,020232	+ 0,013475	0,000591	
2,391577	+ 0,006984	0	0,000049	Min.
3,831706	- 0,000371	- 0,044454	0,001976	Max.
5,484149	- 0,011177	0	0,000125	Min.
7,015587	+ 0,001175	+ 0,036476	0,001332	Max.
8,578895	+ 0,015685	0	0,000246	Min.
10,173467	- 0,000003	- 0,035609	0,001277	Max.
11,643398	- 0,021757	0	0,000473	Min.

Tabelle XXII.

$y = 7\pi.$

z	$\frac{z}{y} V_1$	$\frac{z}{y} V_0$	M_1^2	
0	0	+ 0,090946	0,008271	Max.
1	+ 0,001820	0,069570	0,004843	
2	0,004761	+ 0,020097	0,000427	
3	+ 0,004117	- 0,024469	0,000616	
4	- 0,001326	0,037187	0,001385	
5	0,007149	- 0,016277	0,000316	
6	- 0,007029	+ 0,015516	0,000290	
7	+ 0,000479	0,030185	0,000911	
8	0,009122	+ 0,016738	0,000363	
9	0,010150	- 0,011166	0,000228	
10	+ 0,000826	0,027951	0,000782	
11	- 0,011275	- 0,018474	0,000468	
12	- 0,014010	+ 0,008673	0,000272	
2,395025	+ 0,005140	0	0,000026	Min.
3,831706	- 0,000201	- 0,037720	0,001423	Max.
5,494497	- 0,008103	0	0,000066	Min.
7,015587	+ 0,000629	+ 0,030185	0,000912	Max.
8,603451	+ 0,011057	0	0,000122	Min.
10,173467	- 0,001417	+ 0,028271	0,000801	Max.
11,698092	- 0,014723	0	0,000217	Min.

Tabelle XXIII.

$y = 8\pi.$

z	$\frac{2}{y} V_1$	$\frac{2}{y} V_0$	M_1^2	
0	0	+ 0,079578	0,006333	Max.
1	+ 0,001393	0,060878	0,003708	
2	0,003647	+ 0,017639	0,000324	
3	+ 0,003179	- 0,021243	0,000461	
4	- 0,000974	0,032324	0,001046	
5	0,005394	- 0,014231	0,000232	
6	- 0,005359	+ 0,013178	0,000202	
7	+ 0,000228	0,025804	0,000666	
8	0,006731	+ 0,014458	0,000236	
9	0,007608	- 0,009042	0,000140	
10	+ 0,000876	0,023198	0,000539	
11	- 0,007971	- 0,015655	0,000309	
12	- 0,010231	+ 0,006317	0,000145	
2,397305	+ 0,003939	0	0,000016	Min.
3,831706	- 0,000118	- 0,032785	0,001075	Max.
5,500947	- 0,006147	0	0,000038	Min.
7,015587	- 0,000340	+ 0,025806	0,000666	Max.
8,617726	+ 0,008229	0	0,000068	Min.
10,173467	- 0,000753	- 0,023502	0,000553	Max.
11,728163	- 0,010640	0	0,000113	Min.

Tabelle XXIV.

$V_0 = 0.$

y	z	$\text{arctg} \frac{\partial y}{\partial z}$	y	z	$\text{arctg} \frac{\partial y}{\partial z}$
π	2,109007	+ 83° 1' 48"	4π	2,375753	+ 89° 44' 49"
	4,408711	67 57 9		5,430385	89 4 17
	6,238883	54 31 38		8,438331	87 24 47
	7,706947	44 46 28		11,312676	84 13 39
	8,892654	38 33 8	5π	2,385914	89° 51' 57"
	9,925800	35 11 6		5,466020	89 33 17
	10,886717	32 18 0		8,532469	88 49 20
2π	11,755839	29 48 18	6π	11,536020	87 15 32
	2,301754	88° 23' 40"		2,391577	89° 55' 15"
	5,126976	83 19 5		5,484149	89 45 26
	7,653560	74 54 5		8,578895	89 24 18
	9,847172	65 54 12	7π	11,643398	88 38 40
3π	11,741016	57 36 9		2,395025	89° 56' 59"
	2,354824	89° 26' 17"		5,494497	89 51 15
	5,349056	87 43 7	8π	8,603451	89 40 3
	8,208965	83 48 34		11,698092	89 16 50
	10,839567	77 56 28		2,397305	89° 57' 58"
				5,500947	89 54 22
				8,617726	89 47 56
				11,728163	89 35 38

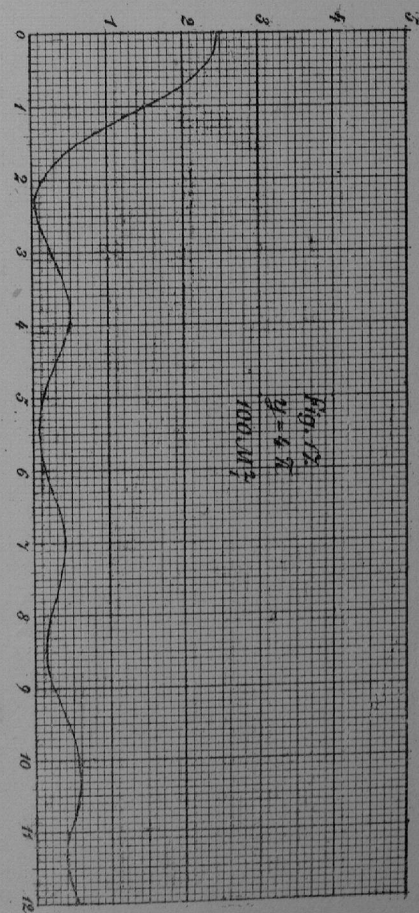
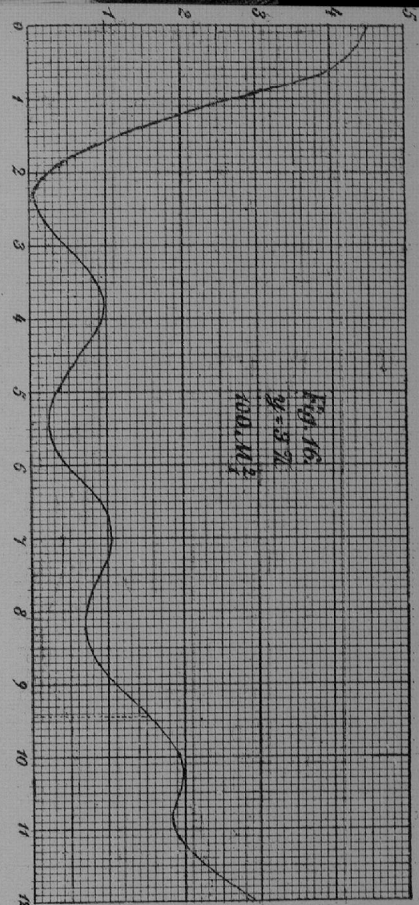
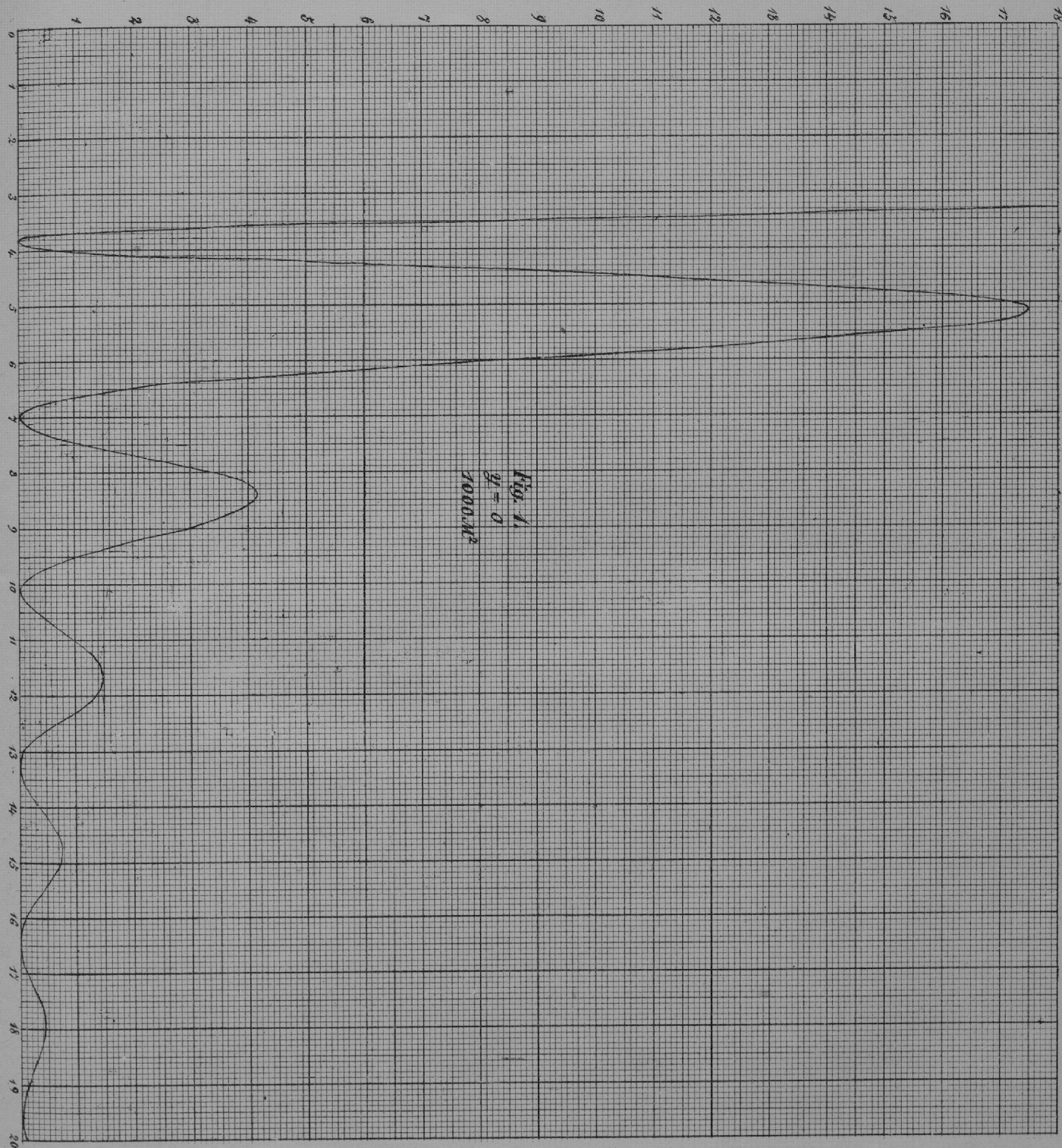
Tabelle XXV.

$y = z.$

z	$\frac{2}{z} V_1(z, z)$	$\frac{2}{z} V_0(z, z)$	M_1^2
0	+ 1,000000	∞	∞
0,5	0,958851	+ 3,632105	14,112583
1,0	0,841471	1,305500	2,412404
1,5	0,664997	+ 0,388377	0,593057
2,0	0,454649	- 0,096128	0,215946
2,5	0,239389	0,339811	0,172778
3,0	+ 0,047040	0,416682	0,175837
3,5	- 0,100224	0,376167	0,151547
4,0	0,189201	0,262698	0,104807
4,5	0,217229	- 0,118075	0,061130
5,0	0,191785	+ 0,021213	0,037231
5,5	0,128280	0,127605	0,032739
6,0	- 0,046569	0,185136	0,036444
6,5	+ 0,033095	0,190259	0,037294
7,0	0,093855	0,150569	0,031480
7,5	0,125067	0,081730	0,022321
8,0	0,123670	+ 0,003269	0,015305
8,5	0,093940	- 0,065891	0,013166
9,0	+ 0,045791	0,111274	0,014479
9,5	- 0,007911	0,125379	0,015783
10,0	0,054402	0,103501	0,014732
10,5	0,083781	0,067827	0,011620
11,0	0,090908	- 0,015161	0,008494
11,5	0,076126	+ 0,036144	0,007102
12,0	- 0,044714	+ 0,074295	0,007519

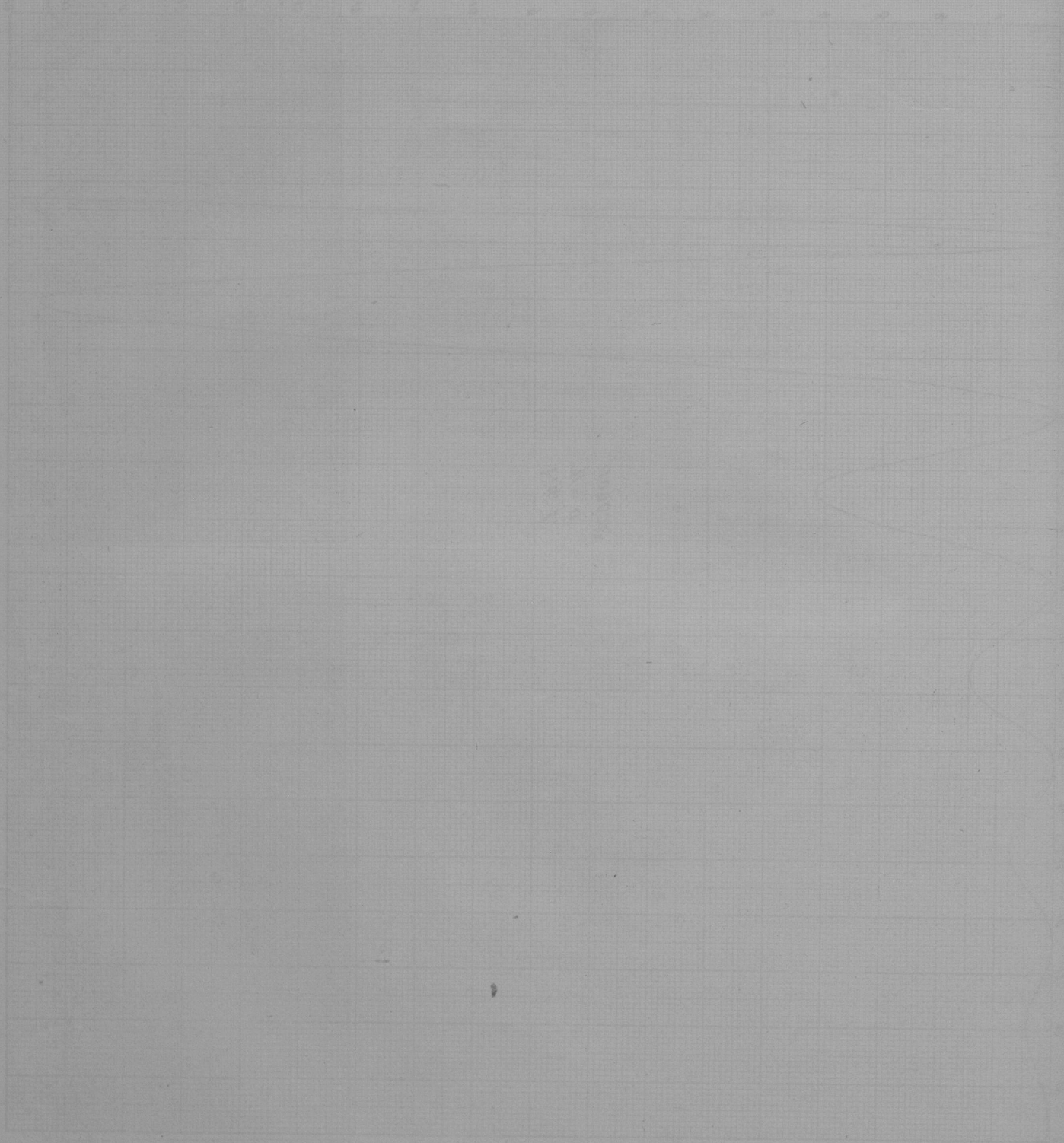
Tafel 1 zu E. Lommel, Die Beugungserscheinungen etc.

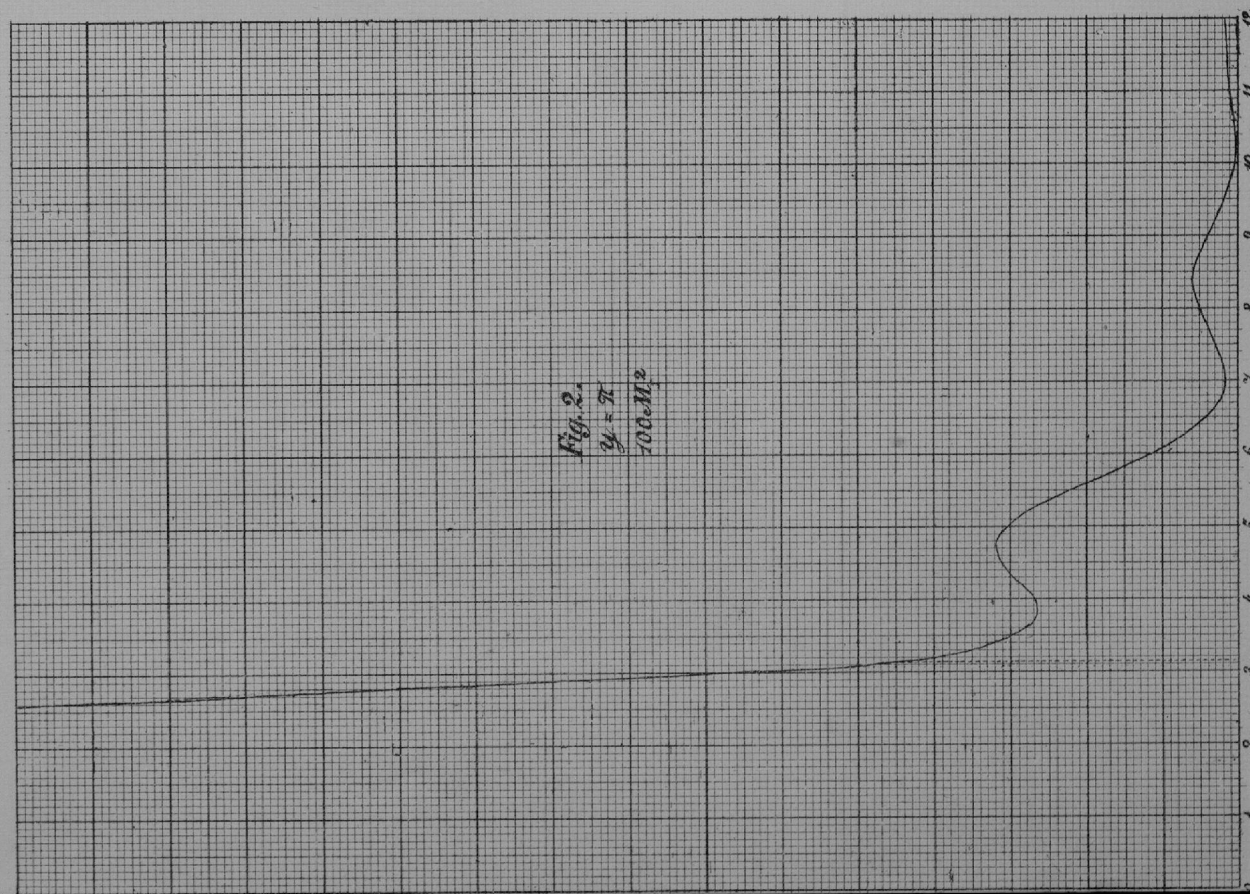
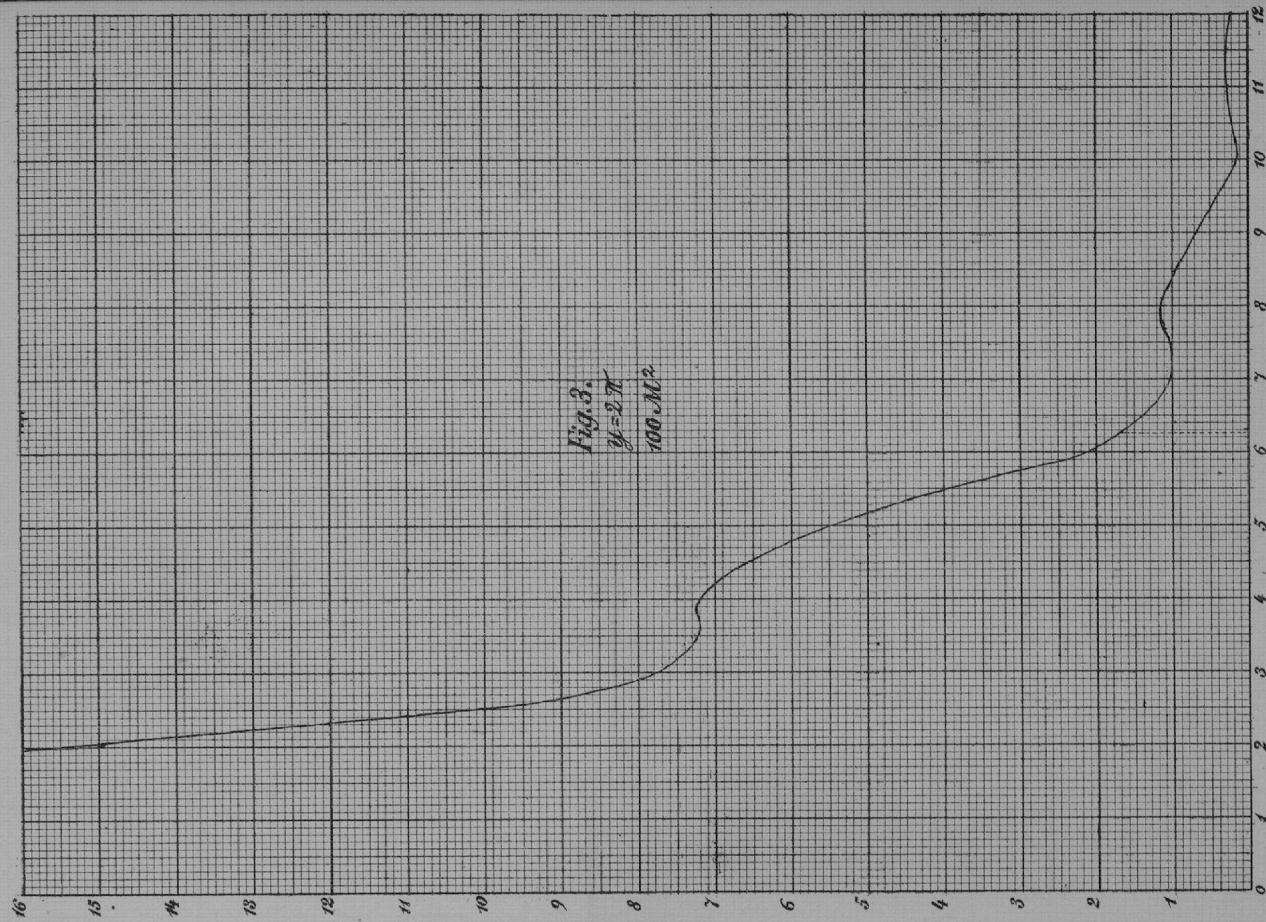
(folgen 8 weitere unbezeichnete Curventafeln).



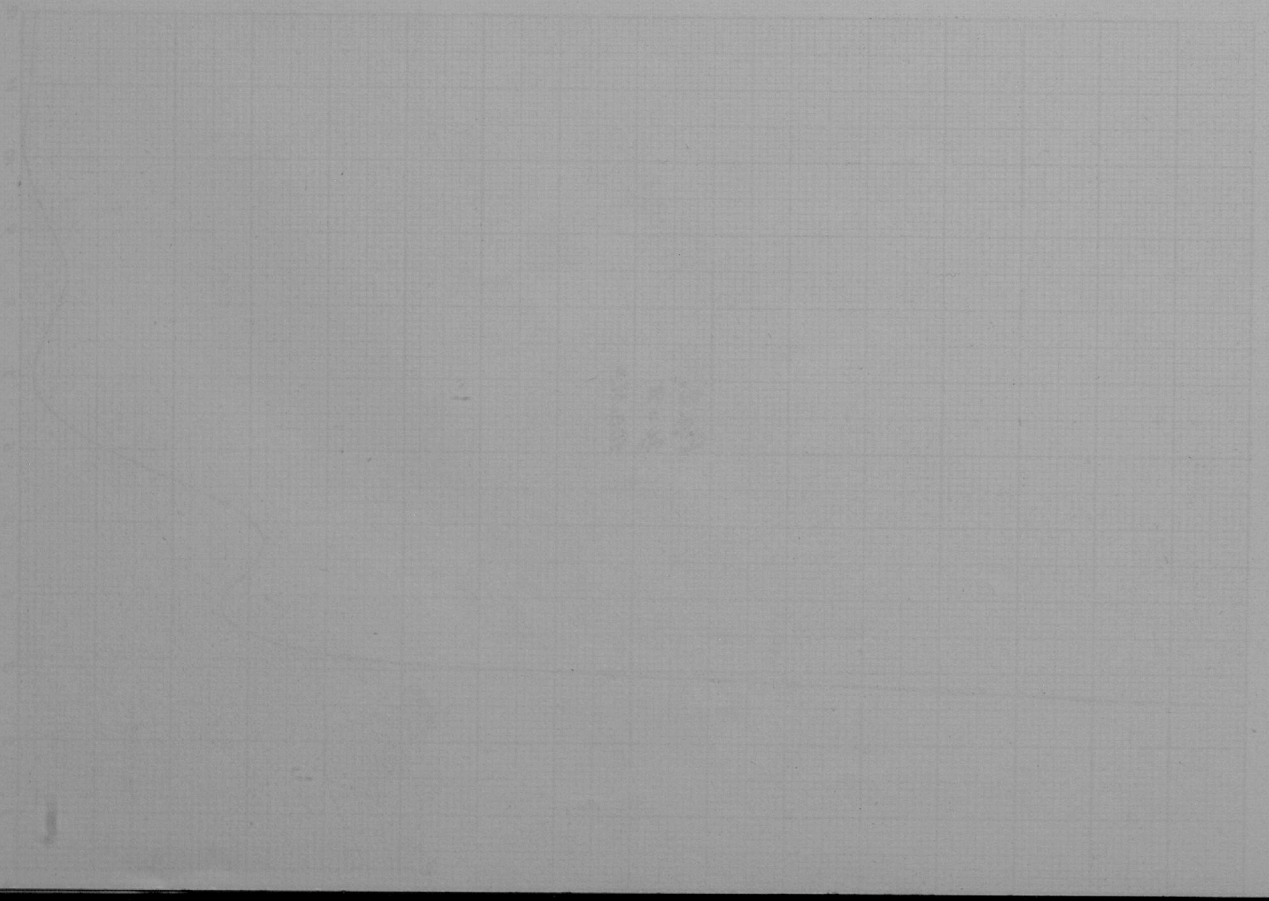
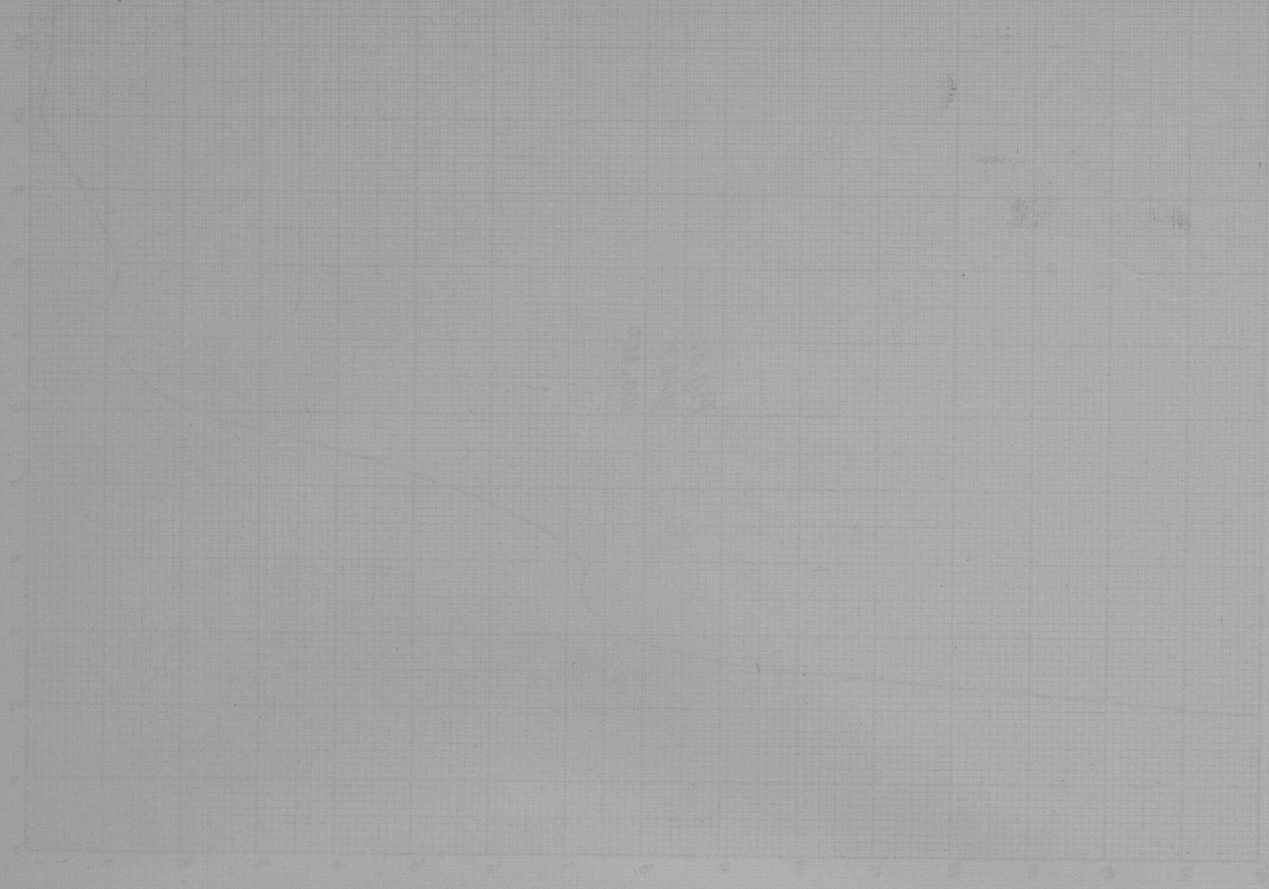
Tafel 1 zu E. Lennel, Die Kordilleren-Gebirge von

Figura 2. Weitere geologische Übersichtskarte.

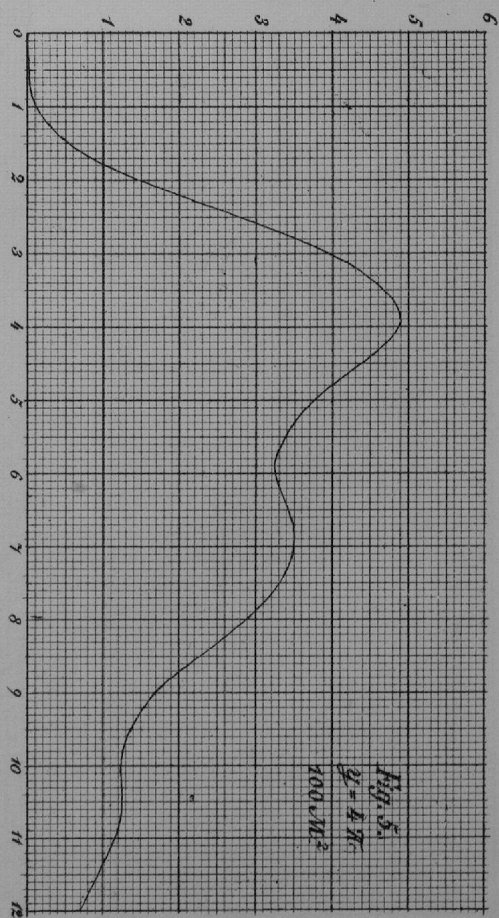
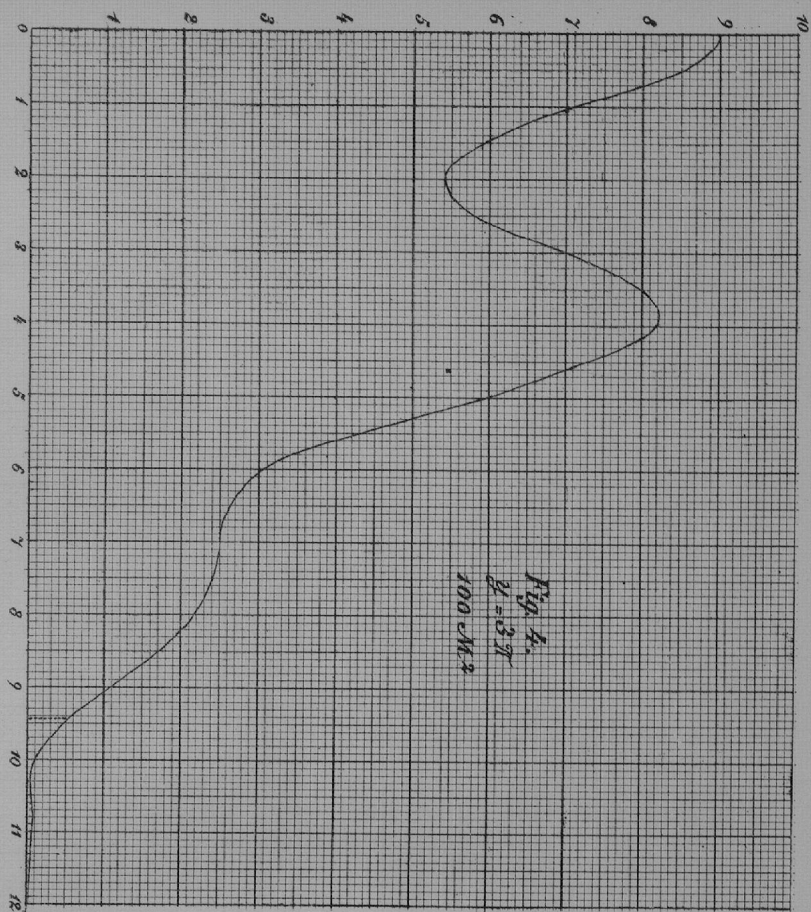
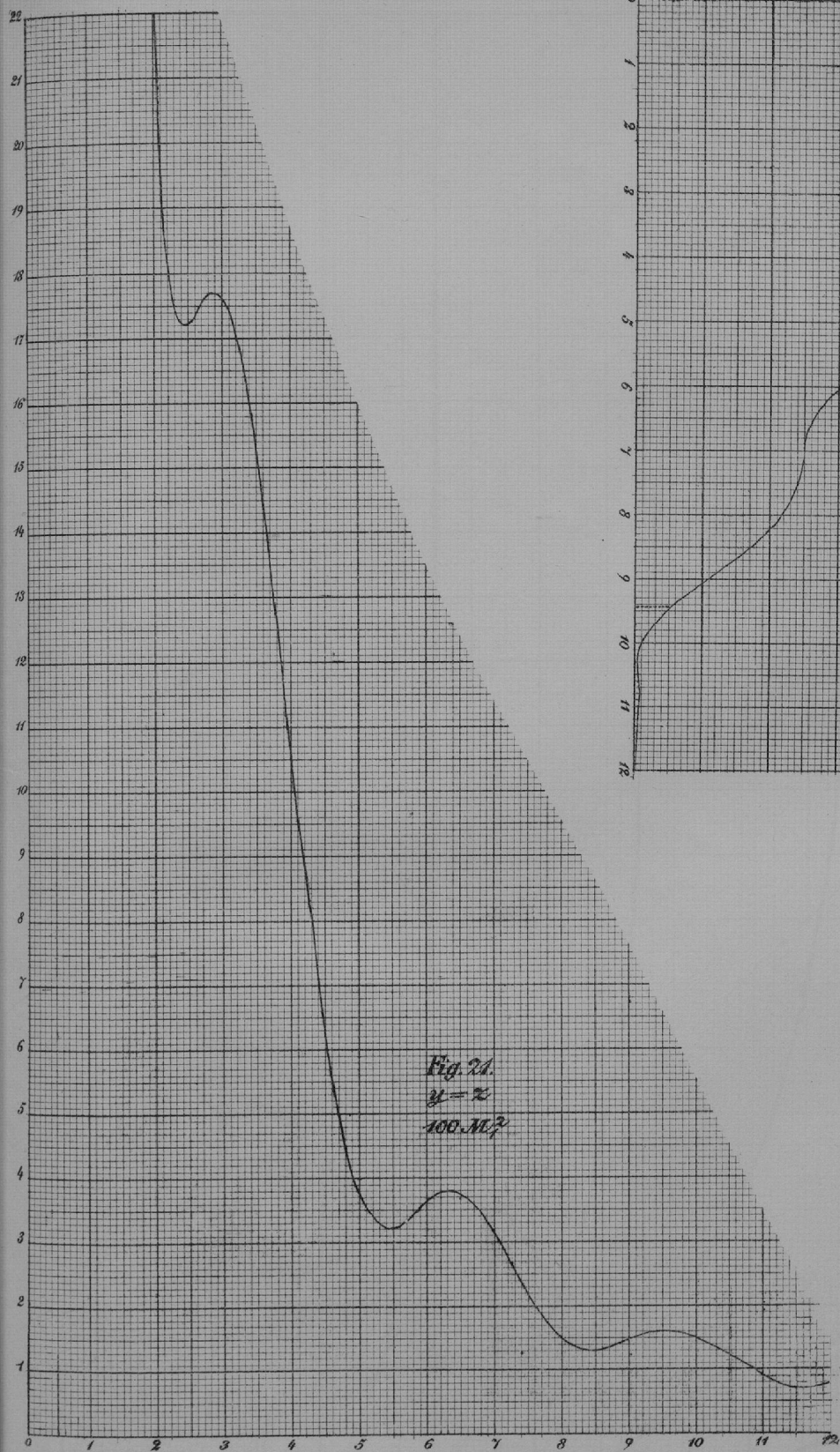




Handwritten notes in the left margin, possibly a list or index, written in cursive script.



Vertical axis labels on the right side of the page, ranging from 0 to 22 in increments of 1.



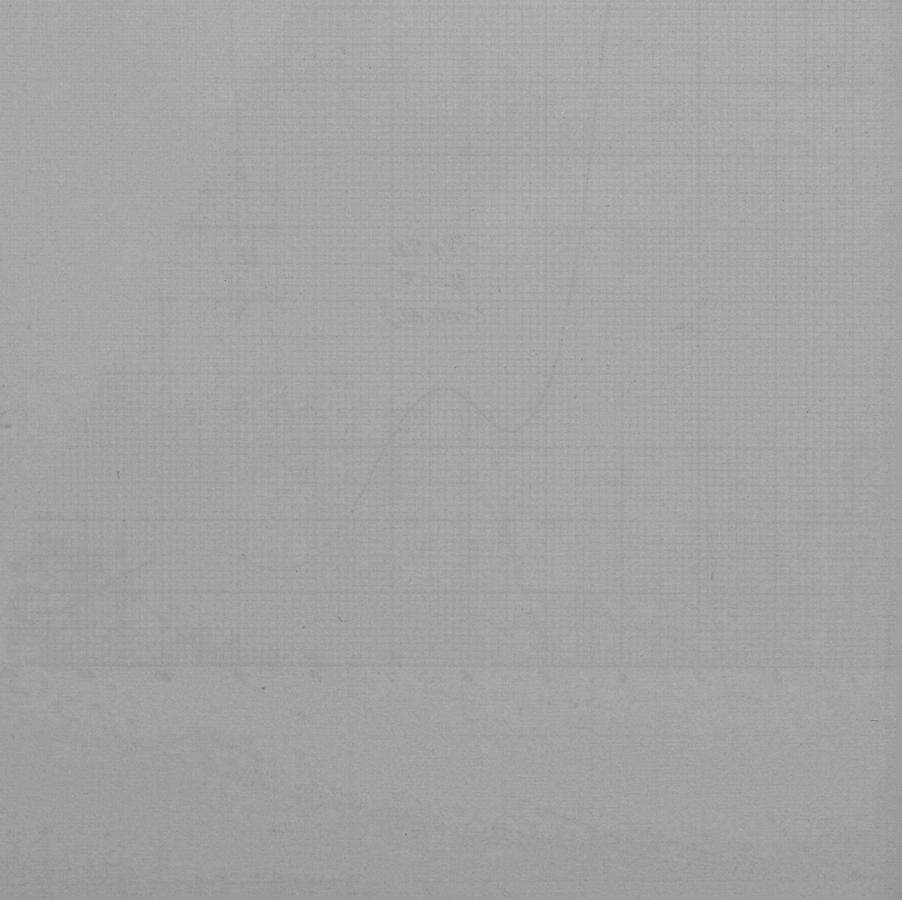
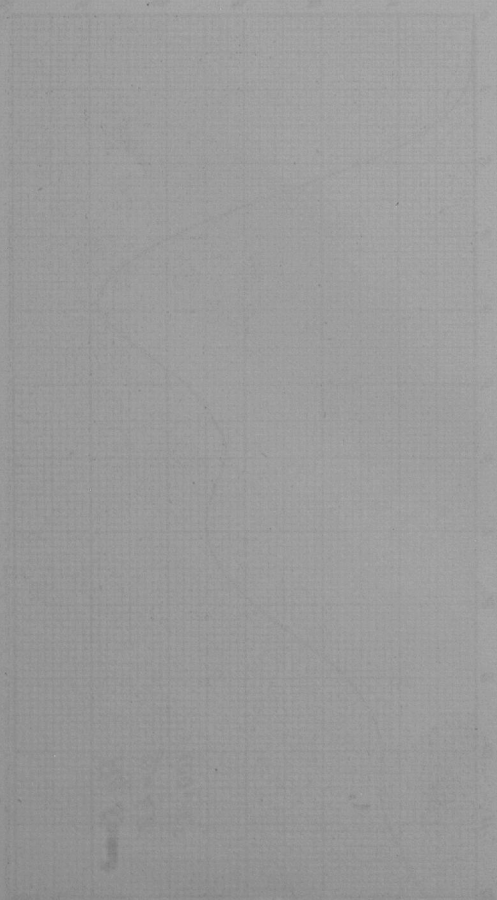
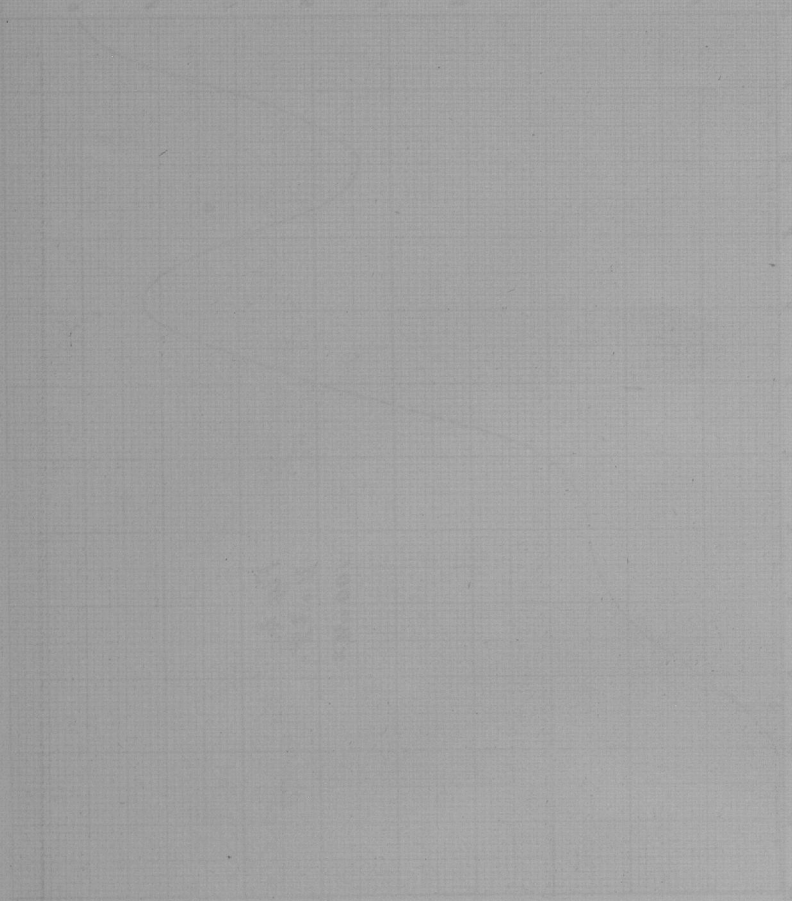
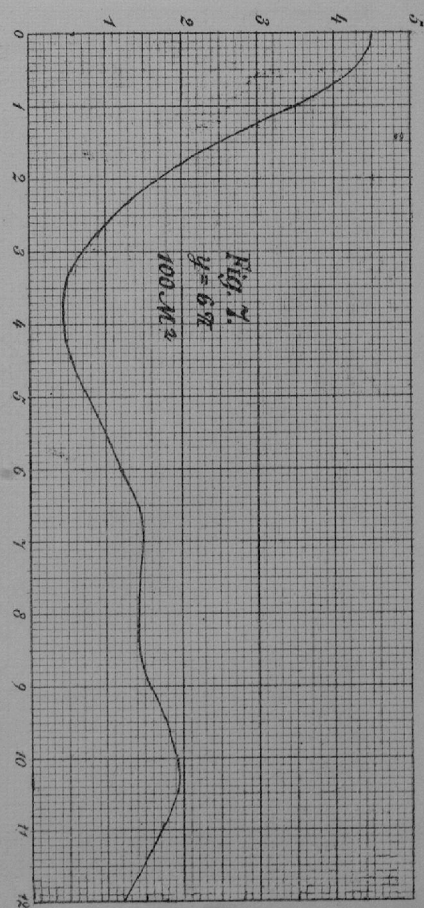
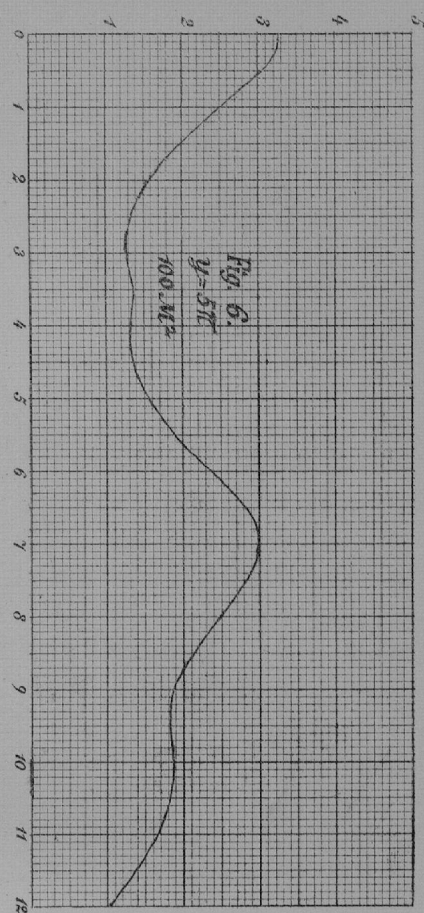
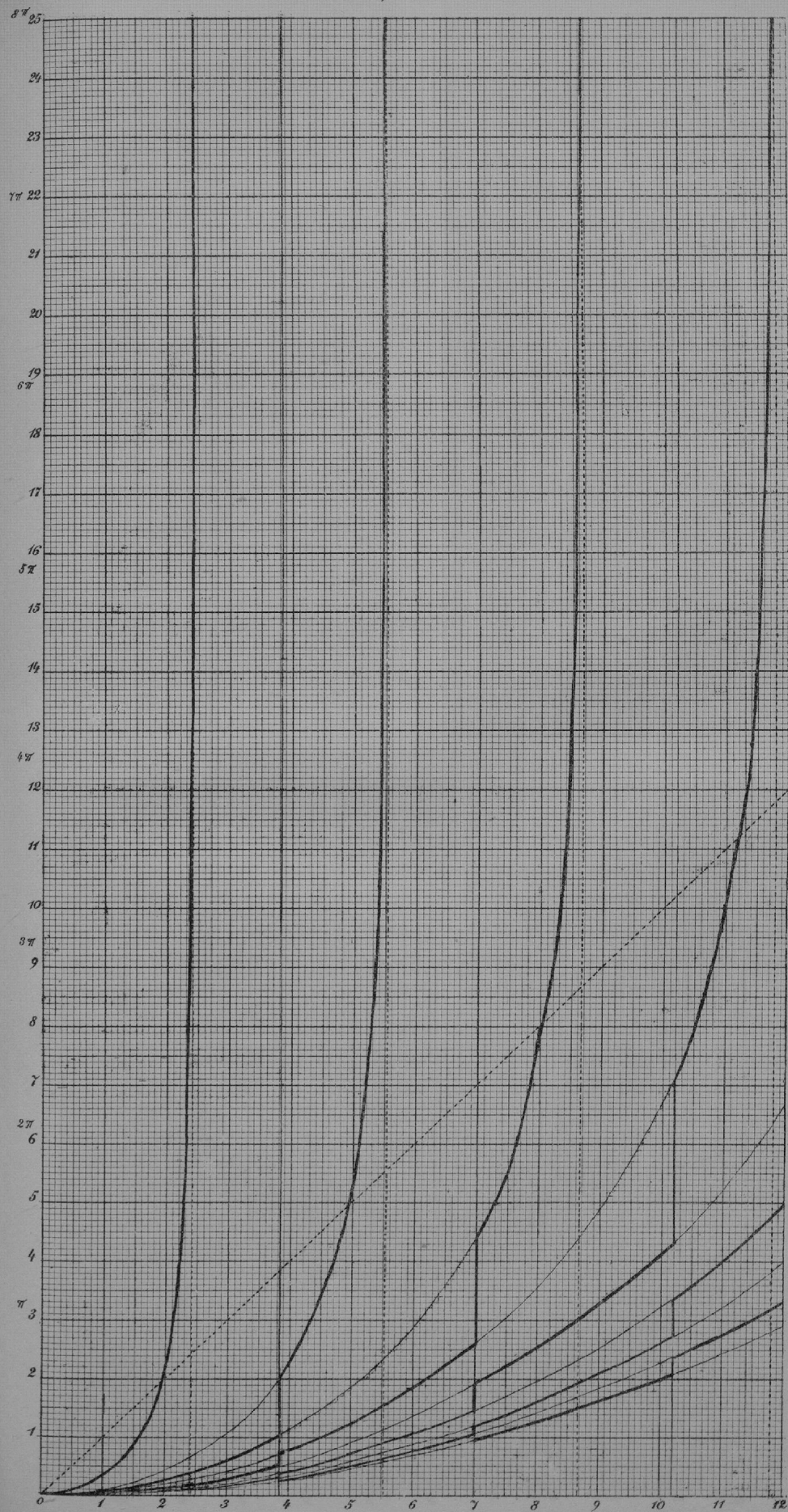
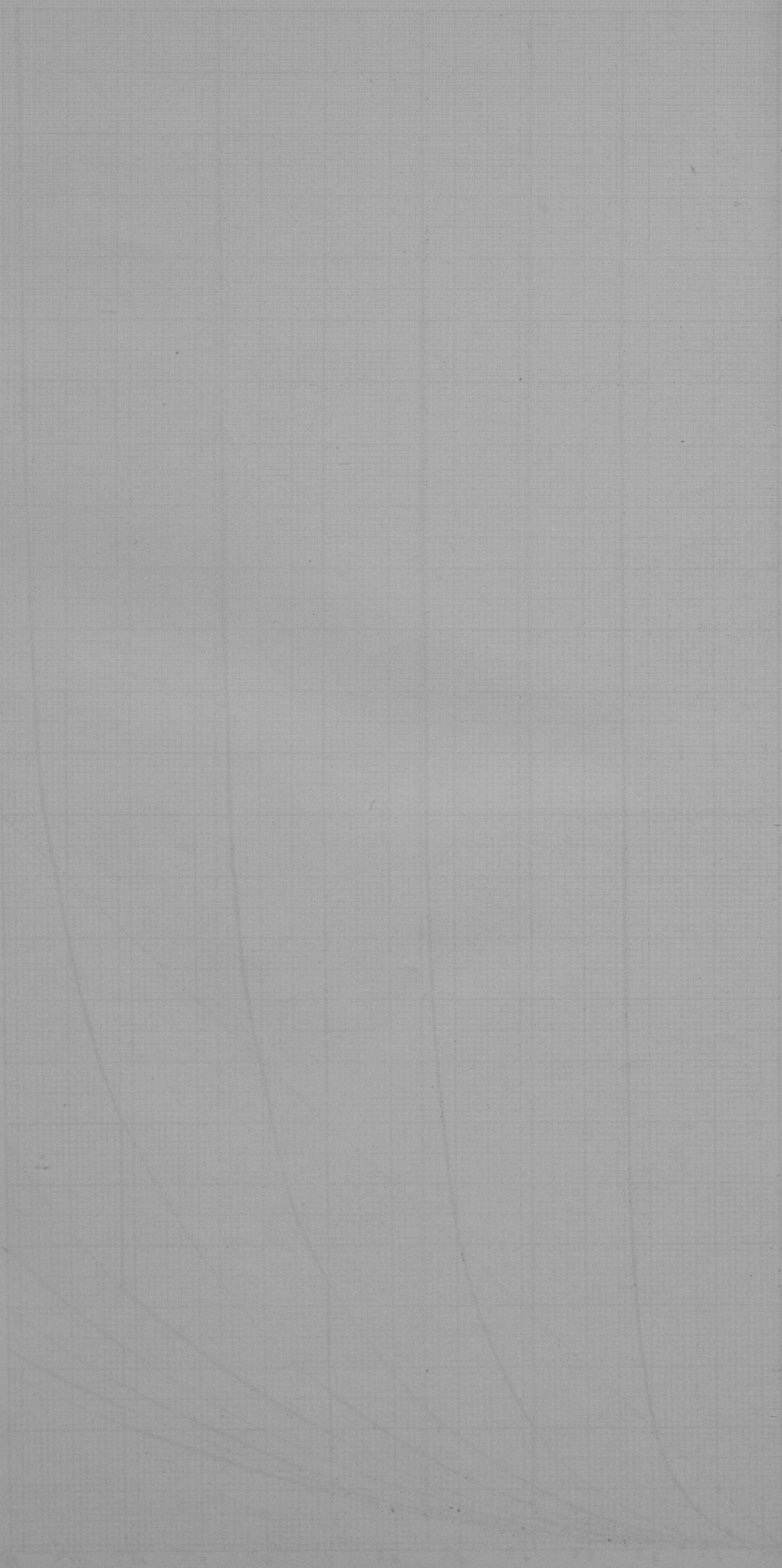
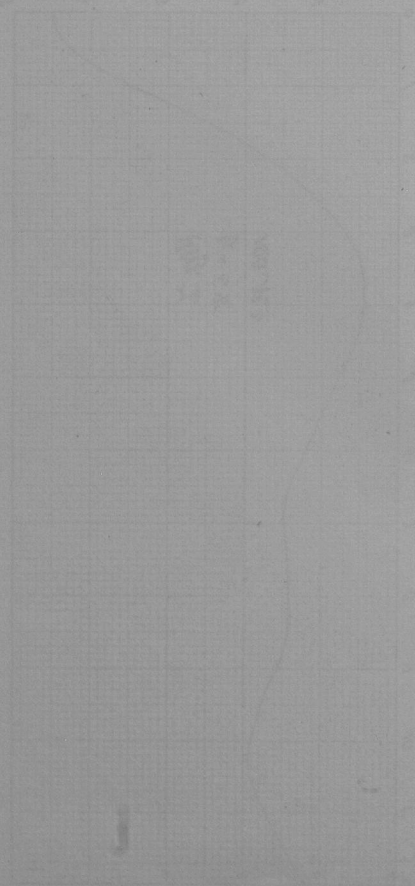
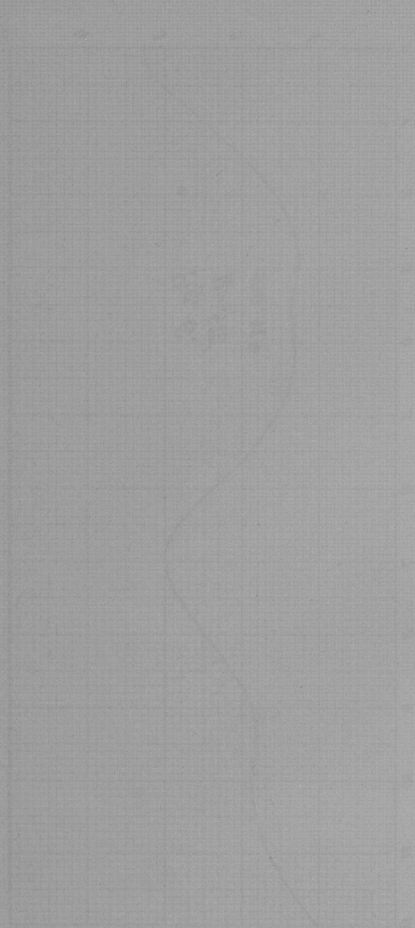
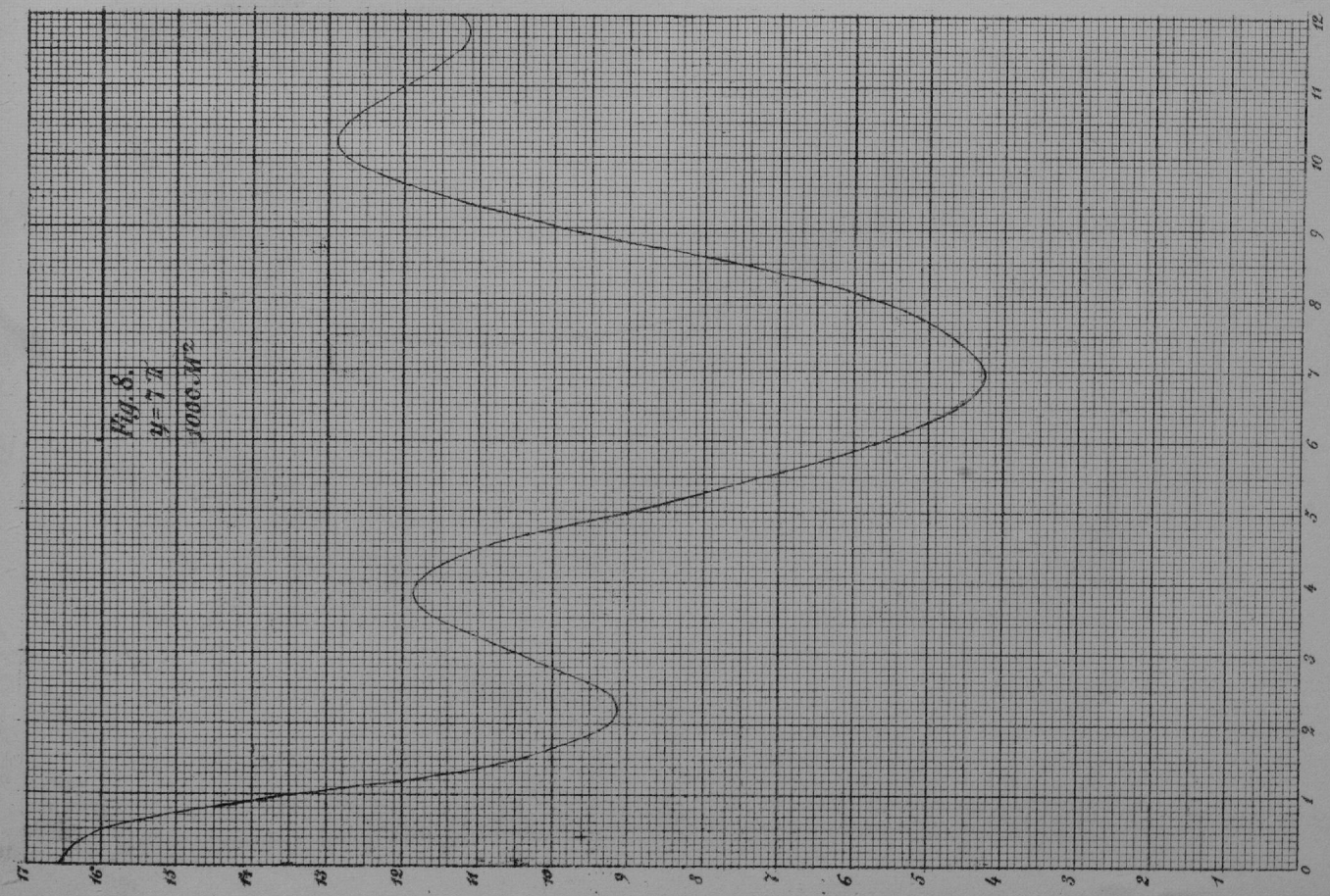
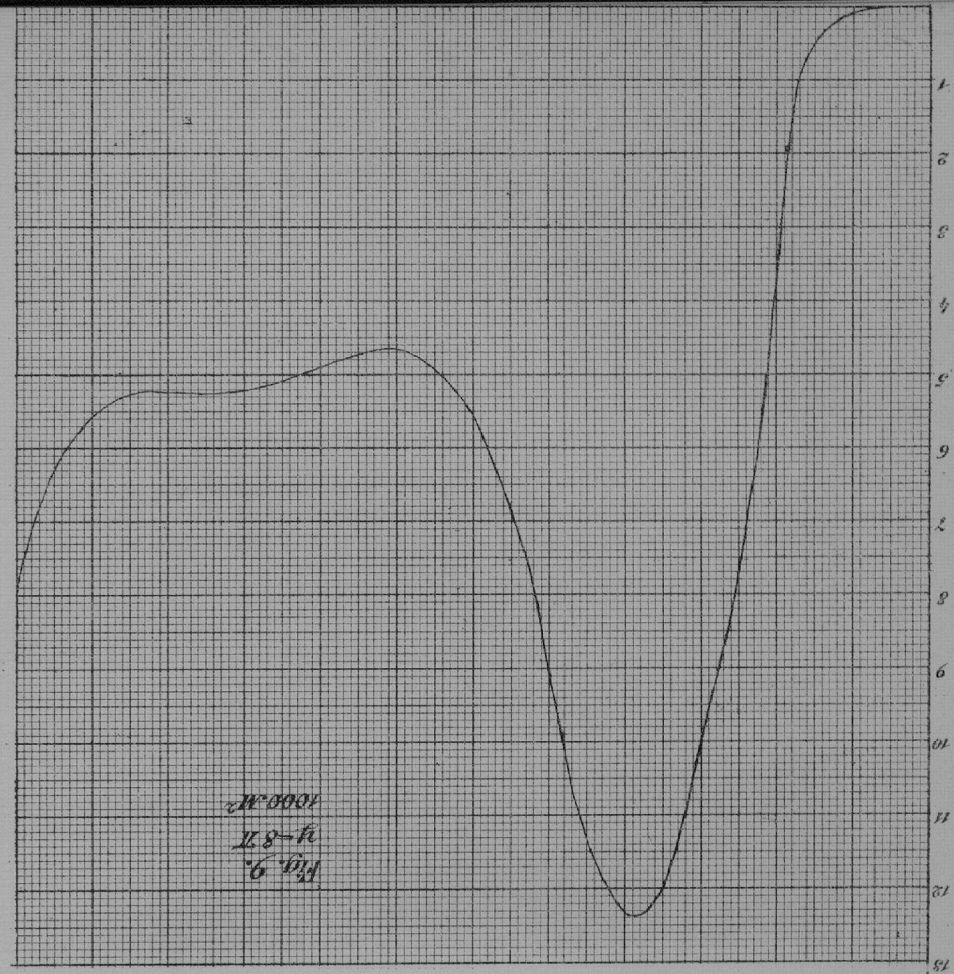
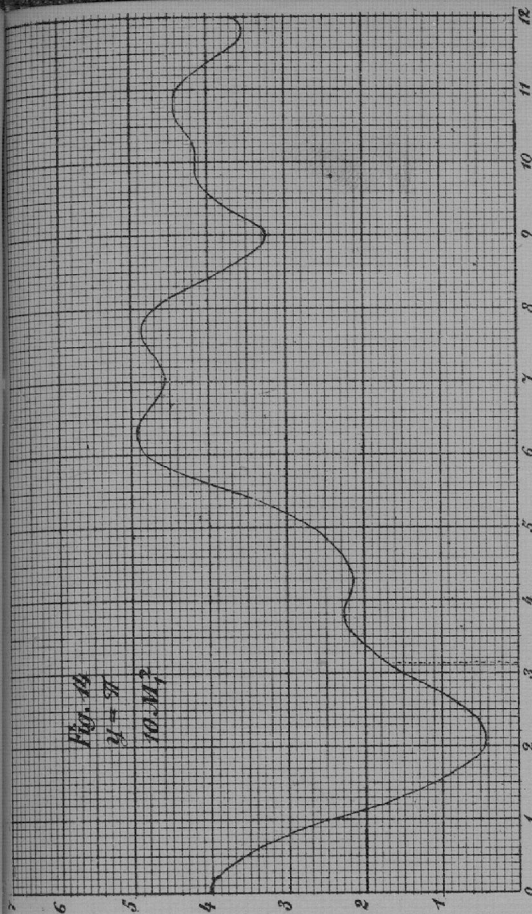
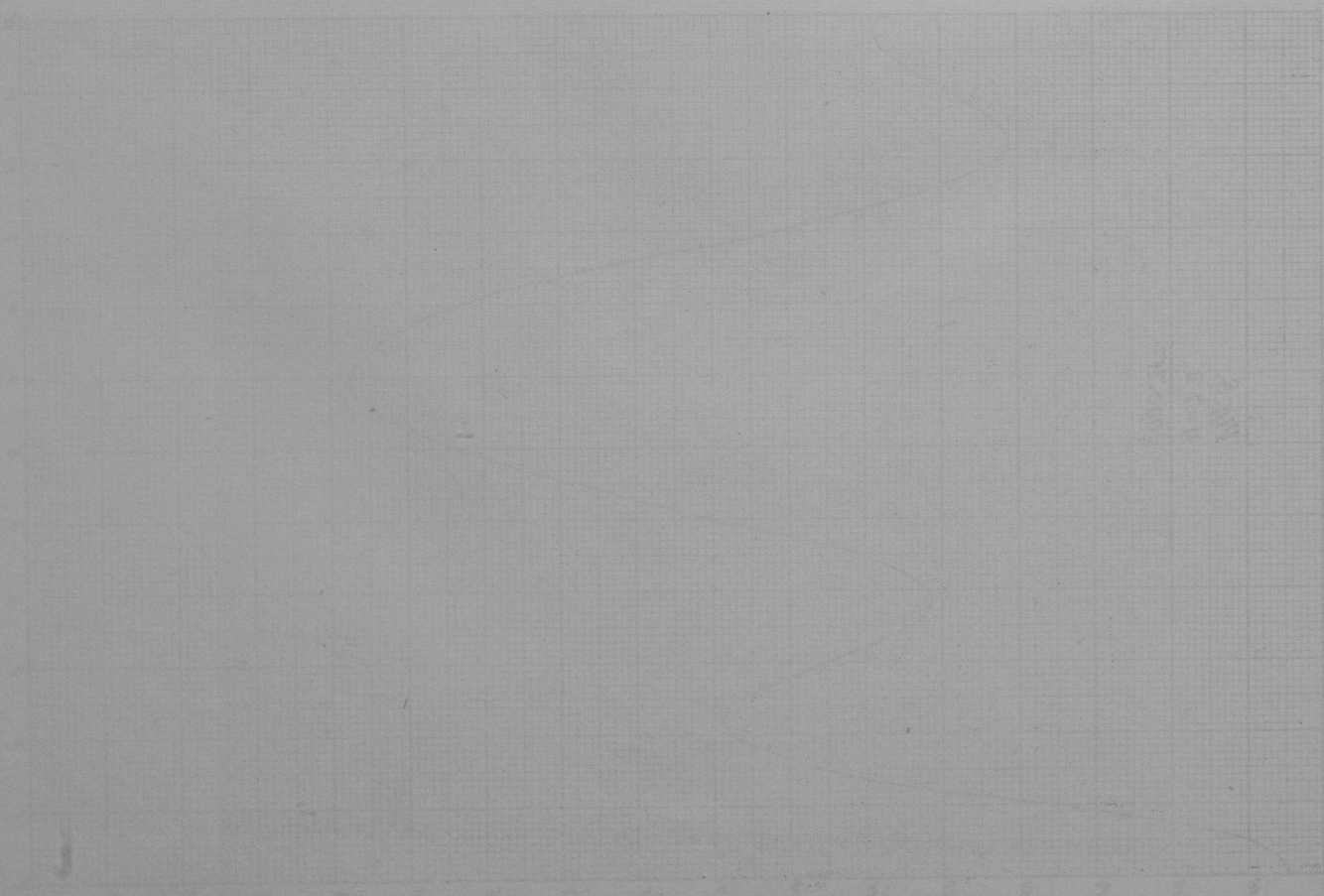
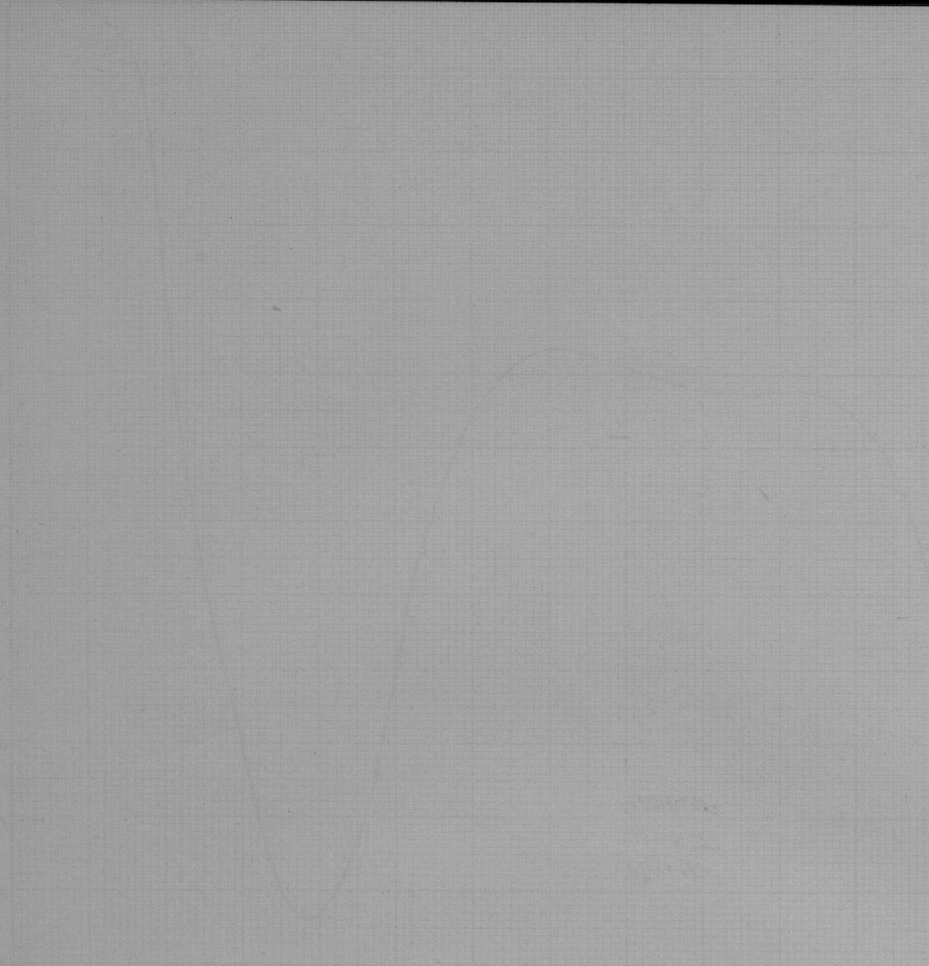


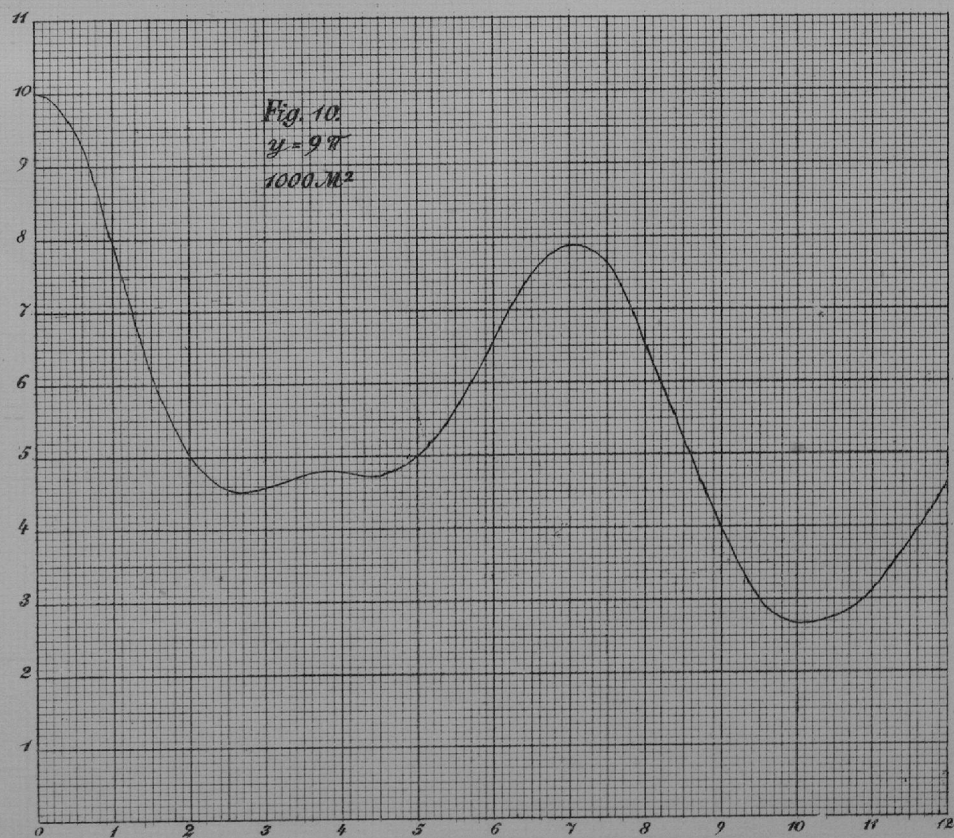
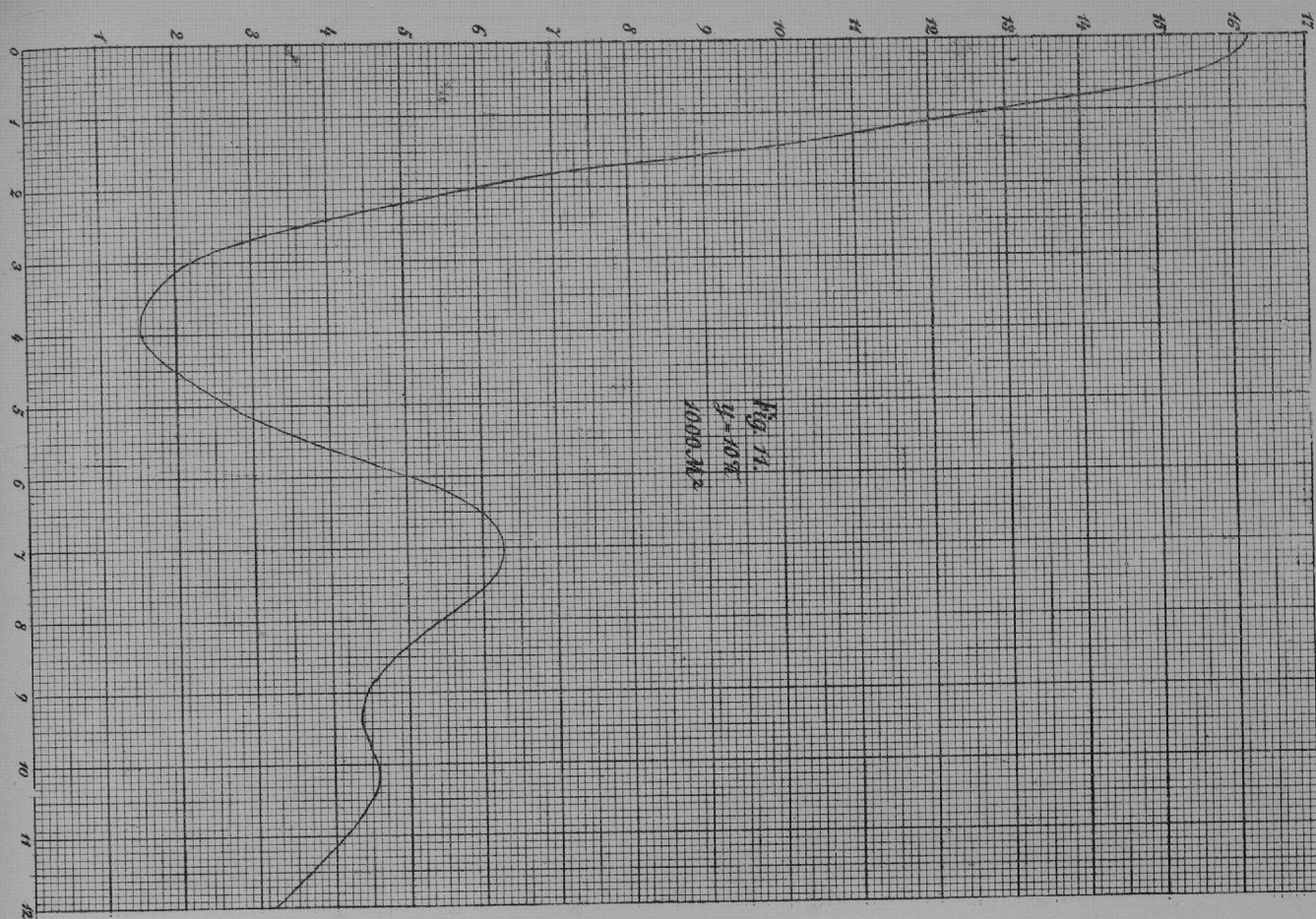
Fig. 20.
 $J_1 = 0, V_0 = 0$

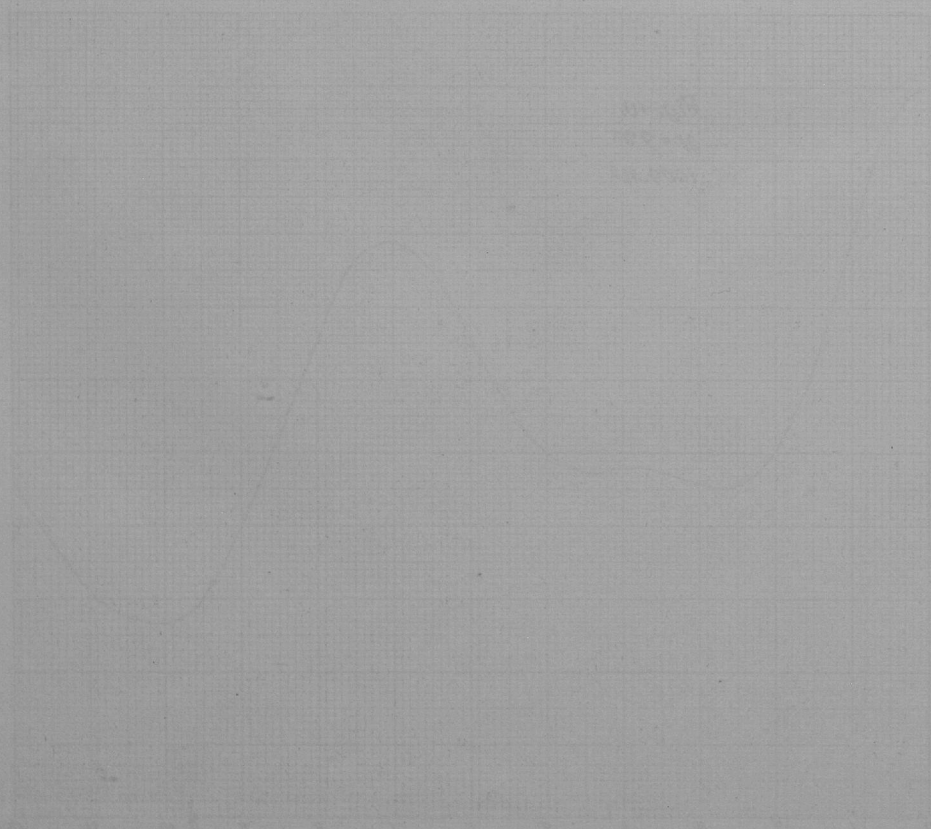
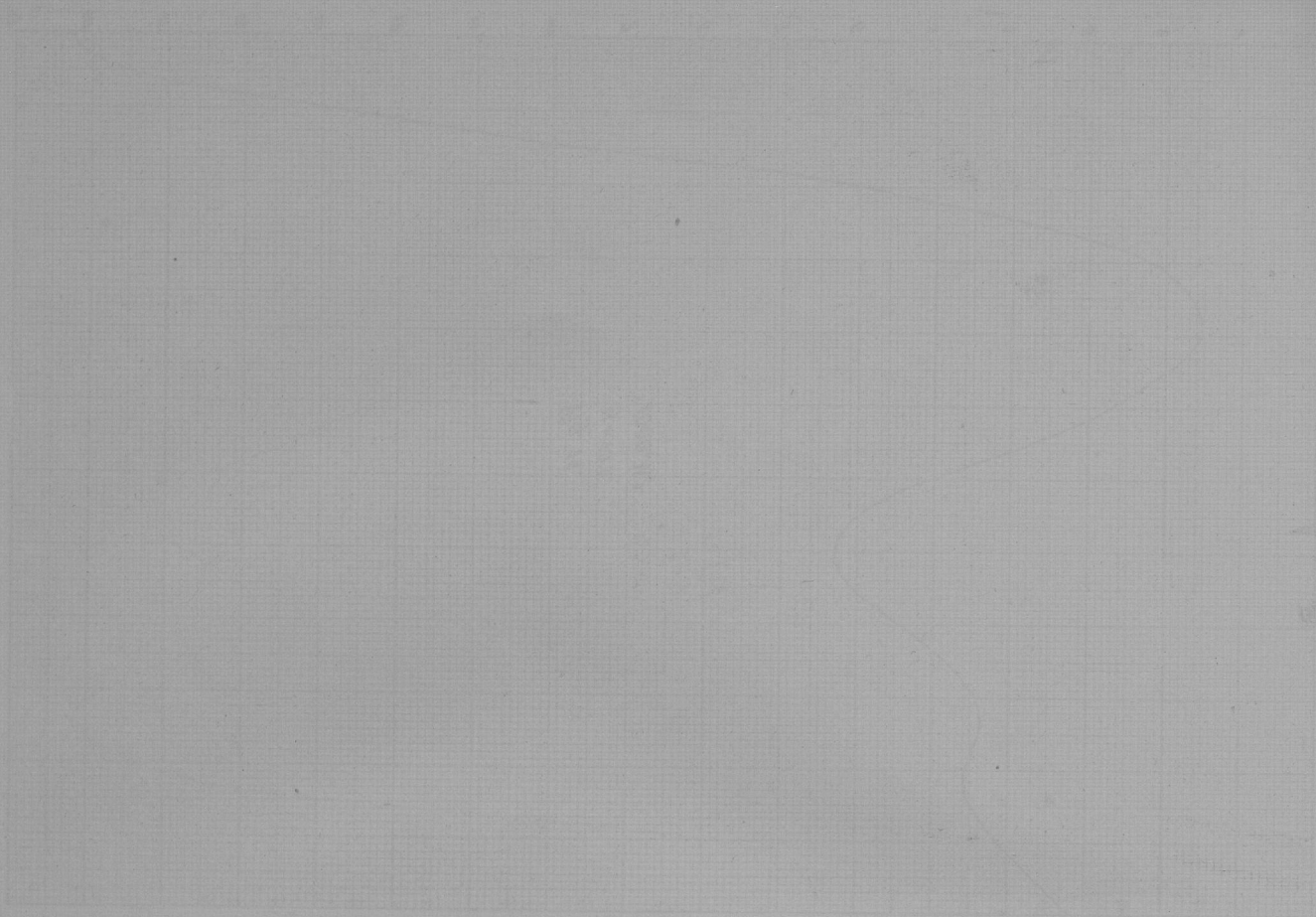


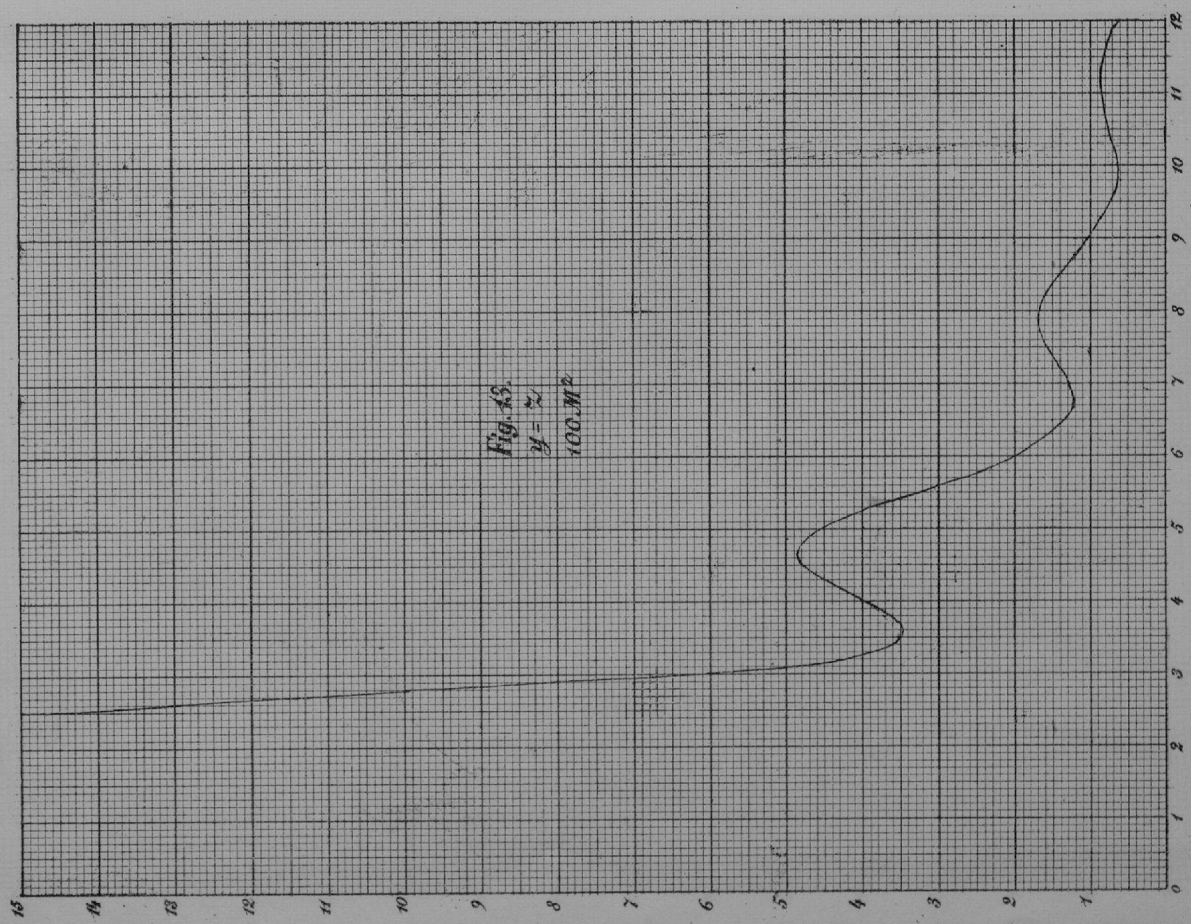
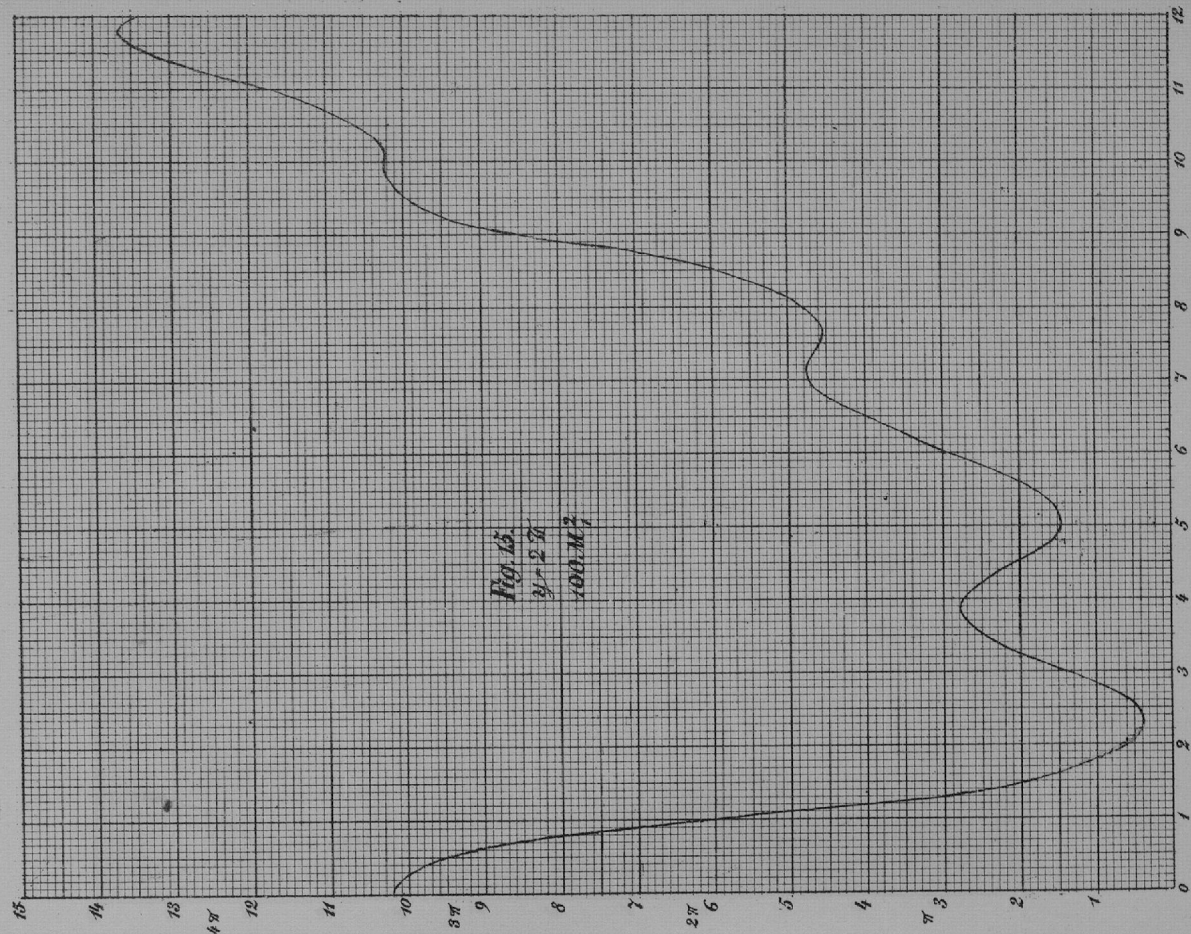


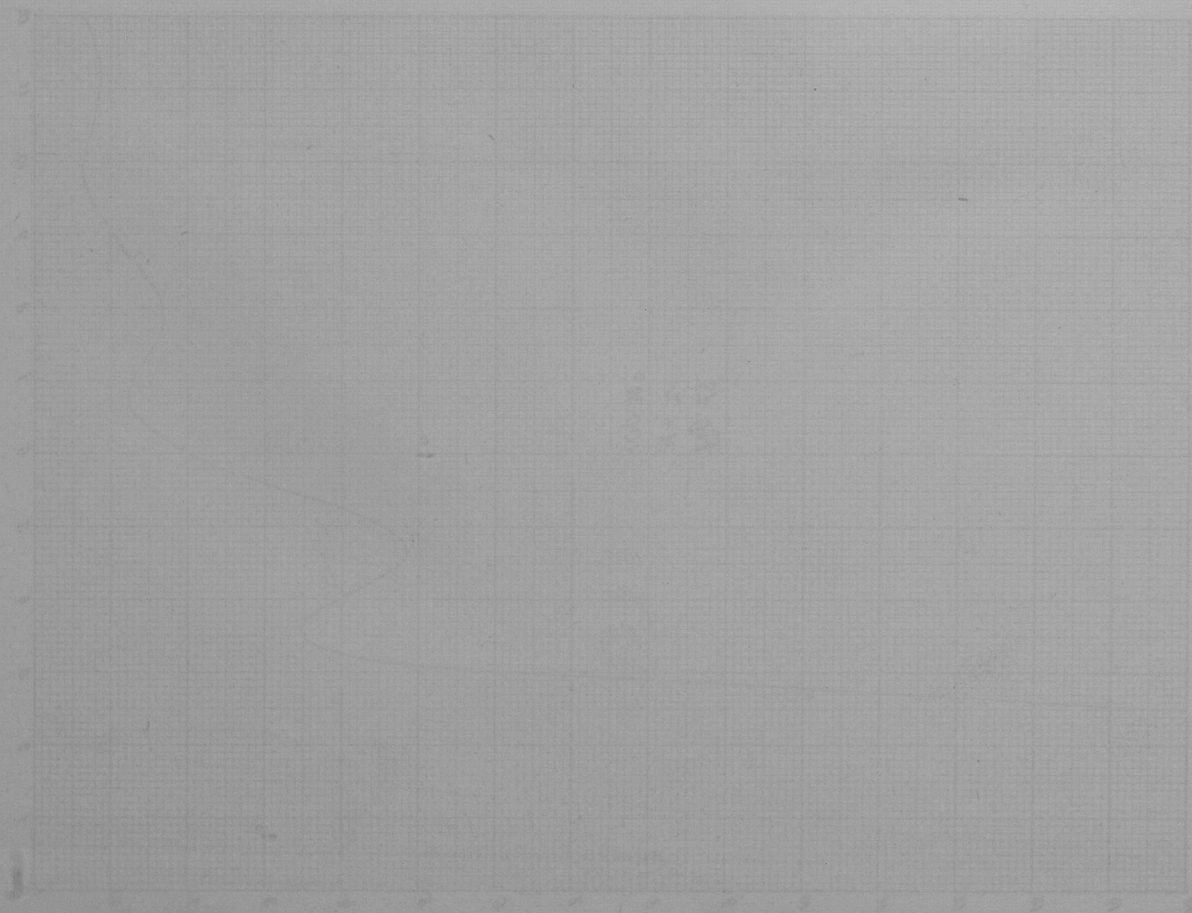
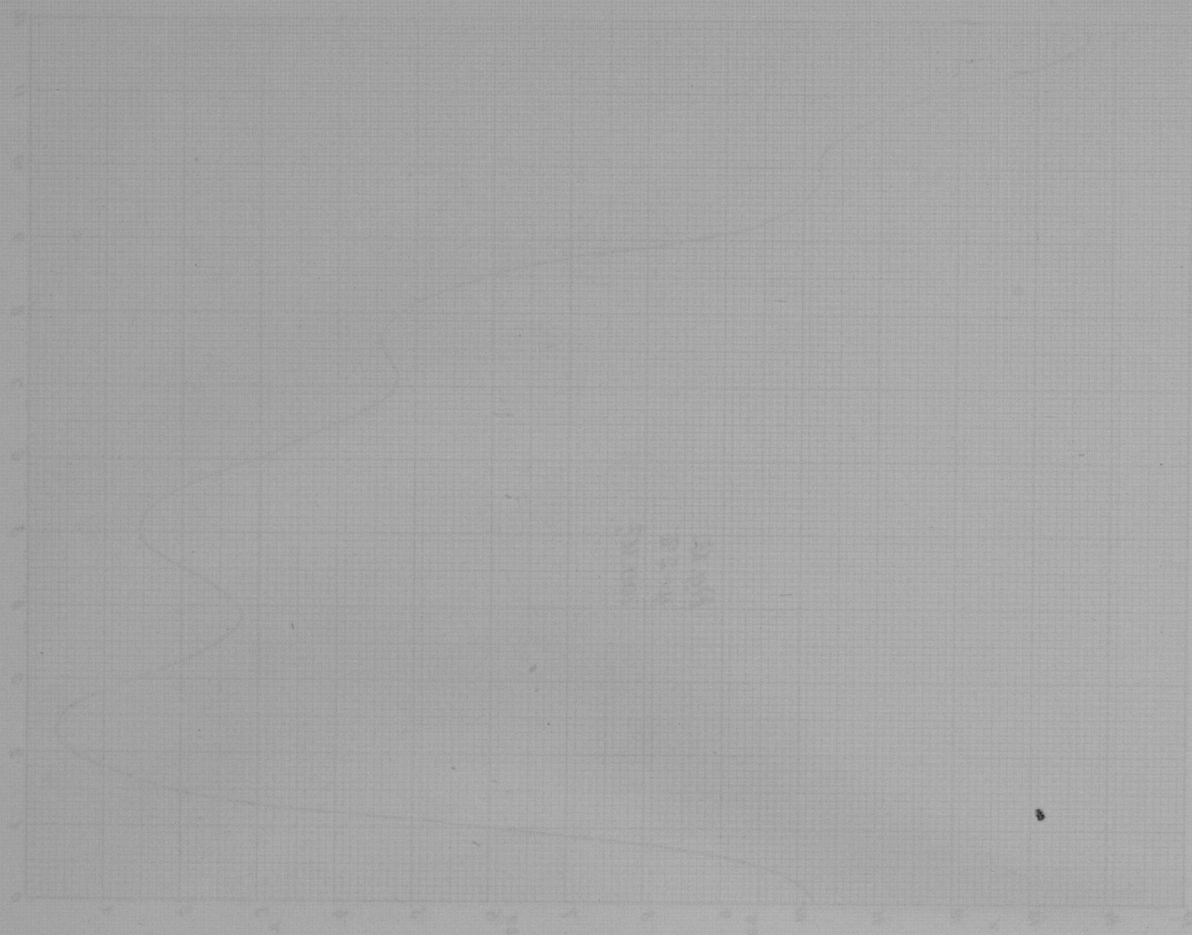


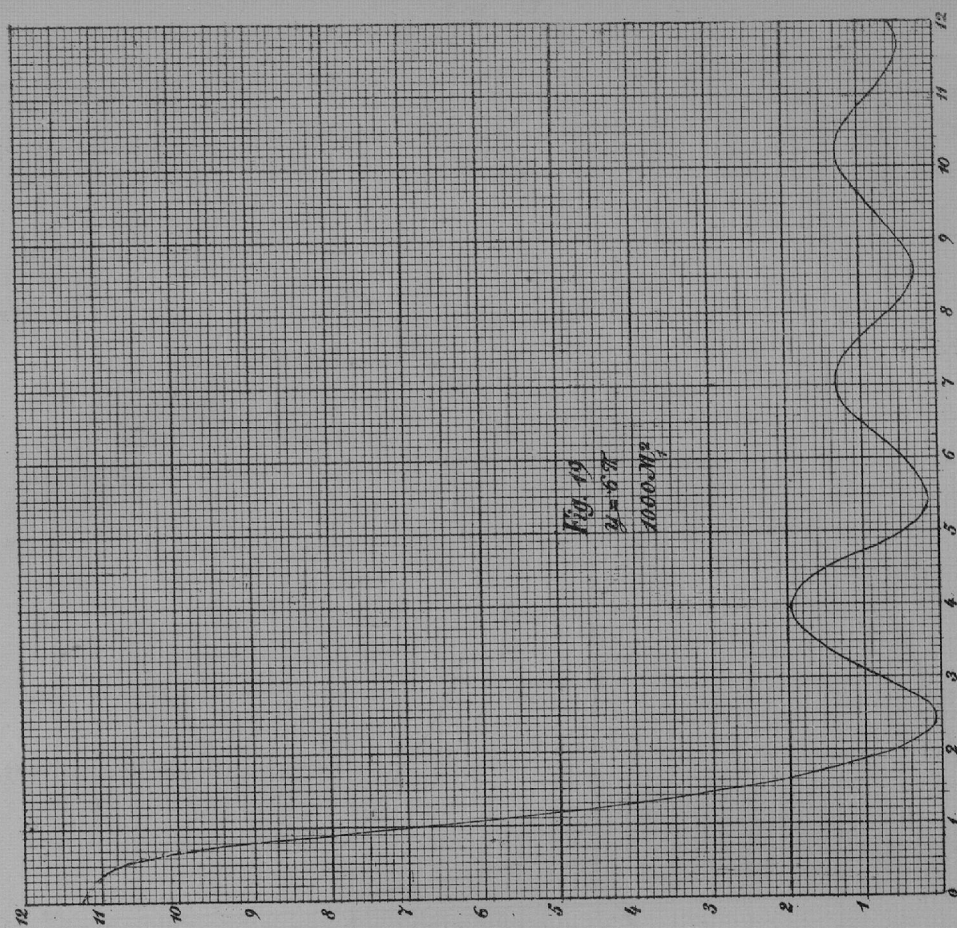
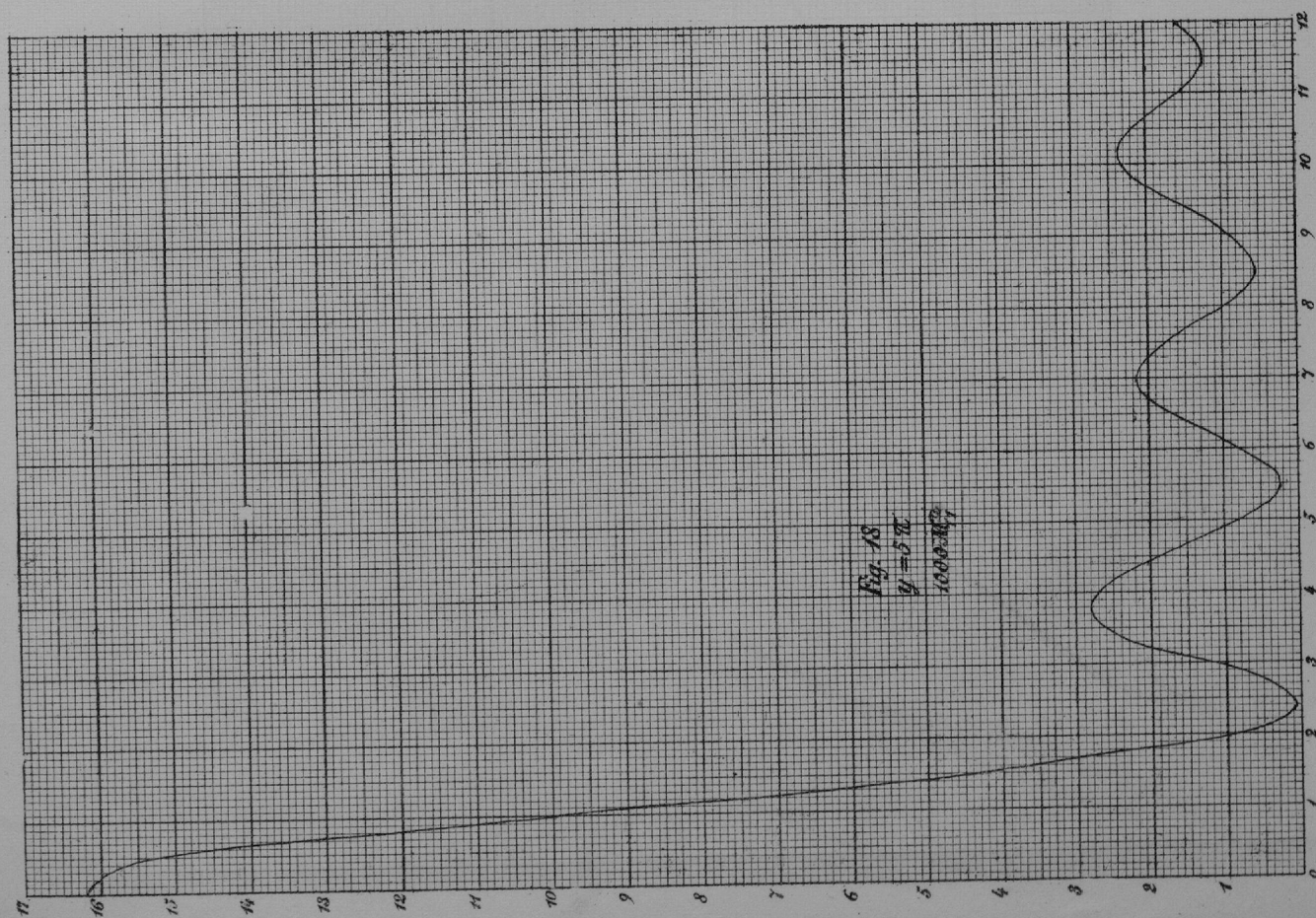












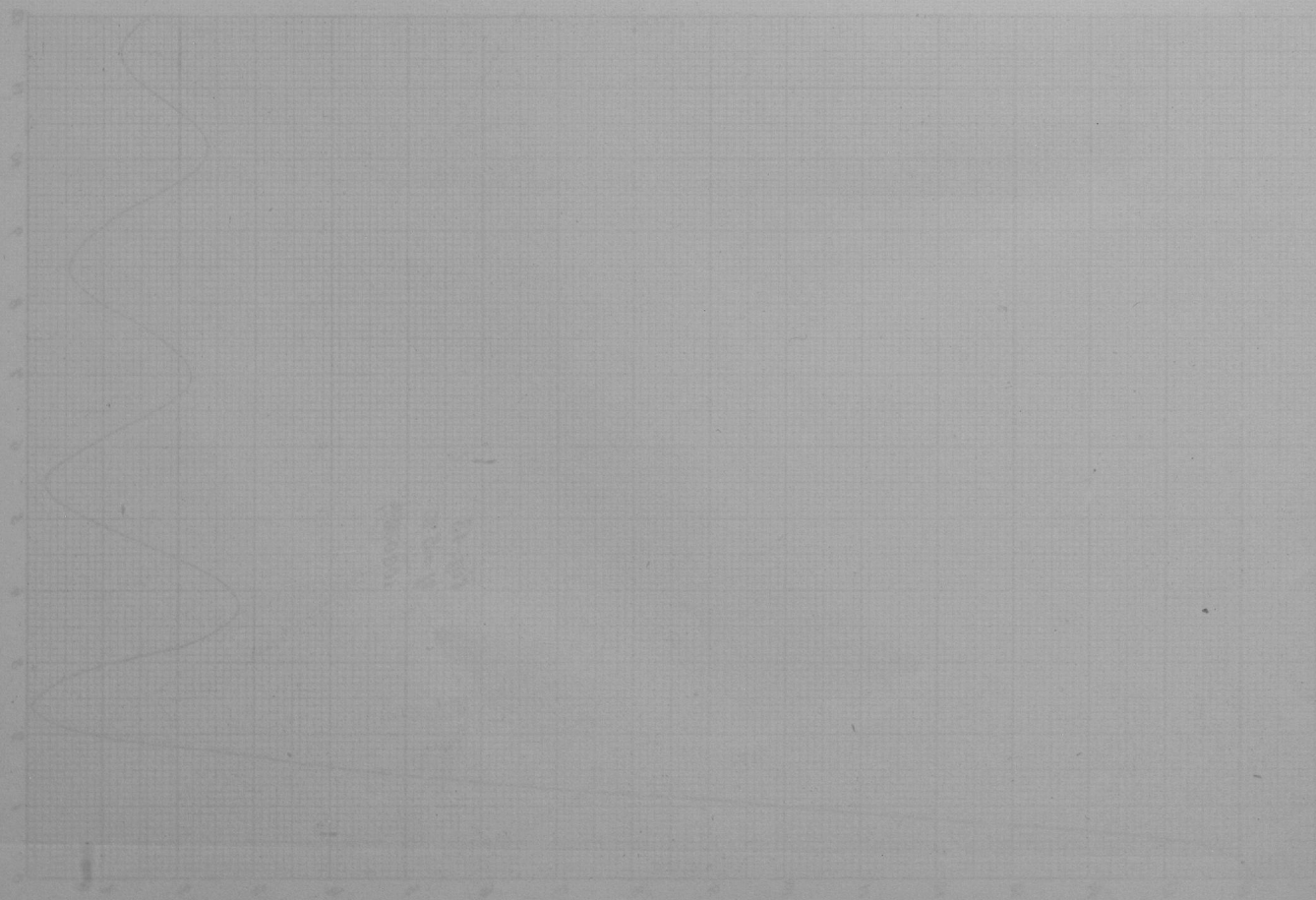
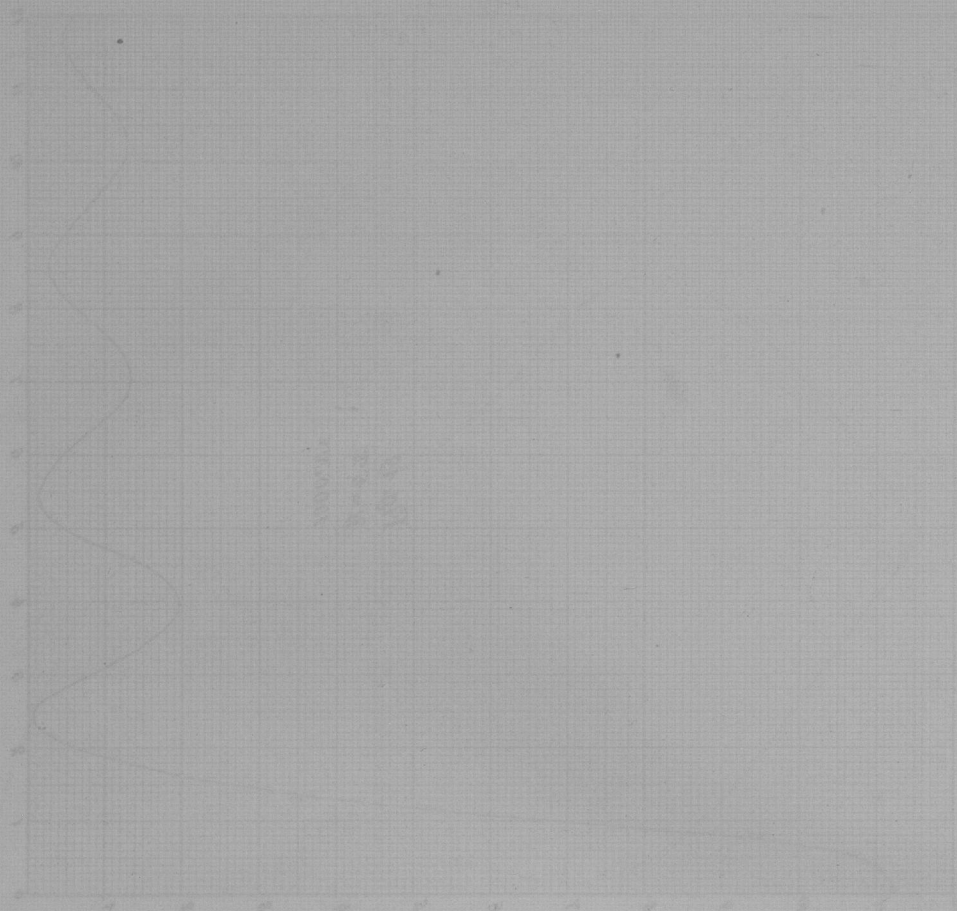


Fig. 12.
 $J_1 = 0$; $U_2 = 0$.

