Ueber das

Problem der drei Körper.

Von

Otto Hesse.

Aus den Abhandlungen der k. bayer. Akademie der W. II. Cl. XI. Bd. I. Abth.

München 1871.
Verlag der k. Akademie,
in Commission bei G. Franz.
Akademische Buchdruckerei von F. Straub.

Ueber das

Problem der drei Körper.

Von

Otto Hesse.

I.

Unter dem Probleme der drei Körper hat man Folgendes zu verstehen. Drei Körper ohne Ausdehnung, zusammengedrückt auf Punkte, aber mit gegebenen Massen erfüllt, seien aus gegebenen Anfangslagen in irgend welchen gegebenen Richtungen mit gegebenen Geschwindigkeiten in den leeren Raum hingeworfen. Auf diese Körper wirke nichts ein, als das Newton'sche Gesetz, welches sagt, dass die Körper sich gegenseitig anziehen proportional ihren Massen und umgekehrt proportional den Quadraten ihrer Entfernungen. Es soll der Ort eines jeden Körpers für jede beliebige Zeit gefunden werden.

So ausgedrückt erscheint das Problem sehr complicirt. Denn es hängt, abgesehen von den Massen der Körper, ab von 18 Daten, von den 9 Coordinaten der drei Körper in den Anfangslagen und von den Richtungen und den Grössen ihrer anfänglichen Geschwindigkeiten, welche ebenfalls durch 9 Grössen ausgedrückt werden können. In D'Alembert'schen Gleichungen ausgedrückt, welche die hervorgehobenen 18 Daten unberücksichtiget lassen, wird das Problem aber einfach.

Es hängt nämlich, wenn man die Newton'sche Kraft, mit welcher zwei Massen-Einheiten in der Einheit der Entfernung sich anziehen, als Kraft-Einheit nimmt, einzig und allein ab von den gegebenen Massen der drei Körper, also von 3 Daten. Und dieses ist im Vereine mit der Symmetrie des Problems wohl auch der Grund der grossen Anziehungs-Kraft, welche das Problem auf jeden Mathematiker ausübt.

Die D'Alembert'schen Gleichungen sind Differential-Gleichungen, von welchen man sich die Vorstellung zu machen hat, dass sie aus den 9 Gleichungen, welche das Problem vollständig lösen, dadurch hervorgegangen sind, dass man sie nach der Zeit t differentiirt und die 18 Daten eliminirt. Geht man daher von den 9 D'Alembert'schen Differential-Gleichungen aus, so sieht man, ohne die Gleichungen selbst aufzustellen, sogleich ein, dass man zur Lösung des Problems der drei Körper 18 Integrationen zu machen hat, welche die D'Alembert'schen Vernachlässigungen wieder einbringen müssen.

Von den 18 Integralen, welche das Problem der drei Körper verlangt, kennt die analytische Mechanik nur 10. Sechs davon sind hergenommen aus dem Principe der Erhaltung des Schwerpunktes. Drei Integrale gibt das Princip der Erhaltung der Flächen-Räume und ein Integral die Erhaltung der lebendigen Kraft. Es fehlen darum bis zur Zeit noch acht Integrale. Denn das Princip des letzten Multiplicators von Jacobi, welches allerdings ein Integral aufstellen lehrt, macht Voraussetzungen, die man noch nicht erfüllen kann.

Auf ein neues Integral kann man dadurch kommen, dass man aus den 9 D'Alembert'schen Differential-Gleichungen, selbst mit Zuziehung der bekannten 10 Integrale, eine Differential-Gleichung herstellt, welche für sich integrirbar ist; und in der That lassen sich vielfältige Zusammenstellungen der Art machen. Das daraus sich ergebende Integral wird aber nur dann ein neues sein, wenn es sich aus den bekannten 10 Integralen nicht zusammensetzen lässt.

Die Untersuchung, ob das gefundene Integral ein neues sei, kann unter Umständen wieder auf erhebliche Schwierigkeiten stossen, so dass man wünschen muss, solchen Untersuchungen ganz enthoben zu sein. In diesem Wunsche — wohl auch in der vergeblichen Hoffnung einem von den noch fehlenden acht Integralen auf die Spur zu kommen — habe ich die folgende Arbeit unternommen. Sie bezweckt nichts weiter, als die Lösung des Problems:

Problem.

Aus den Differential-Gleichungen des Problemes der drei Körper und ihren bekannten Integralen symmetrisch gebildete Differential-Gleichungen abzuleiten, von welchen eine jede auf eines von den bis zur Zeit noch fehlenden Integralen der drei Körper führen muss.

Auf dieses Problem bin ich geführt worden durch das Studium des Problemes zweier Körper, dessen Resultate niedergelegt sind in dem Anhange meiner Raumgeometrie 2. Auflage, Leipzig, Teubner 1869. Von dort aus will ich auch die leitenden Gedanken hernehmen, welche die nachfolgenden weiten Entwickelungen rechtfertigen sollen,.

II.

Das Problem zweier Körper verlangt zu seiner vollständigen Lösung 12 Integrationen. Da die Principe der Mechanik 10 von diesen Integrationen leisten, so fehlen noch 2 Integrale.

Ich machte daher den Versuch eine Differential-Gleichung zweiter Ordnung in symmetrischer Weise aus den sechs gegebenen Differential-Gleichungen und ihren zehn Integralen zusammen zu stellen, welche die beiden fehlenden Integrale umschliessen sollte. Der Versuch missglückte, wie man sogleich sehen wird.

Als engeres Problem zweier Körper kann man die Frage nach dem Radiusvector r, welcher die Körper von den Massen m_1 und m_2 und der Gesammtmasse $k^2 = M = m_1 + m_2$ verbindet, als Function der Zeit auffassen; dieses engere Problem führt, wie in dem Anhange der oben citirten Schrift nachgewiesen worden ist, auf die Differential-Gleichung 15) zurück:

$$r'' = -\frac{M}{r^2} + \frac{C^2}{r^3}.$$

Weiset man noch die aus den bekannten Principen der Mechanik hergenommene Constante C^2 der Integration zurück, so erhält man durch Differentiation und Elimination dieser Constante die Differential-Gleichung dritter Ordnung, welche das engere Problem vollständig löset:

$$1) \ldots \qquad 0 = (r^2)''' + \frac{M(r^2)'}{r^3}.$$

Die Form dieser Differential-Gleichung, welche leicht verificirt werden kann, ist schon eine aus dem Probleme der drei Körper hergenommene.

Da die Differential-Gleichung 1) von keiner Integrations-Constante abhängig ist, so ist zu ihrer Herstellung auch keines von den drei Principen der Mechanik erforderlich, welches ein Integral liefert. Man kann daher die Behauptung aufstellen, dass, während zur Lösung des vollständigen Problemes zweier Körper 12 Integrationen erforderlich sind, das engere Problem nur 3 Integrationen verlangt.

Zwei erste Integrale des engeren Problemes sind bald gefunden:

$$2) \ldots \qquad 4h = (r^2)'' - \frac{2M}{r}$$

$$3) \ldots \qquad 2C^2 = r^2\left((r^2)'' + \frac{2M}{r}\right) - \tfrac{1}{2}(r^2)'(r^2)'.$$

Denn man hat:

$$4) \ldots \qquad (r^2)''' + \frac{M(r^2)'}{r^3} = \frac{d}{dt}\left\{(r^2)'' - \frac{2M}{r}\right\}$$

$$5) \ldots \qquad (r^2)''' + \frac{M(r^2)'}{r^3} = \frac{1}{r^2}\frac{d}{dt}\left\{r^2\left((r^2)'' + \frac{2M}{r}\right) - \tfrac{1}{2}(r^2)'(r^2)'\right\},$$

Gleichungen, welche später ihre Verwendung finden werden.

Die Bezeichnung der Integrations-Constanten h und C ist hier so gewählt worden, dass man in Uebereinstimmung mit der Bezeichnung in der citirten Schrift sogleich erkennen soll, dass die beiden Integrale keine neuen sind. Die Integrations-Constante h ist dieselbe als in Gleichung 9) und die Integrations-Constante C die Constante in der Gleichung 15).

Eliminirt man aus den beiden angegebenen Integral-Gleichungen 2) und 3), deren Formen ebenfalls aus dem Probleme dreier Körper hergenommen sind, die Grösse $(r^2)''$, so erhält man die Differential-Gleichung 13) erster Ordnung:

$$6) \ldots \qquad r'r' = 2h + \frac{2M}{r} - \frac{C^2}{r^2}.$$

Ihr Integral ist allerdings eines von den beiden noch fehlenden Integralen des allgemeinen Problemes. Das zweite fehlende Integral ist aber bei der Uebertragung des allgemeinen Problemes in das engere vollständig entschlüpft. Das engere Problem, des Radiusvectors, umfasst also nicht die beiden fehlenden Integrale des allgemeinen Problemes, sondern nur ein Integral. Das andere Integral hat man ausserhalb des engeren Problemes zu suchen.

In der Trennung der beiden fehlenden Integrale des allgemeinen Problemes wird man einen glücklichen Umstand erblicken, wenn man dafür hält, dass es vorzuziehen sei, zwei Differential-Gleichungen erster Ordnung zu integriren, als eine Differential-Gleichung zweiter Ordnung. Man kann sich sogar dem Glauben hingeben, dass diese Trennung der beiden noch fehlenden Integrale des Problemes zweier Körper ihre Auffindung und damit die vollständige Lösung des Problemes erheblich erleichtert hat.

III.

Das allgemeine Problem der drei Körper, welches 18 Integrationen erfordert, werden wir dadurch verengern, dass wir nur die Gestalt des Dreieckes kennen zu lernen verlangen, dessen Ecken die drei Körper bilden. Demnach soll die Gestalt des genannten Dreieckes zu einer beliebigen Zeit das engere Problem sein.

Es wird sich also darum handeln, die Differential-Gleichungen zwischen den Radienvectoren und der Zeit aufzustellen, welche das engere

Problem lösen. Von welcher Ordnung diese Differential-Gleichungen sein werden, hängt davon ab, ob zu ihrer Aufstellung bekannte Integrale des allgemeinen Problemes verwendet werden dürfen, oder nicht.

Wenn wir den letzteren Fall im Auge behalten, dass die gesuchten drei Differential-Gleichungen keine Integrations-Constanten enthalten sollen, so lässt sich mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit von ihnen voraussagen, dass jede derselben auf die Differential-Gleichung 1) zurückführen wird, wenn man eine der drei Massen verschwinden lässt. In dieser Voraussicht werden wir drei Differential-Gleichungen, jede von der dritten Ordnung, aufzusuchen haben, welche das engere Problem der drei Körper ohne irgend eine Integration vollständig lösen. Diese Differential-Gleichungen werden 9 Integrationen verlangen.

Da das allgemeine Problem mit Voraussetzung der bekannten Integrale nur 8 neue Integrationen verlangt, so sieht man, dass von den 9 erwähnten Integrationen wenigstens eine durch die bekannten Principien geleistet wird.

Wenn man aber erwägt, dass in dem engeren Probleme zweier Körper von den 3 verlangten Integrationen zwei Integrationen durch die Principe der Mechanik geleistet werden, so kann man voraussetzen, dass jene Principe auch 2 Integrale für das engere Problem dreier Körper hergeben werden, welche in die Integrale 2) und 3) übergehen, wenn man eine der drei Massen verschwinden lässt, so dass von den 9 Integrationen des allgemeinen Problemes nur noch 7 Integrationen für das engere Problem zu machen übrig bleiben.

Da in dem allgemeinen Probleme der drei Körper 8 Integrale noch fehlen, in dem engeren Probleme aber nur 7, so ergibt sich hieraus, dass (wie in dem Probleme zweier Körper) bei dem Uebergange von dem allgemeinen Probleme zu dem engeren Probleme ein Integral verloren geht, welches dem letzteren ganz fremdartig ist.

Diese Reflectionen werden in dem Folgenden ihre Bestätigung finden. Wir beginnen die Ausführung mit der Aufstellung der D'Alembert'schen Differential-Gleichungen, welche das allgemeine Problem der drei Körper lösen.

IV.

Wenn man mit r, r_1, r_2 die Radienvectoren bezeichnet, welche je zwei Körper von den Massen m, m_1, m_2 verbinden, so ist U die Kräftefunction

$$7) \ldots \qquad U = m m_1 m_2 \left\{\frac{1}{m r} + \frac{1}{m_1 r_1} + \frac{1}{m_2 r_2}\right\},$$

deren partielle Differentialquotienten in die Differential-Gleichungen der Bewegung eingehen.

Bezeichnet man ferner mit ξ, η, ζ die Coordinaten des mit der Masse m erfüllten ersten Körpers zur Zeit t, die als die einzige unabhängige Variabele angesehen werden soll, und die entsprechenden Grössen für den zweiten und dritten Körper durch Anhängung der gebräuchlichen Indices 1 und 2, so hat man zur Lösung des Problemes folgende Differential-Gleichungen:

$$8) \ldots \qquad \begin{aligned} m \xi'' &= \frac{dU}{d\xi} \\ m \eta'' &= \frac{dU}{d\eta} \\ m \zeta'' &= \frac{dU}{d\zeta}. \end{aligned}$$

Diese Gleichungen repräsentiren ein ganzes System von 9 Gleichungen, welches man vervollständiget dadurch, dass man der Masse m und den Coordinaten ξ, η, ζ die Indices 1 oder 2 beigibt.

Da in die Kräftefunction, wenn man sie durch die Coordinaten der drei Körper ausdrückt, nur die Differenzen der Coordinaten eingehen, gleich wie in die rechten Theile der Differential-Gleichungen 8), deren Einfachheit nur auf der Erfindung der Kräftefunktion beruht, so erscheint es zur Erzielung grösserer Einfachheit angemessen, an Stelle der Coordinaten der drei Körper ihre Differenzen x, y, z einzuführen. Setzt man daher:

$$9)\ \ldots \qquad \begin{aligned} x &= \xi_1 - \xi_2 \ , \quad x_1 = \xi_2 - \xi \ , \quad x_2 = \xi - \xi_1 \\ y &= \eta_1 - \eta_2 \ , \quad y_1 = \eta_2 - \eta \ , \quad y_2 = \eta - \eta_1 \\ z &= \zeta_1 - \zeta_2 \ , \quad z_1 = \zeta_2 - \zeta \ , \quad z_2 = \zeta - \zeta_1 \end{aligned}$$

so wird:

$$\frac{dU}{d\xi} = m\left\{\frac{m_2 x_1}{r_1^3} - \frac{m_1 x_2}{r_2^3}\right\}$$

und aus der ersten Gleichung 8) ergeben sich auf Grund der zu beachtenden Symmetrie zwischen den drei Körpern auf diese Weise die Differential-Gleichungen:

$$\xi'' = \frac{m_2 x_1}{r_1^3} - \frac{m_1 x_2}{r_2^3} \ , \quad \xi_1'' = \frac{m x_2}{r_2^3} - \frac{m_2 x}{r^3} \ , \quad \xi_2'' = \frac{m_1 x}{r^3} - \frac{m x_1}{r_1^3}.$$

Zieht man die letzte Gleichung von der vorhergehenden ab, so erhält man in Berücksichtigung von 9) die Differential-Gleichung:

$$x'' = -M\frac{x}{r^3} + m\left\{\frac{x}{r^3} + \frac{x_1}{r_1^3} + \frac{x_2}{r_2^3}\right\},$$

wenn man mit M die Summe der Massen der drei Körper bezeichnet, wie folgt:

$$10)\ \ldots \qquad M = m + m_1 + m_2$$

Wegen der Symmetrie der Coordinaten eines Körpers gehen aus der zuletzt angegebenen Differential-Gleichung folgende hervor:

$$11)\ \ldots \qquad \begin{aligned} x'' &= -M\frac{x}{r^3} + m\left\{\frac{x}{r^3} + \frac{x_1}{r_1^3} + \frac{x_2}{r_2^3}\right\} \\ y'' &= -M\frac{y}{r^3} + m\left\{\frac{y}{r^3} + \frac{y_1}{r_1^3} + \frac{y_2}{r_2^3}\right\} \\ z'' &= -M\frac{z}{r^3} + m\left\{\frac{z}{r^3} + \frac{z_1}{r_1^3} + \frac{z_2}{r_2^3}\right\}. \end{aligned}$$

Diese Gleichungen repräsentiren wieder ein ganzes System von 9 Differential-Gleichungen, welches man erhält durch Vertauschung der drei Indices o, 1, 2, von welchen der Index o der Einfachheit wegen fortgelassen ist.

Die Differential-Gleichungen 11) würden wieder 18 Integrationen verlangen, wenn man nicht auf Grund von 9) die Relationen hätte:

12) . . .
$$\begin{aligned} x + x_1 + x_2 &= 0 \\ y + y_1 + y_2 &= 0 \\ z + z_1 + z_2 &= 0. \end{aligned}$$

Durch diese Relationen wird die Zahl 18 der Integrationen, welche die Differential-Gleichungen 8) des allgemeinen Problemes verlangten, verringert auf 12 Integrationen, welche das durch Einführung der Differenzen der Coordinaten schon beschränkte Problem 11) noch zu leisten hat.

Von diesen 12 Integrationen vollführen die bekannten Principe der Mechanik vier, welche aufzusuchen unsre nächste Aufgabe sein wird.

V.

Setzen wir, um das System Gleichungen 11) abzukürzen:

13) . . .
$$\begin{aligned} A &= \frac{x}{r^3} + \frac{x_1}{r_1^3} + \frac{x_2}{r_2^3} \\ B &= \frac{y}{r^3} + \frac{y_1}{r_1^3} + \frac{y_2}{r_2^3} \\ C &= \frac{z}{r^3} + \frac{z_1}{r_1^3} + \frac{z_2}{r_2^3}, \end{aligned}$$

multipliciren hierauf die Gleichungen 11) der Reihe nach mit x' y' z' und addiren, so erhalten wir:

$$14) \ldots \quad x'x'' + y'y'' + z'z'' = -M\frac{r'}{r^2} + m\left\{ \mathrm{A}x' + \mathrm{B}y' + \mathrm{C}z' \right\}.$$

Dividiren wir diese Gleichung durch m und nehmen die Summe, so verschwinden, weil man auf Grund von 12) hat:

$$15) \ldots \quad \begin{aligned} x' + x_1' + x_2' &= 0 \\ y' + y_1' + y_2' &= 0 \\ z' + z_1' + z_2' &= 0. \end{aligned}$$

die letzten Glieder, und wir erhalten:

$$16) \ldots \quad \sum \frac{(x'x'' + y'y'' + z'z'')}{m} = -M \sum \frac{r'}{m r^2}.$$

Durch Differentiation von 7) erhalten wir die Gleichung:

$$17) \ldots \quad \frac{dU}{dt} = -m m_1 m_2 \sum \frac{r'}{m r^2}.$$

Auf Grund der Gleichung 17) stellt sich die Gleichung 16) nun so dar:

$$18) \ldots \quad \frac{m m_1 m_2}{2} \frac{d}{dt} \sum \frac{(x'x' + y'y' + z'z')}{m} = M\frac{dU}{dt},$$

und integrirt:

$$19) \ldots \quad \frac{m m_1 m_2}{2} \sum \frac{(x'x' + y'y' + z'z')}{m} = MU + h.$$

Es entspricht dieses Integral demjenigen Integrale, welches in dem allgemeinen Probleme 8) aus dem Principe der Erhaltung der lebendigen Kraft hervorgeht, wenn es auch nicht mit demselben identisch ist.

Um die Integrale zu erhalten, welche in ähnlicher Art den Flächensätzen entsprechen, multipliciren wir die letzte Gleichung 11) mit y, ziehen die mit z multiplicirte vorletzte Gleichung ab und dividiren durch m. Alsdann wird:

$$\frac{y z'' - y'' z}{m} = y\,C - z\,B$$

Auf beiden Seiten der Gleichung die Summe genommen ergibt sich mit Rücksicht auf 12):

$$\sum \frac{(y z'' - y'' z)}{m} = 0,$$

eine Differential-Gleichung, deren erstes Integral ist:

$$\sum \frac{(y z' - y' z)}{m} = \alpha.$$

Auf diese Weise ergeben sich aus dem Systeme Differential-Gleichungen 11) die gesuchten drei Integrale:

$$20) \ldots \quad \begin{aligned} \alpha &= \sum \frac{(y z' - y' z)}{m} \\ \beta &= \sum \frac{(z x' - z' x)}{m} \\ \gamma &= \sum \frac{(x y' - x' y)}{m}. \end{aligned}$$

Die aufgeführten Integrale 19) und 20) sind keine neuen Integrale, sondern zusammengesetzt aus den bekannten zehn Integralen des allgemeinen Problemes 8). Es bleiben darum auch in dem beschränkten Probleme 11) noch acht Integrationen zu machen übrig.

Wenn es nun gelingt durch geschickte Verbindung der Differential-Gleichungen 11) mit den Gleichungen 12), 15), 19), 20) eine Differential-Gleichung herzustellen, welche für sich integrirbar ist, so wird man wieder nicht wissen können, ob das Integral derselben eines von den noch fehlenden acht Integralen ist. Voraussichtlich wird das entdeckte Integral kein neues sein.

Diese Erwägungen haben auf das am Ende des ersten Paragraphen ausgesprochene Problem geführt. Die Lösung desselben beruht auf der Einführung einfacher Zeichen für gewisse symmetrisch gebildete Functionen, welche demnächst vorgeführt werden sollen.

VI.

Das in dem dritten Paragraphen bezeichnete engere Problem der drei Körper verlangt die Elimination sämmtlicher Variabelen aus den Differential-Gleichungen 11) mit Ausnahme der Radienvectoren und ihrer Differentialquotienten. Bei dieser Gelegenheit drängen sich symmetrisch gebildete Functionen der zu eliminirenden Variabelen auf, von welchen in erster Linie diejenigen Functionen hervorgehoben werden sollen, welche sich allein durch die Radienvectoren (nicht durch ihre Differentialquotienten) ausdrücken lassen. Dahin gehören die Functionen:

21) . . . $xx + yy + zz = r^2 \;,\; x_1x_1 + y_1y_1 + z_1z_1 = r_1^2 \;,\; x_2x_2 + y_2y_2 + z_2z_2 = r_2^2,$

für welche wir respective die neuen Zeichen wählen:

22) . . . $[00] = r^2 \qquad [11] = r_1^2 \qquad [22] = r_2^2$

Multiplicirt man die Gleichungen 12) der Reihe nach mit x, y, z und addirt, so erhält man in Verfolg der eingeführten neuen Bezeichnung für symmetrisch gebildete Functionen wie $xx_1 + yy_1 + zz_1 = [01]$ die Gleichung:

$$[00] + [01] + [02] = 0,$$

woraus denn wieder das System Gleichungen hervorgeht:

$$23) \ldots \quad \begin{aligned} [00] + [01] + [02] &= 0 \\ [10] + [11] + [12] &= 0 \\ [20] + [21] + [22] &= 0, \end{aligned}$$

welche Gleichungen beweisen, dass die neu hinzugekommenen symmetrischen Functionen sich durch die Radienvectoren ausdrücken lassen, wie folgt:

$$24) \ldots \quad \begin{aligned} [12] &= \tfrac{1}{2}\{r^2 - r_1^2 - r_2^2\} \\ [20] &= \tfrac{1}{2}\{r_1^2 - r_2^2 - r^2\} \\ [01] &= \tfrac{1}{2}\{r_2^2 - r^2 - r_1^2\} \end{aligned}$$

Multiplicirt man die Gleichungen 11) der Reihe nach mit x, y, z und addirt, so erhält man, wenn man setzt: $xx'' + yy'' + zz'' = [0''0] = R$.

$$25) \ldots \quad [0''0] = R = -\frac{M}{r} + m\left\{\frac{[00]}{r^3} + \frac{[01]}{r_1^3} + \frac{[02]}{r_2^3}\right\}$$

An Stelle des hier ganz berechtigten Zeichens $[0''0]$ wählen wir jedoch aus Rücksicht auf die im nächsten Paragraphen nachfolgenden Zeichen für symmetrisch gebildete Functionen das Zeichen R, um mit demselben anzudeuten, dass R, sowie R_1 und R_2 Funktionen seien nur der Radienvectoren wie folgt:

$$26) \ldots \quad \begin{aligned} R &= -\frac{M}{r} + m\left\{\frac{[00]}{r^3} + \frac{[01]}{r_1^3} + \frac{[02]}{r_2^3}\right\} \\ R_1 &= -\frac{M}{r_1} + m_1\left\{\frac{[10]}{r^3} + \frac{[11]}{r_1^3} + \frac{[12]}{r_2^3}\right\} \\ R_2 &= -\frac{M}{r_2} + m_2\left\{\frac{[20]}{r^3} + \frac{[21]}{r_1^3} + \frac{[22]}{r_2^3}\right\}. \end{aligned}$$

Es wird sich später zeigen, dass die in 26) mit den Einzelnmassen multiplicirten Ausdrücke der Radienvectoren berufen sind in die abzuleitenden Differential-Gleichungen einzutreten. Aus diesem Grunde führen wir sie ein mit den Zeichen:

27) . . .
$$
\begin{aligned}
P &= \frac{[00]}{r^3} + \frac{[01]}{r_1^3} + \frac{[02]}{r_2^3} \\
P_1 &= \frac{[10]}{r^3} + \frac{[11]}{r_1^3} + \frac{[12]}{r_2^3} \\
P_2 &= \frac{[20]}{r^3} + \frac{[21]}{r_1^3} + \frac{[22]}{r_2^3}.
\end{aligned}
$$

Differentiirt man diese Ausdrücke nach der Zeit, nicht total, sondern nur in so ferne dieselbe in den Zählern der Brüche enthalten ist, aus welchen die Ausdrücke bestehen, so erhält man wieder Ausdrücke, welche in die abzuleitenden Differential-Gleichungen eingehen. Wir führen dieselben schon hier ein mit den Bezeichnungen:

28) . . .
$$
\begin{aligned}
Q &= \frac{[00]'}{r^3} + \frac{[01]'}{r_1^3} + \frac{[02]'}{r_2^3} \\
Q_1 &= \frac{[10]'}{r^3} + \frac{[11]'}{r_1^3} + \frac{[12]'}{r_2^3} \\
Q_2 &= \frac{[20]'}{r^3} + \frac{[21]'}{r_1^3} + \frac{[22]'}{r_2^3}.
\end{aligned}
$$

Auf Grund von 23) hat man nun:

29) . . . $$P + P_1 + P_2 = 0$$

30) . . . $$Q + Q_1 + Q_2 = 0.$$

Und es lassen sich die Gleichungen 26) kürzer so wiedergeben:

$$\text{31)} \ldots \quad \begin{aligned} R &= -\frac{M}{r} + m\,P \\ R_1 &= -\frac{M}{r_1} + m_1\,P_1 \\ R_2 &= -\frac{M}{r_2} + m_2\,P_2. \end{aligned}$$

Mit den durch die neuen Zeichen dargestellten symmetrischen Functionen, welche sich durch die Radienvectoren ausdrücken lassen, treten zum Zwecke der Elimination noch andere symmetrisch gebildete Functionen auf, die sich durch die Radienvectoren und deren Differentialquotienten ausdrücken lassen. Diese Functionen sollen demnächst vorgeführt werden.

VII.

Differentiirt man die Gleichungen 22), so erhält man:

$$\text{32} \ldots \quad [0'0] = \tfrac{1}{2}(r^2)' \ , \ [1'1] = \tfrac{1}{2}(r_1^2)' \ , \ [2'2] = \tfrac{1}{2}(r_2^2)'.$$

Multiplicirt man die Gleichungen 12) der Reihe nach mit x′, y′, z′ und addirt, oder multiplicirt man die Gleichungen 15) der Reihe nach mit x, y, z und addirt, und setzt dieses Verfahren fort, so erhält man:

$$\text{33)} \ldots \quad \begin{aligned} [0'1] + [0'2] &= -\tfrac{1}{2}(r^2)' & [1'0] + [2'0] &= -\tfrac{1}{2}(r^2)' \\ [1'2] + [1'0] &= -\tfrac{1}{2}(r_1^2)' & [2'1] + [0'1] &= -\tfrac{1}{2}(r_1^2)' \\ [2'0] + [2'1] &= -\tfrac{1}{2}(r_2^2)' & [0'2] + [1'2] &= -\tfrac{1}{2}(r_2^2)'. \end{aligned}$$

Diese sechs Gleichungen reichen nicht aus, um die sechs bezeichneten symmetrischen Functionen der Coordinaten durch die Differentialquotienten der Quadrate der Radienvectoren auszudrücken, weil die Summe der drei ersten Gleichungen gleich der Summe der drei letzten ist. Zu ihrem Ausdrucke bedarf es sogar den dritten Differentialquotienten der Quadrate der Radienvectoren, wie es sich in dem folgenden Paragraphen zeigen wird.

Bemerkt man aber, dass man durch Subtraktion der nebeneinander stehenden Gleichungen 33) erhält:

$$34) \dots \qquad [1'0] - [0'1] = [2'1] - [1'2] = [0'2] - [2'0],$$

so ist ersichtlich, dass durch Einführung einer neuen symmetrischen Function L der Coordinaten:

$$35) \dots \qquad 2L = [1'0] - [0'1],$$

die genannten sechs symmetrischen Functionen durch die ersten Differentialquotienten der Quadrate der Radienvectoren und durch die neue Function L sich ausdrücken lassen, wie folgt:

$$36) \dots \qquad \begin{aligned} [1'0] &= \tfrac{1}{2}[10]' + L \quad , \quad [0'1] = \tfrac{1}{2}[01]' - L \\ [2'1] &= \tfrac{1}{2}[21]' + L \quad , \quad [1'2] = \tfrac{1}{2}[12]' - L \\ [0'2] &= \tfrac{1}{2}[02]' + L \quad , \quad [2'0] = \tfrac{1}{2}[20]' - L. \end{aligned}$$

Aus diesen Gleichungen oder aus 34) erkennt man sogleich, dass die Function L eine alternirende Function der drei Körper ist. Denn vertauscht man zwei Körper mit einander, so bleibt L ungeändert, nimmt aber das entgegengesetzte Vorzeichen an.

Die alternirende Eigenschaft der Funktion L lässt sich durchsichtiger noch an ihrem Differentialquotienten nachweisen, der durch die Radienvectoren selbst ausgedrückt werden kann.

Differentiirt man nämlich die Gleichung 35) nach der Zeit, so erhält man:

$$2L' = [1''0] - [0''1].$$

Auf Grund von 11) hat man:

$$[0''1] = -M\frac{[01]}{r^3} + m\left\{\frac{[01]}{r^3} + \frac{[11]}{r_1^3} + \frac{[21]}{r_2^3}\right\}$$

$$[1''0] = -M\frac{[01]}{r_1^3} + m_1\left\{\frac{[00]}{r^3} + \frac{[01]}{r_1^3} + \frac{[02]}{r_2^3}\right\}.$$

Zieht man nun die erste Gleichung von der zweiten ab und gibt den Grössen [00] und [11] ihre Werthe aus 23), so erhält man:

$$37) \ldots \quad 2L' = m\,[12]\left(\frac{1}{r_1^3} - \frac{1}{r_2^3}\right) + m_1\,[20]\left(\frac{1}{r_2^3} - \frac{1}{r^3}\right) + m_2\,[01]\left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{r_1^3}\right).$$

Differentiirt man die erste Gleichung 21) zwei Mal, so erhält man mit Berücksichtigung von 25) und 31) die Gleichung:

$$38) \ldots \quad x'x' + y'y' + z'z' = \tfrac{1}{2}(r^2)'' + \frac{M}{r} - mP.$$

Hieraus ergeben sich nun die Ausdrücke der symmetrischen Functionen:

$$39) \ldots \quad \begin{aligned} [0'0'] &= \tfrac{1}{2}(r^2)'' + \frac{M}{r} - m\,P \\ [1'1'] &= \tfrac{1}{2}(r_1^2)'' + \frac{M}{r_1} - m_1 P_1 \\ [2'2'] &= \tfrac{1}{2}(r_2^2)'' + \frac{M}{r_2} - m_2 P_2. \end{aligned}$$

Multiplicirt man die Gleichungen 15) respective mit x', y', z', addirt und setzt dieses Verfahren fort, so erhält man:

$$40) \ldots \quad \begin{aligned} [0'0'] + [0'1'] + [0'2'] &= 0 \\ [1'0'] + [1'1'] + [1'2'] &= 0 \\ [2'0'] + [2'1'] + [2'2'] &= 0. \end{aligned}$$

Diese Gleichungen beweisen, dass auch die symmetrischen Functionen von der Form [0'1'] sich durch die Quadrate der Radienvectoren und ihre Differentialquotienten bis zur zweiten Ordnung ausdrücken lassen. Denn aus diesen Gleichungen ergibt sich:

$$
41) \ldots \quad
\begin{aligned}
[1'2'] &= \tfrac{1}{2}\{[0'0'] - [1'1'] - [2'2']\} \\
[2'0'] &= \tfrac{1}{2}\{[1'1'] - [2'2'] - [0'0']\} \\
[0'1'] &= \tfrac{1}{2}\{[2'2'] - [0'0'] - [1'1']\}.
\end{aligned}
$$

Stellen wir nun die Resultate dieses und des vorhergehenden Paragraphen kurz zusammen, so lässt sich dieses sagen, dass alle durch die neue Bezeichnung eingeführten symmetrischen Functionen sich ausdrücken lassen durch die Radienvectoren und ihre Differentialquotienten bis zur zweiten Ordnung mit Ausnahme der Functionen von der Form [0'1], welche abgesehen von den Radienvectoren und ihren ersten Differentialquotienten, in 36) abhängig gemacht worden sind allein von der durch Gleichung 35) definirten alternirenden Function L.

Diese Functiou L lässt sich nicht mehr ausdrücken durch die Radienvectoren und ihre Differentialquotienten niederer Ordnung. Wie wir im folgenden Paragraphen sehen werden bedarf es dazu noch der Differentialquotienten der dritten Ordnung.

Aber an Stelle eines einzigen Ausdruckes für die alternirende Function L wird die Symmetrie sogleich drei verschiedene Ausdrücke ergeben, aus deren Gleichsetzung zwei Differential-Gleichungen des engeren Problemes hervorgehen von der dritten Ordnung und zwar ohne Integration.

VIII.

Wenn man die Gleichung 38) differentiirt und durch 2 dividirt, so erhält man:

$$
42) \ldots \quad x'x'' + y'y'' + z'z'' = \frac{1}{4}\frac{d}{dt}\left\{(r^2)'' + \frac{2M}{r}\right\} - \frac{m}{2}P',
$$

eine Gleichung, deren linker Theil gleich ist dem linken Theile der Gleichnng 14). Setzt man die rechten Theile der Gleichungen einander gleich, so wird:

$$-\frac{Mr'}{r^2}+m\left\{Ax'+By'+Cz'\right\}=\frac{1}{4}\frac{d}{dt}\left\{(r^2)''+\frac{2M}{r}\right\}-\frac{m}{2}P',$$

und wenn man für A, B, C die Werthe setzt aus 13):

$$-\frac{Mr'}{r^2}+m\left\{\frac{[0'0]}{r^3}+\frac{[0'1]}{r_1^3}+\frac{[0'2]}{r_2^3}\right\}=\frac{1}{4}\frac{d}{dt}\left\{(r^2)''+\frac{2M}{r}\right\}-\frac{m}{2}P'.$$

oder da man hat: $-\frac{M\,r'}{r^2}=\frac{1}{4}\frac{d}{dt}\left\{\frac{4M}{r}\right\}$ und $[0'0]=\frac{1}{2}[00]'$, so geht die letzte Gleichung über in:

$$\frac{[0'1]}{r_1^3}+\frac{[0'2]}{r_2^3}=\frac{1}{4m}\frac{d}{dt}\left\{(r^2)''-\frac{2M}{r}\right\}-\frac{1}{2}P'-\frac{1}{2}\frac{[00]'}{r^3}.$$

Setzt man in diese Gleichung die Werthe von $[0'1]$ und $[0'2]$ aus 36) ein, so erhält man:

$$-L\left\{\frac{1}{r_1^3}-\frac{1}{r_2^3}\right\}=\frac{1}{4m}\frac{d}{dt}\left\{(r^2)''-\frac{2M}{r}\right\}-\frac{1}{2}P'-\frac{1}{2}\left\{\frac{[00]'}{r^3}+\frac{[01]'}{r_1^3}+\frac{[02]'}{r_2^3}\right\}.$$

Multiplicirt man mit -2, so wird mit Rücksicht auf 28):

$$43)\ \ldots\quad 2L\left\{\frac{1}{r_1^3}-\frac{1}{r_2^3}\right\}=-\frac{1}{2m}\frac{d}{dt}\left\{(r^2)''-\frac{2M}{r}\right\}+P'+Q.$$

Eine andere bemerkenswerthe Gestalt erhält diese Gleichung, wenn man die Gleichungen 4) und 5) benutzt.

Aus der Gleichung 43) geht nun ein System von drei Gleichungen hervor durch cyclische Vertauschung der Indices 0, 1, 2. Dieses System lässt sich sehr einfach wiedergeben, wenn wir die Bezeichnung einführen:

$$44) \ldots \quad v = \frac{n}{m}\left\{(r^2)'' - \frac{2M}{r}\right\} + \frac{n_1}{m_1}\left\{(r_1^2)'' - \frac{2M}{r_1}\right\} + \frac{n_2}{m_2}\left\{(r_2^2)'' - \frac{2M}{r_2}\right\},$$

bei welcher Gelegenheit wir zu künftigen Gebrauch gleich auf einen ähnlich gebildeten Ausdruck $\mathfrak{V}$, ebenfalls der zweiten Ordnung, aufmerksam machen:

$$45) \ldots \quad \mathfrak{V} = \frac{1}{m}\left\{(r^2)'' - \frac{2M}{r}\right\} + \frac{1}{m_1}\left\{(r_1^2)'' - \frac{2M}{r_1}\right\} + \frac{1}{m_2}\left\{(r_2^2)'' - \frac{2M}{r_2}\right\}.$$

Man hat demnach folgende drei Ausdrücke für die alternirende Funktion L:

$$46) \ldots \quad \begin{aligned} 2L\left(\frac{1}{r_1^3} - \frac{1}{r_2^3}\right) &= -\frac{1}{2}\frac{d^2 v}{dn\, dt} + P' + Q \\ 2L\left(\frac{1}{r_2^3} - \frac{1}{r^3}\right) &= -\frac{1}{2}\frac{d^2 v}{dn_1\, dt} + P_1' + Q_1 \\ 2L\left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{r_1^3}\right) &= -\frac{1}{2}\frac{d^2 v}{dn_2\, dt} + P_2' + Q_2. \end{aligned}$$

Die beiden letzten Ausdrücke beweisen, dass L nicht unendlich wird, wenn man die Masse m gleich 0 setzt. Der erste Ausdruck von L in 46) oder 43) wird nur scheinbar unendlich, wenn man m gleich 0 setzt, denn in diesem Falle reducirt sich das Problem auf das Problem zweier Körper und es verschwindet nach 1) und 4) auch der Zähler jenes Bruches dessen Nenner m ist. Der erste Ausdruck für L wird demnach unbestimmt, wenn man m gleich 0 setzt.

Die angegebenen Ausdrücke 46) sind unsymmetrisch. Um einen symmetrischen Ausdruck für das Produkt zweier alternirenden Functionen zu erhalten, von welchen die eine L ist, multipliciren wir die Gleichungen 46) der Reihe nach mit $m[12]$, $m_1[20]$, $m_2[01]$ und addiren. In Berücksichtigung von 37) erhalten wir dann:

$$4LL' = -\frac{m}{2}[12]\frac{d^2v}{dn\,dt} - \frac{m_1}{2}[20]\frac{d^2v}{dn_1\,dt} - \frac{m_2}{2}[01]\frac{d^2v}{dn_2\,dt}$$

47) . . .

$$+ m[12]\left\{P' + Q\right\} + m_1[20]\left\{P_1' + Q_1\right\} + m_2[01]\left\{P'_2 + Q_2\right\}.$$

Um nun die alterirende Function L in symmetrischer Weise aus den Gleichungen 46) zu eliminiren, addiren wir die Gleichungen und erhalten auf Grund von 29) und 30):

$$0 = \frac{d^2v}{dn\,dt} + \frac{d^2v}{dn_1\,dt} + \frac{d^2v}{dn_2\,dt},$$

Da aber nach 44) und 45) ist:

$$\mathcal{V} = \frac{dv}{dn} + \frac{dv}{dn_1} + \frac{dv}{dn_2},$$

so hat man die Differential-Gleichung dritter Ordnung zwischen den Radienvectoren und der Zeit:

48) . . . $$0 = \frac{d\mathcal{V}}{dt}.$$

Die zweite gesuchte Differential-Gleichung ebenfalls der dritten Ordnung erhält man, wenn man die Gleichungen 46) respective mit $\frac{2}{r^3}$, $\frac{2}{r_1^3}$, $\frac{2}{r_2^3}$ multiplicirt und addirt:

$$\frac{1}{r^3}\frac{d^2v}{dn\,dt} + \frac{1}{r_1^3}\frac{d^2v}{dn_1\,dt} + \frac{1}{r_2^3}\frac{d^2v}{dn_2\,dt}$$

49) . . .

$$= \frac{2}{r^3}\left\{P' + Q\right\} + \frac{2}{r_1^3}\left\{P_1' + Q_1\right\} + \frac{2}{r_2^3}\left\{P_2' + Q_2\right\}.$$

Als Controlle der vorangegangenen Entwickelungen mag die Bemerkung dienen, dass sowohl die Gleichung 48) als 49) übergeht in die Differential-Gleichung 1), wenn man eine der Massen gleich 0 setzt.

Die beiden letzten Differential-Gleichungen dritter Ordnung haben sich ergeben ohne Integration. Sie lassen sich daher betrachten als zweckmässige Zusammenstellungen der Differential-Gleichungen des allgemeinen Problemes.

Es bleibt demnach noch übrig eine dritte Differential-Gleichung zwischen den Radienvectoren und der Zeit ebenfalls der dritten Ordnung ohne Integration aufzusuchen.

IX.

Es wird Vortheil bringen den bis dahin eingeschlagenen Weg zu verlassen und von wirklichen Integralen des allgemeinen Problemes auszugehen, denn wir haben es ja in der Gewalt durch Differentiation die Integrations-Constanten wieder verschwinden zu lassen.

Zur Herleitung der dritten und letzten Differential-Gleichung des engeren Problemes werden wir uns der drei Integrale 20) mit den willkürlichen Constanten α, β, γ, oder, präciser ausgedrückt, des einen Integrales bedienen, dessen Integrations-Constante C sich aus den angegebenen zusammensetzt wie folgt:

$$50) \;.\;.\;.\qquad C^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2.$$

Wir haben demnach auf Grund von 20):

$$51) \;.\;.\;.\; C^2 = \left(\sum \frac{(y z' - y' z)}{m}\right)^2 + \left(\sum \frac{(z y' - z' x)}{m}\right)^2 + \left(\sum \frac{(x y' + x' y)}{m}\right)^2$$

Ordnet man diese Gleichung nach den umgekehrten Quadraten und Produkten der Massen, so sieht man, dass der Coefficient von $\frac{1}{m^2}$ in der Entwickelung ist:

$$(y z' - y' z)^2 + (z x' - z' x)^2 + (x y' - x' y)^2$$

und dass der Coefficient von $\frac{2}{m m_1}$ ist:

$$(y z' - y' z)(y_1 z_1' - y_1' z_1) + (z x' - z' x)(z_1 x_1' - z_1' x_1) + (x y' - x' y)(x_1 y_1' - x_1' y_1)$$

und so ferner.

Dieses sind Formen, für welche die Determinanten-Theorie für unsere Zwecke passendere Formen einführen lehrt, nämlich für den ersten Ausdruck folgenden:

$$(x x + y y + z z)(x' x' + y' y' + z' z') - (x x' + y y' + z z')^2$$

und für den zweiten:

$$(x x_1 + y y_1 + z z_1)(x' x_1' + y' y_1' + z' z_1') - (x' x_1 + y' y_1 + z' z_1)(x x_1' + y y_1' + z z_1')$$

Machen wir nun von den für die symmetrischen Functionen eingeführten Zeichen Gebrauch, so haben wir:

52) . . . $$(y z' - y' z)^2 + (z x' - z' x)^2 + (x y' - x' y)^2 = [00][0'0'] - [0'0]^2$$
$$(y z' - y' z)(y_1 z_1' - y_1' z) + (z x' - z' x)(z_1 x_1' - z_1' x_1) + (x y' - x' y)(x_1 y_1' - x_1' y_1) = [01][0'1'] - [0'1][1'0]$$

und so weiter.

Man hat demnach folgende Entwickelung der Gleichung 51):

$$C^2 = \frac{1}{m^2}\Big\{[00][0'0'] - [0'0]^2\Big\} + \frac{2}{m m_1}\Big\{[01][0'1'] - [0'1][1'0]\Big\} + \cdots$$

Setzt man in dieselbe die Werthe von $[0'1]$, $[1'0]$ etc. aus 36) und multiplicirt mit -1, so erhält man:

$$53^*) \ldots \qquad \frac{2M}{m\,m_1\,m_2} L^2 - C^2 =$$

$$= -\frac{1}{m^2}\left\{[00][0'0'] - [0'0]^2\right\} - \frac{2}{m\,m_1}\left\{[01][0'1'] - [01]'[10]'\right\} - \ldots$$

Dieses würde, da nach 47) L ein Ausdruck der dritten Ordnung ist, die gesuchte dritte Differential-Gleichung zwischen den Radienvectoren und der Zeit sein, wenn sie nicht die Constante C^2 der Integration enthielte. Um aus ihr die verlangte Differential-Gleichung des engeren Problemes ohne willkürliche Constante abzuleiten, differentiiren wir dieselbe nach der Zeit:

$$54) \ldots \qquad \frac{4M}{m\,m_1\,m_2} L L' =$$

$$= -\frac{1}{m^2}\frac{d}{dt}\left\{[00][0'0'] + [0'0]^2\right\} - \frac{2}{m\,m_1}\frac{d}{dt}\left\{[01][0'1'] - [01]'[10]'\right\} - \ldots$$

Da der rechte Theil der Gleichung 53*) von der zweiten Ordnung ist, so wird der rechte Theil der Gleichung 54) von der dritten Ordnung. Die Gleichung selbst ist von der dritten Ordnung weil nach 47) das symmetrische Produkt L L′ von der dritten Ordnung ist.

Auch hier wird man bemerken, dass die Differential-Gleichung 54) übergeht in 1), wenn man eine der Massen gleich 0 setzt.

Die vollständige Lösung des Dreieck-Problemes der drei Körper beruht demnach auf der Integration der drei Differential-Gleichungen 48) 49) 54) dritter Ordnung, zu deren Aufstellung es keiner Integration der Differential-Gleichungen des allgemeinen Problemes bedurfte.

Wenn man die Principe der Mechanik walten lässt, welche Integrale liefern, so liegen zwei Integrale des Systems von drei Differential-Gleichungen des engeren Problemes zu Tage, nämlich das aus 48) hervorgehende Integral von der zweiten Ordnung:

$$55^*) \ldots \qquad 4h = \mathfrak{V}$$

mit der willkürlichen Constante h, und die Differential-Gleichung 53*), vorläufig von der dritten Ordnung, mit der willkürlichen Constante C.

Da die Differential-Gleichungen 48) 49) 54) sämmtlich linear sind in Rücksicht auf die dritten Differentialquotienten der Quadrate der Radienvectoren, so kann man lesztere leicht ausdrücken durch die Differentialquotienten niederer Ordnung. Setzt man ihre Werthe in den Ausdruck 47) für L, so wird derselbe von der zweiten Ordnung und die Differential-Gleichung 53*) selbst von der zweiten Ordnung. Diese Differential-Gleichung 53*) lässt sich demnach betrachten als ein Integral der drei Differential-Gleichungen des engeren Problemes mit der willkürlichen Constante C der Integration von der zweiten Ordnung.

Um die Richtigkeit der beiden Integral-Gleichungen 55*) und 53*) zu prüfen, setzen wir für h und C respective $\frac{h}{m}$ und $\frac{C}{m}$ und lassen m verschwinden. Die erstere Gleichung geht dann über in die Gleichung 2), die letztere in Berücksichtigung des im vorhergehenden Paragraphen ausdrücklich aufgeführten Umstandes, dass L nicht unendlich wird, wenn $m = 0$, in die Gleichung 3).

Die durchgeführte Untersuchung fassen wir nun kurz zusammen in dem Theoreme:

Theorem.

Wenn man das allgemeine Problem der drei Körper beschränkt auf die Gestalt des Dreieckes, dessen Ecken die drei Körper bilden, so hängt die Lösung des engeren Problemes ab von drei Differential-Gleichungen der dritten Ordnung 48) 49) 54). Wenn man aber die Principe der Mechanik voraussetzt, welche Integrale liefern, so lässt sich dasselbe abhängig machen von zwei Differential-Gleichungen 55*) 53*) der zweiten Ordnung und einer Differential-Gleichung 49) dritter Ordnung.

München. Juli 1871.

Anmerkung.

Das Theorem ist bekannt durch eine von Lagrange verfassten und von der Pariser Akademie gekrönten Preis-Schrift: ‹Essai d'une nouvelle Méthode pour résoudre le Probléme des trois Corp› aus dem Jahre 1772. Da der Verfasser von Vorne herein, wenn auch mit sichtbarem Widerstreben, die Symmetrie der Aufgabe fallen liess, so konnte er kaum zu den, den Umständen nach einfachen, Resultaten gelangen, welche vorliegen. In späteren Jahren ist Lagrange nicht wieder auf sein Problem zurückgekommen. Es ist dieses um so mehr zu beklagen, als gerade er den Gebrauch der Symmetrie in einem Grade ausgebildet hat, wie kein Mathematiker vor ihm.