

Abhandlungen
der Bayerischen Akademie der Wissenschaften

Mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse

Neue Folge. Heft 64

1954

Experimentelle Untersuchung der
Fresnel'schen Beugungserscheinungen
am Spalt

von

Horst Burkhardt

Vorgelegt von den Herren Walther Gerlach und Eduard Rüchardt am 5. 3. 1954

Mit 19 Abbildungen

München 1954

Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften

in Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung München

I

Für die vorliegende Arbeit waren zwei Aufgaben gestellt:

Erstens sollten Unregelmäßigkeiten, die W. J. Müller (1) bei Untersuchung der Fresnelschen Beugungserscheinungen an der kreisförmigen Öffnung fand, geklärt werden.

Zweitens sollte untersucht werden, wie weit bei den Fresnelschen Beugungserscheinungen am Spalt Experiment und Theorie übereinstimmen.

Für eine numerische Berechnung Fresnelscher Beugungserscheinungen finden sich die umfassendsten Unterlagen in zwei Arbeiten von Lommel (2).

Die Beugungserscheinungen an der kreisförmigen Öffnung und am kreisförmigen Schirm wurden von ihm erstmalig für den Fresnelschen Fall analytisch dargestellt. Seine Berechnung der Beugung am Spalt, am rechteckigen Schirm und an der Halbebene sind, wie Lommel selbst sagt, Fortsetzungen der Rechnungen von Fresnel und bieten gegenüber dessen grundlegenden Arbeiten (3) nur eine größere numerische Genauigkeit. Vor allem aber sind in Lommels Arbeit die allgemeinen Gesetzmäßigkeiten der verwickelten Fresnelschen Beugungserscheinungen diskutiert.

Obwohl Lommel vom Huygens-Fresnelschen Prinzip ausgeht, das ja nur eine intuitiv eingeführte Arbeitshypothese ist, hat seine Arbeit gerade für die Beugungserscheinungen am Spalt noch heute ihre volle Bedeutung. Die Lösung des Beugungsproblems auf Grund des exakten Kirchhoffschen Integrals führt nicht über Lommels Lösungen hinaus, da man hier willkürliche Annahmen für die unter dem Integral auftretenden Grenzwerte machen muß.

Eine strenge Lösung der Maxwellschen Gleichungen, welche Sommerfeld (4) für die unendlich dünne, unendlich leitende Halbebene gegeben hat, ist bisher für breite Spalte nicht gelungen.

Eine Näherungslösung Schwarzschilds (5) ergibt, daß nur bei sehr engen Spalten und auch erst für sehr große Beugungswinkel die Abweichungen von der Lommelschen Lösung eine merkliche Größe annehmen. Es ist also wohl gerechtfertigt, wenn im folgenden mit der Theorie Lommels gearbeitet wird. Sie enthält folgende Voraussetzungen:

1. Die beugende Öffnung (oder der beugende Schirm) ist groß gegen die Wellenlänge des Lichtes.
2. Der Abstand zwischen Lichtquelle und beugender Öffnung sowie der Abstand zwischen Öffnung und Beobachtungsebene ist groß gegen die Abmessungen der beugenden Öffnung.

Bedeutet

- a den Abstand zwischen Lichtquelle und beugender Öffnung,
- b den Abstand zwischen Öffnung und Beobachtungsebene,
- r den Radius der kreisförmigen Öffnung bzw. die halbe Spaltbreite,
- λ die Wellenlänge des Lichtes,

so gilt:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{y\lambda}{2\pi r^2} \quad (1)$$

Die Zahl y kennzeichnet die Gestalt der Beugungsfigur. Bei gleicher Form der beugenden Öffnung ergeben sich geometrisch ähnliche Beugungsfiguren für gleiches y .

$\frac{y}{2\pi}$ ist die Zahl der Fresnelschen Zonen, die an der Entstehung der Beugungsfigur beteiligt sind.

Für den Fall der Fraunhoferschen Beugung ergibt sich $y = 0$. Er liegt vor, wenn $a = b = \infty$ oder $a = -b$ ist, d. h. wenn Lichtquelle und Beobachtungsebene zusammenfallen. Der letztere Fall liegt bei den meisten optischen Instrumenten vor, wenn die Lichtquelle auf die Beobachtungsebene abgebildet wird.

Der Inhalt der Formel (1) läßt sich in Worten ausdrücken: Bei gleicher Form der beugenden Öffnung hängt die Intensitätsverteilung nur von der Anzahl der am Zustandekommen der Beugungsfigur beteiligten Fresnelschen Zonen ab.

Da die Beugungsfiguren bei gleichem y nur geometrisch ähnlich, also nicht gleich groß sind, ist eine Transformation, die alle Beugungsfiguren auf die gleiche Größe bringt, zweckmäßig. Diese Transformation erfolgt dadurch, daß man in den Intensitätskurven statt des Abstandes ζ von der optischen Achse die im folgenden definierte Größe z als Abszisse anträgt:

$$z = \frac{2\pi\zeta}{\lambda b} r \quad (2)$$

$z = 0$ bedeutet die Mitte der Beugungsfigur,

$z = y$ die „geometrische Schattengrenze“, d. h. die Stelle, an der die Schattengrenze bei geometrisch-optischem Strahlengang liegen würde.

II

Die ersten experimentellen Untersuchungen zur Bestätigung der Fresnelschen Theorie wurden von Fresnel selbst durchgeführt, und zwar im Falle der Spaltes so gründlich, daß Lommel noch 1886 eigene Messungen für überflüssig erklärte. Allerdings konnte Fresnel noch keine Intensitätsmessungen durchführen. Er prüfte mikrometrisch, ob die Lage der Maxima und Minima den berechneten Werten entsprach.

Messungen an der kreisförmigen Öffnung wurden von Lommel in der ersten der angegebenen Arbeiten mitgeteilt, nachdem schon Abria (6) die Erscheinungen in der Mitte der Beugungsfigur einer Prüfung unterzogen hatte. Auch er konnte noch nicht Intensitäten messen, arbeitete mit weißem Licht und berechnete die Intensitäten der einzelnen Hauptfarben für die Mitte des Beugungsbildes. Daraus wurde die zu erwartende Mischfarbe ermittelt und mit der im Experiment beobachteten Färbung verglichen.

Unter den folgenden Arbeiten, die durchweg photographisch durchgeführt wurden, sind besonders erwähnenswert die Arbeiten von Ignatowsky (7) und von Arkadiew (8). Ignatowsky berechnete die Beugung am Draht weitgehend numerisch und verglich Theorie und Experiment. Er schreibt: „Es wurde mit der Lupe beobachtet und auch photographische Aufnahmen gemacht, wo mit Genüge die Übereinstimmung der Theorie und der Praxis bestätigt wurde.“ Arkadiew gibt keine Intensitäten an, schreibt aber, seine Aufnahmen seien im Einklang mit Lommels Theorie. Von den neueren photographischen

Arbeiten seien genannt: Wilberforce (9), W. Müller (10), und die bereits erwähnte Dissertation von W. J. Müller.

Wilberforces Aufnahmen der Beugung an der kreisförmigen Öffnung zeigen besonders schön die Details im Schattengebiet. Er wertete seine Aufnahmen aber nicht intensitätsmäßig aus. W. Müller untersuchte photographisch die Beugungserscheinungen an Drähten. Er fand gute Übereinstimmung mit der Theorie für Drähte von 1 mm Dicke aufwärts, schlechtere Übereinstimmung für Drähte von 0,5 mm und 0,25 mm Dicke. Leider wertete er nur Schwärzungskurven, keine Intensitätskurven aus.

III

W. J. Müller benutzte folgende Anordnung: Aus dem Licht einer Quecksilberdampflampe wurde die grüne Linie ausgefiltert. Vor der Lampe befand sich eine Blende von 0,5 mm Durchmesser als punktförmige Lichtquelle. Der Abstand zwischen Lichtquelle und beugender Öffnung betrug $a = 1499,67$ cm, der Abstand zwischen beugender Öffnung und Beobachtungsebene $b = 1000,50$ cm. Die Beugungsfiguren wurden photographiert. Dabei wurde a und b nicht variiert, der Durchmesser der kreisförmigen beugenden Öffnung lag zwischen 25,02 mm und 6,96 mm.

Gleichzeitig mit der Beugungsaufnahme wurden Intensitätsmarken mittels eines rotierenden Sektors aufgenommen. Die Genauigkeit wird mit etwa fünf Prozent angegeben. Die Intensitätskurven der ersten neun Aufnahmen zeigen alle einen ähnlichen Verlauf wie die in Abb. 1 wiedergegebene Kurve aus Müllers Arbeit. (Öffnung von 16,95 mm Durchmesser, also $y = 138$.)

In den letzten drei gemessenen Kurven (Abb. 2, 3 und 4) treten zum Unterschied von allen vorhergehenden Kurven feinere Strukturen und merkwürdige Unregelmäßigkeiten auf. Die Durchmesser der Öffnungen waren:

Abb. 2: 12,34 mm ($y = 72$),

Abb. 3: 10,14 mm ($y = 49$),

Abb. 4: 6,96 mm ($y = 16$).

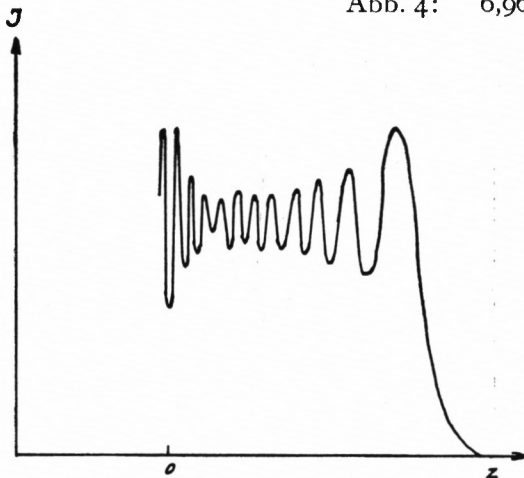


Abb. 1 $d = 16,95$ mm $y = 138$

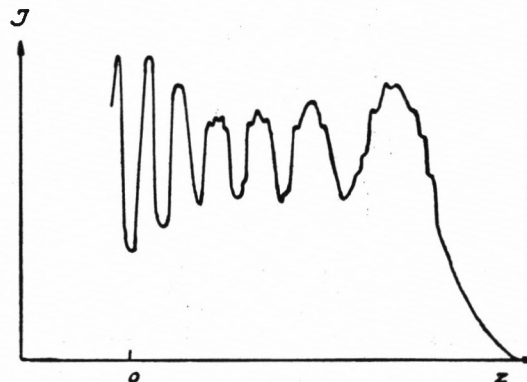


Abb. 2 $d = 12,34$ mm $y = 72$

Müller erwähnt, daß auch Aufnahmen Arkadiews die gleichen Unregelmäßigkeiten zeigen, vermag sie aber nicht zu deuten.

Zu einer Deutung führt folgende Überlegung: Nach Lommels Theorie treten bei der Fresnelschen Beugung an der kreisförmigen Öffnung überall dort Extremwerte der Intensitätskurve auf, wo im Fraunhoferschen Fall die Minima der Intensitätskurve liegen.

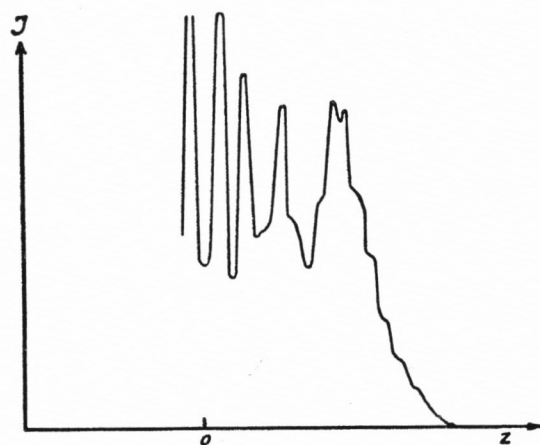


Abb. 3 $d = 10,14 \text{ mm}$ $y = 49$

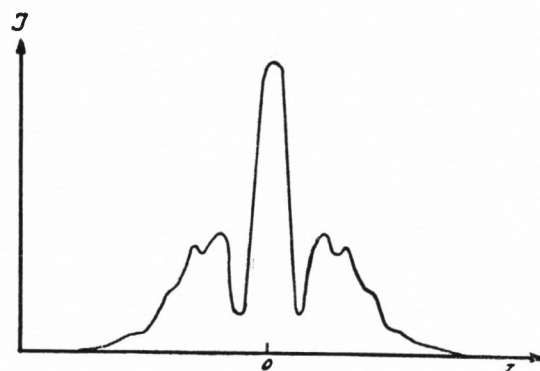


Abb. 4 $d = 6,96 \text{ mm}$ $y = 16$

Abb. 1–4 Beugungsbilder an runden Öffnungen (d = Durchmesser; $y/2\pi$ = Zahl der beteiligten Fresnelzonen)

Diese liegen aber an den Stellen $I_1(z) = 0$, also an den Nullstellen der Bessel-Funktion I_1 . Man kann daher leicht angeben, wo nach der Theorie Maxima oder Minima der Intensitätskurve liegen. Man braucht nur in Müllers Kurven auf der Abszisse von der Mitte der Beugungsfigur ausgehend die Nullstellen von I_1 aufzutragen. Allerdings erhält man so nur etwa die Hälfte aller Extremwerte. Die Lage der andern Extremwerte läßt sich nur durch umständliche Rechnung ermitteln.

Abb. 5 und 6 zeigen die beiden letzten Kurven der Arbeit von Müller (Abb. 3 und 4). Die gestrichelten Linien liegen an den Nullstellen von I_1 . Es wurde dabei so normiert, daß

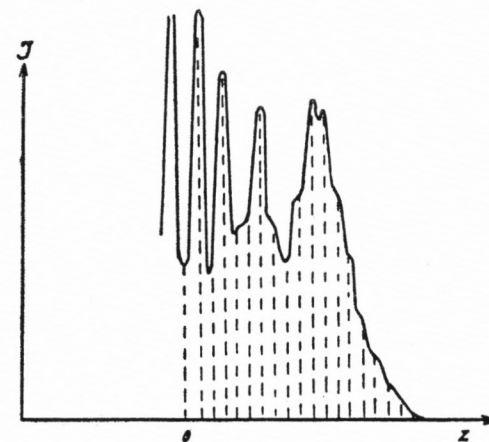


Abb. 5

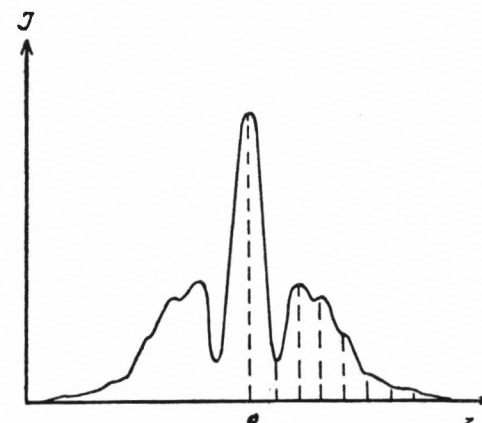


Abb. 6

In die Kurven von W. J. Müller eingezeichnete Lagen der Extremwerte I_1

die erste Nullstelle von J_1 mit dem ersten Extremwert der Intensitätskurve zusammenfällt. Das Ergebnis ist überzeugend: Überall dort, wo die Unregelmäßigkeiten auftreten, liegen nach der Theorie Extremwerte. Man kann also wohl annehmen, daß gerade die letzten Kurven der Müllerschen Arbeit in vollem Einklang mit der Theorie sind. Dagegen sind Kurven vom Typus der Kurve Abb. 1 unmöglich. Hier reicht das Auflösungsvermögen der Anordnung offenbar nicht aus, um alle Feinheiten der Beugungsfigur zu zeigen. Ein monotoner Intensitätsabfall z. B., wie ihn diese Kurve zeigt, ist nach der Theorie nicht zu erwarten, eben weil an jeder Nullstelle der Bessel-Funktion ein Extremwert liegen muß. Wie die Abb. 2, 3 und 4 zeigen, treten mit abnehmender Öffnung die Unregelmäßigkeiten deutlicher in Erscheinung.

Einige Intensitätskurven Müllers zeigen tatsächliche Abweichungen von der Theorie. Bei der Beugung an der kreisförmigen Öffnung ist im Zentrum der Beugungsfigur die Intensität in den Minimis nach der Theorie gleich Null. In den Kurven Müllers ist dies nicht der Fall (Abb. 1, 2 und 3).

Diese Abweichungen lassen sich entweder durch Lichtstreuung in der Platte während der Aufnahme oder durch zu langen Photometerspalt beim Photometrieren erklären.

IV

Für die Beugung am Spalt wurde von Lommel (2) eine Reihe von Fällen numerisch durchgerechnet und graphisch dargestellt. Seine Rechnung ist aber nicht bis zu hinreichend hohen z -Werten durchgeführt, so daß vor allem bei den Fällen mit höheren y -Werten der Verlauf der Intensitätskurve in der Nähe der geometrischen Schattengrenze nicht ersichtlich ist.

Es wurde deshalb ein typisch Fresnelscher Fall ($y = 50$) bis über die Schattengrenze hinaus gerechnet. Lommel gibt für die Berechnung der Intensität M^2 folgende Formeln an:

$$M^2 = \frac{\pi}{2y} (U_{\frac{1}{2}}^2(y, z) + U_{\frac{3}{2}}^2(y, z))$$

$$\left. \begin{aligned} U_{\frac{1}{2}}(y, z) &= \frac{1}{\sqrt{2}} [(A - A') \cos \alpha + (B - B') \sin \alpha] \\ U_{\frac{3}{2}}(y, z) &= \frac{1}{\sqrt{2}} [(A - A') \sin \alpha - (B - B') \cos \alpha] \end{aligned} \right\} \text{für } y < z$$

$$\left. \begin{aligned} U_{\frac{1}{2}}(y, z) &= \frac{1}{\sqrt{2}} [(A + A') \cos \alpha + (B + B') \sin \alpha] \\ U_{\frac{3}{2}}(y, z) &= \frac{1}{\sqrt{2}} [(A + A') \sin \alpha - (B + B') \cos \alpha] \end{aligned} \right\} \text{für } y > z$$

$$A = \frac{1}{2} \int_0^{\sigma} J_{-\frac{1}{2}} d\zeta \qquad A' = \frac{1}{2} \int_0^{\delta} J_{-\frac{1}{2}} d\zeta$$

$$B = \frac{1}{2} \int_0^{\sigma} J_{\frac{1}{2}} d\zeta \quad B' = \frac{1}{2} \int_0^{\delta} J_{\frac{1}{2}} d\zeta$$

$$\sigma = \frac{(y+z)^2}{2y} \quad \delta = \frac{(y-z)^2}{2y} \quad \alpha = \frac{y^2+z^2}{2y}$$

A, A', B, B' sind Fresnelsche Integrale, die hier durch Bessel-Funktionen mit halbzahligem Index ausgedrückt sind.

Da die Fresnelschen Integrale nur bis zum Argument $z = 50$ tabuliert sind (Jahnke-Emde, Funktionentafeln), bei Berechnung der Intensitätskurve aber Fresnelsche Integrale bis zum Argument $z = 121$ vorkommen, mußten die Integrale für die Argumente $z > 50$ berechnet werden. Es wurden für große z -Werte die folgenden Näherungsformeln benützt:

$$\frac{1}{2} \int_0^z J_{-\frac{1}{2}} dz = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{2\pi z}} \left(\sin z - \frac{\cos z}{2z} \right)$$

$$\frac{1}{2} \int_0^z J_{\frac{1}{2}} dz = \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{2\pi z}} \left(\cos z + \frac{\sin z}{2z} \right)$$

Die Formeln ergeben sich aus zwei bei Lommel angegebenen Reihen (Reihe von Cauchy und Reihe von Gilbert) durch Vernachlässigung der höheren Glieder. Die Näherungsformeln geben für $z = 50$ die Werte der Fresnelschen Integrale auf vier Stellen genau, für größere z -Werte ist der Fehler noch kleiner.

Die vorkommenden kleinen Werte der Fresnelschen Integrale ($z < 1$) wurden graphisch interpoliert.

Die Intensitäten wurden für die Werte $z = 1, 2, \dots, 50$ gerechnet. Außerdem wurde die Steigung der Intensitätskurve in den angegebenen Punkten gerechnet, wofür Lommel die Formel angibt:

$$\frac{\partial M^2}{\partial z} = -\frac{\pi}{y^{\frac{3}{2}}} z^{\frac{1}{2}} J_{\frac{1}{2}} U_{\frac{3}{2}}$$

Weiter wurde die Lage der Extremwerte festgelegt. Sie liegen an den Stellen $z = 0, \pi, 2\pi, \dots$, und an den Stellen, wo die Funktion $U_{\frac{3}{2}}(y, z)$ Nullstellen hat. Diese wurden graphisch festgelegt.

Außer der Kurve $y = 50$ wurde die Kurve $y = 15$, die von Lommel bis $z = 12$ gerechnet wurde, über die Schattengrenze hinaus bis $z = 23$ gerechnet (Abb. 7 und 8, Tab. 1 und 4 im Anhang).

I_0 bedeutet in den Abbildungen die Intensität der ungestörten Welle.

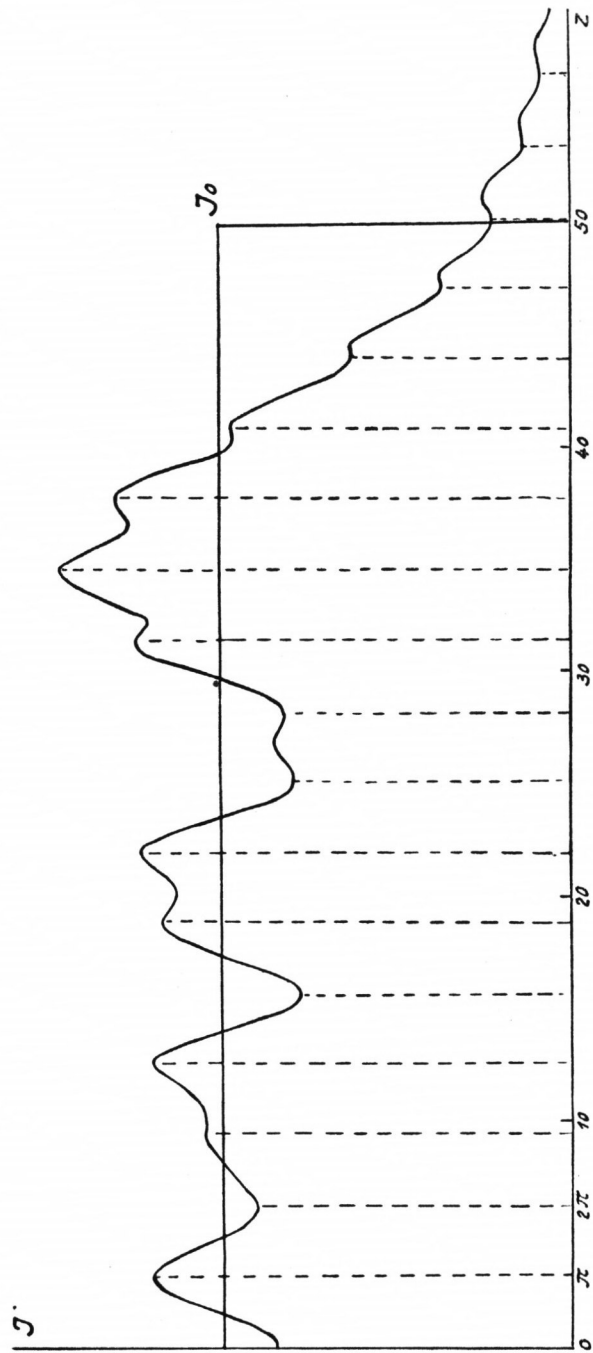


Abb. 7 Neuberechnete Intensitätskurve $J = f(z)$ für $y = 50$

Zur Messung der Beugungserscheinung wurde die in Abb. 9 skizzierte Anordnung verwandt.

Das Licht einer Quecksilberdampf Lampe (Q) fällt durch ein Filter (F) auf den Beleuchtungsspalt (S_1) und wird am Beugungsspalt (B) gebeugt. In der Beobachtungsebene befindet sich ein weiterer Spalt (S_2), der an der Vorderseite eines Multipliers (M) befestigt ist. Der Multiplier läßt sich in der durch Pfeile angedeuteten Richtung mit einer Mikrometerschraube meßbar verschieben. Als Beleuchtungs- und Beugungsspalt wurden zwei in der

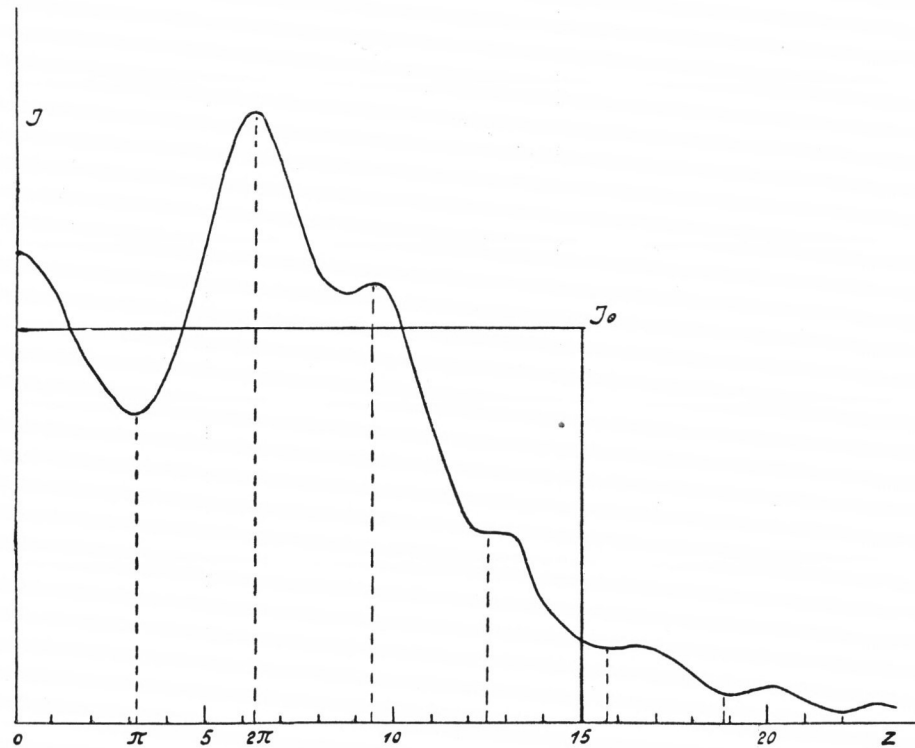


Abb. 8 Neuberechnete Intensitätskurve $J = f(z)$ für $y = 15$

Institutswerkstatt sehr exakt gearbeitete Spalte verwendet. Sie waren je 5 cm lang, die Breite verstellbar. Der Beugungsspalt zeigte bei hundertfacher Vergrößerung noch vollkommen glatte Ränder. Die beiden Backen waren, soweit sich das prüfen läßt, sehr genau parallel zueinander.

Die Quecksilberdampf Lampe (Type 250 S von Heraeus) befand sich in einem lichtdichten Gehäuse. Sie wurde am Gleichstromnetz mit ca. 2,3 A betrieben. Um wenigstens eine grobe Stabilisierung des Lampenstromes zu erreichen, wurde ein Teil des erforderlichen Vorwiderstandes durch zwei hintereinandergeschaltete Eisenwasserstoffwiderstände gebildet. Im Gegensatz zur photographischen Methode stören bei Intensitätsmessungen mit dem

Multiplier Intensitätsschwankungen der Lampe die Messung sehr erheblich. Immerhin war die Stabilität der Lampe unter den beschriebenen Verhältnissen erstaunlich gut, jedenfalls viel besser als bei Wechselstrombetrieb. Sprunghafte Intensitätsänderungen über 2% traten nur sehr selten auf. Kleine, kurzzeitige Intensitätsschwankungen kann man dadurch unterdrücken, daß man am Multiplier ein Galvanometer mit relativ langer Schwingungsdauer verwendet. Am meisten störten langsame Intensitätsänderungen der Lampe, die sich auch nach langer Einbrennzeit nicht vermeiden ließen. Sie lagen in der Größenordnung von einigen Prozent bei einer Meßzeit von etwa zwei Stunden. Ein Teil dieser Änderungen rührt vom Filter her, dessen Durchlässigkeit mit steigender Temperatur abnimmt.

Um die Auswirkung dieser langsamen Intensitätsschwankungen auf die Meßergebnisse auszuschalten, wurden zunächst nur möglichst schnell die Intensitäten der Maxima und Minima ausgemessen. Diese Intensitäten wurden so lange gemessen, bis sie auf mindestens 0,5% sicher waren. Meßreihen mit Schwankungen wurden verworfen. Um gleichzeitig die Symmetrie des Beugungsbildes zu prüfen, wurde die ganze Kurve – beide Seiten von der Mitte des Beugungsbildes aus – gemessen. Erst im Anschluß an diese Messung wurde von

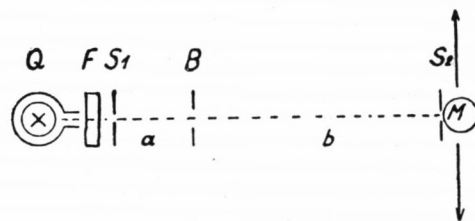


Abb. 9 Versuchsanordnung

der Mitte aus eine Hälfte der Beugungsfigur ohne Rücksicht auf Schwankungen gemessen. Diese Kurve wurde dann mit Hilfe der vorher festgelegten Punkte korrigiert.

Es wurde bei zwei verschiedenen Wellenlängen gemessen, $\lambda = 5461 \text{ \AA}$ und $\lambda = 3650 \text{ \AA}$. Zur Ausfilterung der grünen Linie wurde das Filter B von Zeiß und ein zusätzliches Neodymfilter, für die ultraviolette Linie ein UG 1 (0,2 cm) und ein BG 12 (0,4 cm) von Schott verwendet. – Die Monochromasie wurde durch einen Quarzmonochromator in Verbindung mit dem Multiplier geprüft.

Die Intensitätsmessung erfolgte mit dem Multiplier 931 A der RCA. In Vorversuchen wurde festgestellt, daß mit photographischer Intensitätsmessung auch bei aller Sorgfalt kaum eine größere Genauigkeit als 5% zu erreichen ist. Vor allem aber störte die Schwerfälligkeit der photographischen Methode. Die Einstufung auf vollkommene Symmetrie z. B. erfordert unter Umständen zehn Aufnahmen von je mehreren Stunden Belichtungszeit. Mit dem Multiplier läßt sich dieselbe Justierung mit weit größerer Genauigkeit in etwa einer Viertelstunde erledigen. Auch die großen Intensitätsunterschiede zwischen Schattengebiet und zentralem Gebiet der Beugungsfigur werden vom Multiplier viel besser bewältigt als von der Platte, so daß mit dem Multiplier die feinen Strukturen im Schattengebiet weit besser wiedergegeben werden als durch die Platte.

Der Multiplier wurde in Verbindung mit einem Galvanometer von etwa 10^{-9} A pro Skalenteil Empfindlichkeit und 5 sec Schwingungsdauer benutzt. Es zeigte sich, daß die Anwendung einer höheren Spannung als etwa 90 V pro Stufe unzweckmäßig ist. Die Dun-

kelstromschwankungen werden dann so störend, daß die höhere Empfindlichkeit keine erhöhte Genauigkeit ergibt. Der Gleichstromanteil des Dunkelstromes betrug bei 90 V pro Stufe je nach Raumfeuchtigkeit etwa $5 \cdot 10^{-9}$ bis 10^{-8} A.

Die Spannung für den Multiplier muß sehr konstant sein. Es wurde deshalb ein stabilisiertes Netzgerät gebaut, das bei Netzspannungsschwankungen von $\pm 10\%$ die Ausgangsspannung (900 V) auf etwa 0,05 V auch über längere Zeit konstant hält. Das Schaltbild des Netzgerätes findet sich im Anhang.

Die Proportionalität zwischen Lichtintensität und Galvanometerausschlag wurde für das System Netzgerät–Multiplier–Galvanometer geprüft. Zur meßbaren Lichtschwächung dienten drei Polarisatoren, deren mittlerer gedreht werden konnte (siehe dazu die Arbeit von Steel (11)). Drei Polarisatoren sind erforderlich, damit sich keine Intensitätsfehler ergeben, falls die Lichtquelle teilweise polarisiert ist, oder falls die Empfindlichkeit der Multiplikerkathode von der Polarisationsrichtung des Lichtes abhängt.

Als Lichtquelle diente die Hg-Lampe mit einer kleinen, kreisförmigen Blende (Durchmesser etwa 0,5 mm). Der Abstand zum ersten Polarisator betrug etwa 2 m. Vor dem Multiplier befand sich eine Blende von etwa 1 mm Durchmesser, so daß hinreichende Parallelität des Lichtes gewährleistet war. Die Polarisatoren wurden durch Autokollimation senkrecht zur optischen Achse gestellt. Zunächst wurden alle Polarisatoren bei möglichst großem Galvanometerausschlag parallel gestellt, dann wurde der mittlere, mit Teilkreis versehene Polarisator in kleinen Intervallen gedreht, und bei jeder Stellung der zugehörige Galvanometerausschlag abgelesen. Bezeichnet α den Winkel, um den der mittlere Polarisator aus seiner Anfangstellung verdreht wurde, so gilt für die Intensität I

$$I \sim \cos^4 \alpha$$

Die Messung wurde bei einer Stufenspannung von 90 V und bei Ausschlägen durchgeführt, wie sie den Intensitäten bei der Beugungsfigur entsprachen. Abb. 10 zeigt das Ergebnis. Innerhalb der Meßgenauigkeit ergibt sich vollkommene Proportionalität zwischen Intensität und Ausschlag.

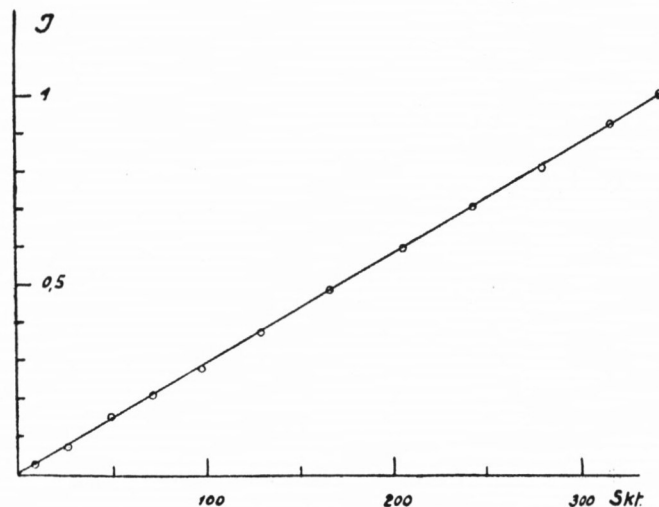


Abb. 10 Prüfung der Proportionalität

Die Empfindlichkeit der Multiplikerkathode ist nicht für alle Stellen der Kathode gleich. Das Verhältnis der Empfindlichkeit zwischen oberem und unterem Kathodenrand liegt teilweise in der Größenordnung 1 : 2. In seitlicher Richtung sind die Empfindlichkeitsunterschiede wesentlich kleiner. Bei der Messung der Beugungsfigur würden durch unterschiedliche Empfindlichkeit der Kathode Meßfehler entstehen, denn der durch den Multiplierspalt ausgeleuchtete Streifen der Kathode verlagert sich beim Durchmessen der Beugungsfigur etwas (etwa um 0,1 mm). Man müßte dann hinter dem Multiplierspalt eine Opalglas-scheibe anbringen, um die ganze Kathode möglichst gleichmäßig auszuleuchten. Eine Überprüfung ergab aber, daß die kleine Verschiebung keinen merklichen Einfluß auf die Messung hatte.

VI

Die Justierung der Beugungsanordnung soll möglichst alle Voraussetzungen erfüllen, die der theoretischen Ableitung zugrunde liegen. Das bedeutet im einzelnen folgendes: Alle drei Spalte sollen möglichst genau parallel zueinander sein und senkrecht auf der optischen Achse stehen (optische Achse ist die Verbindungslinie von der Mitte des Beleuchtungspaltes zur Mitte der Beugungsfigur). Die geometrischen Größen müssen genau so eingestellt sein, daß sich der gerechnete Fall ($\gamma = 50$ oder $\gamma = 15$) ergibt. Der Beleuchtungspalt muß so eng sein, daß die bekannte Kohärenzbedingung möglichst gut erfüllt ist, der Multiplierspalt muß so schmal sein, daß der integrierende Effekt, den er bewirkt, vernachlässigbar klein ist.

Diese Forderungen wurden in der folgenden Weise erfüllt: Die ganze Anordnung wurde auf einer langen optischen Bank aufgebaut. Zunächst wurde der Beugungsspalt annähernd auf die gewünschte Breite eingestellt (etwa 1 mm) und unter dem Komparator möglichst genau vermessen. Diese Messungen waren auf etwa 3μ reproduzierbar. Dann wurden Beleuchtungsspalt, Beugungsspalt und Multiplierschlitten durch Autokollimation senkrecht zur optischen Achse gestellt. Anschließend wurde der Beugungsspalt parallel zum Beleuchtungsspalt gestellt. Als Kriterium für die Parallelstellung diente die mit der Lupe beobachtete Beugungsfigur, die auf möglichst große Kontraste eingestellt wurde. Dann wurde der Beugungsspalt wieder entfernt und mittels einer Linse ein Bild des Beleuchtungspaltes auf den Multiplierspalt entworfen. Der Multiplierspalt wurde nun so lange gedreht, bis er parallel zum Bild des Beleuchtungspaltes war. Dies ließ sich am Verschwinden des Bildes gut mit einer Lupe beobachten, wenn der Multiplierspalt über das Bild hinweggedreht wurde. Dann wurde der Beugungsspalt wieder auf die optische Bank gebracht und zum Schluß wurden die richtigen Entfernungen zwischen Beugungsspalt und Beleuchtungsspalt einerseits und zwischen Beugungsspalt und Multiplierspalt andererseits eingestellt.

a betrug etwa 6 cm und wurde mit einer Schublehre auf etwa 0,1 mm genau eingestellt,

b betrug etwa 100 cm und wurde mit einem Stahlbandmaß auf etwa 0,5 mm genau eingestellt.

Die so erreichten Intensitätskurven waren im allgemeinen nicht ganz symmetrisch, vielmehr waren noch geringfügige seitliche Verschiebungen des Beugungspaltes erforderlich, um vollkommene Symmetrie zu erreichen.

Weiter zeigte sich, daß die Kurven von Anfang an nie genau dem gewünschten y -Wert entsprachen. Es wurde daher planmäßig der Abstand zwischen Beugungsspalt und Multiplier variiert bis die optimale Annäherung an die theoretische Kurve erreicht war.

Der Grund für die zunächst auftretende Abweichung ist die ungenügende Genauigkeit, mit der sich die Breite des Beugungsspaltess bestimmen ließ. Die in Abb. 15 wiedergegebene Meßreihe wurde mit den folgenden Werten durchgeführt:

$$\begin{aligned} a &= 58,1 \text{ mm,} \\ b &= 1098,5 \text{ mm,} \\ 2r &= 0,9735 \text{ mm.} \end{aligned}$$

Mit diesen Werten ergab sich die beste Übereinstimmung der gemessenen Kurve mit der theoretischen Kurve $y = 50$. Berechnet man y aus den angegebenen Werten, so ergibt sich nur 49,47. Damit sich der richtige Wert ergibt, müßte die Spaltbreite um etwa 5μ vergrößert werden. Dieser Wert liegt aber durchaus innerhalb der Meßgenauigkeit. Die Messung der Spaltbreite war ja nur auf etwa 3μ reproduzierbar. Die systematischen Fehler beim Einstellen auf die Kante können durchaus größer gewesen sein, zumal auch kleine Abweichungen von der Parallelität, kleine Scharten usw. möglicherweise eine andere „effektive Spaltbreite“ ergeben, als sie gemessen wurde.

Der Korrektur der Spaltbreite um 5μ ist eine Änderung von a um $0,55 \text{ mm}$ bzw. eine Änderung von b um 211 mm äquivalent. Eine übertrieben genaue Einstellung der Werte a und b ist also unsinnig, solange die Spaltbreite nicht genauer gemessen werden kann.

VII

Die Theorie setzt eine unendlich schmale Lichtquelle voraus. Es soll im folgenden betrachtet werden, welche Abweichungen zu erwarten sind, wenn statt dessen ein Beleuchtungsspalt verwendet wird.

Zunächst kann man den Spalt im Experiment schon aus Intensitätsgründen nicht beliebig klein machen. Bei den vorliegenden Messungen betrug die Breite des Beleuchtungsspaltess etwa $5 \div 7 \mu$. Die Auswirkung dieser endlichen Spaltbreite auf die Beugungsfigur wird weiter unten behandelt.

Eine unendlich schmale Lichtquelle würde mit jedem ihrer Punkte den Beugungsspalt vollkommen gleichmäßig ausleuchten, sofern der Abstand der Lichtquelle hinreichend groß ist gegen die Breite des Beugungsspaltess. Bei Verwendung eines Beleuchtungsspaltess liegen die Verhältnisse anders. Jeder leuchtende Punkt der Quecksilberdampf Lampe ruft in der Ebene des Beugungsspaltess eine Fresnelsche Beugungsfigur hervor. Bei sehr schmalen Beleuchtungsspalt liegt nahezu Fraunhofersche Beugung vor und der Beugungsspalt wird durch einen Ausschnitt der nullten Ordnung beleuchtet. Bei Beleuchtungsspaltess von größerer Öffnung ergeben sich Fresnelsche Beugungserscheinungen. Abb. 11 zeigt die Ausleuchtung des Beugungsspaltess, wie sie durch einen auf der optischen Achse gelegenen

Punkt der Hg-Lampe bei verschiedenen Spaltweiten des Beleuchtungsspalt bewirkt wird. Der Berechnung dieser Kurven lagen die folgenden Werte zugrunde, die auch im Experiment etwa verwirklicht waren:

Abstand Lampe – Beleuchtungsspalt	100 mm,
Abstand Beleuchtungsspalt – Beugungsspalt . . .	50 mm,
Spaltbreite des Beugungsspalt	1 mm,
Spaltbreite des Beleuchtungsspalt $7\ \mu$, $180\ \mu$, $370\ \mu$.	

Es ist bemerkenswert, daß keineswegs nur leuchtende Punkte aus der Umgebung der optischen Achse mit merklicher Intensität zur Beleuchtung des Beugungsspalt beitragen.

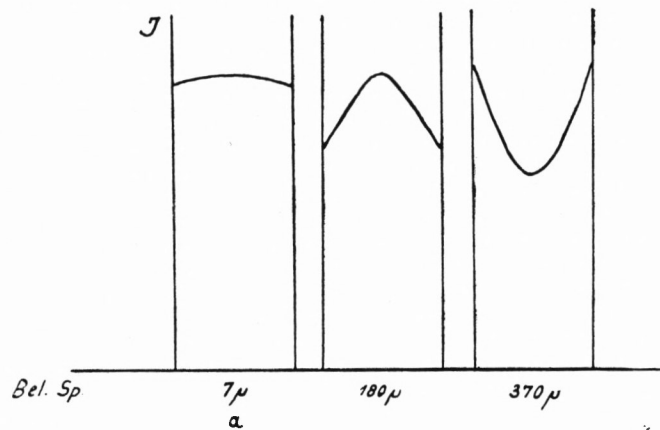


Abb. 11 Ausleuchtung des Beleuchtungsspalt bei drei Spaltbreiten

Bei sehr schmalen Beleuchtungsspalt, also sehr breiter nullter Ordnung der Fraunhofer'schen Beugungsfigur, sind auch sehr weit von der optischen Achse entfernte Punkte an der Beleuchtung beteiligt. Sie leuchten den Spalt unsymmetrisch aus. Da nur das Licht, das jeweils von einem Punkt der Lichtquelle stammt, kohärent ist, bildet sich für jeden Punkt der Lichtquelle in der Beobachtungsebene eine Interferenzfigur aus. Alle diese Figuren überlagern sich, wobei sich nur die Intensitäten addieren. Keine Figur zeigt aber wegen der ungleichmäßigen Spaltausleuchtung streng den theoretisch zu erwartenden Verlauf. Man darf nicht annehmen, daß die Überlagerung all dieser Kurven streng die theoretisch zu erwartende Intensitätskurve ergibt, wenigstens dann nicht, wenn die Lichtquelle relativ schmal ist. Sie war im vorliegenden Fall etwa 1 cm breit.

Um den Effekt, der durch ungleichmäßige Ausleuchtung des Beugungsspalt entsteht, wenigstens qualitativ zu studieren, wurde folgender Versuch angestellt: Es wurde durch einen Spalt ein Beugungsbild entworfen. Der Spalt wurde so schmal gemacht, daß sich nahezu der Fraunhofersche Fall ergab. Dieses Beugungsbild wurde nun zur Ausleuchtung eines zweiten Spalt verwandt, und zwar wurde dieser Spalt zunächst so in das Beugungsbild gesetzt, daß seine beiden Ränder mit je einem Minimum der Beugungsfigur zusammenfielen. In Abb. 12a ist dies schematisch verdeutlicht. Das Beugungsbild (Abb. 12b) hinter dem zweiten Spalt wurde gemessen. Es zeigt den gleichen Intensitätsverlauf, wie er auch bei Abwesenheit des zweiten Spalt vorhanden wäre. Der zweite Spalt stört die Lichtausbreitung überhaupt nicht, sofern die Intensität an seinen Rändern Null ist. Dies ist auch

nach der Fresnelschen Zonenkonstruktion ebenso wie nach der Vorstellung von der Randwelle verständlich. Immerhin ist bemerkenswert, daß man auf diese Weise etwa die nullte Ordnung einer Fraunhoferschen Beugungsfigur durch einen Spalt ausblenden kann, ohne daß Licht in den Schattenraum gebeugt wird.

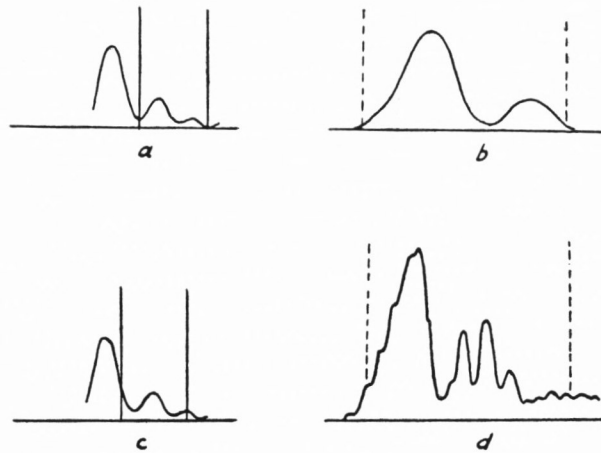


Abb. 12 a, c zwei Lagen des Beugungsbildes des ersten Spaltes auf der Ebene des zweiten (angedeuteten) Spaltes. b, d Intensitätsmessung hinter dem zweiten Spalt.

Anschließend wurde der zweite Spalt ohne Veränderung seiner Breite seitlich zum primären Beugungsbild verschoben, so daß seine Ränder nunmehr im Licht standen, wie dies schematisch in Abb. 12c dargestellt ist. Es ergab sich hinter dem zweiten Spalt das in Abb. 12d dargestellte Beugungsbild. Dem ursprünglichen Beugungsbild, dessen Verlauf auch hier noch deutlich zu erkennen ist, überlagert sich ganz ausgeprägt das Beugungsbild des zweiten Spaltes.

Betrachtet man nun die Ausleuchtungsverhältnisse, wie sie bei der Messung vorlagen (Abb. 11, 7μ), so kann man wohl annehmen, daß auf Grund der ungleichmäßigen Ausleuchtung ein Intensitätsabfall am Rand der Beugungsfigur zu erwarten ist. Er wurde tatsächlich in allen Fällen beobachtet.

Ein anderer Effekt des endlichen Beleuchtungsspalt machte sich im Verlauf der Messung sehr störend bemerkbar und erforderte eine Korrektur. Es soll einmal angenommen werden, daß der ursprünglich vorhandene Beleuchtungsspalt durch zwei zusätzliche Spalten erweitert wird (Abb. 13). Punkt A der Lichtquelle wird dann mit merklicher Intensität

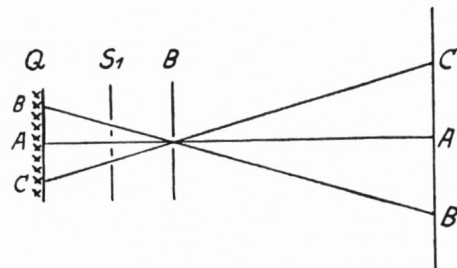


Abb. 13 Einfluß der Breite des Beleuchtungsspalt

nur über den mittleren Beleuchtungsspalt den Beugungsspalt ausleuchten, Punkt B über den oberen Spalt, Punkt C über den unteren Spalt. Offensichtlich ergeben sich in der Beobachtungsebene drei gegeneinander verschobene Interferenzfiguren, die sich rein intensitätsmäßig überlagern. Bei durchgehendem Beleuchtungsspalt überlagern sich unendlich viele derartige Interferenzfiguren. Sieht man davon ab, daß das Licht, das diese Figuren hervorruft, nicht ganz inkohärent ist und nimmt man an, daß alle diese Figuren gleich aussehen, was bei kleiner Spaltbreite des Beleuchtungsspaltes angenommen werden darf, so hat man also die Intensität von unendlich vielen, in einem bestimmten Bereich gegeneinander verschobenen Kurven zu addieren. Die entsprechende Integration der theoretischen Kurve wurde graphisch durchgeführt. Es wurden die Intensitätswerte der theoretischen Kurve in Intervallen von 0,1 zu 0,1 Einheiten der z -Achse aus der graphischen Darstellung (Abb. 7) entnommen. Für jeden Punkt der Intensitätskurve wurden die Ordinaten in einem Bereich $z - e$ bis $z + e$ addiert und anschließend das Ergebnis durch die Anzahl der Ordinatenwerte dividiert. Dies wurde für $e = 0,5$ und für $e = 1,2$ durchgeführt. Abb. 14 zeigt oben die gerechnete Kurve $y = 50$, unten die beiden „verwaschenen“ Kurven. Es zeigt sich, daß die Strukturen bei breitem Beleuchtungsspalt verwischt werden. Außerdem werden die Maxima gesenkt, die Minima gehoben.

Die Werte der verwaschenen Kurven sind im Anhang zusammengestellt (Tab. 2, 3, 5).

Im Experiment wurde der Fall der mittleren Kurve erreicht. Es wurde aber auch mit breiterem Beleuchtungsspalt eine Kurve gemessen, die der unteren Kurve der Abb. 14 entspricht.

VIII

Abb. 15 zeigt die theoretische (um $e = 0,5$ verwaschene) Kurve $y = 50$. Die eingetragenen Punkte sind die gemessenen Werte. Die Abweichungen überschreiten nirgends 2,5% und sind meist viel kleiner. Die Abweichung beim höchsten Intensitätsmaximum läßt sich durch die unvollkommene Spaltausleuchtung erklären. Nur links und rechts von der geometrischen Schattengrenze zeigt sich eine größere Abweichung (10%). Dieselbe Kurve wurde mit polarisiertem Licht gemessen, wobei die Polarisationsrichtung einmal senkrecht zu den Rändern des Beugungsspaltes war, das andere Mal parallel. Es zeigte sich keinerlei Änderung des Intensitätsverlaufes innerhalb der erreichten Meßgenauigkeit. Auch die Lage der Maxima und Minima blieb unverändert. Jedenfalls konnten keine Änderungen größer als 0,1% festgestellt werden. Insbesondere entsprach auch der Intensitätsverlauf in der Nähe der geometrischen Schattengrenze vollkommen dem der Abb. 15.

Abb. 16 zeigt eine stärker verwaschene Kurve ($y = 50$), die mit breiterem Beleuchtungsspalt gemessen wurde. Die stärkere Abweichung beim höchsten Maximum ist wegen der schlechteren Ausleuchtung des Beugungsspaltes zu erwarten (s. Abb. 11).

Abb. 17 stellt den Fall $y = 15$ (Kurve um $e = 0,3$ verwaschen) dar. Auch hier ist die gleiche Abweichung in der Nähe der geometrischen Schattengrenze angedeutet wie in Figur 15, jedoch liegt der Effekt an der Grenze der Meßgenauigkeit.

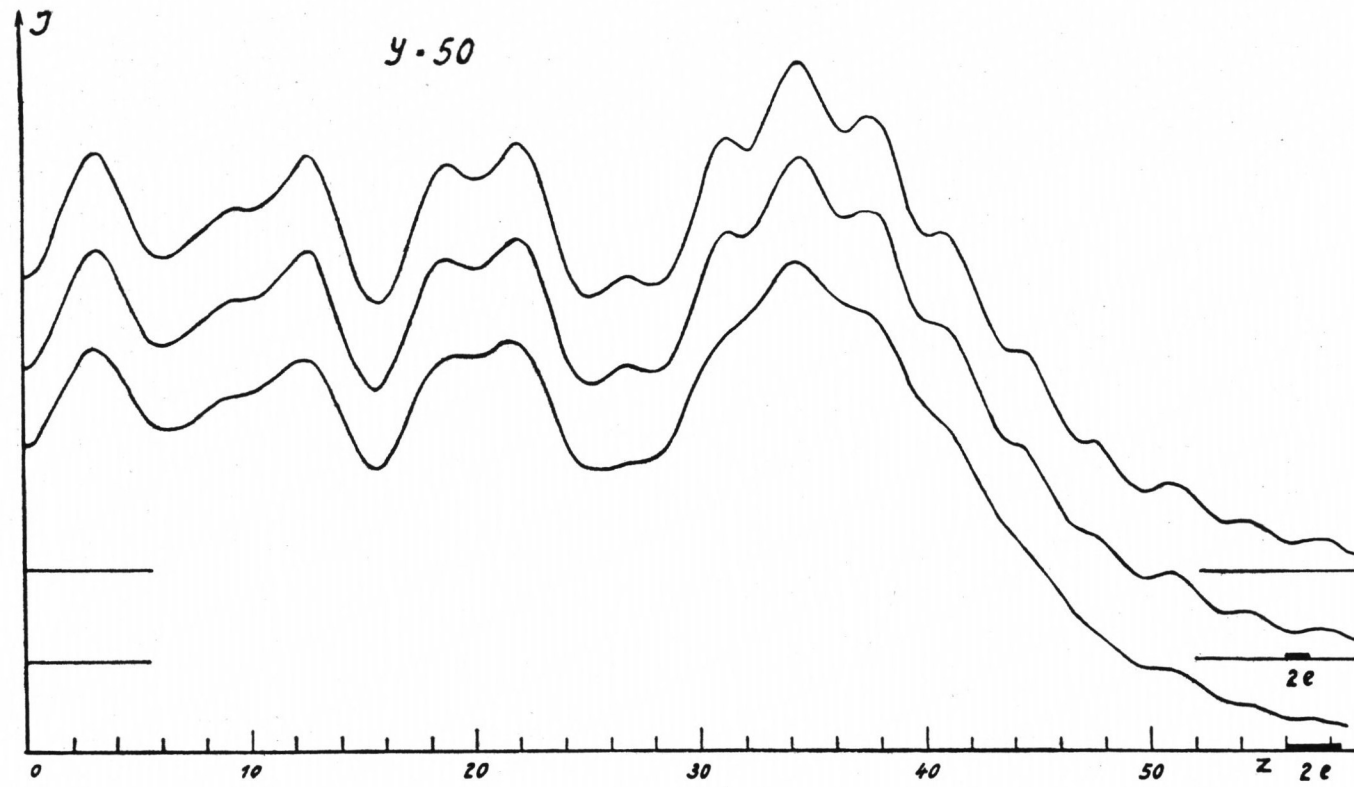


Abb. 14 Einfluß der Breite ($2e$) des Beleuchtungspaltes auf die Intensitätsverteilung im Beugungsbild

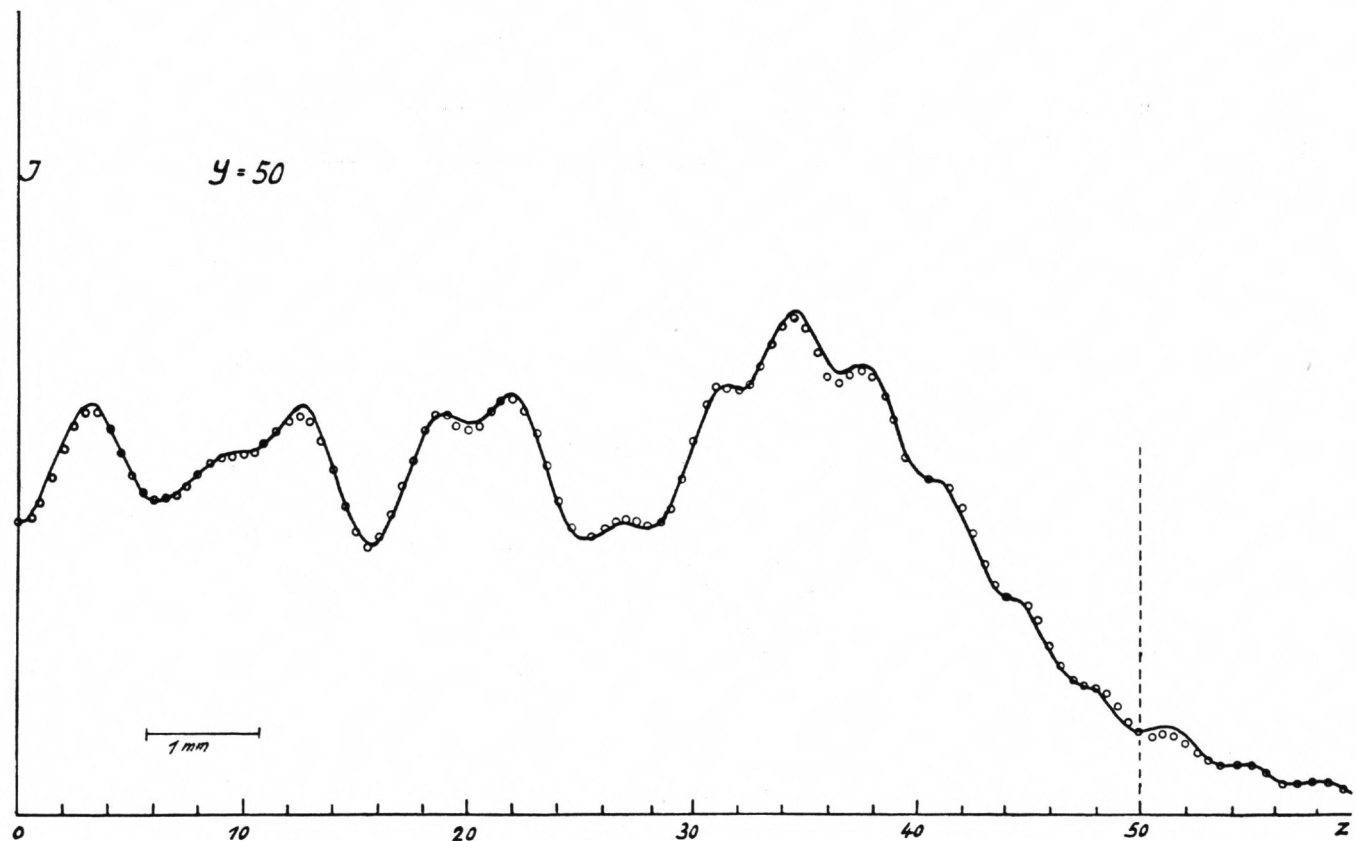


Abb. 15 Theoretische (mit $e = 0,5$) und gemessene Beugungsfigur. Versuchsbedingungen: $a = 58,1$ mm
 $b = 1098,5$ mm $d = 0,973$ mm $\lambda = 5461 \text{ \AA}$ Bel. Spalt etwa 7μ Aufn. Spalt etwa 50μ

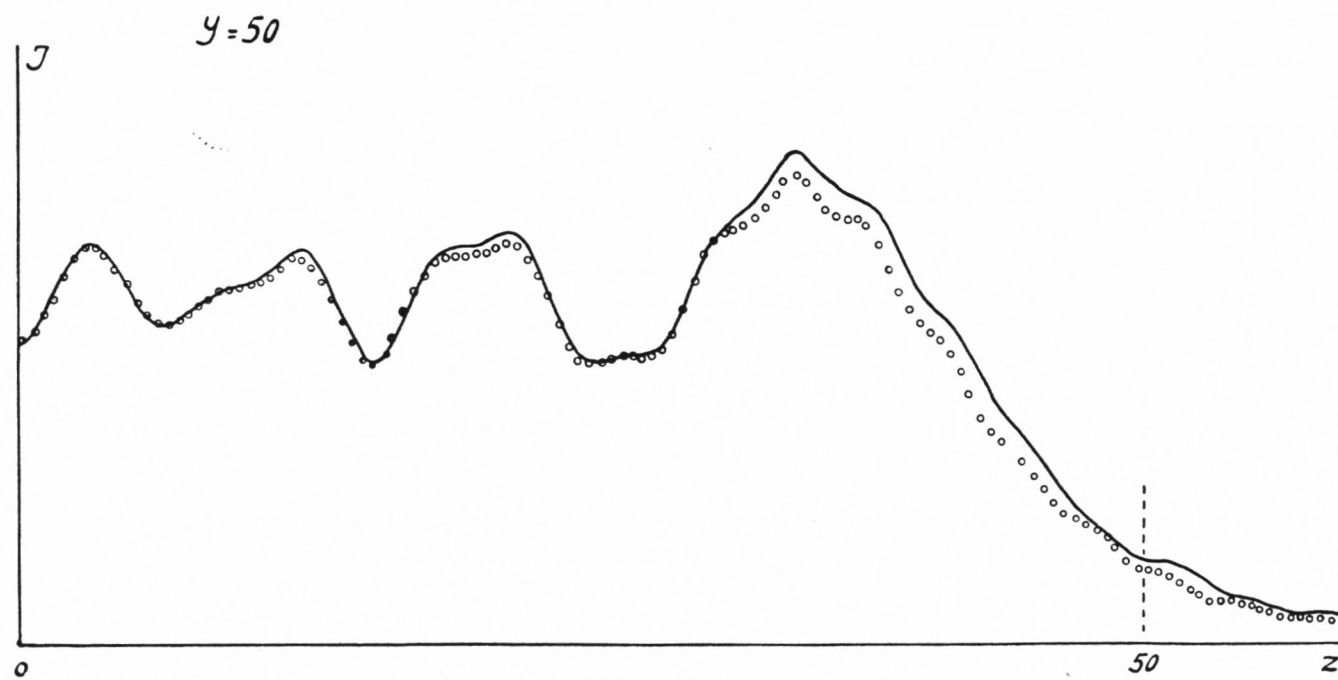


Abb. 16 Theoretische und gemessene Bewegungsfigur mit breitem Spalt ($e = 1,2$) (Versuchsbedingungen wie Abb. 15)

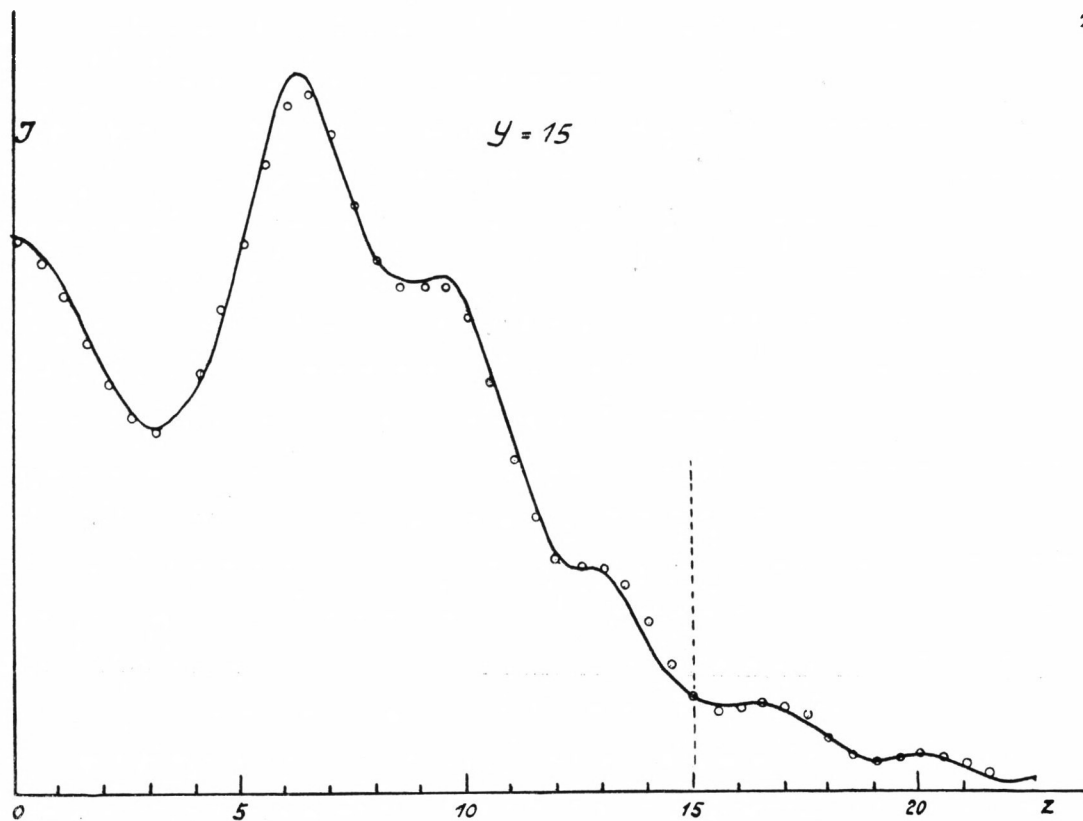


Abb. 17 Theoretische (mit $e = 0,5$) und gemessene Beugungsfigur. Versuchsbedingungen $a = 51,5 \text{ mm}$
 $b = 410 \text{ mm}$ $d = 0,489 \text{ mm}$ $\lambda = 5461 \text{ \AA}$ Bel. Spalt etwa 5μ Aufn. Spalt etwa 25μ

Abb. 18 zeigt eine Messung mit $\lambda = 3650 \text{ \AA}$. In der Nähe der Schattengrenze sind zum Vergleich die Punkte für die grüne Linie und für die ultraviolette Linie eingezeichnet. Die Abweichungen sind nicht auswertbar, sie zeigen nur die Reproduzierbarkeit der Justierung.

Es gelang nicht, die kleinen, aber ganz sicheren Abweichungen an der Schattengrenze zu klären. Vielleicht hängen sie von der speziellen Form der Spaltkanten ab. Möglicherweise ist auch eine Fremdschicht auf dem Spalt verantwortlich. Derartige Schichten sind auf alten Spalten sicher anzunehmen.

ZUSAMMENFASSUNG

1. Es wurden ungeklärte Abweichungen, die W. J. Müller bei Untersuchung Fresnel'scher Beugungserscheinungen an der kreisförmigen Öffnung fand, geklärt: Die Abweichungen entsprechen der Lommelschen Theorie.

2. Nach der Lommelschen Theorie wurde die Beugungserscheinung am Spalt für einen weit vom Fraunhoferschen Grenzfall entfernten Fall ($y = 50$) bis über die geometrische Schattengrenze hinaus gerechnet. Der Fall $y = 15$ wurde im Anschluß an die von Lommel gerechneten Werte bis ins Schattengebiet weitergerechnet.

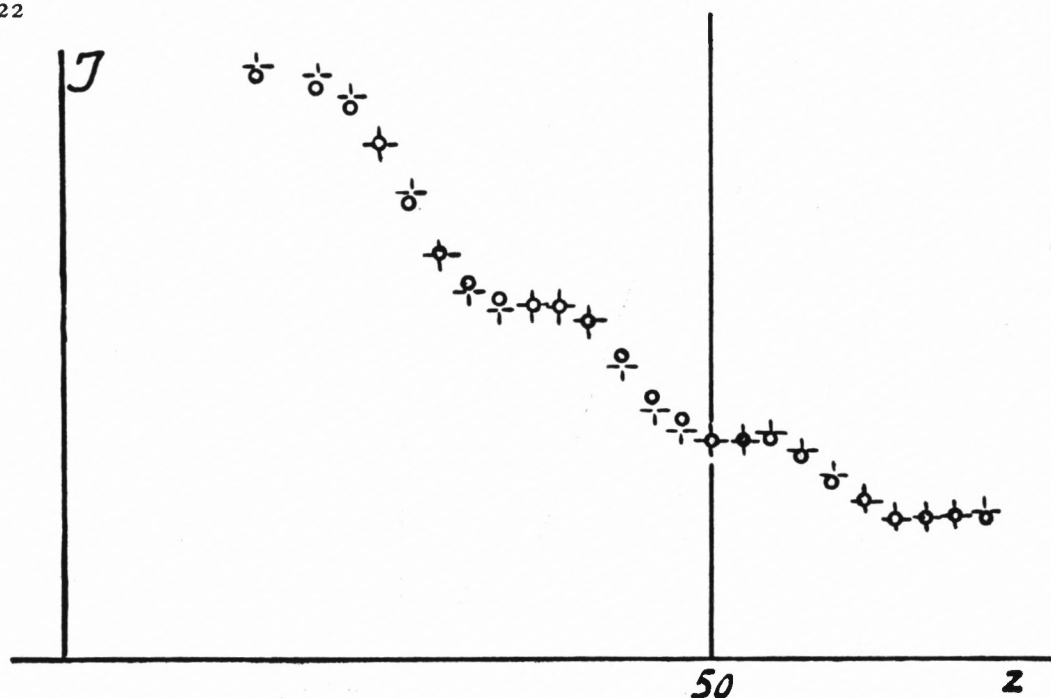


Abb. 18 Vergleich der Beugungsfigur von λ 5461 (+) und λ 3650 (○)
im Bereich $z = 43$ bis 55 (Schattengrenze, $y = 50$)

3. Die Abweichung, die durch die endliche Breite des Beleuchtungspaltes auftritt, wurde graphisch berücksichtigt.

4. Die mit der grünen Quecksilberlinie gemessenen Kurven stimmen mit den theoretischen Kurven gut überein. Nur an wenigen Stellen zeigen sich Abweichungen. Sie betragen in unmittelbarer Nähe der Schattengrenze etwa 10%, sonst überschreiten sie nirgends den Betrag von 2,5%.

5. Messungen mit polarisiertem Licht und mit ultraviolettem Licht ergaben keine über die Meßgenauigkeit hinausgehende Abweichung von den anderen Kurven.

LITERATURVERZEICHNIS

1. Wilhelm Josef Müller, Dissertation Bonn. 1935.
3. Lommel, Abh. d. Bayer. Akad. 15, S. 233. 1884. – Abh. d. Bayer. Akad. 15, S. 531. 1886.
3. Fresnel, Oeuvres complètes, t. 1, S. 247. 1818.
4. Sommerfeld, Math. Ann. 47, S. 312. 1896. – Zeitschr. f. math. Physik, Bd. 46. S. 11. 1901.
5. Schwarzschild, Math. Ann. 55, S. 177. 1902.
6. Abria, Journal de Math. de Liouville IV, S. 248. 1838.
7. Ignatowsky, Ann. d. Phys. 23, S. 875. 1907.
8. Arkadiew, Phys. Zeitschr. 14, S. 832. 1913.
9. Wilberforce, Phil. Mag. 13, S. 154. 1932
10. Wilhelm Müller, Ann. d. Phys., Bd. 11, S. 177. 1931.
11. Steel, Journ. opt. Soc. 41, S. 223. 1951.

ANHANG

A. NETZGERÄT (Abb. 19)

Das stabilisierte Netzgerät besteht aus einer Glimmlampenstufe ($8 \times OD3$) zur Vorstabilisierung und einer Röhrenstufe (EF 804) („Durchgriffsstabilisierung“).

Diese Art der Röhrenstabilisierung bietet zwei Vorteile:

1. Es ist möglich, das positive Ende des Ausgangswiderstandes zu erden. Dies ist unbedingt erforderlich, wenn am Multiplier mit einem Galvanometer gearbeitet wird.
2. Es können Eingangsspannungsschwankungen (wenigstens theoretisch) beliebig genau kompensiert werden. Man kann sogar überkompensieren, so daß bei steigender Eingangsspannung die Ausgangsspannung fällt und umgekehrt. Praktisch läßt sich ein einwandfreier Abgleich allerdings nur dann erreichen, wenn die Anodenspannungsänderungen an der Röhre nicht zu groß sind. Deshalb ist eine Vorstabilisierung erforderlich.

Der Hauptnachteil der Schaltung, ihr relativ hoher Innenwiderstand (etwa $25 \text{ K}\Omega$), fällt bei den kleinen Stromentnahmen durch die Multiplier (maximal 10^{-6} A) nicht ins Gewicht.

Die Stufe arbeitet folgendermaßen: Wenn die Eingangsspannung steigt, steigt auch die Anodenspannung an der Röhre, ebenso steigt die Spannung der Kathode gegen das Bezugspotential des Gitters, d. h. das Gitter wird negativer. Bei richtiger Dimensionierung des durch R_1 und R_2 gebildeten Spannungsteilers bleibt der Anodenstrom konstant. Die Röhrenstufe ist dann richtig abgeglichen, wenn

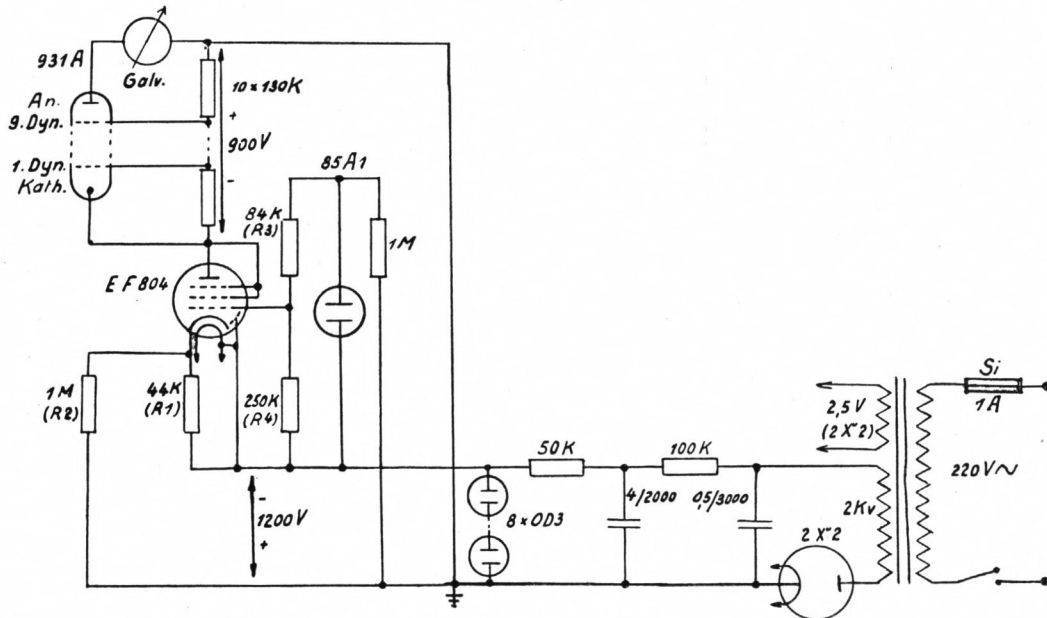


Abb. 19 Netzgerät-Schaltung

$$\frac{R_1}{R_2} = D \text{ ist.}$$

R_1 und R_2 siehe Zeichnung,

$$D = \left(\frac{\Delta U_g}{\Delta U_a} \right)_{\Delta \mathcal{I}_a = 0} = \text{Durchgriff.}$$

Die Einstellung der gewünschten Ausgangsspannung erfolgt am Gitter der Röhre durch entsprechende Dimensionierung des durch R_3 und R_4 gebildeten Spannungsteilers. Der Abgleich der Widerstände R_1 und R_2 hängt von der gewählten Ausgangsspannung ab. Kohleschichtpotentiometer ließen sich wegen ihres hohen Temperaturkoeffizienten und wegen der wechselnden Übergangswiderstände des Schleifers nicht verwenden. Alle Widerstände hinter der Glimmlampenstufe (OD 3) müssen Drahtwiderstände mit kleinem Temperaturkoeffizienten sein. An Stelle der 85 A 1 kann zur Erzeugung der konstanten Gitterspannung eine Anodenbatterie verwandt werden. Die Heizung der EF 804 erfolgte durch einen isoliert aufgestellten Akkumulator. Er führt gegen Erde ein hohes negatives Potential.

Die Glimmlampenstufe ($8 \times \text{OD } 3$) wird mit einem Querstrom von etwa 5 mA betrieben. Die Röhren werden zweckmäßig ausgesucht, da etwa 80% aller Röhren im Gebiet zwischen 3 und 7 mA Instabilitäten zeigen.

Die im Schaltbild angegebenen Werte für die Widerstände R_1, R_2, R_3, R_4 sind nur Anhaltswerte. Die genauen Werte sind von Röhre zu Röhre etwas verschieden.

B. TABELLEN DER BERECHNETEN BEUGUNGSKURVEN

Tabelle 1 (zu Abschnitt IV)

$$y = 50$$

z	$50 M^2$	z	$50 M^2$	z	$50 M^2$	z	$50 M^2$	z	$50 M^2$	z	$50 M^2$
0	13,05	10,5	16,24	21	18,03	31,5	19,28	42	13,46	52,5	2,85
0,5	13,22	11	16,54	21,5	18,74	32	18,73	42,5	12,21	53	2,25
1	14,22	11,5	17,10	22	19,10	32,5	18,90	43	10,90	53,5	2,03
1,5	15,67	12	17,82	22,5	18,50	33	20,13	43,5	10,00	54	2,13
2	16,81	12,5	18,51	23	17,35	33,5	21,54	44	9,71	54,5	2,15
2,5	18,00	13	18,25	23,5	15,65	34	22,21	44,5	9,66	55	2,05
3	18,50	13,5	17,00	24	13,96	34,5	22,78	45	9,22	55,5	1,76
3,5	18,42	14	15,52	24,5	12,80	35	22,26	45,5	8,05	56	1,37
4	17,53	14,5	13,94	25	12,30	35,5	21,10	46	7,03	56,5	1,20
4,5	16,33	15	12,63	25,5	12,30	36	20,14	46,5	6,25	57	1,25
5	15,28	15,5	12,02	26	12,70	36,5	19,52	47	5,76	57,5	1,39
5,5	14,43	16	12,12	26,5	13,08	37	19,85	47,5	5,70	58	1,41
6	14,00	16,5	12,94	27	13,13	37,5	20,23	48	5,48	58,5	1,30
6,5	14,00	17	14,31	27,5	12,93	38	20,06	48,5	4,80	59	0,95
7	14,33	17,5	15,96	28	12,75	38,5	19,25	49	4,12	59,5	0,75
7,5	14,80	18	17,12	28,5	12,88	39	17,68	49,5	3,68	60	0,77
8	15,21	18,5	17,95	29	13,40	39,5	16,08	50	3,51		
8,5	15,63	19	18,11	29,5	14,80	40	15,19	50,5	3,77		
9	16,00	19,5	17,75	30	16,42	40,5	15,00	51	4,00		
9,5	16,16	20	17,50	30,5	18,05	41	14,95	51,5	3,80		
10	16,14	20,5	16,60	31	19,13	41,5	14,50	52	3,42		

Tabelle 2 (zu Abschnitt VII) $y = 50$ (verwaschen, $e = 0,5$)

z	$50 M^2$	z	$50 M^2$	z	$50 M^2$	z	$50 M^2$	z	$50 M^2$	z	$50 M^2$
0	13,11	10,5	16,28	21	18,08	31,5	19,11	42	13,42	52,5	2,85
0,5	13,41	11	16,60	21,5	18,67	32	18,87	42,5	12,20	53	2,34
1	14,34	11,5	17,15	22	18,90	32,5	19,14	43	11,78	53,5	2,10
1,5	15,63	12	17,86	22,5	18,40	33	20,11	43,5	10,13	54	2,11
2	16,86	12,5	18,30	23	17,20	33,5	21,22	44	9,76	54,5	2,13
2,5	17,88	13	18,04	23,5	15,58	34	22,13	44,5	9,58	55	2,00
3	18,40	13,5	16,97	24	14,02	34,5	22,56	45	8,90	55,5	1,74
3,5	18,26	14	15,72	24,5	12,92	35	22,11	45,5	8,11	56	1,42
4	17,46	14,5	14,00	25	12,39	35,5	21,15	46	7,09	56,5	1,24
4,5	16,35	15	12,91	25,5	12,37	36	20,20	46,5	6,31	57	1,27
5	15,28	15,5	12,16	26	12,70	36,5	19,73	47	5,84	57,5	1,36
5,5	14,51	16	12,26	26,5	13,02	37	19,86	47,5	5,66	58	1,38
6	14,20	16,5	13,06	27	13,08	37,5	20,12	48	5,38	58,5	1,27
6,5	14,08	17	14,36	27,5	12,94	38	19,94	48,5	4,80	59	1,01
7	14,37	17,5	15,83	28	12,81	38,5	19,21	49	4,17	59,5	0,80
7,5	14,78	18	17,08	28,5	12,95	39	17,66	49,5	3,75	60	0,82
8	15,22	18,5	17,82	29	13,61	39,5	16,20	50	3,61		
8,5	15,62	19	17,98	29,5	14,83	40	15,32	50,5	3,76		
9	15,95	19,5	17,77	30	16,42	40,5	15,03	51	3,90		
9,5	16,12	20	17,58	30,5	17,97	41	14,88	51,5	3,85		
10	16,16	20,5	17,67	31	18,94	41,5	14,37	52	3,37		

Tabelle 3 (zu Abschnitt VII) $y = 50$ (verwaschen, $e = 1,2$)

z	$50 M^2$	z	$50 M^2$	z	$50 M^2$	z	$50 M^2$	z	$50 M^2$	z	$50 M^2$
0	13,63	10	16,08	20	17,79	30	16,36	40	15,78	50	3,83
0,5	13,91	10,5	16,31	20,5	17,92	30,5	17,51	40,5	15,14	50,5	3,75
1	14,71	11	16,64	21	18,18	31	18,32	41	14,62	51	3,73
1,5	15,68	11,5	17,11	21,5	18,38	31,5	18,81	41,5	14,01	51,5	3,55
2	16,73	12	17,49	22	18,30	32	19,21	42	13,21	52	3,30
2,5	17,43	12,5	17,58	22,5	17,82	32,5	19,65	42,5	12,21	52,5	2,88
3	17,88	13	17,36	23	16,91	33	20,25	43	11,27	53	2,54
3,5	17,77	13,5	16,57	23,5	15,73	33,5	21,00	43,5	10,51	53,5	2,29
4	17,22	14	15,54	24	14,37	34	21,70	44	9,93	54	2,13
4,5	16,46	14,5	14,21	24,5	13,38	34,5	21,90	44,5	9,34	54,5	2,02
5	15,58	15	13,22	25	12,82	35	21,65	45	8,76	55	1,89
5,5	14,89	15,5	12,71	25,5	12,65	35,5	21,17	45,5	8,05	55,5	1,71
6	14,49	16	12,82	26	12,69	36	20,57	46	7,27	56	1,53
6,5	14,35	16,5	13,47	26,5	12,83	36,5	20,19	46,5	6,57	56,5	1,40
7	14,51	17	14,49	27	12,91	37	19,95	47	6,05	57	1,33
7,5	14,82	17,5	15,64	27,5	12,94	37,5	19,77	47,5	5,60	57,5	1,31
8	15,22	18	16,67	28	13,02	38	19,40	48	5,17	58	1,27
8,5	15,59	18,5	17,36	28,5	13,37	38,5	18,61	48,5	4,77	58,5	1,17
9	15,85	19	17,68	29	14,05	39	17,65	49	4,33	59	1,05
9,5	15,98	19,5	17,77	29,5	15,12	39,5	16,61	49,5	3,99		

Tabelle 4 (zu Abschnitt IV)

$$y = 15$$

z	$100 M^2$	z	$100 M^2$	z	$100 M^2$	z	$100 M^2$	z	$100 M^2$	z	$100 M^2$
0	12,44	4	9,04	8	11,91	12	5,24	16	1,96	20	0,88
0,5	12,03	4,5	10,34	8,5	11,46	12,5	5,01	16,5	2,02	20,5	0,76
1	11,27	5	12,55	9	11,43	13	4,99	17	1,88	21	0,58
1,5	10,16	5,5	14,40	9,5	11,57	13,5	4,40	17,5	1,62	21,5	0,38
2	9,23	6	15,87	10	11,07	14	3,20	18	1,26	22	0,24
2,5	8,46	6,5	16,00	10,5	9,65	14,5	2,60	18,5	0,90	22,5	0,34
3	8,15	7	14,89	11	7,88	15	2,23	19	0,68	23	0,43
3,5	8,34	7,5	13,00	11,5	6,10	15,5	1,98	19,5	0,80		

Tabelle 5 (zu Abschnitt VII)

$$y = 15 \text{ (verwaschen, } \varepsilon = 0,3)$$

z	$100 M^2$	z	$100 M^2$	z	$100 M^2$	z	$100 M^2$	z	$100 M^2$	z	$100 M^2$
0	12,33	4	9,04	8	12,00	12	5,27	16	1,97	20	0,85
0,5	12,02	4,5	10,35	8,5	11,49	12,5	5,02	16,5	2,00	20,5	0,76
1	11,46	5	12,22	9	11,46	13	4,94	17	1,87	21	0,57
1,5	10,60	5,5	14,37	9,5	11,49	13,5	4,33	17,5	1,61	21,5	0,38
2	9,21	6	15,77	10	10,93	14	3,26	18	1,25	22	0,27
2,5	8,51	6,5	15,89	10,5	9,61	14,5	2,62	18,5	0,90	22,5	0,34
3	8,17	7	14,78	11	7,83	15	2,23	19	0,71	23	0,41
3,5	8,37	7,5	13,08	11,5	6,11	15,5	1,99	19,5	0,79		