BAYERISCHE AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE

ABHANDLUNGEN · NEUE FOLGE, HEFT 148

NOVA KEPLERIANA

Neue Folge – Heft 4

Jovialia
Die Berechnung der Jupiterbahn nach Kepler

Bearbeitet von
VOLKER BIALAS

Vorgelegt von Herrn Walther Gerlach
in der Sitzung vom 8. Mai 1970

MÜNCHEN 1971

VERLAG DER BAYERISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
IN KOMMISSION BEI DER C.H.BECK'SCHEN VERLAGSBUCHHANDLUNG MÜNCHEN

ISBN 3 7696 2538 2

Druck der Buchdruckerei Gebr. Parcus, München
Printed in Germany

Im 400. Geburtsjahr von Johannes Kepler

dem Andenken von

MAX CASPAR

gewidmet

INHALT

Vorwort 7

Erster Teil

1. DIE BERECHNUNG DER BAHNELEMENTE FÜR JUPITER 9
1.1 Einführung 9
1.2 Exzentrizität (Näherungswert) 10
1.3 Apsidenlinie 13
1.31 1. Bestimmung 13
1.32 2. Bestimmung des Aphels – Rückschlüsse auf die Exzentrizität 17
1.33 Zusammenhänge zwischen Apsidenlinie, Exzentrizität und mittlerer Bewegung . . 19
1.331 Keplers Überlegungen 19
1.332 Überprüfung der Rechnungen und Überlegungen Keplers 22
1.4 Große Halbachse 24
1.41 1. Bestimmung 24
1.42 Endgültige Bestimmung 25
1.5 Knoten und Neigung 30
1.51 Näherungsweise Knotenlage und Neigung 30
1.52 Epocha Nodi – Knotenbewegung 32
1.6 Die Epochen des Jupiter – Apheländerung und mittlere Bewegung 34
1.61 1. Bestimmung der Apheländerung 34
1.62 Weitere Versuche zur Ableitung der Jupiter-Epochen 37
1.621 Zwei Ansätze zur Bestimmung der Aphelbewegung 38
1.622 Überlegungen an einer Dionysischen Beobachtung 39
1.623 Überlegungen an vier ptolemäischen Beobachtungen 46
1.624 Zusatzbedingung für den „dies creationis“ 50
1.63 Die endgültige Bestimmung der Jupiter-Epochen 53
1.631 Diskussion der Jupiter-Breite in der Dionysischen Beobachtung – Zuhilfenahme einer aristotelischen Beobachtung 53
1.632 Überprüfung der ptolemäischen Beobachtungen – die Lösung der Aufgabe 54
1.633 Versuch zur Verbesserung der Ergebnisse 59
1.634 Abschließende Rechnungen und Bemerkungen 60
1.7 Zusammenfassung des ersten Teils 63

Anmerkungen zum ersten Teil 66

Zweiter Teil

2. DIE JUPITERBEOBACHTUNGEN UND IHRE GENAUIGKEIT 83
2.1 Vorbemerkungen 83
2.2 Ableitung eines Genauigkeitsmaßes 84
2.21 Die Planetentafeln von B. Tuckerman 84
2.22 Die Beobachtungen 88
2.23 Rechnungen und Ergebnisse 95
2.231 Die Behandlung der Beobachtungen 95
2.232 Vergleich mit Tuckerman 99
2.24 Die Beobachtungsgenauigkeit von Tycho Brahe und Fabricius 106
2.241 Diskussion der Beobachtungen 106
2.242 Fehlertheoretische Diskussion der Ergebnisse 109
Kriterien zur Feststellung systematischer Fehler 110
Abschätzung des systematischen Fehlers 112
2.3 Zusammenfassung des zweiten Teils 117

Literaturverzeichnis 119

VORWORT

JOVIALIA – so überschreibt Kepler seine hinterlassenen Aufzeichnungen zur Bahnbeschreibung des Planeten Jupiter*. Blatt um Blatt ist angefüllt mit Zahlen und Anmerkungen, mit ausgeführten und wieder verworfenen Versuchen, die Bahnelemente als Ausgangswerte von Jupiter-Tafeln zu bestimmen. Wenn wir seinen Wegen folgen und die Handschriften durchsehen, schauen wir in die Werkstatt eines großen Astronomen, der in erstaunlicher Beharrlichkeit seinem Ziel, der Fertigstellung der „Tabulae Rudolphinae", entgegenstrebt.

Diese Tafeln, von Tycho Brahe vorbereitet, von Kepler begonnen und nach mehr als 20jähriger Arbeit drei Jahre vor seinem Tod fertiggestellt, sind die ersten astronomischen Tafeln, die nach der neuen, von Kepler entwickelten Bahntheorie berechnet sind. Für jeden Planeten hat Kepler die gigantische Arbeit unternommen, die Beobachtungen zu sichten und mit Hilfe geeigneter, für die Geometrie der Bahn günstig erscheinender Planetenörter die Bahnelemente abzuleiten.

Den ersten und tiefsten Blick in seine Werkstatt hat Kepler seinen Lesern selbst ermöglicht durch die Veröffentlichung der „Astronomia Nova" (1609). Das Marswerk ist nicht nur das hervorragende Dokument der Entdeckung der Ellipse als wahrer Form der Planetenbahnen, sondern zugleich auch Beschreibung des Modells, wie in Hinblick auf die Berechnung von Planetentafeln bei der Ableitung der Bahnelemente vorzugehen ist.

Max Caspar, der große 1956 verstorbene Kepler-Forscher, hat sich u. a. um die Verdeutlichung und die Interpretation der „Astronomia Nova" sehr verdient gemacht. Die Durchsicht der Handschriften zu den „Tabulae Rudolphinae", mit den Saturnhandschriften in „Nova Kepleriana N. F. 2" begonnen und hier mit den Jupiterhandschriften fortgesetzt, knüpft an diese Bemühungen an.

Wenn jetzt die Rechnungen Keplers zur Jupiter-Bahn veröffentlicht werden, so sollte man bedenken, daß die Form der Aufzeichnungen Keplers eine vollständige Wiedergabe nicht gestattet. Ja, selbst der bloße Abdruck kleiner Passagen wäre ohne Kenntnis des Zusammenhanges sinnlos. Als Beispiel der Notizen Keplers sind zwei Blätter aus den Handschriften in Faksimile beigefügt. Bei der zusammenhängenden Darstellung der Rechnungen und Erläuterungen Keplers ist besonderer Wert darauf gelegt worden, sowohl logische Reihenfolge als auch Ausführlichkeit der in den Handschriften niedergelegten Gedanken beizubehalten, soweit es das Verständnis für den Leser zuläßt. Verdeutlichende oder kritische Anmerkungen sind entsprechend bezeichnet und zum größten Teil in einem gesonderten Abschnitt zusammengefaßt. Fußnoten im Text beziehen sich auf den Wortlaut verschiedener Passagen, auf benutzte Literatur und ähnliches.

Ein zweiter Teil, als Zusatz zu verstehen, beschäftigt sich mit der Genauigkeit von Jupiterbeobachtungen, für die ein Fernrohr noch nicht benutzt wurde. Die Untersuchung verwendet die von B. Tuckerman berechneten Planetentafeln und geht dabei von der fundamentalen Bedeutung guter Planetenbeobachtungen für die Berechnung zuverlässiger Planetentafeln aus. Die Anregung hierzu ist von O. Gingerich vom Smithsonian Institution gekommen, der anläßlich der konstituierenden Sitzung des Kepler-Komitees (zur Vorbereitung der Feiern im Kepler-Jubiläumsjahr 1971) der Union Internationale d'Histoire

---

* Kepler-Mss. Pulkowo, Bd. 13, Bl. 335. Dort heißt es: „JOVIALIA seu Demonstratio motuum Jovis cum Tabularum parte potissima..."

des Sciences Anfang Juli 1969 in München auf die Tuckerman-Tafeln bei der Beurteilung alter Planetenbeobachtungen hinwies.

Auch diese Untersuchung wurde mit Unterstützung der Kepler-Kommission der Bayerischen Akademie der Wissenschaften durchgeführt. Besonders gedankt sei Martha List, der langjährigen Mitarbeiterin von Max Caspar: ihr stetes Interesse an der Durchsicht der Handschriften, ihre Hilfe bei der Entzifferung und ihre wertvollen Hinweise haben diese Arbeit sehr gefördert.

1. DIE BERECHNUNG DER BAHNELEMENTE FÜR JUPITER

1.1 EINFÜHRUNG

Bis zur Verbreitung des Fernrohres als Beobachtungsinstrument und der hierzu parallel verlaufenden Erweiterung der Aufgabenbereiche in der Astronomie waren die Erscheinungen, die mit dem Lauf der Gestirne zusammenhängen, die vorherrschenden astronomischen Themen früherer Jahrhunderte. Insbesondere gab die Bahn der Planeten Rätsel auf, zuallererst in der zu beobachtenden verschlungenen Linienführung. Den Mathematikern und Astronomen fiel die Aufgabe zu, die Planetenbahn zu berechnen, ihre mathematische Beschreibung zu liefern, derart, daß sowohl vorhandene Beobachtungen sich mit den errechneten Örtern deckten, als auch Vorhersagen über den künftigen Stand der Planeten mit hinreichender Sicherheit möglich waren.

Die Versuche zur Lösung dieser Aufgabe bedienten sich im wesentlichen gleicher mathematischer Elemente. Ihre Grundform war der Kreis: der zu ausgezeichneten Punkten zentrisch oder exzentrisch liegende Kreis und der auf einem Kreis herumlaufende kleinere Kreis. Die Variation der Kreise, deren Größe und Geschwindigkeit bestimmten die jeweilige Bahntheorie.

Mit der Entdeckung der elliptischen Planetenbahn gab Kepler eine neue Bahnbeschreibung, die der Wirklichkeit näherkommt und noch heute im Prinzip verwendet wird. Die Ellipse – ihre Größe, Form und Lage im Raum – und die Bewegung des Planeten in der Ellipse sind durch die Bahnelemente charakterisiert. Größe und Form sind nach Kepler unveränderlich: stets ist die Ellipse gleich groß und stets besitzt sie gleiche Krümmungsverhältnisse, d. h. große Halbachse und Exzentrizität bleiben konstant. Ebenso ist die Neigung der Bahnebene gegen die Ekliptikebene konstant. Dagegen dreht sich die Ellipse zweifach: einmal mit ihrer Ebene, wie aus der Bewegung der Schnittlinie mit der Ekliptikebene, der Knotenlinie, ersichtlich ist, zum anderen in ihrer Ebene mit der sich ändernden Richtung der großen Achse, der Apsidenlinie. Schließlich wird die mittlere Bewegung des Planeten als gleichförmig angenommen. Damit muß Kepler aus den Beobachtungen sechs Bahnelemente ableiten:

Bahnelemente	
konstant	veränderlich
große Halbachse	Apsidenlinie
Exzentrizität	Knotenlinie
Bahnneigung	
mittlere Bewegung	

Über die Wege, die Kepler bei der Ableitung dieser Elemente einschlägt, geben Handschriften aus seinem Nachlaß Auskunft. Für jeden Planeten einzeln werden die Elemente berechnet, zumeist nacheinander, z. T. auch gemeinsam, wie die mittlere Bewegung und Änderung der Apsidenrichtung. Kepler versucht, die gegenseitige Abhängigkeit auch für andere Elemente nachzuweisen und für seine Rechnungen auszunutzen.

Mit den Bahnelementen hat Kepler die Planetentafeln der 1627 erschienenen „Tabulae Rudolphinae" berechnet. Die Planetentafeln sind die wichtigsten Tafeln des Werkes und

können als grundlegende Tafeln der meisten übrigen Tafeln angesehen werden. Form und Größe der elliptischen Bahn, bestimmt durch Exzentrizität und große Halbachse, sind durch die Tafel der Gleichungen, „Tabula Aequationum", gegeben. Durch sie lassen sich die verschiedenen Anomalien ineinander umrechnen und die Abstände des Planeten von der Sonne für vorgegebene Anomalien ermitteln. Die Bewegung der Apsidenlinie und der Knotenlinie sowie die mittlere Bewegung des Planeten, alle als zeitabhängige Richtungen bezüglich des Frühlingspunktes angegeben, sind die Grundwerte der Epochentafeln, „Epochae seu Radices", aus denen als Differenzbeträge die Werte der Tafeln der mittleren Bewegungen, „Motus Medii", folgen. Die Breite des Planeten ist entsprechend dem Argument der Breite, dem Abstand des Planeten von der Knotenlinie, aus der Breitentafel, „Tabula Latitudinaria", zu entnehmen, die über die Bahnneigung berechnet wird.

In der folgenden Übersicht ist zusammengefaßt, welche Tafeln der „Tabulae Rudolphinae" direkt aus den einzelnen Bahnelementen berechnet sind:

Bahnelement	daraus berechnete Tafel
große Halbachse Exzentrizität	Tafel der Gleichungen
Bahnneigung	Breitentafel
mittlere Bewegung Änderung der Apsidenlinie Änderung der Knotenlinie	Epochentafel und Tafel der mittleren Bewegung

Die Handschriften zu den „Tabulae Rudolphinae" sind also das wichtige Bindeglied zwischen Beobachtungen und Tafeln.

Nach diesen einführenden Bemerkungen kann die Wiedergabe der Überlegungen und Rechnungen Keplers zur Ableitung der Bahnelemente für den Jupiter beginnen.

1.2 EXZENTRIZITÄT (NÄHERUNGSWERT)

Das Verfahren zur Bestimmung der Exzentrizität beim Jupiter entspricht den Überlegungen und Rechnungen Keplers in den Saturnhandschriften.

Auch in den Jupiterhandschriften* wird zunächst von einer Näherungslage der Apsidenlinie ausgegangen, von der aus Planetenörter mit maximaler Gleichung (aequatio maxima), d. h. mit exzentrischer Anomalie $E \approx 90°$, aufgesucht werden können. Die Gleichung A ergibt sich aus dem Vergleich von mittlerer mit wahrer Anomalie:

$$A = M - v$$

also $$A \approx 2\,e \cdot \sin E. \qquad (1)$$

Da es sich um die Darstellung der Planetenbewegung bezüglich der Sonne handelt, müssen wahre Oppositionen verwendet oder Beobachtungen auf Oppositionen zur Sonne umgerechnet werden.

Anders als beim Saturn wird ein Näherungswert für die Lage der Apsidenlinie nicht neu berechnet, sondern den „Tabulae Prutenicae" (PT)** des Reinhold entnommen:

* Kepler-Mss. Pulkowo, Bd. 13, Bl. 338ff. De Jovis Eccentricitate.

** Die „Tabulae Prutenicae" seien mit PT abgekürzt.

Epoche Christi Dei Apogäum	5^s 3° 55′	1
Bewegung in 1600 Jahren*	4. 49	
Präzession	22. 20	2
Epoche 1600	6^s. 1	

Das Aphel in ♎ [3] legt die maximale Gleichung in den Zeichen ♋ und ♑ fest. Beobachtungen des Jupiter, die hier in Frage kommen, sind in den Jahren 1586 und 1593 gemacht worden:

(a) 1586 22. Dezember 10^h in 10. 8. 10 ♋
(b) 1593 29. Juni 12^h in 17. 23. 0 ♑.

An der Beobachtung (a) soll gezeigt werden, wie Kepler die Opposition zur wahren Sonne berechnet.

1602	22. Dezember ☉ in	10. 46. 3 ♑	aus früheren Rechnungen
	— Bewegung in 16^a	7. 3	nach PT
1586	22. Dezember	10. 39. 0 ♑	
	— H. 14	— 35. 47	4
1586	21. Dezember 10^h ☉ in	10. 3. 13 ♑	
1586	22. Dezember 10^h ♃ in	10. 8. 10 ♋	
	Tagbewegung des ♃	— 8	aus der Beobachtung
1586	21. Dezember 10^h ♃ in	10. 16. 10 ♋.	

Die Örter von ♃ und ☉ sind um 12′ 57″ von der Opposition entfernt, um eine Distanz, die über die Tagbewegung (diurnus) Sonne gegen Jupiter ☉ — ♃ in Zeit umzurechnen ist. Nach N.K.2**, Abschnitt 1.21, berechnet sich die Tagesbewegung d eines Planeten, d. h. der Bogen, der vom Planeten in seiner Bahn in 24 Stunden zurückgelegt wird, über die mittlere tägliche Bewegung m zu:

$$d = m \frac{\Delta E}{\Delta M}. \qquad (2)$$

Die Sonne, hier formal als Planet behandelt, hält sich zur Zeit der Beobachtung nach den PT im Perigäum auf, also:

	E =	180°
	ΔE =	1°
	ΔM =	58′ 5″
	m =	59′ 8″
	d =	1° 1′ 5″ nach (2)
Kepler erhält	d =	1° 1′ 20″
Jupiter	d =	— 8′
☉ — ♃		1. 9. 20 in H. 24
		12. 57 in H. 4 M. 30

* Hier sind immer Julianische Jahre gemeint, im folgenden mit einem hochgestellten a bezeichnet.
** Nova Kepleriana N. F. Heft 2: Volker Bialas, Die Rudolphinischen Tafeln von Johannes Kepler. Mathematische und astronomische Grundlagen. München 1969.

Bewegung des ♃ in H. 4 M. 30 — 1′ 27″.
Wahre Opposition:

(a)	1586	21. Dezember	14^h 30 ♃ in	10. 14. 43 ♋
(b)	1593	29. Juni	12^h 30 ♃ in	17. 22. 50 ♑
Differenz:	6 Jahre	189^d 22^h		187° 8′ 7″

In diesen 6 Jahren sind 2 Schaltjahre (1588, 1592) enthalten, so daß für die Zeitdifferenz geschrieben werden kann:

6^a 190^d 22^h, wobei das 4. Jahr als Schaltjahr gerechnet wird [5].

Kepler zieht von der Bewegungsdifferenz fälschlicherweise die Bewegung eines Tages (= 5′ 31″) ab, in der Meinung, er sei von 191^d auf 190^d gegangen. So erhält er:

wahre Bewegung	187. 2. 36
mittlere Bewegung nach den PT	197. 54. 54
Verzögerung (retardatio)	10. 52. 18.

In den PT ist der größte Wert der Gleichung des Jupiter (Prosthaphaereseon Jovis) mit 5° 14′ angegeben, nach der Rechnung Keplers beträgt er 5° 26′ 9″.
Die Exzentrizität ist der Sinus der halben maximalen Gleichung [6]:

$$e = \sin 2° 43' 5'' = 4742.$$

Wird die wahre Bewegung nach den PT ermittelt, indem die erste Anomalie gleich 270° gesetzt wird, so zeigt die Rechnung eine Differenz zu den Beobachtungen an:

♋ M	270°	♑ M	107. 54. 54
A +	5. 13. 40	A —	5. 3. 0
v_1	275. 13. 40	v_2	102. 52. 0 [7]

$$v_2 - v_1 = 187.\ 38.\ 20.$$

Diese Differenz übersteigt die wahre Bewegung aus den Beobachtungen um 35′ 44″.
Nicht viel anders wird das Ergebnis, wenn die erste Anomalie gleich 260° gesetzt wird und die zweite Anomalie aus der mittleren Bewegung nach den PT sich zu 97. 54. 54 ergibt:

♋ M	260°	♑ M	97. 54. 54
A +	5. 11. 23	A —	5. 12. 34
v_1	265. 11. 23	v_2	92. 42. 20

$v_2 - v_1 =$	187. 31	
gegen	187. 2. 36	aus den Beobachtungen
Differenz	+ 28′.	

Der Umrechnung von wahrer Bewegung aus den Beobachtungen in mittlere Bewegung nach den PT ist eine feste Apsidenrichtung zugrunde gelegt worden. Um die Unsicherheit des Aphels einigermaßen in Rechnung zu stellen, hat Kepler jetzt einen zweiten Weg der Berechnung eingeschlagen, indem er die wahre Bewegung des Jupiter aus der Differenz der Oppositionsbeobachtungen mit der Differenz der wahren Anomalien nach den PT

vergleicht. Diese Anomalien resultieren aus mittleren Anomalien, die allein von der Lage der Apsidenlinie abhängig sind, deren Differenz aber als mittlere Bewegung im Zeitintervall zwischen den Beobachtungen fest vorgegeben ist. Damit ist ein Weg gefunden, bei variabler Aphelrichtung die Exzentrizität der PT zu verbessern. Da sich die vorher bestimmten Differenzen der wahren Anomalien auf die halbe Bahn beziehen, betragen die Korrekturen der Exzentrizität, der halben maximalen Gleichung, den vierten Teil:

Aphel in	5 ♎	15 ♎	8
Prosthaphaereseon	5. 13. 40		
Hälfte	2. 36. 50	2. 36. 50	
Korrektur	9′	7′	
S	2. 45. 50	2. 44	
sin S = e	4822	4769.	

Damit liegen verbesserte Werte für die Exzentrizität vor. Später wird e = 4822 als wahrscheinlichster Wert bestätigt und in den „Tabulae Rudolphinae" (RT)* verwendet. Zunächst hält Kepler für diese Zahl fest: „Circiter haec est Eccentricitas verior."

Es sei in Hinblick auf das Rechenverfahren festgehalten, daß die aus den Beobachtungen bestimmte Bewegungsdifferenz Δv als Sollwert genommen wird, dem die Bestimmungsgleichung

$$\Delta M - 2\,e\,(\sin E_2 - \sin E_1) = \Delta v$$

genügen muß. Die Gleichungen werden über die PT und damit über den Näherungswert e_0 der Exzentrizität ermittelt, so daß sich aus der Rechnung ein Näherungswert $\Delta v'$ ergibt. Die Verbesserung de ist dann:

$$de = \tfrac{1}{4}\,(\Delta v' - \Delta v)\,. \tag{3}$$

Die Exzentrizität ist damit gegen eine obere und untere Grenze, entsprechend der Lage der Apsidenlinie, festgelegt. Erst die genauere Kenntnis des Aphels wird die Ableitung der endgültigen Größe der Exzentrizität ermöglichen.

1.3 APSIDENLINIE

1.31 1. BESTIMMUNG

In Band 22 des handschriftlichen Nachlasses** finden sich einige kurze skizzenhafte Ausführungen Keplers, darunter auch Vorarbeiten zu den Planetentafeln des Jupiter unter der Überschrift „Pro Jove", die vor 1616 geschrieben sind, sich zeitlich aber nicht genau einordnen lassen.

Die ersten Überlegungen zur Lage der Apsidenlinie gehen wieder von den PT aus, indem analog zur ersten Bestimmung der Exzentrizität die scheinbare Bewegung aus Beobachtungen mit der entsprechenden mittleren Bewegung nach den PT verglichen wird. Als Näherungswert für das Aphel wird zunächst ♎ genommen.

* Die „Tabulae Rudolphinae" seien im folgenden mit RT abgekürzt.
** Kepler-Mss. Pulkowo.

Zur ersten Bestimmung des Perihels werden 2 Oppositionen des Jupiter herangezogen:

1583	6. Sept.	H. 19. 34 ♃ in	23. 31. 23 ♓
1595	16. Sept.	H. 5. 51	28. 55. 46 ♓
$12^a\ 5^d\ ^9$		H. 10. 17	5. 24. 23
		Präzession	10. 12
			5. 14. 11.

Mittlere Bewegung nach PT ohne

Präzession	4. 38. 16
Differenz	35. 55.

Mit dem Aphel in ♎ und der Differenz der mittleren Bewegung von 4° 38′ 16″ nimmt Kepler die mittleren Anomalien mit 174° bzw. 169° 21′ 44″ an. Die Gleichungen betragen 34′ 27″ und 60′ 48″, ihre Differenz ist 26′ 21″.

Auch wenn die Anomalien weiter gegen das Perihel verschoben werden, bleibt die Differenz der Gleichungen unter der vorher berechneten Differenz wahre Bewegung (aus den Beobachtungen) – mittlere Bewegung (nach den PT). Wird das Perihel in der Mitte zwischen den Beobachtungen angenommen, beträgt die Differenz 28′.

Die Überlegungen zur Lage des Aphels sind analog, wieder werden 2 Oppositionen aufgesucht:

1590	23. März	H. 10. 48 ♃ in	12. 55 ♎
1602	27. März	H. 18. 19	17. 15 ♎
$12^a\ 4^d$		H. 7. 31	4. 20
		Präzession	10. 12
		wahre Bewegung	4. 9. 48
		mittlere Bewegung	4. 32. 41.

Die Differenz aus den Bewegungen stimmt mit der Differenz der Gleichungen überein, wenn die mittleren Anomalien 12° und 16½° betragen. Das Aphel liegt hiernach bei 2 ♎. Kepler unternimmt nach diesem Verfahren noch weitere Versuche, indem er die Oppositionen von 1583 und 1590 zusammenstellt und das Aphel nacheinander in 12. 55 ♎, 9 ♎ und 7. 45 ♎ setzt.

In den Jupiter-Handschriften von Band 13* geht Kepler anders vor. Er wendet zunächst das schon von der Saturnbahn her bekannte Verfahren an, das die Erkenntnis des Flächensatzes qualitativ ausnützt: die Bewegung des Jupiter wird zum Perihel schneller, zum Aphel hin langsamer. Die Bewegungsdifferenzen aus je zwei symmetrisch zur Apsidenlinie liegenden Oppositionsbeobachtungen sind gleich groß.

Zur Bestimmung des Aphels werden 4 Oppositionen herangezogen:

(a)	1586	21. Dezember	H. 14. 30 ♃ in	10. 14. 43 ♋
(b)	1590	23. März	H. 11. 47	12. 55. 0 ♎
(c)	1593	29. Juni	H. 12. 30	17. 22. 50 ♑
(d)	1595	12. Sept.	H. 6. 45	28. 58. 25 ♓ [10].

* Kepler-Mss. Pulkowo, Bd. 13, Bl. 338 v.

Aus der Kombination der Oppositionen (a), (b) und (c) werden 2 Intervalle gebildet:

1. Intervall	(b) — (a)	$3^a\,92^d$	H. 21.17	92° 40′ 17″
2. Intervall	(c) — (b)	$3^a\,99^d$	H. 0.43	94. 27. 50
Differenz		6^d	H. 3.26	1. 47. 33

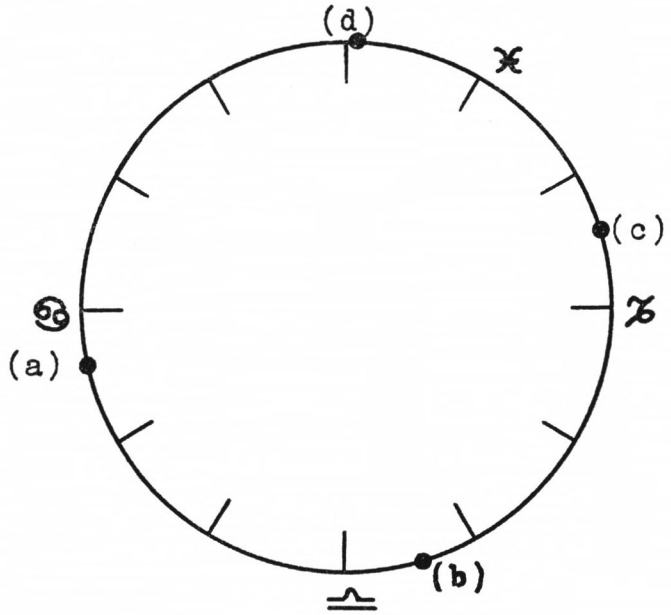

Fig. 1

Mit der mittleren Tagbewegung von 5′ bleibt als Differenz:

$$\begin{array}{r} 1.\ 47.\ 33 \\ -\ 30.\ 30 \\ \hline 1^\circ\ 17' \end{array}$$

um die das 2. Intervall größer als das 1. ist. Von (b) nach (c) ist der Planet in derselben Zeit um 1° 17′ schneller gelaufen als von (a) nach (b). Das ist nur möglich, wenn das Aphel 1590 vor 12.55 ♎ gelegen ist. Kepler berechnet, um die genaue Aphelrichtung zu ermitteln, für 1° Apheländerung die Änderung der Gleichung und die der optischen Gleichung [11], die er mit der halben Differenz der Intervalle 38′ 30″ vergleicht. Diese Gleichung wird über eine Verhältnisgleichung der Entfernungen bestimmt.

Es sind a die mittlere Entfernung
$a - ae$ der Perihelabstand
$a + ae$ der Aphelabstand. Dann verhalten sich:

$$(a - ae) : (a + ae) = a : (a + 2\,ae)$$
$$(1 - e) : (1 + e) = 1 : (1 + 2\,e)\,. \qquad (4)$$

Gleichung (4) läßt sich leicht bestätigen, wenn e^2 als Größe zweiter Ordnung vernachlässigt wird.

Mit $e = 0.04800$ ergibt sich:

$$952 : 1048 = 1000 : 1096\,.$$

Ebenso: $$1 : (1 + 2\,e) = (1 - 2\,e) : 1 \qquad (5)$$

$$1000 : 1096 = 904 : 1000$$

also $$952 : 1048 = 904 : 1000\,.$$

Der mittleren Entfernung komme die Bewegung 60′ im exzentrischen Kreis zu, dann ergibt sich für die wahre Bewegung im Aphel:

$$904 : 1000 = x : 60'$$
$$x = 54' 14''.$$

Die optische Gleichung beträgt 5′ 46″.

Um die Änderung von 38′ 30″ in den Gleichungen zu erhalten, ist das Aphel um

$$\Delta A = \frac{60'}{5' 46''} \cdot 38' 30'' = 6° 40',$$

entsprechend 6° 1′ 33″ wahre Bewegung [12] zurückzubewegen. Das Aphel für 1590 liegt demnach in 6.53.27 ♎ [13].

Für das Perihel macht Kepler nun nicht die gleiche Untersuchung, sondern versucht, ausgehend von der eben bestimmten Lage des Aphels, über Opposition (d) in Nähe des Perihels das Ergebnis zu bestätigen. Zunächst wird der Zeitpunkt errechnet, zu dem der Planet im Aphel steht.

				Aphel in	6.53.27 ♎
(b)	1590	23. März	H. 11.47	♃ in	12.55 ♎
	notwendige Rückwärtsbewegung				6. 1.33

Bei der Tagbewegung von 4′ 31″ für den Jupiter in Aphelnähe benötigt der Planet $80^d\ 1^h\ 9^{min}$.

Kepler rechnet:	erforderliche Bewegung		6° 1′ 33″
	Tagbewegung 4′ 31″	60^d	4. 31
			1. 30. 33
		20^d	1. 30. 20
		$1^h\ 9^{min}$	13.

Jupiter erreicht demnach am 2. Januar 1590, $10^h.38$, das Aphel:

1590 2. Jan. H. 10.38 ♃ in 6.53.27 ♎.

Den Vergleichswert gibt Opposition (d):

1595	12. Sept.	H. 6.45	♃ in 28.58.25 ♓
$5^s\ 252^d$		H. 20. 7	Zeitdifferenz
mittlere Bewegung nach PT			5^s 22° 48′ 46″
		Aphel	6. 6. 53. 27
mittlerer Ort (d)			11. 29. 42. 13
wahrer Ort (d)			11. 28. 58. 25
		Aequatio	43. 48.

In der Fortsetzung der Perihelbestimmung variiert Kepler die gerade verwendete Methode: nicht diese Gleichung ist Ausgangspunkt, sondern der mittlere Ort, über den, im Unterschied zum wahren Ort, eine zweite Gleichung bestimmt wird. Der Vergleich beider Gleichungen liefert einen Anhalt für die Bestätigung der gerade berechneten Aphelrichtung.

Im einzelnen:

mittlerer Ort des Jupiter nach (d)	$11^s\,29°\,42'\,13''$
Aphel	6. 6. 53. 27
verschieden vom Perihel um	7. 11. 14.

Die wahre Bewegung wird über die Verhältnisgleichung (4) bestimmt:

$$(1 - e) : (1 + e) = 904 : 1000 = 60' : x$$
$$x = 66'\,21''.$$

Die Periheländerung 1° bewirkt die Änderung der wahren Anomalie von 66′ 21″, entsprechend ändert die Perihelbewegung von 7° 11′ 14″

die Anomalie um	7. 56. 52
damit ist die Aequatio	45. 38
gegenüber	43. 48.

Wird also das Aphel für 1590 mit 6.53.27 ♎ angenommen, ergibt sich über Opposition (d) und die Exzentrizität e = 0.04800 das Perihel um nahezu 180° verschieden vom Aphel. Die geringe Differenz zweier Gleichungen als Zwischengrößen dieser Bestimmung läßt den Schluß zu, daß die Exzentrizität noch nicht genau genug berechnet ist.

Wird aus beiden Gleichungen der ungefähre Mittelwert angehalten, so ist das Aphel um 7′ 31″ nach 6.45.56 ♎ zurückzuversetzen. Jupiter erreicht das Aphel am 31. Dezember 1589, um $18^h\,38$ [14].

Es seien nochmals die Ergebnisse dieses Abschnittes festgehalten:

A ♃ erreicht am 2. Januar 1590, 10^h 38, das Aphel in 6.53.27 ♎
B ♃ erreicht am 31. Dezember 1589, 18^h 38, das Aphel in 6.45.56 ♎.

1.32 2. BESTIMMUNG DES APHELS – RÜCKSCHLÜSSE AUF DIE EXZENTRIZITÄT

Zu den Beobachtungen des Abschnittes 1.31 kommen 2 Oppositionen hinzu, um, ergänzend zu den vorausgegangenen Überlegungen, weitere Rückschlüsse auf die Lage der Apsidenlinie zu ziehen. Die Oppositionen sind:

(e)	1598	26. Dezember	H. 3. 2	♃ in 15. 0.44 ♋
(f)	1605	4. Juli	H. 13.48	♃ in 22.16.32 ♑.

In der schon erläuterten Weise werden aus den Oppositionen wahre Bewegungen bestimmt und mit den durch die Zeitintervalle festgelegten mittleren Bewegungen verglichen. Der Vergleich erlaubt den Rückschluß auf die Lage der Apsidenlinie.

Oppositionspaar (a) — (e) in Nähe des Diacentros im Ascendens:

(a)	1586	21. Dezember	H. 14.48	♃ in 10.14.41 ♋
(e)	1598	26. Dezember	H. 3. 2	♃ in 15. 0.44 ♋
	$12^a\,4^d$		H. 12.34	4.46. 3
			mittlere Bewegung nach PT	4.47.56
			Differenz	1.53.

Die wahre Bewegung ist um 1′ 53″ kleiner als die mittlere Bewegung, die Mitte beider Örter liegt also näher zum Aphel als zum Perihel hin.

Das Aphel liegt vor ½ (10.15 + 15.1) ♋ + 90°, jedenfalls vor 13 ♎.
Oppositionspaar (c) — (f) in Nähe des Diacentros im Descendens:

(c)	1593	29. Juni	H. 12.30	♃ in 17.22.50 ♑
(f)	1605	4. Juli	H. 13.48	♃ in 22.16.32 ♑
		$12^a\ 5^d$	H. 1.18	4.54
		mittlere Bewegung nach PT		4.46.35
			Differenz	7.25.

Die wahre Bewegung ist größer als die mittlere Bewegung, das Aphel liegt weit vor ½ (17.23 + 22.17) ♑ — 90°, weit vor 20 ♎.
Oppositionspaar (c) — (e) in Nähe des Diacentros, gegenüberliegend:

(c)	1593	29. Juni	H. 12.30	♃ in 17.22.50 ♑
(e)	1598	26. Dezember	H. 3. 2	♃ in 15. 0.44 ♋
	$5^a\ 179^d$		H. 14.32	177.37.54
		mittlere Bewegung nach PT		166.43.25
			Differenz	10.54.25.

Diese Lage der Jupiter-Örter ist früher für die Ableitung der Exzentrizität herangezogen worden, folgerichtig schiebt Kepler eine kurze Betrachtung über die Größe von e ein. Wenn angenommen wird, daß das Aphel in der Mitte dieser Örter, also in 16 ♎, zu liegen käme, so wäre die Bestimmung von e leicht. Denn die halbe Gleichung wäre dann 2° 43′ 26″, d. h. e = 0.04758. Dieser Wert ist sicher kleiner als das richtige e, weil gezeigt worden ist, daß das Aphel vor 13 ♎ liegt, die maximale Gleichung also nicht erreicht worden ist. Wird zunächst das Aphel in die Mitte von (c) und (e) gelegt, also in 16.11.47 ♎, so ist die wahre Anomalie von (c) v_c = 91° 11′ 3″ und für e = 0.04758 die mittlere Anomalie M_c = 96° 38′ 15″.

Die mittlere Anomalie wird nach den PT als mittlere Bewegung des Planeten in $3^a\ 66^d$ H. 9.50 durchlaufen, d. h. der Planet hätte sich, wenn noch die Präzession von 3′ 33″ berücksichtigt wird, am 23. April 1590, H. 9.40, im Aphel aufgehalten.

Wird das Aphel in 12 ♎ gelegt, so vergrößern sich die Anomalien um 4° 11′ 47″, v_c wird 95° 22′ 50″ und M_c wird 100° 50′ 2″. Wird die maximale Gleichung noch etwas größer als der Differenzbetrag beider Anomalien angenommen, wird e = 0.04790. Unter Berücksichtigung der Präzession bis 1590 von 3′ erreicht Jupiter das Aphel in 11.57 ♎, 1590, am 3. März H. 22.6. Dieser Wert wird an Opposition (b) überprüft:

(b)	1590	23. März	H. 11. 3	♃ in 12.55 ♎
Aphel	1590	3. März	H. 22. 6	♃ in 11.57 ♎
Zeitdifferenz		19^d	H. 12.57	
entspricht der mittleren Bewegung von				1.37.27
			mittlerer Ort	13.34.27 ♎
			wahrer Ort	12.55. 0 ♎
			Aequatio	39.27.

Mit der maximalen Gleichung von 5° 29′ 42″, die sich zuvor ergeben hat, ist bei M = 1° 37′ 27″ die Gleichung nicht größer als 8′ 49″. M ist bei der vorliegenden Gleichung von 39′ 27″ zu klein, das Aphel liegt also zu nahe an (b). Daraus ergibt sich für Kepler

die Möglichkeit, das Aphel zu korrigieren, indem er von der „Regula Proportionum" ausgeht, von der Proportionalität von Anomalie und Gleichung in Nähe der Apsidenlinie. Gleichung 8′ 49″ entspricht M = 1° 37′ 27″, dann entsprechen 39′ 27″ M_b = 7° 16′ 2″. Das Aphel ist also vom mittleren Ort (b) um M_b nach 6.18.25 ♎ zurückzuversetzen.

Als Ergebnis sei hier festgehalten:

C ♃ am 25. Dezember 1589, H. 19.41, im Aphel in 6.18.25 ♎.

Von hier aus geht Kepler wieder auf die maximale Gleichung zurück, die bei Änderung des Aphels um — 5½° um etwa 2′ größer wird, so daß sie jetzt 5° 31′ 37″ beträgt. Damit ist der wahrscheinlichste Wert für die Exzentrizität von Abschnitt 1.2 bestätigt:

$$e = 0.04822 \quad ^{16}.$$

1.33 ZUSAMMENHÄNGE ZWISCHEN APSIDENLINIE, EXZENTRIZITÄT UND MITTLERER BEWEGUNG

1.331 Keplers Überlegungen

Im vorausgehenden Abschnitt ist Kepler von Überlegungen ausgegangen, die sich in den Saturnhandschriften nicht finden ließen. Durch die Ähnlichkeit der Verfahren bei der Ableitung von Aphel und Exzentrizität sind beide Elemente über die Gleichungen gekoppelt, und ihre Ableitung erfolgt, wie auch noch weiter zu verfolgen ist, zusammenhängender als bei Mars oder Saturn. In der weiteren Diskussion der soeben abgeleiteten Elemente, zur Überprüfung der „so festgesetzten Hypothese", geht Kepler wieder von den Oppositionen der Jahre 1586, 1590, 1593, 1595, 1598, 1605 aus, berechnet diese Örter über die Bahnelemente und macht dann nach den zu erwartenden Ergebnissen eine Fallunterscheidung:

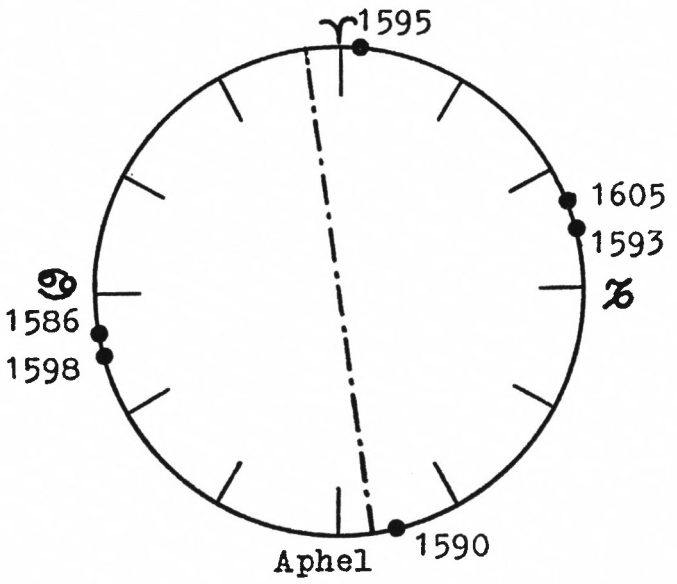

Fig. 2

a) Wenn in den mittleren Längen um ♋ und ♑ die Differenzen zwischen Beobachtungen und Rechnungen verschiedene Vorzeichen haben, kann diese Diskrepanz durch Änderung

der Exzentrizität ausgeglichen werden. Mittlere Längen haben die Oppositionen 1593, 1605 auf der einen, 1586, 1598 auf der anderen Seite. Die Verwendung von je zwei Örtern bietet die Möglichkeit der Kontrolle.

b) Wenn die Differenzen gleiches Vorzeichen haben und gleich groß sind, ist die Bezugsrichtung der mittleren Bewegung zu verändern. Als vorläufige Bezugsrichtung wählt Kepler Ergebnis C von Abschnitt 1.32. Diese Epoche ergänzt er auf 1589 compl. [17], indem die mittlere Bewegung für 6^d H. 4.19 hinzugefügt wird:

D motus medius 1589 compl. in 6.49.14 ♎.

c) Wenn die Differenzen beim Aphel auftreten, wird die Diskrepanz durch Änderung der Aphelrichtung ausgeglichen. Diese Änderung macht sich in mittleren Längen ($E \approx 90°$) kaum bemerkbar [18].

Die Berechnungen der 6 Örter über die Bahnelemente seien an einem Beispiel, an Opposition (a), erläutert.

(a)	1586 21. Dezember	H. 14.28	
	mittlere Bewegung		
	1589 compl.	6.49.14	♎
	-4^a	—61.27. 7	
	1585	5.22. 7	♊
	November	27.45.54	
	20^d	1.39.45	
	14^h	2.55	
	28^{min}	6	
		4.50.47	♋
	Aphel	6.15.53	♎
	M =	268.34.54	
	v =	274. 6.18	
	Aphel	6.15.53	
R:	wahrer Ort	10.22.11	♋ *
B:	Opposition (a)	10.14.41	♋
	B — R	— 7.30	

Für die anderen Oppositionen erhält er:

Opposition	Ort	Jahr	B – R
(b)	♎	1590	— 0′ 50″
(c)	♑	1593	— 5. 27
(d)	♓	1595	— 6. 8
(e)	♋	1598	— 3. 23
(f)	♑	1605	— 5. 36

Die Differenzen B — R haben durchweg negatives Vorzeichen. Sie führen nach Überlegung b), wenn allein die Örter in Nähe des Diacentros betrachtet werden, zu dem mittleren Wert — 5′ 30″ als Verbesserung der Bezugsrichtung der mittleren Bewegung. Für

* Vgl. hierzu N. K. 2, Abschnitt 1.21, Beispiel 9.

die Örter in Nähe der Apsidenlinie betragen jetzt die Differenzen + 4′ 40″ (b) und — 0′ 38″ (d). Die Apsidenlinie ist so vorwärts zu bewegen, daß die mittlere Differenz von 2′ 9″ durch die sich verändernde Gleichung ausgeglichen wird [19]. Nach der Tafel der Gleichungen der RT bewirkt eine Anomalieänderung von 62′ 53″ eine Gleichungsänderung von 5′ 43″. Die erforderliche Änderung von 2′ 9″ wird demnach durch die Aphelbewegung von 24′ erreicht [20].

Das Ergebnis dieser Ausführungen lautet also:

E Verschiebung von motus medius um — 5′ 30″
Bewegung des Aphels um + 24′.

Mit den korrigierten Bezugsrichtungen für motus medius und Aphel werden die Örter neu berechnet. In obigem Beispiel (a) erhält man:

motus medius		4.45.17 ♋
Aphel		6.39.53 ♎
	M	268. 5.24
	v	273.36.54
wahrer Ort		10.16.47 ♋
beobachtet		10.14.41 ♋
B — R		— 2. 6

Entsprechend ergeben sich die Differenzen der übrigen Örter:

Opposition	Ort	Jahr	B – R
(b)	♎	1590	+ 2′ 1″
(c)	♑	1593	+ 0. 39
(d)	♓	1595	+ 2. 16
(e)	♋	1598	+ 1. 46
(f)	♑	1605	+ 0. 46

Nur Opposition (a) hat eine negative Abweichung. Werden die übrigen Oppositionen betrachtet, so ist es naheliegend, zu motus medius 1′ zu addieren. In den Apsiden (b) und (d) sind durch die Apheländerung die Abweichungen um 2′ zu groß. Sie können nahezu 0 werden, wenn zu motus medius 2′ addiert werden.

Die Differenzen betragen dann:

in ♋ (a) — 4′ 6″ in ♑ (c) — 1′ 21″
(e) — 0. 14 (f) — 1. 14 .

Weiter überlegt Kepler: eine Vergrößerung der Exzentrizität könnte jetzt die Differenzen in (a) und (c) gleich werden lassen. Dieser Betrag von — 2½′ könnte wiederum durch Änderung der mittleren Bewegung ausgeglichen werden, dadurch käme allerdings in den Örtern in Nähe der Apsidenlinie ein neuer Anteil hinzu. Würde die mittlere Bewegung nur um die Hälfte dieses Betrages geändert, wären die Differenzen B — R der Größe nach auf alle Örter gleichmäßig verteilt. Indessen, so interessant diese Überlegungen sind, so klar hier von der gegenseitigen Abhängigkeit der Bahnelemente gesprochen wird – Kepler bleibt bei dem Ansatz, ohne ihn, wie es seiner Methode entspräche, an den Rechnungen zu verifizieren.

Ein anderer Ansatz ignoriert zunächst Ergebnis E. Kepler geht von den Oppositionen (a) und (f) aus. Wird der Mittelwert 7′ 24″ [21] von motus medius abgezogen, betragen die Differenzen B — R in den Apsiden + 6′ 34″ (b) und + 1′ 16″ (d). Analog zu früheren Überlegungen bestätigt Kepler Ergebnis E: motus medius ist um 5′ 26″ zu verringern, das Aphel um 23′ vorzurücken. Mit E ergeben sich die Bezugsrichtungen:

F motus medius 1589 compl. in 6.43.44 ♎
Aphel in 6.42.25 ♎.

1.332 Überprüfung der Rechnungen und Überlegungen Keplers

In der Diskussion, 6 Jupiterörter durch Änderung dreier näherungsweise bestimmter Bahnelemente Aphelrichtung, Bezugsrichtung der mittleren Bewegung und Exzentrizität bestmöglich darzustellen, hat Kepler letztlich doch nur Aphel und motus medius variiert. Wird in einer Überprüfung des Verfahrens zunächst die Exzentrizität konstant gehalten, so kann an Überlegungen angeschlossen werden, wie sie bei der Nachrechnung entsprechender Saturnelemente bereits ausgeführt wurden.* Gibt es – so lautet auch hier die Frage – für Aphel und mittlere Bewegung ein Wertepaar A, M, das die Oppositionen (a) bis (f) noch günstiger als bei Kepler darstellt?

Mit früheren Bezeichnungen aus N. K. 2 lauten die Bestimmungsgleichungen:

$$L_i + v_i = \{(M_0' + dM + m \cdot t_i) - (A_0' + dA + a \cdot t_i)\} \cdot f_i + (A_0' + dA + a \cdot t_i)$$

und nach Einsetzen der Näherungswerte und Absolutglieder die Fehlergleichungen:

$$v_i = dM \cdot f_i + dA\,(1 - f_i) - l_i\,.$$

Hierin sind dM und dA die gesuchten Verbesserungen in M und A; f_i, aus der Rechnung bekannt, ist der Faktor, der die mittlere in die wahre Anomalie umwandelt:

$$f_i = \frac{v_i}{M_i}\,.$$

In der folgenden Übersicht sind die Anomalien, die Faktoren der Fehlergleichungen und die Absolutglieder angegeben.

Nr.	v	M	v/M	1 — v/M	— l	— l′
	°	°			′	′
1	274.273	268.582	1.0212	—0.0212	7.52	1.33
2	6.620	7.280	0.9093	0.0907	0.83	—2.09
3	101.115	106.497	0.9495	0.0505	5.45	1.36
4	172.690	173.367	0.9961	0.0039	6.13	0.67
5	278.633	273.143	1.0201	—0.0201	3.38	—2.78
6	105.841	111.103	0.9526	0.0474	5.60	1.42

Aus den 6 Fehlergleichungen werden die Normalgleichungen bestimmt:

$$5.7115\,dM + 0.1373\,dA + 28.4975 = 0$$
$$0.1373\,dM + 0.0139\,dA + 0.4125 = 0\,.$$

Daraus ergeben sich die gesuchten Größen:

$$dM = -\ 5'\,36''$$
$$dA = +\ 25'\,36'',$$

* N. K. 2, Abschnitt 2.26, und hierin: Überprüfung der Rechnung.

gegenüber den Ergebnissen von Kepler:

$$dM = -\ 5'\,30''$$
$$dA = +\ 24'.$$

Die Restdifferenzen nach der Ausgleichung sind in die Spalte — 1′ der Übersicht eingetragen.

Die Berechnung von mittleren Fehlern über die Ausgleichung ist wenig sinnvoll, für einen Vergleich mit den Keplerschen Ergebnissen werden die Restdifferenzen herangezogen. Ihre Quadratsumme [vv] beträgt 17.96 und 17.79 bei Kepler, der mittlere Fehler nach $m = \sqrt{\frac{[vv]}{n-1}}$ jeweils ± 1′.9, also nahezu ± 2′. Da dieser Fehler die Genauigkeit einer Opposition charakterisiert, ist Kepler die Ableitung der Bahnelemente aus 6 Oppositionen optimal gelungen. Es sei auch an dieser Stelle hervorgehoben, daß Kepler, ohne das Ausgleichungsprinzip nach der Methode der kleinsten Fehlerquadrate zu kennen, allein durch systematisches Probieren und scharfsinniges Überlegen zu gleichen Ergebnissen kommt und gleiche Genauigkeit erzielt wie das neuere Verfahren*.

Interessant erscheint die Frage, wie die Ergebnisse aussähen, wenn dem 1. Ansatz Keplers gefolgt wird, daß nämlich die Exzentrizität ebenfalls als Veränderliche betrachtet wird. Differenzen zwischen Beobachtung und Rechnung werden dann durch Veränderung des Aphels, der mittleren Bewegung und der Exzentrizität ausgeglichen [22].

Wie ändert sich v, wenn e sich ändert? Nach der Reihenentwicklung ist:

$$v = M - 2\,e \sin M + \tfrac{5}{4}\,e^2 \sin 2\,M$$
$$\frac{dv}{de} = -2 \sin M + \tfrac{5}{2}\,e \sin 2\,M$$
$$dv = de\,(0.1206 \sin 2\,M - 2 \sin M)\,. \qquad (6)$$

Werden die Verbesserungen mit v_i bezeichnet, so lauten die Fehlergleichungen, wenn die runde Klammer in (6) mit F_i abgekürzt wird:

$$v_i = dM \cdot f_i + dA\,(1 - f_i) + de \cdot F_i - l_i\,.$$

Darin haben sich die f_i, $(1 - f_i)$, $-\ l_i$ nicht geändert. Für die F_i erhält man nacheinander: 2.0054, — 0.2233, — 1.9833, — 0.2587, 1.9838, — 1.9470.

Aus den Fehlergleichungen folgen die Normalgleichungen:

$$5.7115\,dM + 0.1373\,dA - 0.1270\,de + 28.4975 = 0$$
$$0.1373\,dM + 0.0139\,dA - 0.2961\,de + 0.4125 = 0$$
$$-\,0.1270\,dM - 0.2961\,dA + 15.7982\,de - 1.6975 = 0\,.$$

Daraus ergeben sich die Verbesserungen:

$$dM = -\ 6'\,19''$$
$$dA = +\ 56'\,25''$$
$$de = \quad 1'\ 7''.$$

Die mittlere Bewegung hat in etwa die gleiche Verbesserung erhalten, während dA um ca. 30′ größer geworden ist, um die Veränderung der Exzentrizität von 1′ zu kompensieren. Die Restdifferenzen sind erheblich kleiner als vorher. Sie betragen:

---

* Zum Ausgleichsverfahren nach der Methode der kleinsten Quadrate vgl. z. B. Jordan-Eggert-Kneißl: Handbuch der Vermessungskunde, Bd. 1. Stuttgart 1961.

	—2′ 7″	3″	5″	—15″	—1′ 59″	—5″
gegen	—2′ 6″	2′ 1″	39″	2′ 16″	1′ 46″	46″

bei Kepler. Auffallend sind die großen Zahlen in ♋ für (a) und (e). Keplers Vermutung, daß in (a) ein Beobachtungsfehler gemacht worden ist, scheint sich hier zu bestätigen. Die Verbesserung der Ergebnisse bei Berücksichtigung der Exzentrizität ist offensichtlich [23]. Kepler hat zwar die Veränderung der Exzentrizität diskutiert, die Rechnungen aber nicht in extenso ausgeführt. Die Abhängigkeit einer Größe (B — R) von drei anderen Größen (M, A, e) läßt sich beim Verfahren des systematischen Probierens nicht ohne weiteres überblicken.

1.4 GROSSE HALBACHSE

Die Bestimmung der großen Halbachse (proportio orbium) erfolgt wieder über zwei Stufen, die in den Jupiterhandschriften auseinander liegen, hier aber hintereinander dargestellt werden sollen.

1.41 1. BESTIMMUNG

Für die näherungsweise Bestimmung der großen Halbachse wird das schon von den Saturnhandschriften her bekannte Verfahren der Triangulation verwendet, das im Dreieck Erde, Sonne, Planet Perihel- und Aphelentfernung getrennt berechnet. Dafür werden Beobachtungen in Nähe der Apsidenlinie herangezogen. Für die Richtung des Aphels wird Ergebnis B von Abschnitt 1.31 zugrunde gelegt. Die Perihelentfernung wird über die Beobachtung 1595, 6. Dezember H. 6 abends, ♃ in 25. 17 ½ ♓ berechnet. Im bezeichneten Dreieck TAB sind bekannt:

∢ T aus der Beobachtung und dem Sonnenort,
∢ B, die Prosthaphaeresis orbis, als Differenz zwischen dem beobachteten (scheinbaren) und dem heliozentrischen Ort,
TA aus der Bahntheorie der Sonne.

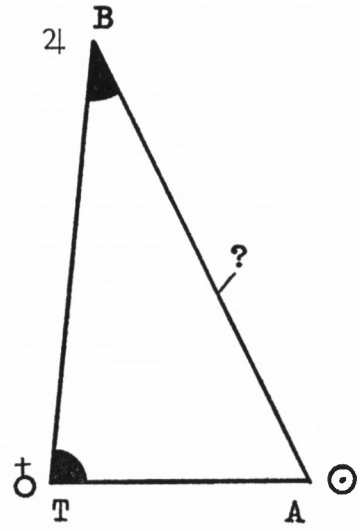

Fig. 3

AB ist die gesuchte Perihelentfernung.

Es sind:

Richtung	AB	6.46.30 ♈
Richtung	TB	25.17.30 ♓
∢	B	11.29. 0
Richtung	TA	24.21.46 ♐
Richtung	TB	25.17.30 ♓
∢	T	89. 4.16
	TA	0.98233
gesuchte Entfernung	AB	4.93370 nach Sinus-Satz.

Nach Prüfung der Beobachtung* zeigt sich, daß wahrscheinlich ein Fehler von 1′ vorliegt. Kepler fragt nach der Größe von AB, wenn ∢ B um 1′ größer ist [24]. AB nach dem Sinus-Satz ergibt sich zu 4.92660, also um 710 Einheiten der letzten Stelle kleiner.

Zur Berechnung der Aphelentfernung werden die Beobachtung vom 24. Januar 1590: ♃ in 17.45.0 ♎ und die Aphelrichtung nach Ergebnis B von Abschnitt 1.31 herangezogen.

Aus der Zeitdifferenz zwischen Beobachtung und Aphelrichtung bestimmt sich die mittlere Anomalie als mittlere Bewegung, aus der sich die wahre Anomalie $v = 1° 43' 31''$ berechnet. Damit ist der exzentrische Ort des Jupiter (Richtung) AB bekannt.

Es sind:

Richtung	AB	8.29.27 ♎
Richtung	TB	17.45. 0 ♎
∢	B	9.15.33
Richtung	TA	14.14. 2 ♒
Richtung	TB	17.45. 0 ♎
∢	T	116.29. 2
	TA	0.98572
gesuchte Aphelentfernung	AB	5.42326 [25].

Kepler stellt die Werte für Perihel- und Aphelentfernung einander gegenüber und berechnet daraus die Exzentrizität:

a — ae	4.93370
a + ae	5.42326
2 ae	0.48956
ae	0.24478
a	5.17848
e	0.04727 [26].

Darunter findet sich als spätere Bemerkung: „Aber sicherer ist 4822."

1.42 ENDGÜLTIGE BESTIMMUNG

Es hat sich im vorausstehenden Abschnitt gezeigt, daß, sofern der heliozentrische Planetenort bei der Berechnung der großen Halbachse mit herangezogen wird, die Ergebnisse wesentlich von der Genauigkeit der Apsidenrichtung abhängen [27].

* Vgl. hierzu Abschnitt 2, Übersichten 3 und 6.

Zwischen der vorläufigen und endgültigen Bestimmung von a liegen weitere Betrachtungen über die Lage der Apsidenlinie, die zur verbesserten Richtung geführt haben (Abschnitte 1.32 und 1.331).

Für die Berechnung der Aphelentfernung wird wieder von der Beobachtung vom 24. Januar 1590 ausgegangen. Kepler erhält:

Richtung AB	8.28.58	♎
Richtung TB	17.45. 4	♎
∢ B	9.16. 6	
Richtung TA	14.13.15	♒
Richtung TB	17.45. 4	♎
∢ T	116.28.31	
TA	0.98583	
AB	5.47844	[28].

Der Planet hält sich nicht genau im Aphel auf, die entsprechende Reduktion beträgt 16 Einheiten der letzten Stelle, also Aphelentfernung = 5.47860 [29].

An dieser Stelle kommt Kepler auf seine frühere Überlegung zurück, wie die Entfernung sich ändern würde, wenn der Planet nicht in 17.45.4, sondern in 17.46.4 ♎ beobachtet wäre. Er erhält — 96, korrigiert aber in — 86 als Entfernungsverbesserung bei vierstelliger Rechnung [30].

Schließlich wird die Entfernung noch auf die Bahnebene des Planeten reduziert:

$$r = \frac{r_0}{\cos i}$$
$$= 5.48008.$$

Diese Distanz setzt Kepler 5.48000 und berechnet daraus die große Halbachse:

	a + ae	5.48000	
	1 + e	1.04822	
Division:	a	5.22800	[31]
	ae	0.25200	
Perihel:	a — ae	4.97600.	

Die nächste Berechnung der Aphelentfernung nach dem gleichen Verfahren geht aus von Beobachtung 1590, 11. Juli abends 10^h, ♃ in 11.19.40 ♎. Die Rechnung führt zu

$$r = 1.01650 \frac{\sin 72.52.18}{\sin 9.55.20}$$
$$r = 5.63751,$$

zu einem zu großen Wert.

Kepler analysiert die Beobachtung und stellt fest, daß der Ort des Jupiter u. a. durch eine Distanzmessung von Arcturus bestimmt worden ist, die in Wirklichkeit größer gewesen sein müßte. Demnach würde sich der Ort ändern.

Inzwischen hat Kepler an der Sonnentheorie weitergearbeitet und Bahnelemente der Sonne geändert. Einzelheiten sind nicht ersichtlich, zudem fehlt hier jede Datumsangabe. In der weiteren Rechnung ändern sich dementsprechend die Sonnenörter geringfügig: für den 24. Januar 1590 um + 49″, für den 11. Juli um — 1″. Die Bezugsrichtungen für mittlere Bewegung und Aphel des Jupiter sind geändert in:

G 6.43.47 ♎ für mittlere Bewegung
6.32.36 ♎ für Aphel, bezogen auf 1589 compl. [32].

Dadurch ändert sich jeweils die Prosthaphaeresis orbis (∢ B) in 9° 19′ 27″ für den 24. Januar und in 9° 57′ 54″ für den 11. Juli.

Die Entfernungen berechnen sich zu:

5.44297 für den 24. Januar 1590 und
5.61321 für den 11. Juli 1590.

Die mittlere Entfernung wird nicht angegeben. Sie beträgt für den 24. Januar 5.19410, kommt dem endgültigen Wert von 5.20000 schon sehr nahe. Der zweite Wert ist sicherlich zu groß ausgefallen.

Die Perihelentfernung wird über die schon früher verwendete Beobachtung vom 6. Dezember 1595 bestimmt. Bezugsrichtungen der Jupiter-Bewegung sind zunächst die Ergebnisse B von Abschnitt 1.31.

Es sind:	Richtung AB	6.47.20 ♈	
	Richtung TB	25.17.30 ♓	
	∢ B	11.29.50	
	∢ T	89. 4.16	wie früher
	TA	0.98233	wie früher
	AB	4.93494	in der Ekliptik
	r	4.93526	in der Bahnebene.

Diese Rechnung wird, wie schon bei der Berechnung der Aphelentfernung, verbessert, indem als neue Bezugsrichtungen die Werte G genommen werden. Richtung AB, der locus eccentricus, kommt jetzt nach 6.44.10 ♈, AB wird 4.92799 und r 4.92931 [33]. Zur Überprüfung der Ergebnisse werden Aphel- und Periheldistanz gegenübergestellt.

Aphel	a + ae	5.48108	[34]
Perihel	a — ae	4.92931	
	2 a	10.41039	
	a	5.20520	
	1 + e	1.04822	
neues Aphel	a (1 + e)	5.45620	
	ae [35]	0.25100	
	a	5.20520	
neues Perihel	a — ae	4.95420.	

Die Entfernungen zu Aphel und Perihel passen also bisher schlecht mit der Exzentrizität zusammen [36]. Der Fehler in der zuletzt berechneten Perihelentfernung wird jetzt korrigiert, AB wird 4.95003 [37]. Diese nicht auf die Bahnebene reduzierte Entfernung stellt er der Aphelentfernung gegenüber, wie sie sich nach der Korrektur der Bezugsrichtungen (Ergebnisse G) ergab.

Perihel	a — ae	10.39300
Aphel	a + ae	5.19650
	2 a	10.39300
	a	5.19650
	ae	0.24647
hieraus	e	0.04743
gegen	e	0.04822.

Die Differenz in e ist zu groß, so daß die angehaltenen Entfernungen noch zu ungenau bestimmt sind. Dennoch erlaubt die Annahme, daß der Wert von a dem tatsächlichen Wert nahekommt, den Rückschluß auf die mögliche Perihel- und Aphelentfernung.

	a	5.19650
	e	0.04822
	ae	0.25058
Perihel		4.94592
Aphel		5.44708.

Kepler nennt die zuletzt erhaltenen Werte die „in Übereinstimmung gebrachten Entfernungen", „Aphelia concordata, perihelia concordata". Sie sind noch nicht die endgültigen Entfernungen der RT, sind aber in der „Epitome"* abgedruckt [38].

Weitere Rechnungen Keplers gehen von mittleren Längen aus und bestimmen a direkt nach

$$a = \frac{r}{1 + e \cos E}. \tag{7}$$

Hierzu werden einige neue Beobachtungen herangezogen, zunächst in Nähe der 1. mittleren Länge (♉).

Beobachtung 1593, 3. Oktober, ♃ in 14.24 ♉

$$r = 0.99504 \frac{\sin 84.11.50}{\sin 11.9.35}$$

und durch vorherige Division durch (1 + cos E) nach (7)

$$a = 5.20642.$$

Zur Kontrolle berechnet sich Kepler die Prosthaphaeresis orbis über a der „Epitome":

$$\sin B = \frac{R}{a} \cdot \frac{\sin T}{1 + e \cos E} \tag{8}$$

$$= 11^\circ\, 11'$$

gegen $11^\circ\, 9'\, 35''$ vorher.

Daraus ergibt sich über den beobachteten Ort der locus eccentricus zu

25.35 ♉
gegen 25.33½ ♉ vorher.

Beobachtung 1593, 17. März, ♃ in 19.25.0 ♉

$$r = 0.99990 \frac{\sin 77.7.23}{\sin 10.50.10}$$

$$= 5.18489$$

$$a = \frac{r}{1 + e \cos 94.20.47} \quad \text{nach (7)}$$

$$= 5.20489.$$

Diesem Wert ist das Ergebnis B von Abschnitt 1.31 zugrunde gelegt. Mit den Bezugsrichtungen F von Abschnitt 1.331, mit den Werten „ex ultima correctione 1616 Sept.", wie es hier heißt, wird die Rechnung verbessert:

* Johannes Kepler: Epitome Astronomiae Copernicanae. Ges. Werke Bd. VII, München 1953. S. 415.

$$\sphericalangle B = 10^\circ\, 53'\, 29''$$
$$a = 5.18145.$$

Um wieder einen Anhaltspunkt dafür zu haben, wie a von den Ausgangsrichtungen abhängt, insbesondere vom locus eccentricus, oder, was auf dasselbe hinausläuft, wie ein anderer, wahrscheinlicherer Wert für a den locus eccentricus neu festsetzt, bestimmt Kepler über a der „Epitome" die Prosthaphaeresis orbis nach (8) und den locus eccentricus.

$\sphericalangle B = 10.51\frac{1}{3}$
gegen 10.53.29
locus eccentricus 8.34 ♑
gegen 8.32 ♑ [39].

Beobachtung 1593, 1. Oktober* 6^h 45, ♃ in 14.24.24 ♑

$$r = 0.99565 \frac{\sin 86.11.46}{\sin 11.2.49} \text{ [40]}$$
$$E = 111.22.28$$
$$a = 5.27715 \quad \text{ein zu großer Wert.}$$

Kepler überlegt, wie das Ergebnis verbessert werden könnte. In (8) ist der Quotient $\frac{R}{1 + e \cos E}$ sicherlich richtig, der $\sphericalangle T$ könnte unsicher sein. Diese Unsicherheit kann nur von der Beobachtung herrühren. Zum Vergleich wird eine weitere Beobachtung herangezogen, die 2 Tage später gemacht wurde.

Beobachtung 1593, 3. Oktober, ♃ in 14.28 ♑

$$r = 0.99504 \frac{\sin 84.16}{\sin 10.58.31}$$
$$a = 5.29149 \quad \text{zu groß.}$$

Werden die korrigierten Bezugsrichtungen zugrunde gelegt, ergibt sich:

$$B = 11^\circ\, 5'\, 35''$$
$$a = 5.24000.$$

Nachdem die große Halbachse (proportio orbium) aus Beobachtungen in Nähe der ersten mittleren Länge (♑) berechnet wurde, greift Kepler im folgenden auf Jupiterörter in Nähe der zweiten mittleren Länge zurück (♋), um a zu bestimmen. Es werden 2 Beobachtungen verwendet:

1586 23. September H. 5 früh ♃ in 13.52.30 ♋
1587 10. März H. 8.22 ♃ in 5.49 ♋.

Die Berechnung von a erfolgt wie früher.

Für 1586:
$$r = 0.99835 \frac{\sin 85.32.34}{\sin 11.5.35} \text{ [41]}$$
$$a = 5.2010.$$

Für 1587:
$$r = 0.99781 \frac{\sin 96.5.12}{\sin 10.57.12}$$
$$a = 5.20517.$$

Mit diesen Berechnungen gibt sich Kepler endlich zufrieden. „Wir präsentieren", so sagt er, „alle angeführten Beobachtungen genau genug, wenn die mittlere Entfernung 520000 [42] gesetzt wird."**

* Kepler-Mss. Pulkowo, Bd. 13, Bl. 359. Datum nachträglich in 3. Oktober verbessert.
** In Kepler-Mss. Pulkowo, Bd. 13, Bl. 361. Wörtlich heißt es: „Coagulum et conclusio: Satis exacte repraesentamus omnes adhibitas observationes si mediocris distantia fiat 520000."

Die Ausführungen über die Bestimmung der großen Halbachse des Jupiter sind damit abgeschlossen.

Als Ergebnis ist festzuhalten:

$$a = 5.20000\ ^{43}$$
$$\text{und mit } e = 0.04822$$
$$ae = 0.25074$$
$$\text{Aphelentfernung } a + ae = 5.45074$$
$$\text{Perihelentfernung } a - ae = 4.94926\ ^{44}, \text{ die Werte der RT.}$$

1.5 KNOTEN UND NEIGUNG

1.51 NÄHERUNGSWEISE KNOTENLAGE UND NEIGUNG

Über die Ableitung der Knotenlage ist im 61. Kapitel der „Astronomia Nova" und in N. K. 2* das Wesentlichste zum Verfahren Keplers ausgeführt. Auch in den Jupiterhandschriften** geht Kepler von Jupiter-Örtern in Nähe der Ekliptik aus, um daraus die Länge für die Breite 0 zu interpolieren. Hier kommt hinzu, daß die Abhängigkeit zwischen Knotenlinie und Breite des Planeten dazu ausgenützt wird, die Bahnneigung abzuleiten und über die Bahnneigung die Knotenlage zu verbessern. Die Lage der Knotenlinie ist noch nicht endgültig, sie wird im Zusammenhang mit der Knotenbewegung festgelegt.

Einen ersten Anhalt für die Lage des aufsteigenden Knotens gibt Opposition (a) von Abschnitt 1.2:

1586 21. Dezember ♃ in $10\frac{1}{4}$ ♋ $B = +6'$.

Da der Planet sich im aufsteigenden Bahnteil aufhält, liegt ☊ vor 10 ♋, ebenso, wie der absteigende Knoten ☋ vor 18 ♑ liegt aus der Opposition von 1593 (b). Die maximale Breite[45] erreicht der Planet demnach vor 13 ♎, B_{max} ist größer als $1° 37'$ [46].

12 Jahre später, am 26. Dezember 1598, hält sich der Planet wiederum in Nähe von ☊ auf:

♃ in 15.0.44 ♋ mit $B = +14'$.

Gegen 1586 hat sich der Ort des Jupiter um $4° 46'$ in Länge und $8'$ in Breite geändert. Kepler verfährt in üblicher Weise: die Interpolation für $B = 0$ ergibt die Längendifferenz von $3\frac{3}{4}°$ zu 1586, so daß ☊ ungefähr in $6\frac{1}{2}°$ ♋ liegt[47].

Einen ersten Wert für die inclinatio berechnet Kepler aus der Beobachtung vom 24. Januar 1590, die bereits zur Bestimmung der Aphelentfernung in Abschnitt 1.41 herangezogen wurde.

$$\text{Es ist:} \quad \cot b = \cot B \frac{\sin T}{\sin S}.^{***} \tag{9}$$

Darin bedeuten T der Winkel bei der Erde, die Elongation,

S der Winkel bei der Sonne, die Kommutation.

---

* N. K. 2, Abschnitt 2.21.

** Die entsprechenden Stellen sind nicht zusammenhängend dargestellt. Sie finden sich in Kepler-Mss. Pulkowo, Bd. 13, Bl. 339 v, 344, 344 v, 350 und 361.

*** Vgl. N. K. 2, Abschnitt 1.21.

Mit $B = 1° 28'$ und $T = 116° 29'$

$S = T$ — Prosth. orbis $= 107° 13'$ von Abschnitt 1.41
wird $b = 1° 22' 20''$ [48].

Die inclinatio für die wahre Opposition 1590:

♃ in 12.55 ♎ $B = 1° 37'$

erhält Kepler, indem er auf die in Abschnitt 1.41 berechnete Aphelentfernung und auf die Entfernung Sonne–Erde = 1.00000 zurückgreift. Die Aphelentfernung, aus der Beobachtung vom 24. Januar bestimmt, ist – abgesehen von einem Rechenfehler Keplers – ohnehin nur als Näherungswert anzusehen, der zwei Monate später noch ebenso verwendet werden kann.

Die Aufgabe besteht darin, in der Sonderstellung der Opposition über die Abstände der Planeten und der Erde von der Sonne B in b umzurechnen. Kepler rechnet nach:

$$\cot b = \cot B + \frac{\cot B}{\Delta}. \tag{10}$$

Darin ist $\Delta = r_0 - R$, gleich dem Abstand des Planeten von der Erde, reduziert auf die Ekliptikebene [49].

In den Handschriften finden sich die Rechnungen, wenn $\frac{\cot B}{\Delta} = A$ gesetzt wird, in der Form:

$$\cot b = \cot B + A.$$

Zur Berechnung von A wird die Verhältnisgleichung

$$\Delta : 1 = \cot B : A$$

angesetzt[50]. Mit $B = 1° 37'$, $R = 1$, $\Delta = 4.42326$ wird

$$b = 1° 19' 8''.$$

In 13 ♎ ist der limes, der Punkt mit 90°-Abstand von der Knotenlinie, bereits überschritten, da zuvor ☊ in 6½ ♋ abgeleitet wurde. Gesucht ist hier die heliozentrische Breite im limes, die gleich der Neigung der Bahnebene des Planeten gegen die Ekliptikebene ist:

$$\tan b_{max} = \tan i = \frac{\tan b}{\sin (l - ☊)}. \tag{11}$$

Kepler setzt die Abweichung vom limes 5° und erhält als Verbesserung ca. 20''; damit wird

$$i = 1° 19' 30''$$ [51].

Als mittlerer Wert aus den Beobachtungen des Jahres 1590 wird $i = 1° 20' 30''$ genommen [52].

Aus den Beobachtungen von September 1595: ♃ in 29 ♍, $B = -1° 39'$, wird die Neigung in Nähe des Perihels und des anderen limes abgeleitet. Nach (10) ist

$$\cot b = 34.7151 + \frac{34.7151}{3.93370}$$
$$b = 1° 18' 50''$$

und nach (11) $i = 1° 19' 20''$ [53].

Die Kenntnis der Neigung, die Kepler zunächst mit $1° 19' 20''$ als vorläufigen, später als endgültigen Wert annimmt, erlaubt nun wiederum neue Rückschlüsse auf die Knoten-

lage. Mit bekanntem i und über (10) berechneter Breite b läßt sich nach (11) der Knotenabstand von der Länge des Planeten und damit die Länge der Knotenlinie neu bestimmen; zunächst aus der Opposition 1586:

♃ in $10\frac{1}{4}$ ♋ B = + 6′.

Der Planet hält sich ungefähr in mittlerer Entfernung auf, die hier nach Abschnitt 1.41 vorläufig zu 5.17848 berechnet war. Mit R = 1.01800 wird Δ in (10) 4.16048. Indessen eignet sich (10) schlecht zur Bestimmung von b für B ≈ 0. Für kleine B, b kann gesetzt werden: tan B ‖ B

tan b ‖ b

und b wird $b = B \cdot \frac{\Delta}{r}$ [54]. (12)

Aus obigen Werten folgt b = 4′ 40″ [55] und die Lage der Knotenlinie über (11):

$$\sin(l - ☊) = \frac{\tan b}{\tan i}$$
$$= 0.05893$$
$$l - ☊ = 3.22.38$$
$$l \text{ in } 10.14 ♋$$

☊ in 6.52 ♋

gegen $6\frac{1}{2}$ ♋ vorher.

Aus der Opposition vom Juni 1593: ♃ in 17.23 ♎, B = — 17′ ergibt sich nach analoger Rechnung:

☊ in 7.30 ♎.

Damit hat Kepler erhalten:

Dezember	1586	☊ in 6.52 ♋
Juni	1593	☊ in 7.30 ♎
Differenz zu 180°		38′
Präzessionsbewegung		5′
tatsächliche Differenz		33′.

Dieser Betrag wird gleichmäßig auf die Knoten verteilt, so daß Kepler erhält:

H	Dezember	1586	☊ in 7. 9 ♋
	Juni	1593	☊ in 7.14 ♎.

Die Neigung wird mit i = 1° 19′ 20″ angenommen [56].

1.52 EPOCHA NODI – KNOTENBEWEGUNG

Über die Bestimmung der Knotenlinie zu verschiedenen Zeiten, also über die Knotenbewegung, finden sich erst wieder am Schluß der Jupiterhandschriften einige Angaben*. Indessen ist die Reihenfolge der aus den Handschriften ersichtlichen Ableitungen der Bahnelemente nicht immer eingehalten, sondern dort durchbrochen worden, wo es für das Verständnis des heutigen Lesers und die inhaltliche Gliederung der Elemente günstiger erschien**.

* Kepler-Mss. Pulkowo, Bd. 13, Bl. 377r und 377v.

** Zur Sichtung und Ordnung des Keplerschen Nachlasses vgl. Martha List: Der handschriftliche Nachlaß der Astronomen Johannes Kepler und Tycho Brahe. DGK Reihe E, Heft 2. München 1961. S. 25.

Hier ist der Teil, der zwischen der vorläufigen und endgültigen Bestimmung der Knotenlage liegt und dem Umfang nach nahezu die Hälfte aller Handschriften darstellt, zunächst ausgelassen worden.

Zur Ableitung der Knotenbewegung sind mindestens zwei Epochen, zwei Angaben über die Knotenlinie zu verschiedenen Zeiten, erforderlich. Zum Wert H von Abschnitt 1.51 kommt eine weitere Epoche hinzu, die aus alten, überlieferten Beobachtungen abgeleitet wird*. Als Beobachtungen bieten sich von Ptolemäus überlieferte Jupiter-Örter aus den Jahren 341 v. Chr. und 241 v. Chr. an, in denen Jupiter in Nähe des Sternes Propus bzw. Asellus stand[57].

Nach dem Fixsternkatalog des Tycho Brahe befindet sich 1600:

Propus	in 25.22 ♊	mit B = — 13′
Asellus	in 3. 8 ♌	mit B = — 4′.

Die Werte des Katalogs stimmen mit denen von Ptolemäus darin überein, daß der um 100 Jahre eher beobachtete Stern tatsächlich die größere südliche Breite hat. Die Angaben der aristotelischen Beobachtung aus dem Jahre 341 v. Chr. legen Propus als Anschlußstern für den Jupiter nicht eindeutig fest, sie lassen vielmehr noch andere Sterne in Betracht kommen. So hält es Kepler für möglich, daß der Stern „in ventre Meridionali ♊" beobachtet wurde, der sich 1600 in 12.56 ♋ befindet bei gleicher südlicher Breite wie Propus. Bei linearer Interpolation aus beiden Örtern ergibt sich für die Breite 0:

L	12.56 ♋	B	— 13′
	3. 8 ♌		— 4
ΔL	20.12	ΔB	— 9′.

Kepler erhält 6 ♌ [58] für das Jahr 1600. Er bezieht die Lage von ☊ auf den Zeitpunkt der aristotelischen Beobachtung und zieht die Präzession entsprechend der Dauer des dazwischenliegenden Zeitraumes von 1940 Jahren ab.

1600	B = 0	in	6 ♌ erreicht
Präzession nach RT			27° 29′
341 v. Chr.	☊	in	5.39 ♋ [59].

Im Vergleich zur Knotenlage H von Abschnitt 1.51 zeigt der Knoten kaum eine Bewegung, zumindest keine Bewegung, die sich deutlich aus der erreichbaren Genauigkeit dieser Betrachtungen und der Zuverlässigkeit der überlieferten Angaben rechtfertigen ließe[60].

An dieser Stelle bricht Kepler die bisherige Überlegung ab und greift auf seine Hypothese des „dies creationis" zurück, daß nämlich zu dem von ihm auf Grund chronologischer und astronomischer Untersuchungen festgelegten Zeitpunkt der Weltschöpfung, am 24. Juli 3993 v. Chr., die Epochen der Planeten sich durch besondere Stellungen im Tierkreis auszeichneten**. Für ☊ des Jupiter nimmt er 0 ♋ an.

Mit dieser Annahme wird freilich die vorher bestimmte Knotenlage zur Zeit von Aristoteles nicht erreicht, wie andererseits der ptolemäische Wert*** von 1 ♋ 400 Jahre später

* Vgl. hierzu N. K. 2, Abschnitt 2.21.

** Zum „dies creationis" vgl. „Mysterium Cosmographicum" Kap. 23. Ges. Werke Bd. I, München 1938. S. 78f.

*** Ptolemäus, Almagest II-13,1.

überschritten wird. Aber, so resümiert Kepler*, bei derartiger Genauigkeit und so geringer Differenz der Breite sei es nicht notwendig zu streiten[61].

Die endgültige Ableitung der Knotenbewegung beim Jupiter läßt sich aus den erhalten gebliebenen Handschriften nicht ermitteln, die letzten Rechnungen fehlen.

Indessen kann als sicher angenommen werden, daß das Verfahren nicht anders als beim Mars oder Saturn abgeschlossen wird. Bezugsrichtungen haben sich für den „dies creationis" zu 0 ♋ und für 1586 zu 7 ♋ ergeben. Die dazwischenliegenden Richtungen, die aus alten Beobachtungen sowie Angaben des Ptolemäus resultieren, haben keine zuverlässigen Werte ergeben, sind aber nicht gänzlich zu verwerfen[62].

1.6 DIE EPOCHEN DES JUPITER – APHELÄNDERUNG UND MITTLERE BEWEGUNG

Die Ableitung der bisherigen Bahnelemente, insbesondere die Bestimmung der großen Halbachse, hat die Unsicherheit in den Ausgangsrichtungen für mittlere Bewegung und Aphel gezeigt. Obwohl Kepler deutlich die gegenseitige Abhängigkeit der Elemente erkannt und z. T. auch quantitativ bestimmt hat, gibt er sich mit den Ergebnissen, denen vorläufige Jupiterepochen zugrunde lagen, zufrieden und verzichtet auf eine Wiederholung der Rechnung mit den endgültigen Werten der Epochen. Die Bestimmung der Epochen selbst für Aphel und mittlere Bewegung erfolgt wie beim Mars und Saturn aus Beobachtungen zu verschiedenen Zeiten.

1.61 1. BESTIMMUNG DER APHELÄNDERUNG

Ausgehend von der vorläufigen Aphelrichtung, dem Ergebnis B in Abschnitt 1.31, wird versucht, über eine alte Angabe einen ersten Wert für die Apheländerung zu erhalten.

Bei Ptolemäus** findet sich:

137 n. Chr. Apogäum	in 11 ♍
Spica virginis	in 26.40 ♍
Spica übertrifft das Apogäum um	15.40.

Dagegen ist für 1589 compl. gefunden worden:

Aphel	in 6.46.56 ♎ [63]
Spica	in 18. 6.39 ♎ [64]
Spica übertrifft das Aphel um	11.19.43.

Die Bewegung der Apsidenlinie, bezogen auf denselben Fixstern, d. h. ohne Berücksichtigung der Präzession, wäre also, wenn Apogäum und Aphel zusammenfallen, in 1452 Jahren um 4° 20′ rückläufig.

Mästlin hat das Aphel aus dem Apogäum zu 17.31 ♍ berechnet[65]. Kepler weist nach, daß diese Rechnung anders einzurichten ist.

---

* In Kepler-Mss. Pulkowo, Bd. 13, Bl. 377. Wörtlich heißt es: „At in tanta subtilitate, tam parva inclinatione Jovis de tantula differentia non est operae pretium litigare ..."

** Ptolemäus, Almagest II-11,1.

Es seien in Fig. 4

B	die Sonne
A	das Zentrum des Exzenters der Erde
BA	die Richtung der Apsidenlinie der Sonne
C	das Zentrum des Äquanten des Jupiter
AC	Apogäumsrichtung
BC	Perihelrichtung des Jupiter

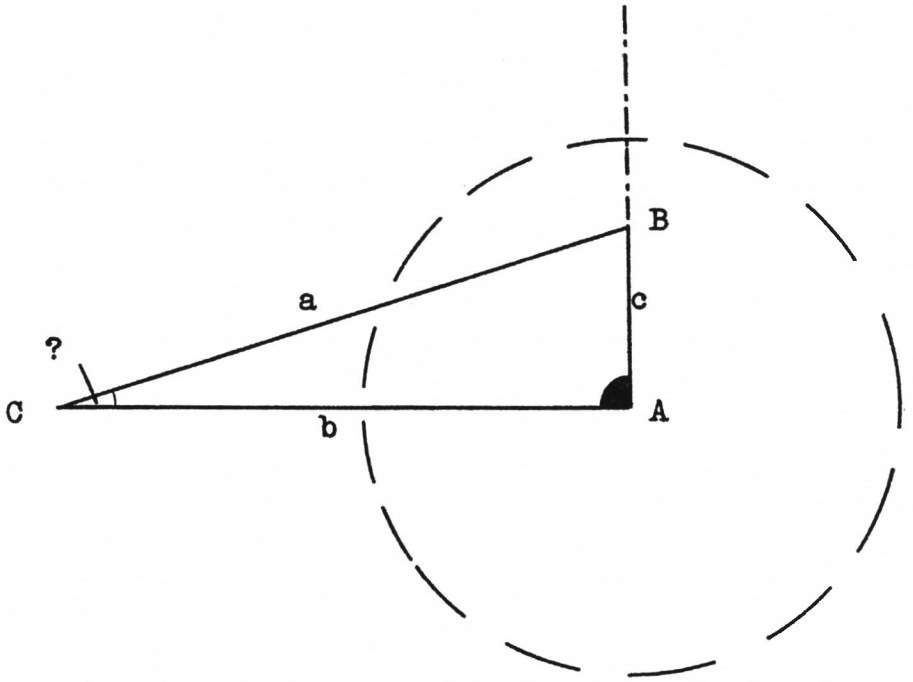

Fig. 4

Gegeben sind: BA = Eccentricitas Solis totalis
= 4100
AC = Eccentricitas Jovis totalis
= 48000*
AB in 5.30 ♊
AC in 11 ♍

∢ CAB 95.30.

Daraus berechnet sich ∢ BCA zu 4° 49′ [66].

Weiter ist:

Apogäum	in	11 ♍	
Aphel	in	15.49 ♍	
Spica	in	26.40 ♍	

Spica übertrifft das Aphel um 10.51 137 n. Chr.
gegen 11.20 1589

Differenz 29′ in 1452 Jahren,

* Ptolemäus, Almagest II-11,10.

d. h. in 50 Jahren würde sich das Aphel um 1′ zurückbewegen. Die Aphelbewegung bleibt also auch nach dieser Rechnung retrograd.

Mit diesem vorläufigen Wert wird das Aphel für 1600 berechnet:

1589 compl.	Aphel in	6.46.56 ♎
Bewegung in 11 Jahren einschließlich Präzessionsbewegung		9.12
1600 compl.	Aphel in	6.56. 8 ♎.

Für die mittlere Bewegung ergibt sich:

1589 31. Dez. 18h 38	♃ in	6.45.56 ♎
Bewegung in H. 5.22		1. 7
1589 compl.		6.47. 3 ♎
11a		333.55.51
1d (Schalttag)		4.59
1600 compl.	motus medius in	10.47.53 ♍.

Diese Werte für 1600 compl. seien Ergebnisse I genannt.

Kepler verschafft sich anschließend eine Kontrolle über die Genauigkeit der bisherigen Ergebnisse, indem er über die Bahnelemente geozentrische Jupiterörter berechnet und sie mit Beobachtungen und Ephemeridenwerten vergleicht. Die Rechnung bestimmt jeweils heliozentrischen Planetenort, Sonnenort und geozentrischen Planetenort*.

Als Beispiel für diese Rechnungen sei die Berechnung des Jupiter-Orts für den 7. März 1607 wiedergegeben.

mittlere Bewegung	
1600	10.47.53 ♍
6a	2. 3. 6
Februar	4.54. 8
6d	29.55
Präzession	5.17
	18.20.19 ♓
Aphel	7. 1.14 ♎
v	159.26.31
helioz. Ort	16.27.45 ♓
☉ in	26.34. 1 ♓
∢ A	10. 6.16
AB = r	4.94312
daraus ∢ B	1.41.36 [67]
Richtung AB	16.27.45 ♓

	Aphel
	6.56. 8 ♎
	5. 6
	7. 1.14 ♎
mittlere Bew.	18.20.19 ♓
M	161.19. 5
v	159.26.31
R =	0.99730**

Richtung TB 18. 9.21 ♓ geozentrischer Jupiter-Ort (vgl. Fig. 3, S. 24).

* Zur Rechnung vgl. N. K. 2, Abschnitt 1.21.

** Sonnenwerte nach vorläufigen Sonnentafeln.

Nach den Ephemeriden Maginis* war Jupiter

am 4. März 1607 in 17.26 ♓
am 5. März 1607 17.40 ♓
am 6. März 1607 17.55 ♓.

Der berechnete Ort für den 7. März 18.9 ♓ fügt sich gut in die Reihe ein.

Weitere Kontrollrechnungen ergeben:
für den 10. Dezember 1594

♃ in 24.23. 4 ♒ gegen 24.25 (beobachtet)
und 24.19 (Ephemeriden Maginis)

für den 1. April 1607
♃ in 24. 3. 9 ♓ [68]

für den 19. Februar 1609
♃ in 11.36.33 ♉ gegen 11.0.0 (Ephemeriden Maginis) [69]

für den 1. Januar 1610
♃ in 26.16. 6 ♊ Vergleichswert fehlt

für den 16. März 1583 [70]
♃ in 12.26.13 ♓ B = — 1° 0′ 18″ Vergleichszahlen fehlen

für den 22. November 1581
♃ in 18.39. 5 ♑ B = — 22′ 31″ Vergleichszahlen fehlen

für den 16. Dezember 1581
♃ in 23.58. 7 ♑ gegen 23.54 (beobachtet), B = — 18′ 55″ Vergleichszahl fehlt.

Insgesamt lassen die Rechnungen erkennen, daß die vorläufigen Werte für mittlere Bewegung und Aphel den Beobachtungen besser genügen als die Ephemeriden Maginis. Die hier geforderte Genauigkeit ist aber keineswegs erreicht, so daß weitere Überlegungen und Rechnungen bis zu zufriedenstellenden Ergebnissen angestellt werden müssen.

1.62 WEITERE VERSUCHE ZUR ABLEITUNG DER JUPITER-EPOCHEN

Die Verwendung einer ptolemäischen Angabe über das Jupiter-Apogäum hat noch nicht genügt, um über große Zeiträume hinweg die Bahnörter des Jupiter genau genug darzustellen. Es ist notwendig, alle verfügbaren, insbesondere ältere Beobachtungen, kritisch zu durchmustern und aus ihnen zuverlässige Angaben über die Lage der Apsidenlinie in früheren Jahrhunderten zu erhalten. Diesen Weg geht Kepler mit einer bewundernswerten Ausdauer; er breitet seine Überlegungen und Rechnungen für die Epochen des Jupiter in vielen Ansätzen in seinen Handschriften aus**. Es ist hier nicht möglich, alle Gedanken und alle Zahlen wiederzugeben. Dennoch soll versucht werden, die Ausführlichkeit zu wahren und sie – wie auch früher schon – nur dort zu verlassen, wo es das bessere Verständnis erforderlich macht. Zusätzlich werden die einzelnen Ansätze numeriert, um dadurch die komplexen Ausführungen etwas aufzufächern. Auf die Beobachtungen wird im 2. Teil ausführlich eingegangen, hier nur so weit, wie es zur Erläuterung der Rechnungen notwendig ist.

---

* J. A. Magini hat für die Jahre 1581–1630 Ephemeriden berechnet, die teils in Venedig, teils gleichzeitig in Venedig und Frankfurt a. M. herausgekommen sind.

** Kepler-Mss. Pulkowo, Bd. 13, Bl. 362–377v.

Am 15. Juni 1622 [71] beginnt Kepler diesen Teil seiner Überlegungen unter der Überschrift: De Stella Jovis Epochis constituendis.

1.621 Zwei Ansätze zur Bestimmung der Aphelbewegung

I. Im Abschnitt 1.61 war aus dem Vergleich einer ptolemäischen Angabe über das Apogäum aus dem Jahr 137 mit dem Aphel für das Jahr 1589 eine retrograde Bewegung der Apsidenbewegung von 1′ in 50 Jahren abgeleitet worden.

Bei Albategnius* (um 900) findet sich die Bemerkung, daß er das Apogäum um 8° entfernt von jenem Ort gefunden habe, in dem es nach Ptolemäus sein sollte.

Demnach ergibt sich:

Apogäum nach Ptolemäus in	11 ♍
Präzession in 740 Jahren mit dem von Ptolemäus überlieferten Wert von 1° pro 100ª**	7° 24′
Apogäum nach den Werten des Ptolemäus in	18.24 ♍
Albategnius findet Differenz von	8°
Apogäum nach Albategnius in	10.24 ♍.

Oder es gibt die andere Möglichkeit, daß Albategnius die Präzession von 1° schon für 66ª ansetzte, so daß sie für 740ª 11 $\frac{7}{33}$° = 11° 13′ beträgt. Danach käme das Apogäum nach 19° 13′ ♍ [72] und das Aphel um 6 ½° darüber hinaus nach 25.43′ ♍ [73].

Mit dem in Abschnitt 1.61 errechneten Wert I für 1600 erhält Kepler:

	880	Aphel	in	25.43 ♍
	1600	Aphel	in	6.56 ♎
In	720ª	Aphelbewegung von		11° 13′
		jährliche Bewegung		56″.

Für den „dies creationis", d. h. für das Jahr 3993 v. Chr., sind von 1600 aus 5593 Jahre zurückzurechnen. Danach liegt das Aphel in 9.56 ♋ [74]. Diese Ziffernfolge ist keineswegs so auffällig, wie es für den Schöpfungstag zu erwarten ist.

II. Zur Bestimmung der Aphelbewegung genügen die bisher herangezogenen Angaben nicht. Es müßte zum Vergleich eine „genaue alte Beobachtung" herausgefunden werden, „dann wäre diese Frage leichter zu diskutieren"***. Zunächst verwendet Kepler einige Beobachtungen von Regiomontan und Walther, ehe er auf die von Ptolemäus überlieferten Jupiter-Örter zurückgeht.

An diesen Beobachtungen prüft Kepler erneut die vorläufigen Epochenwerte und versucht, Verbesserungen zu erhalten.

Die erste Beobachtung stammt vom 15. März 1471: ♃ in 29.16 ♍.

In bekannter Weise wird der geozentrische Ort über den heliozentrischen Ort des Planeten und Sonnenort berechnet. Kepler erhält:

♃ in 29.19.20 ♍, B = 1° 48½′.

* Al-Battani sive Albatenii Opus Astronomicum; ed. C. A. Nallino. Mailand 1903. S. 239.

** Ptolemäus, Almagest II-7,2.

*** In Kepler-Mss. Pulkowo, Bd. 13, Bl. 362. Dort heißt es: „Quod si haberemus exactam observationem ejus antiquam, facilius hanc quaestionem discuteremus."

Interessant an dieser Rechnung ist, daß die Umrechnung des heliozentrischen in den geozentrischen Jupiterort über den Tangentensatz logarithmisch erfolgt. Damit taucht gleichzeitig in der Jahresmitte von 1622 der erste Logarithmus in den Jupiter-Handschriften auf[75]. In einer Randbemerkung von März 1624 hat Kepler die Rechnung verbessert. Hier legt er bereits die Tafelwerte der RT zugrunde und erhält 29.16 ♍. 1622 stellt er fest, daß die Beobachtung einen Fehler aufweise und sie daher für die Korrektur des Jupiteraphels nicht in Frage komme.

Ein neuer Versuch wird unternommen mit Beobachtungen vom 22. August und 30. September 1478 um 3^h früh. Zu beiden Zeitpunkten ist der Jupiter in der Verbindungslinie der Augen des Stiers gesehen worden.

Die Rechnung nach vorläufigen Epochenwerten ergibt:

für den 22. August 0.44.17 ♊
für den 30. September 0.47.36 ♊.

Dagegen bestimmt die Beobachtung den Ort des Jupiter „vom nördlichen Auge aus in der Hälfte der Distanz der Augen", d. h. in 0.29 ♊ für den 22. August.[76] Aus der Knotendistanz von ungefähr 46° bestimmt sich die Neigung zu 57′, der Betrag der Breite wird etwas größer.

Die Länge differiert um 14′. Soll diese Differenz durch Verbesserung des Aphels ausgeglichen werden, so ist davon auszugehen, daß 1° Apheländerung eine Ortsverbesserung von 4′ bewirkt[77]. Wenn also der Beobachtung zu trauen ist, wird die Länge zu verändern sein. Kepler gibt 14′ für 142 Jahre an. Um gleiche Anomalien wie vorher zu erhalten, ist das Aphel um den gleichen Betrag zu verändern. Die Veränderung von 14′ in 142^a summiert sich in 5600 Jahren bis zur Schöpfungsepoche, „ad Epocham creationis", auf 9° 20′ [78], so daß, ausgehend vom vorher erhaltenen Wert 9.56 ♋, das Aphel in 0 ♋ zu liegen kommt[79].

Schließlich prüft Kepler am 16. Juli 1622 die Ergebnisse I an der Beobachtung von 1503: Walther beobachtet den Jupiter am 8. September 4^h früh. Wie vorher wird der scheinbare Ort, locus visus, aus der vorläufigen Bahntheorie berechnet und mit der Beobachtung verglichen:

12.3 ♋ steht gegen 11.40 ♋.

Ist die Beobachtung zuverlässig genug, so ist das Ergebnis I noch zu verbessern. In einer späteren Anmerkung vom 4. Mai 1624 ist der berechnete Ort mit 11.55 ♋ angeführt. Die Übereinstimmung in Breite ist ausgezeichnet. Eine Überprüfung der Beobachtungsprotokolle zeigt, daß am 6. Oktober 1503 eine Konjunktion mit dem Mars stattfand:

6. Oktober 1503 ☌♃♂ in 14.5 ♋.

Daraus folgt, daß Walther nicht am 8., sondern am 6. September beobachtet hat.

1.622 Überlegungen an einer Dionysischen Beobachtung

III. Die Verwendung der Beobachtungen von Regiomontan und Walther hat keine neuen Erkenntnisse gebracht. Kepler greift nun ein weiteres Mal auf Ptolemäus zurück*:

> „Ptolemäus berichtet, daß er zur Auffindung der Periode des Jupiter eine der einwandfreien Beobachtungen genommen habe, die aufgeschrieben wurde im

* Ptolemäus, Almagest II-11,3.

45. Jahre der Zeitrechnung des Dionysius am 10. Parthenon. Jupiter berührte als Morgenstern den südlichen Esel (Asellus austrinus)."

Das genaue Datum ist über den mittleren Sonnenort: ☉ in 9.54 ♍ auf den 4. September 241 v. Chr. festgelegt. Für diesen Zeitpunkt berechnet Kepler den Ort des Jupiter, indem er vom Jupiterort des 4. September 1560 ausgeht und davon die Bewegung von 1800 Jahren subtrahiert. Als Aphelrichtung wird nach früheren Überlegungen zugrunde gelegt: 13.0.0 ♍ [80]. Er erhält:

♃ in 29.21.11 ♋ (locus visus).

Als Beobachtungsdatum ist die Konjunktion mit dem südlichen Esel vermerkt. Die Sternposition kann mit Ptolemäus über Spica ♍ gefunden werden:

Spica zur Zeit des Hipparch 147 v. Chr. in 24.0 ♍
Spica zur Zeit des Timocharis 347 v. Chr. in 22.0 ♍.
Also wäre Spica 241 v. Chr. ungefähr in 23.0 ♍ [81].

Nach den Angaben von Tycho Brahe ist der südliche Esel von Spica 75° 16′ entfernt[82], er befindet sich demnach 241 v. Chr. in 7.44 ♋ [83].

Diese Überlegungen vom 17. Oktober 1622 werden ergänzt durch den Sonnenort über die verbesserte Sonnentafel*, die Vorgängerin der „Tabula subsidiaria motuum Solis" der RT:

☉ in 7.17.54 ♍ R = 0.99870.

Mit diesen Angaben versucht Kepler, den heliozentrischen Jupiter-Ort zu berechnen. Bekannt sind (Fig. 5) im Dreieck S (☉), T (♁), I (♃):

TI Richtung zu Asellus und Richtung zu ♃ in 7.44 ♋
TS Richtung ♁ — ☉ in 7.18 ♍
TS R = 0.99870.

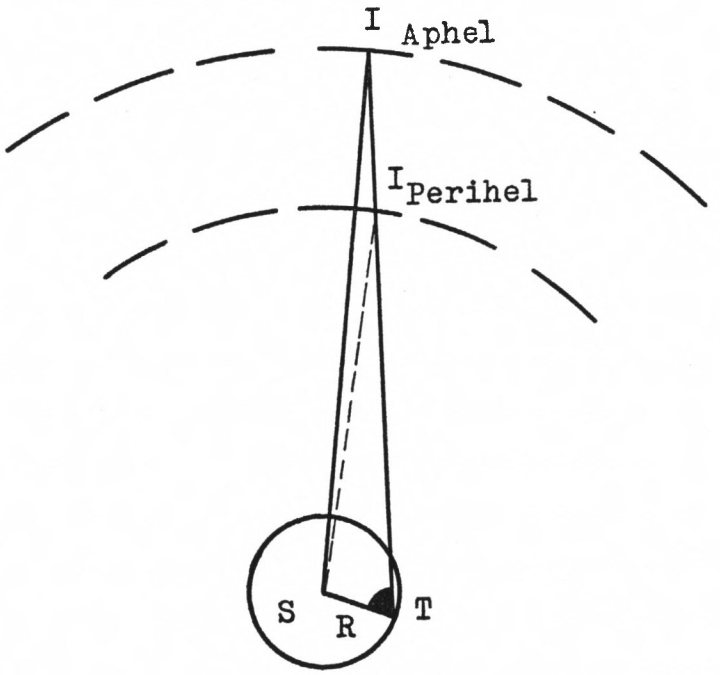

Fig. 5

* Auf Bl. 364v von Bd. 13 heißt es: „Correctione Epochae ☉larium".

Neben R ist also ∢ STI = 59° 34′ bekannt. SI, die Entfernung des Jupiter von der Sonne, kann zwischen 4.95000 (Perihel) und 5.45000 (Aphel) schwanken. Da Richtung TI festgehalten wird, wächst ∢ IST und damit Richtung SI, die „Longitudo Eccentrica", wie sie hier heißt, mit zunehmender Entfernung. Mit diesen Werten folgt für ∢ TIS, die „Parallaxis orbis", nach dem Sinus-Satz:

mit Aphelentfernung ∢ TIS = 9° 5′
mit Perihelentfernung ∢ TIS = 10° 1½ ′.

Die „Longitudo Eccentrica" SI schwankt zwischen 28.39 ♊ und 27.42½ ♊. Das Aphel käme nach 28.39 bzw. 27.42 ♐.

Zur genaueren Bestimmung wird wieder auf das Apogäum zur Zeit des Ptolemäus zurückgegangen. Wenn heute (1600 compl.) das Apogäum ca. 4½° vor dem Aphel in 2.39 ♎ nach Ergebnis I zu liegen kommt, beträgt der Abstand zu Spica 15° 37′. Ptolemäus hat eine Eigenbewegung des Apogäums nicht angenommen; das Apogäum war wie zur Zeit des Albategnius um 15° 20′ von Spica entfernt. Zu berücksichtigen sind außerdem die 8°, die Albategnius als Differenz der Apsidenlagen zu seiner Zeit und der des Ptolemäus fand. Daraus lassen sich ungefähre Werte ableiten

für das Apogäum 24.20 ♌ [84]
für das Aphel 28.30 ♌

zur Zeit des Ptolemäus. Wird Ergebnis I mit herangezogen:

Aphel 1600 in 6.46 ♎,

ergibt sich die Aphelbewegung von 38° 16′ in 1460 Jahren. Wieder 380 Jahre zurück käme hiernach das Aphel auf 19.0 ♌. Damit hat Kepler die gesuchte Aphelrichtung näher bestimmt, um die heliozentrische Länge des Jupiter in der Dionysischen Beobachtung genauer festzulegen. Sie wird mit 28.20 ♊ neu festgesetzt, obige Rechnung wird wiederholt und führt zur mittleren Länge 24.7.11 ♊ [85].

Die Epoche wird über die PT auf den 1. Januar 240 v. Chr. ergänzt: motus medius in 4.2.7 ♋. Sie wird „Epocha conditionalis" genannt. Aus dem Vergleich mit der Epoche 1560 lassen sich neue Werte für mittlere Bewegung und Apheländerung ableiten:

motus medius		Aphel
240 v. Chr.	4. 2. 7 ♋	19. 0. 0 ♌
1560 n. Chr.	26.16.37 ♈	6.11.56 ♎
1800ª [86]	292.14.30	47.11.56.

Mittlere Bewegung nach PT für 1800ª 267.56.39
Präzession 25. 7. 4
293. 3.43
gegen 292.14.30
hiernach von den PT abzuziehen 49′ 13″ [87].

Die Ergebnisse der Überlegung aus der Dionysischen Beobachtung, die Ergebnisse K genannt seien, lauten hiernach:

Jahre	mittlere Bewegung der PT zu vermindern um	Apheländerung
1800	49′ 13″ 0‴	47° 12′ 0″
600	16. 24. 20	15. 44
100	2. 44. 3. 20	2. 37. 20
20	32. 48. 40	0. 31. 28
4	6. 33. 44	0. 6. 16

Ergebnisse K

Ausgehend von der Epoche 240 v. Chr. wird die Epoche 120 n. Chr. berechnet, um von hier aus die Ergebnisse K an 4 ptolemäischen Beobachtungen zu prüfen.

Jahr	motus medius	Aphel
— 240	3ˢ 4° 2′ 7″	19. 0. 0 ♌
Bewegung in 240ᵃ [88]	2. 26. 57. 56	6. 17. 36
Christi	6. 1. 0. 3	25. 17. 36 ♌
Bewegung in 120ᵃ	1. 13. 28. 58	3. 8. 48
120 compl.	14. 29. 1 ♏	28. 26. 24 ♌.

Diese Ausgangsepoche sei Epoche K genannt.

Die 4 ptolemäischen Jupiterörter (a bis d) sind:

(a)	17. Mai	133	H. 9.15	♃ in 23.11 ♏
(b)	31. August	136	8.15	7.54 ♓
(c)	7. Oktober	137	15.15	14.23 ♈*
(d)	10. Juli	139	15.15 [89]	☉ in 16.11 ♋
				♃ in 15.45 ♊.

Zunächst überprüft Kepler, ehe er die Angaben des Ptolemäus weiter verwendet, die mittleren Sonnenörter mit Hilfe seiner Sonnentafel. Diese schon früher erwähnte Tafel, in den RT als „Tabula subsidiaria motuum Solis" wiedergegeben, geht von den Epochen aus, zu denen die Sonne ihr Apogäum erreicht hat. An (a) sei die Rechnung gezeigt.

100	2. Juni	H. 10.21	☉, π in 10. 2.45 ♊
33ᵃ		13.43	33.54 [90]
133	3. Juni	H. 0.04	☉ in 10.36.39 ♊
Beobachtung	17. Mai	H. 9.15	
Differenz	16ᵈ	H. 14.49	
wahre Sonnenbewegung in	16ᵈ	15° 13′ 20″	
H. 14.49		35. 16	
			15.48.36 [91]
wahrer Sonnenort			in 24.48. 3 ♉
demnach wahre Opposition			in 24.48. 3 ♏
mittlerer Sonnenort			in 24.14. 5 ♉ [92]
gegen die mittlere Opposition			23.11 ♏
Aequatio			— 34′

* Opposition a–c in: Almagest II-11,1. Beobachtung d in: Almagest II-11,2.

Wird jeweils der so nach dem Beobachtungsdatum berechnete wahre Sonnenort dem mittleren Ort gegenübergestellt, ergeben sich:

	(a)	(b)	(c)	(d)
Kepler	24.48. 3 ♉	6.52.47 ♍	13.44. 1 ♎	16. 3. 5 ♋
Ptolemäus	23.11	7.54	14.23	16.11
Aequatio	— 0.34	2. 3½	1.43	1.12 [93].

Aus Vergleich (a) folgert Kepler, daß die tatsächlichen mittleren Örter des Ptolemäus für Zeitpunkte berechnet wurden, die etwa 1½ Tage vor den angegebenen Daten liegen. Werden dementsprechend von den gerade berechneten Sonnenörtern jeweils 1½° subtrahiert, ergibt sich als neue Gegenüberstellung:

	(a)	(b)	(c)	(d)
Kepler	23.18 ♉	5.23 ♍	12.14 ♎	14.33 ♋
Ptolemäus	23.11	7.54	14.23	16.11
Differenz	+ 0. 7′	— 2.31	— 2. 9	— 1.38.

Nachdem die Sonnenörter verglichen sind, können die Ergebnisse K an den mittleren Oppositionen des Ptolemäus (a–c) und der Beobachtung (d) überprüft werden. Die mittleren Oppositionen werden dabei wie Beobachtungen behandelt. Es werden in üblicher Weise mittlerer und wahrer heliozentrischer Jupiterort berechnet, der über die Prosthaphaeresis orbis in den geozentrischen Ort (locus visus) umgerechnet und schließlich mit den ptolemäischen Angaben verglichen wird. Die Rechnung sei wieder an (a) demonstriert:

(a) 17. Mai 133 n. Chr. H. 9.15.

	motus medius	Aphel
120 nach K	14.29. 1 ♏	28.26.24 ♌
12^a	4.11.11	18.48
April	9.58.30	0.20
16^d	1.19.46	
Präzession nach PT	10. 3	
mittlerer Ort	0. 8.31 ♐	28.45.30 ♌
M	91.23. 1	
v	83.53.36	r = 5.21500
Aphel	28.45.30 ♌	
locus eccentricus	22.39 ♏	
☉	24.48 ♉	R = 1.01730
locus visus	22. 7.30 ♏ [94]	

Die Ergebnisse lauten:

	(a)	(b)	(c)	(d)
Kepler	22. 7.30 ♏	12.19.30 ♓	18.31.30 ♈	17.32 ♊
Ptolemäus	23.11	7.54	14.23	15.45 ♊
Differenz	— 1. 4	4.25	4. 8	1.47.

Abgesehen von (a) ergeben die Rechnungen größere Werte als die Beobachtungen. Werden die Jupiterörter bei Ptolemäus korrigiert, stimmen sie (bei a–c) nicht mehr mit

den Oppositionen zur mittleren Sonne überein[95]. Es bleibt nur der Schluß übrig, daß die Epochen K noch nicht richtig sind. Die Bestimmung der Jupiterepochen ist also weiterzuführen.

IV. Erneut versucht Kepler, allein über die Dionysische Beobachtung zum Ziel zu gelangen. Die 4 ptolemäischen Örter sollen wieder der Überprüfung der neuen Epochenwerte dienen. Als neue Aphelrichtung setzt er 9.49 ♍ [96], erheblich verschieden vom Aphel des Ansatzes III. Der Gang der Überlegung folgt Ansatz III: im Dreieck Sonne–Erde–Jupiter (STI) wird die longitudo eccentrica SI, also die heliozentrische Richtung des Jupiter-Ortes, ermittelt, die ihrerseits über die zuvor angenommene Aphelrichtung Anomalie und Entfernung zur Sonne bestimmt. Die Prosthaphaeresis orbis korrigiert die Länge und die Anomalie. Die Rechnung im einzelnen:

TI	Richtung zu Asellus	in	7.33 ♋	nach Ptolemäus
TS	Richtung ♁ — ☉	in	7.18 ♍	nach Kepler
	∢ STI		59.45	
TS	Entfernung ♁ — ☉ = R =		0.99870	
SI	Richtung ☉ — ♃	in	28.20 ♊	(vgl. III)
	Aphel	in	9.49 ♍	
	v		— 71.29	r = 5.268
∢ TIS	Prosthaphaeresis orbis		9.26 [97]	über Sinus-Satz
	TI	in	7.33 ♋	
	SI		28. 7 ♊	
korrigierte Werte	v		— 71.42	
	M		— 77. 0.30	
	Aphel	in	9.49 ♍	
	motus medius	in	22.48.30 ♊.	

Vom Zeitpunkt der Beobachtung wird, wie in III, auf 240 v. Chr. gegangen. Durch den Vergleich mit der Epoche 1560 lassen sich wieder neue Werte für mittlere Bewegung und Apheländerung bestimmen.

Zeit bis zum Jahresende 241 v. Chr., d. h. bis zum
1. Januar 240 v. Chr. 12^h 119^d 8^h

	motus medius		Aphel
241 v. Chr.	4. Sept.	22.48.30 ♊	
	119^d 8^h	9.55. 0	
240 v. Chr.		2.43.30 ♋	9.49 ♍
1560 n. Chr.		26.16.37 ♈	6.11.56 ♎
1800^a		293.33. 7	26.23
nach PT		293. 3.43	
Korrektur		29.24.	

Die Ergebnisse von Ansatz IV, die Ergebnisse L genannt seien, lauten demnach:

Jahre	mittlere Bewegung der PT zu vermehren um	Apheländerung
1800	29′ 24″	26° 23′ 0″
600	7. 48	8. 47. 40
100	1. 18	1. 27. 57
20	16	0. 15. 55
4	4	0. 3. 11 [98]

Ergebnisse L

Der weitere Verlauf der Rechnung folgt Ansatz III: es wird die Epoche 120 n. Chr. berechnet, um die Ergebnisse L an den 4 ptolemäischen Beobachtungen zu prüfen.

	Jahr	motus medius	Aphel
	— 240	3s 2° 43′ 30″	9.49. 0 ♍
Bewegung in	240a	2. 27. 7. 38 [99]	3.27.44
	Christi	5. 29. 51. 8	13.14.44 ♍
Bewegung in	120a	1. 13. 33. 50	1.43.52
	120 compl.	13. 24. 58 ♏	14.58.36 ♍ [100].

Diese Ausgangsepoche sei Epoche L genannt.

Als Ergebnisse der Berechnung der Jupiter-Örter zu den ptolemäischen Beobachtungszeiten erhält Kepler:

	(a)	(b)	(c)	(d)
Kepler	23.41 ♏ [101]	8.48 ♓	15.31 ♈	16.46 ♊
Ptolemäus	23.11	7.54	14.23	15.45
Differenz	0.30	0.54	1. 8	1. 1.

Alle Werte sind bei Kepler größer ausgefallen. Dieses Ergebnis ist keineswegs erstaunlich[102], sondern, so führt Kepler aus, mußte geradezu erwartet werden. Denn die ptolemäischen Örter sind an die mittlere Sonne gekoppelt, die im Mittel um ungefähr 64′ gegen die von Kepler errechnete Sonne zurückbleibt*, wie im folgenden gezeigt wird[103]:

	(a)	(b)	(c)	(d)
wahre ☉ in	24.48 ♉	6.53 ♍	13.44 ♎	16. 3 ♋
Aequatio	— 34	2. 3	1.43	1.12
mittlere ☉ in	24.14	8.56	15.27	17.15
nach Ptolemäus	23.11	7.54	14.23	16.11
Differenz	1. 3	1. 2	1. 4	1. 4.

* Die betreffende Stelle in den Handschriften (Bd. 13, Bl. 366r) lautet: „Cum non plusquam quinque extent observationes Jovis, quaeritur, cur in prima coincidat meus calculus cum Ptolemaico, in reliquis 4 plus habeat per 30, 54, 68, 61?
Atqui debebam in omnibus 4 plus nancisci per 64′ circiter..."
Sie ist in der nachfolgend wiedergegebenen Probe der Kepler-Mss. enthalten.

Damit hat Kepler eine bemerkenswerte Übereinstimmung zwischen den Ergebnissen der Sonnenrechnung und denen der Berechnung der Jupiter-Örter erhalten. Er versucht nun, die Unterschiede in den 4 Jupiter-Örtern (a–d), geordnet nach den betreffenden Tierkreiszeichen,

(a)	(b)	(c)	(d)
♏	♓	♈	♊

durch Änderung der mittleren Bewegung und Vorwärts- oder Rückwärtsbewegung des Aphels den Differenzen der Sonnenörter anzugleichen.

1.623 Überlegungen an 4 ptolemäischen Beobachtungen

Ausgehend von einer alten Jupiterbeobachtung aus dem Jahre 241 v. Chr. hat Kepler in IV die mittlere Bewegung und das Aphel bestimmt und diese Werte an 4 ptolemäischen Jupiterörtern geprüft. In der Fortsetzung dieser Überlegungen sollen die Ergebnisse L aus IV derart verbessert werden, daß die neu berechneten den beobachteten Jupiterörtern – entsprechend den Ergebnissen der Sonnenrechnung – im Mittel um 62′ voraus sind und der Dionysischen Beobachtung hinreichend genügen. Kepler geht nun davon aus, daß, bei der Perihellage im ♓ zum Zeitpunkt der Beobachtungen, die Örter (b) und (c) in Nähe des Perihels sowie die Örter (a) und (d) in Nähe mittlerer Längen jeweils zusammengehören. Bei einer Vorwärtsbewegung der Apsidenlinie wird in (c) eine kleinere Aequatio als in (b) abgezogen, während in (d) die Gleichung kleiner wird und in (a) zunimmt. Es ist zu erwarten, daß sich (a) und (c) angleichen, (b) und (d) aber weiter voneinander entfernen. Zunächst wird also das Aphel vorwärtsbewegt, soweit, als die Differenzen gleich gemacht werden können, dann erst wird motus medius verändert.

V. Als erstes werden zum Aphel der Epoche L 1° 40′ addiert, um zu sehen, um wieviel sich die einzelnen Örter ändern. Die mittlere Anomalie verringert sich jeweils um 1° 40′, so bei (a):

früheres M	73° 58′	[104]
verbessert auf	72. 18	
v	67. 7. 8	
Aphel	16. 48. 30 ♍	
locus eccentricus	23. 55. 38 ♏	
vorher	23. 53. 30	
Verbesserung	+ 2. 8.	

Die Ergebnisse lauten:

	(a)	(b)	(c)	(d)
locus eccentricus	23.55.38 ♏	8.14.29 ♓	15. 0.38 ♈	11.14.20 ♊
vorher	23.53.30	8.24.35	15. 9.40	11.15.20
Verbesserung	+ 2. 8	— 10. 6	— 9. 2	— 1. 0.

Wird vorausgesetzt, daß sich die geozentrischen Örter um gleiche Beträge ändern[105], ergeben sich als neue Differenzen der Rechnungen zu den Beobachtungen:

		(a)	(b)	(c)	(d)
A		+ 43′ [106]	+ 44′	+ 59′	+ 60′
	gegen	30	54	68	61.

Es haben sich zwei annähernd übereinstimmende Wertepaare ergeben, der angestrebte Wert von + 62′ ist aber noch nicht erreicht. Werden weitere 1° 40′ zum Aphel addiert, ergibt sich:

	(a)	(b)	(c)	(d)
B	45	34	50	59
oder für 50′ allein				
C	44	39	54½	59½.

Von Ansatz V A aus werden weiter 11′ zu motus medius addiert. Jetzt betragen die Differenzen, die Kepler neu aus der Gegenüberstellung der geozentrischen Örter bestimmt:

	(a)	(b)	(c)	(d)
D	46 [107]	55	70½	70.

Werden insgesamt zu Epoche L 3° 31′ als Aphelverbesserung und 11′ [108] als Korrektur der mittleren Bewegung hinzugefügt, betragen die Differenzen:

E	51½ [109]	41¾	56½	66½.

Nachdem weitere 15′ zu Aphel und motus medius addiert worden sind, ergibt sich:

F	70½	61	75	79.

Ergebnisse V F liegen oberhalb, Ergebnisse V E unterhalb des Sollwertes von 62′. Beide Ergebnisse werden gemittelt:

G	61	51⅜	65¾	72¾.

In V G stimmt (a) gut mit dem Sollwert überein, während (b) und (d) um den gleichen Betrag, aber mit entgegengesetzten Vorzeichen, von 62 differieren. Die Verbesserungen, die zu den Differenzen in V G geführt haben, werden nun der Weiterrechnung zugrunde gelegt. Als eine Bezugsepoche für die Ableitung der Änderungen in motus medius und Aphel wird 140 n. Chr. gewählt, die von der dieser Epoche am nächsten liegenden Beobachtung (d) bestimmt wird:

(d) 10. Juli 139, 15ʰ 15

	motus medius	Aphel
nach L	5.45.26 ♊	15.13.40 ♍
Korrektur nach V E	11	3.31
Korrektur nach V G	7.30	7.30
korrigiert in	6. 3.56 ♊	18.52.10 ♍
bis 140 compl.	44.55.11	1.14
140 compl.	20.59. 7 ♋	18.53.24 ♍ [110].

Diese Werte seien Epoche M genannt.[111]

Die zweite Bezugsepoche sind Werte für 1600, die Kepler 1616 bestimmt hat und sich unmittelbar aus den Ergebnissen G von Abschnitt 1.42 ableiten lassen[112]. Damit erhält er:

	motus medius	Aphel
140 n. Chr.	20.59. 7 ♋	18.53.24 ♍
1600 n. Chr.	10.44.38 ♍	6.41.56 ♎
1460ª	49.45.31	17.48.32
nach PT	49.42.21	
Korrektur	+ 3′ 10″	43″.9112 jährlich.

Ergebnisse M von Ansatz V lauten hiernach:

Jahre	mittlere Bewegung der PT zu vermehren um	Apheländerung
1	0″	44″
10	1	7′ 19″
100	13	1° 13′ 11″
1000	2′ 10″	12. 11. 52 .

Ergebnisse M

Da Ergebnisse M über die 4 ptolemäischen Beobachtungen zustande gekommen sind, bietet sich für eine Kontrolle die Dionysische Beobachtung des Jahres 241 v. Chr. an. Dazu ist zunächst die Epoche 240 v. Chr. aufzusuchen. Von der Epoche 140 n. Chr. ausgehend, werden 380ª abgezogen.

	Aphel
140 n. Chr.	18.53.24 ♍
380ª	4.38. 8
240 v. Chr.	14.15.16 ♍
bis 3. Sept. 241	15
3. Sept. 241	14.15. 0 ♍.

Für die mittlere Bewegung setzt Kepler als Ausgangswert der Epoche 140 nicht die vorher abgeleitete Richtung von 20.59.7 ♋ ein, sondern den falschen Wert 19.48.46 ♋. Den Fehler bemerkt Kepler erst später. Die Rechnung ergibt:

locus eccentricus		27.26.40 ♊
locus visus		6.58.24 ♋
nach Ptolemäus	in	7.33 ♋.

Als Kontrolle wird der Ort von Spica berechnet. Der südliche Esel, nach den Beobachtungsangaben in Konjunktion mit Jupiter, ist 241 v. Chr. jetzt

	in	6.59 ♋	
Abstand zu Spica		75.16	(vgl. Anmerkung 82)
demnach Spica	in	22.15 ♍	
gegen den Sollwert		22.11	in guter Übereinstimmung.

Am 20. Januar 1624 überprüft Kepler die Rechnung und die von Ptolemäus überlieferten Beobachtungsdaten. Zur Beobachtung ergänzt er, daß es zu einer ☌ ♃ Asellus nicht gekommen sei, daß vielmehr zur Zeit des Neumondes der aufgehende Jupiter so nahe bei Asellus gestanden habe, daß er wegen der Leuchtkraft des Jupiter nicht gesehen werden konnte*.

* Wörtlich heißt es (Bd. 13, Bl. 368r): „Hoc non necesse est accuratius explicari, quam Jovem orientem ita prope Asellum stetisse, ut is prae claritudine Jovis videri non posset."

Ann. Chr. 1622

Cum non sint quam adhuc [illegible] sint observationes
nostrae, quae notatur, cur in prima coincidat meo calculo
cum Ptolemaico, in reliquis a priori haereat p. 30.54.64.61.
Ego dubitabam in omnibus plus naviter [illegible] videtur
tam anno Christi 136 quo die solem Ptolemaeus
nobis medio exhibet in 7.54 ♐. Ego illum ex intervallo
5.52.30 ♐. adde meam aequationem 2.31 in [illegible] illud.
proportionem long. medii 8.[illegible] die ao 139. ad 6 Oct. 16.3 ☾ veram
[illegible] aq: 1.12. [illegible] cum Ptolemaeus habebat 16.11.
die ao 137, ad 13.44 ♒ adde 1.43. fit 15.27 ♒, cum
Ptol: 14.23. die ao 133. a 24.48 Kaudor. 34.44 [illegible]
Ptol 24.14 ♑, cum Ptol. 23.11.

Cum igitur discrepet locus ☿ in 23.♍: computa
et ex hisce mediis

Eg: 2.54.14 — 2.33.56 — 1.38.16
41.52 — 22 — 2.17.21
4.11. — 2 — 5.55.44
9.58. — 2.34.40 — 1.46.18
1.20. — 14.26
3.51.37 — 5.54.25
1.17.17. — 5.59.25.

☿ 23. 6. ♍ Ecce hodierni locus a Regiomont.

Werden alle bisherigen Ergebnisse außer acht gelassen, ergibt sich aus dieser Beobachtungsangabe für den Ort des Jupiter, wenn vom Fixsternkatalog Tycho Brahes ausgegangen wird:

Asellus 1600	in	3. 8 ♌	
Präzession in 1840ª		26. 4	*
Asellus 240 v. Chr.	in	7. 4 ♋	[113],

der Ort, den auch Jupiter zur Beobachtungszeit eingenommen hat. Die angegebene Beobachtungszeit aber läßt sich durch die zusätzliche Bemerkung, daß die Beobachtung zur Zeit des Neumondes stattgefunden habe, kontrollieren. Es ist der Sonnen- und Mondort zu berechnen und zu prüfen, ob beide Gestirne in Konjunktion stehen. Der Sonnenort ist bereits in Ansatz III von Abschnitt 1.622 mit 7.17.54 ♍ aufgeführt. In den 15 Monaten, die seit jener Berechnung vergangen sind, hat Kepler die Sonnentafeln weiter verbessert und gibt jetzt den wahren Sonnenort mit 7.20.22 ♍ an. Die Entfernung zur Erde ist wie früher R = 0.99870.

Die Mondrechnung, in den Handschriften zu den RT eine Seltenheit, sei ausführlich wiedergegeben. Kepler benutzt in seiner Rechnung eine zur Sonnentafel analoge Mondtafel, die „Tabula Subsidiaria Motuum Lunae" **, in Verbindung mit dem „Canon Motuum Lunarium" ***. Es sind jeweils die Daten angegeben, für die sich der Mond im Apogäum aufhält. Die Zeitdifferenz zur angegebenen Beobachtungszeit wird um eine ganze Zahl von anomalistischen Monaten[114] vermindert, so daß eine kleine Zeitdifferenz verbleibt, die über die „Tabula ficti Motus Lunae" **** in Winkelmaß umgerechnet wird. Die Werte, die Kepler verwendet, stimmen mit den endgültigen Tafelwerten der RT in der letzten Stelle noch nicht überein. Er erhält:

	Zeit vor Jahresende	Länge ☽ und Apogäum
301 v. Chr.	$25^d\ 20^h\ 14^m\ 49^{sec}$	$10^s\ 11°\ 19'\ 0''$
59ª	28. 21. 13. 38	7. 27. 33. 0
242 v. Chr.	54. 17. 28. 27	6. 8. 52. 0
bis zum 4. Sept.	246. 16	
insgesamt	301. 9. 28. 27	
ganze Umläufe	303. 2. 24. 24	1. 3. 46. 9
es fehlen	1. 16. 55. 57	7. 12. 30. 9
Bewegung ☽ in $1^d\ 17^h$		— 20. 42
		☽ in 21. 50 ♎ [115]
		und ☉ in 7. 20 ♍
		Differenz 44. 10 .

Einen Anhalt für den Neumond gibt die Rechnung nicht. Dennoch sollen die ptolemäischen Beobachtungsangaben beibehalten werden. Obwohl die Überprüfung der Dionysischen Beobachtung durch die Rechnung über die Epoche M recht gute Ergebnisse gebracht hat, gibt sich Kepler noch nicht zufrieden. Es gilt noch, die Besonderheit des „dies creationis" in der Darstellung der Jupiter-Epochen zu bedenken.

* RT, Tafel 43.
** RT, Tafel 94.
*** RT, Tafel 95.
**** RT, Tafel 96.

1.624 Zusatzbedingung für den „dies creationis"

VI. Zeitpunkt und Ort des Jupiter der Dionysischen Beobachtung sollen unverändert bleiben, d. h. die Beobachtung wird in diesem Ansatz als bekannt und richtig vorausgesetzt. Kepler fragt nun nach der Lage des Aphels, um den Ort des Jupiter durch die Rechnung in Übereinstimmung mit der Beobachtung bringen zu können.

Die Aphelbewegung sei zunächst vernachlässigt. Dann ergibt sich, wenn vom Aphel 1600 ausgegangen wird:

Aphel 1600	in	6.46 ♎ [116]
Präzession		26. 4
Aphel 240 v. Chr.		10.42 ♍.

Kepler bestimmt sich nun nacheinander für zwei verschiedene, um 5° auseinander liegende Aphellagen die mittleren Längen des Jupiter. Damit hat er die Möglichkeit, später für eine neue Aphellage sofort den mittleren Ort anzugeben und daraus zur Kontrolle den geozentrischen Ort zu berechnen. Die neue Aphellage wird sich aus der Zusatzbedingung des „dies creationis" ergeben: der Schöpfungstag soll auch hier dadurch ausgezeichnet sein, daß das Aphel an eine auffallende Stelle des Tierkreises zu liegen kommt.

Zunächst werden die mittleren Örter des Jupiter für zwei verschiedene Aphellagen berechnet.

Es seien: o Sonne
π Erde
ρ Jupiter zur Zeit der Dionysischen Beobachtung
ov die Richtung des Jupiteraphels.

Bekannt sind: πo in 7.20.22 ♍
πρ in 7. 4 ♋
∢ oπρ 60.16.22 [117].

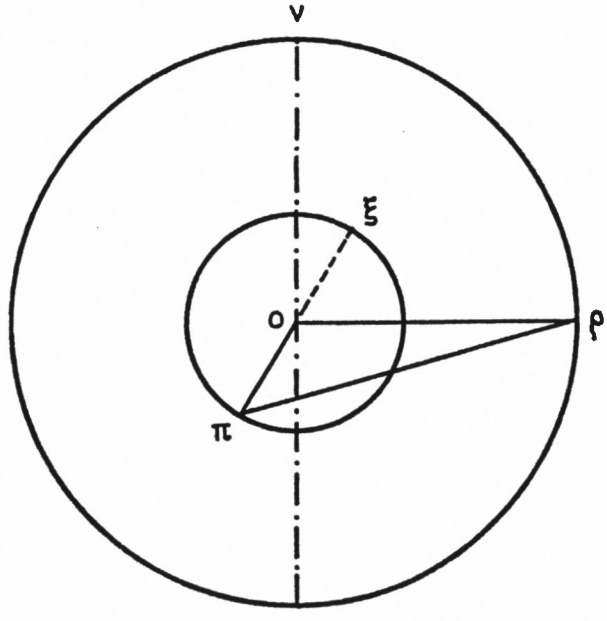

Fig. 6

Zunächst wird ov in 10.42 ♍ angenommen. Gesucht ist die Richtung oρ bzw. ∢ voρ, das Komplement der Anomalie. Kepler löst die Aufgabe über eine Iteration, indem er zunächst den heliozentrischen mit dem geozentrischen Ort gleichsetzt, über die Anomalie voρ die Näherungsentfernung oρ und darüber die Prosthaphaeresis orbis bestimmt. Also:

Richtung	oρ = πρ	in	7. 4 ♋
	voρ		63.38
	oρ = r		5.30100 über die bekannte Exzentrizität.

Damit sind im Dreieck oπρ 3 Stücke bekannt:

	πo = R =	0.99870
	oρ = r =	5.30100
	∢ oπρ =	60° 16′ 22″
Kepler erhält	∢ πρo =	9.25 [118]
Kommutation	∢ ξoρ =	69.41.22
	∢ voρ	um 9.25 verbessert
		auf 73. 3.

Die Wiederholung der Rechnung verbessert die Anomalie

auf 73° 8′ [119].

In der zweiten Durchrechnung wird das Aphel ov in 5.42 ♍ gesetzt. Das Komplement der Anomalie ergibt sich zu 69° 34′ [120]. Die wahre Anomalie wird in die mittlere Anomalie umgerechnet und zum Aphel addiert. Damit erhält Kepler:

Aphel in	10.42 ♍	5.42 ♍
motus medius	22.13½ ♊	20.53 ♊.

Die Apheländerung von 5° bewirkt die Bewegung von 1° 20′, nach der regula falsi ergibt sich die Bewegung von 16′ bei der Apheländerung von 1°.

Damit hat Kepler die Vorbereitungen für die Kontrollrechnung getroffen. Unter der Annahme, daß das Aphel für den „dies creationis" nach 0.0 ♋ tendiere, wird eine vorläufige Aphelbewegung berechnet*.

Die zweite Epoche ist 1608: Aphel in 6.48.20 ♎ [121].

Demnach ist die Aphelbewegung in 5600ᵃ 96° 48′ 20″.

Im einzelnen betragen die Bewegungen, die hier Ergebnisse N genannt seien:

Jahre	Aphelbewegung
1	1′ 2″
10	10′ 22⅓
100	1° 43′ 43″
1000	17. 17. 12
800	13. 49. 46
40	41. 29
1840	31. 48. 27.

Ergebnisse N

* Diese Annahme wird in Bd. 13, Bl. 368v gemacht. Es heißt dort: „Quid igitur Aphelium creationis alludit ad 0.0 ♋. Esto ibi."

Damit kann wieder zur Dionysischen Beobachtung zurückgegangen werden. Zunächst wird das Aphel bestimmt, dann – entsprechend den vorangegangenen Überlegungen über die Abhängigkeit des mittleren Ortes von der Aphellage – der mittlere Ort berechnet.

Aphel 1600	in	6.46 ♎
Apheländerung in 1840ª		31.48
Aphel am 1. Jan. 240 v. Chr.	in	4.58 ♍.

Kepler setzt: Aphel in 5 ♍ zur Beobachtungszeit.

Aphel in	5.42 ♍	motus medius	20.53 ♊
Aphel in	10.42 ♍	motus medius	22.13.30 ♊
Apheländerung	1°	Änderung von motus medius	16′
	— 42′	Änderung	— 11′⅔
Aphel in	5 ♍	motus medius	20.41.43 ♊
Daraus schließlich:		locus eccentricus	25.55.17 ♊
		locus visus	5.31 ♋
		gegen	7. 4 ♋
		Differenz	1.33.

VII. Wird motus medius um diesen Fehlbetrag auf 22.14.43 ♊ voranbewegt, kommt der locus visus nach 6.52 ♋, immer noch um 12′ vor den Ort des Jupiter. Damit käme das Aphel über 10.42 ♍ hinaus, und die Annahme, daß das Aphel zur Zeit des „dies creationis" sich in 0 ♋ aufhielt, wäre hinfällig.

Kepler wendet sich nun kurz der Breite des Fixsterns zu und berechnet die nördliche Breite von 28′, während sowohl nach Tycho Brahe, wie auch entsprechend der Beobachtung, die Breite südlich sein müßte[122]. Die Diskussion der Breite hat nicht weiter geführt.

VIII. Es wird nun wieder direkt die Hypothese des „dies creationis" aufgegriffen. Wie groß, so fragt Kepler, war die Länge des Jupiter „am Anfang der Dinge"?* Zur Bestimmung eines geeigneten Intervalls verwendet er die Dionysische Beobachtung und die Epoche 1560, die er auf den 23. Juli umrechnet, um anschließend von 1608 aus auf das „initium rerum" zurückzugehen. Im einzelnen:

		motus medius	
1560 23. Juli 16ʰ		0ˢ 13° 47′ 2″	[123]
241 v. Chr.		2. 22. 29. 0	[124]
1800ª		9. 21. 18. 2	
nach PT		9. 23. 3. 43	
Bewegung nach PT um		1. 45. 41	zu vermindern in 1800ª.

Für motus medius des „dies creationis" ergibt sich:

5600ª		3. 21. 44. 56	nach PT
Korrektur		— 5. 28. 48	
5600ª korrigiert		3. 16. 16. 8	
1608 23. Juli		1. 0. 19. 15	[125]
„dies creationis"		9. 14. 3. 7	
	bzw.	9. 8. 12. 38	nach den Zahlen der PT.

* „Sed exploremus long. ♃ initio rerum" (13, 369r).

Es hat sich gezeigt, daß Jupiter das Solstitium ♑ zur Zeit des „dies creationis" nicht erreicht, sondern um 8° nach PT und um 14° nach den Rechnungen Keplers überschreitet. Daher, so folgert er, wird das Aphel auch nicht das Solstitium ♋ erreichen, d. h. die Hypothese des „dies creationis", daß sich Aphel und motus medius zur Zeit des von Kepler angenommenen Schöpfungstages in besonders ausgezeichneten Punkten aufhalten, ist überhaupt für den Jupiter abzulehnen[126].

1.63 DIE ENDGÜLTIGE BESTIMMUNG DER JUPITER-EPOCHEN

1.631 Diskussion der Jupiter-Breite in der Dionysischen Beobachtung – Zuhilfenahme einer aristotelischen Beobachtung

Im voranstehenden Abschnitt ist die Hypothese des „dies creationis" für den Jupiter verworfen worden. Es bleibt nichts weiter übrig, als zur Diskussion vorhandener Beobachtungen zurückzukehren und hier nochmals auf die Breite des Jupiter in der Dionysischen Beobachtung einzugehen. Für die Breite ergab sich am Schluß von Ansatz VII ein nicht lösbarer Widerspruch zwischen Tycho Brahe und der Beobachtung einerseits und der Rechnung Keplers über das Argument der Breite andererseits. Hier nun zitiert Kepler die Angabe des Aristoteles, der ca. 100 Jahre vor der Dionysischen Beobachtung als Lehrer von Alexander den Jupiter beobachtet hat:

> „Und wir selber haben schon zweimal den Durchgang des Jupiter in den Zwillingen beobachtet, sogar mit Verdeckung."*

Mit der Knotenlage um ♋ [127] kann versucht werden, die Breite zu finden, die nacheinander 13, 30, 20′ gesetzt wird. Der Abstand des Planeten vom Knoten wäre $9\frac{1}{2}°$, $22\frac{1}{4}°$ bzw. $14\frac{3}{5}°$, entsprechend der nach der aristotelischen Angabe in Frage kommenden Sterne in den Zwillingen.

Er rechnet z. B. für den Stern „Praecedens ad summum pedem, Propus graece":

1600 in	25.22 ♊
Knotendistanz	9.30
Knoten 1600	4.52 ♋
Präzession	27.29
Knoten 341 v. Chr.	7.23 ♊.

Insgesamt ergibt sich aus der unbestimmten Angabe des Aristoteles, daß der Knoten zwischen 7 ♊ und 9 ♋, je nach dem Bezugsstern der Zwillinge, zu liegen kommt. Wird als wahrscheinliche Knotenlage zunächst die über den Stern „Propus graece" abgeleitete Richtung angenommen, so läuft der Knoten in 100 Jahren sicher nicht über 7.4 ♋, den wahrscheinlichen Jupiter-Ort, hinaus. Die Breite ist demnach sicher nördlich und nicht südlich, wie die Beobachtungsangabe für 241 v. Chr. ergeben hat. Es ist hiernach die nördliche Breite von 26′ wahrscheinlich, und es sieht ganz so aus, als habe sich Jupiter dem Asellus genähert und sei um so viel von ihm entfernt gewesen, wie der Durchmesser des Mondes ausmacht[128].

Die Diskussion der Breite hat die Angaben der Dionysischen Beobachtung weiter in Frage gestellt und keine abschließende Klärung gebracht.

---

* Aristoteles Meteorologica ed. J. Becker. Berlin 1829. S. 12, 28f.

1.632 Überprüfung der ptolemäischen Beobachtungen – die Lösung der Aufgabe

Die Aufgabe, die Jupiter-Epoche zu bestimmen, hat Kepler in viele Sackgassen führen und nacheinander neue Überlegungen und Rechnungen anstellen lassen. Nun endlich greift er auf das Verfahren zurück, das am ehesten zu erwarten war: er geht von den mittleren Oppositionen des Ptolemäus ab und rechnet sie um in wahre Oppositionen. Die Zeitpunkte der drei ptolemäischen Oppositionen (a bis c) und der Beobachtung (d) waren:

(a)	17. Mai	133	9^h 15
(b)	31. August	136	8. 15
(c)	7. Oktober	137	15. 15
(d)	10. Juli	139	15. 15.

IX. Zunächst werden für diese 4 Zeitpunkte die wahren Sonnenörter über die „Tabula Subsidiaria Motuum Solis" berechnet, entsprechend der Sonnenrechnung im Ansatz III von Abschnitt 1.622.[129]. Kepler erhält:

	(a)	(b)	(c)	(d)
wahre ☉ in	24.49.22 ♉	6.54. 8 ♍	13.45.46 ♎	16. 4.38 ♋.

Werden als Jupiter-Örter die Örter herangezogen, die sich auf die ptolemäischen Zeitangaben beziehen, aber nicht auf die von ihm angegebenen mittleren Sonnenörter, sondern auf die Örter und Rechnungen Keplers, so ergibt die Gegenüberstellung:

	(a)	(b)	(c)
Jupiter in	24.14 ♏	8.57 ♓	15.26 ♈
wahre ☉ in	24.49.22 ♉	6.54. 8 ♍	13.45.46 ♎
Differenz zu ☍	— 0.35.22	2. 2.52	1.40.14.

Es ist ersichtlich, daß die Jupiter-Örter sich noch nicht in Opposition zur wahren Sonne befinden. Die Umrechnung in die wahre Opposition erfolgt über die Tagbewegung von Jupiter und Sonne:

(a)	diurnus ☉	57′	bekannt aus der Berechnung der wahren ☉
	diurnus ♃	— 8′	retrograde Bewegung
	diurnus ☉ — ♃	65′	

danach entsprechen 35′ 22″ H. 13, d. h.

die wahre Opposition fand 13 Stunden früher statt. Diese Zeitdifferenz wird über die Tagbewegung in Winkelmaß verwandelt. Als wahre Oppositionen ergeben sich:

(a)	(b)	
16. Mai 133, 20^h 12	2. Sept. 136, 4^h 13	9. Okt. 137, 2^h 24
♃ in 24.17.25 ♏	8.44.46 ♓	15.10. 0 ♈.

Diese 3 errechneten Oppositionen werden nun in bekannter Weise behandelt: aus den 3 Örtern werden 2 Differenzen in wahrer Bewegung gebildet und mit mittleren Bewegungen nach den PT, entsprechend den Zeitintervallen, verglichen.

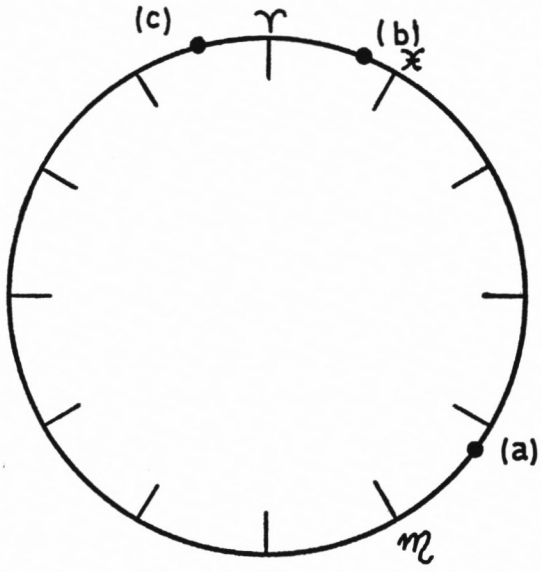

Fig. 7

1. Intervall I_1 (b) — (a)

(a)	133	16. Mai	H. 20.12	♃ in	24.17.25 ♏
(b)	136	2. Sept.	H. 4.13		8.44.46 ♓
	3^a 108^d		H. 8. 1		104.27.21
mittlere Bewegung nach PT					100. 6.54.

2. Intervall I_2 (c) — (b)

(c)	137	9. Okt.	H. 2.24	15.10. 0 ♈
	1^a 36^d		H. 22.11	36.25.14
mittlere Bewegung nach PT				33.24.40.

I_2, gerade gleich einem Drittel des Zeitintervalls von I_1, enthält die relativ größere Bewegung und wird demnach mehr zum Perihel liegen als I_1. Kepler versucht nun, die mittleren Bewegungen der Beobachtungsintervalle durch die Rechnung zu erhalten, indem er in (b) das Perihel fallen läßt:

Aphel 136 in 8.45 ♍.

Er erhält:

	(a)	(b)	(c)	
Aphel in	8.42 ♍	8.45 ♍	8.46 ♍	
♃ in	24.17.25 ♏	8.45 ♓	15.10 ♈	
v	75.35.25	180. 0	143.36	Komplemente
M	80.59. 9	180. 0	146.47.14	Komplemente
	I_1 = 99. 0.51		I_2 = 33.12.46	
	gegen 100. 6.54		33.24.40.	

Beide Intervalle unterschreiten die Sollwerte, wie sie nach den Beobachtungszeitpunkten festgelegt sind. Wie auch immer das Aphel gelegt wird, beide Intervalle werden nicht gleichzeitig in Übereinstimmung mit den Sollwerten gebracht werden können. Wird etwa

I_1 dem Sollwert angenähert, wird die Differenz bei I_2 größer werden. Hier, so folgert Kepler im Vertrauen auf seine Sonnentheorie und auf die Schlüsse, die er daraus für die ptolemäischen Beobachtungen gezogen hat, hier könnte die Ursache dieser Diskrepanz in der Umrechnung der Anomalien liegen. Er kommt zu einem bemerkenswerten Ergebnis:

> „Es scheint, daß die heutige Exzentrizität dieses Dreigespann von Beobachtungen nicht trägt."*

Hier findet sich bei Kepler die Vermutung, daß die Exzentrizität nicht konstant, sondern abhängig von der Zeit ist. Er geht indessen diesem Gedanken nicht weiter nach[130].

Er versucht statt dessen, die Intervalle möglichst gut den Sollwerten durch Veränderung des Aphels anzugleichen. Dabei geht er schrittweise vor und interpoliert zum Schluß linear.

A Vorwärtsbewegung des Aphels um 4°

	(a)	(b)	(c)
M	76.53.28	176.22.16	209.31.40
	I_1 = 99.28.48		I_2 = 33. 9.24
	gegen 100. 6.54		33.24.40.

B Vorwärtsbewegung des Aphels um 6°

	(a)	(b)	(c)
M	70.42	170.55	204. 1
	I_1 = 100.13		I_2 = 33. 6.

C Rückwärtsbewegung des Aphels um 38′

	(a)	(b)	(c)
M	71.21. 6	171.29.27	204.35.49
	I_1 = 100. 8.51		I_2 = 33. 6.

D Rückwärtsbewegung des Aphels um 19′

	(a)	(b)	(c)
M	71.40.49	171.47.13	204.53.24
	I_1 = 100. 6.24		I_2 = 33. 6.11
	gegen 100. 6.54		33.24.40.

Wäre nur das erste Intervall zu beachten, so könnten die Überlegungen hier abgebrochen werden. Die Übereinstimmung von I_2 ist durch Opposition (c) gestört. Nach der Rechnung kommt (c) in 15.28 ♈, hat also den vorher ermittelten Ort der wahren Opposition um 18′ überschritten. Kepler verteilt die Differenz bei der dritten Opposition in etwa gleichmäßig, indem er von der mittleren Bewegung jeweils 8′ abzieht, weil, so führt Kepler aus, „die heutige Beschaffenheit der Bahnen[131] die Beobachtung nicht genau darstellt"**.

---

* „Videtur hodierna Eccentricitas non ferre hanc trigam observationum" (13, 370v).

** Diese wichtige Stelle findet sich in Bd. 13, Bl. 370v–371r. Dort heißt es: „Quare jam quia commensuratio Orbium hodierna non fert exacte haec observata, dispartiemur errorem observationum sic de motu medio, auferemus 8." Sie ist nachfolgend in Faksimile wiedergegeben.

...commensuratio Orbium hodierna non fert exacte haec
...; dissparti[illegible] errorem observationum fit,
... motus medii anomalia 8. hoc aufert in primo 7.43″
secundo 8.49. ... ista loca, in tertio 8.44
... Restant ... ista
7.43 — 8.49 — 8.44 +. Ita conciliata sunt ...
... possibili modo ... hodiernas orbium commen-
surationes.

Haec Hypothesis salvat observata ... et Ptolemaei

Pro loco quarto.

137. Oct. 9 ♃ 2.24. Medij 204.53.24 / 167.49 — tempore ad ...

139 ... 10. ♃ 15.12 ... 17.49

... 1 ... 274. ♃ 12.48 ... 30.20.32 ... 1.30

Hic constituuntur Epochae ex Obs. 3 Ptolemaei ...

☉ 16.4.38 ♌ / ♃ 11.12.5 ♊ ... 65.44.14 ... 17.50.30 ... 96.15.39

Ergo ao 139. 10 July ♃ ... 5.44.14

Completis 140. ... 1460

... ad ... annis 1640. ...

Ao 1600. ... completo 240. ...

Anni ... Aph ... Anni ... Aph ... Correctio

Ergo corrigatur medius ♃ ... Ptolemaei ... observationum ...

Diese 8′ entsprechen bei den 3 Örtern einer Änderung der wahren Anomalie und damit der loci eccentrici von

(a)	(b)	(c)
−7′ 43″	−8′ 49″	+8′ 44″.

So sind – beschließt er seine Überlegung – die drei Örter gebildet worden in der „möglichen Weise heutiger Bahnbeschaffenheit"*.

Es verbleibt noch, den 4. ptolemäischen Ort zu berechnen. Kepler geht von (c) aus und addiert die dem Zeitintervall (d–c) entsprechende Bewegungsdifferenz:

(c)	137	9. Oktober	H. 2.24	
(d)	139	10. Juli	H. 15.12	[132]
(d)–(c)	1^a 274^d		H. 12.48	

(c)	M	204.45.24	
	Aphel	17.49 ♍	[133]
	motus medius	12.34.24 ♈	
	ΔM	53. 9.50	
(d)	motus medius	5.44.14 ♊	
	Aphel	17.50.30 ♍	
schließlich	locus eccentricus	11.12. 5 ♊	
	☉	16. 4.38 ♋	
	♂☉♃	16.44. 5 ♊	[134]
gegen Ptolemäus	♃ in	15.45	
nach früheren Überlegungen		16.48	[135].

Damit ist die wahre ♂ der ptolemäischen Beobachtung um rund 60′ voraus, wie es nach früheren Überlegungen sein sollte. Die Rechnung hat die Richtigkeit des letzten Ansatzes bestätigt. Die Überlegungen zur Ableitung der Jupiter-Epochen können als abgeschlossen gelten, und Kepler kann daran gehen, das Fazit der umfangreichen Rechnungen zu ziehen. Er hat erhalten:

			motus medius	
(d)	139	10. Juli H. 15.12	2^s 5° 44′ 14″	
	bis	140 compl.	1. 14. 55. 12	[136]
	140 compl.		3. 20. 39. 26	
	1600 compl.		5. 10. 44. 38	[137]
	1460^a		1. 20. 5. 12	
gegen PT			1. 19. 42. 21	
Werte der PT zu vermehren um			22. 51.	

* „Ita conciliata sunt tria loca possibili modo per hodiernas orbium commensurationes" (13, 371 r).

Kepler will wie früher die Dionysische Beobachtung überprüfen und bestimmt sich dafür die Korrektur. Die verbesserten Werte, endgültige Zahlen der RT, seien Ergebnisse O genannt.

Jahre	Korrektur	PT	Werte der RT
1	1″	30° 20′ 31″	1ˢ 0° 20′ 32″
10	9	303. 35. 11	10. 3. 35. 20
100	1′ 34″	156. 16. 53	5. 6. 18. 26
1000	15. 39	182. 48. 45	6. 3. 4. 23
800	12. 32		
40	37		
1840	28. 48		

motus medius-Ergebnisse O (vgl. Faksimile)

Für das Aphel ist der Rechengang analog:

	Aphel
140	5ˢ 17° 50′ 30″
1600	6. 6. 51. 56 [138]
1460ᵃ	19. 1. 26.

Die entsprechenden Werte für die einzelnen Jahre, Ergebnisse O, stimmen mit den Zahlen der RT überein. Kepler berechnet sich die Aphelbewegung für 1840 Jahre und geht von 1600 n. Chr. auf das Jahr 240 v. Chr. zurück.

Jahre	Aphel
1	47″
10	7′ 52″
100	1° 18′ 38″
1000	13. 6. 22
800	10. 29. 6
40	31. 29
1840	24. 6. 57 [139]
1600 n. Chr.	6. 51. 56 ♎
240 v. Chr.	12. 44. 59 ♍

Aphel-Ergebnisse O (vgl. Faksimile)

Obwohl die Untersuchungen der Jupiter-Epochen mit den endgültigen Ergebnissen der RT abgeschlossen erscheinen, ist Kepler keineswegs am Ende seiner Überlegungen. In die Untersuchungen ist wieder die Dionysische Beobachtung miteinzuschließen, die, wenn sie Ergebnissen O nicht genügt, erneut zu überprüfen ist. Die Rechnung geht wie üblich von 240 v. Chr. aus, bestimmt den wahren aus dem mittleren Ort und ermittelt schließlich über den Sonnenort wie früher den locus visus.

			motus medius
1600 compl.			5s 10° 44′ 35″
1840a			2. 8. 3. 16
240 v. Chr.			3. 2. 41. 19
— 120d			— 9. 58. 15 [140]
241 v. Chr.	3. Sept.		2. 22. 43. 4
	H. 16		+ 3. 19
241 v. Chr.	3. Sept.	H. 16	2. 22. 46. 23
Aphel			5. 12. 44. 40
		M	280. 1. 43
		v	285. 24. 18
locus eccentricus			2. 28. 8. 58
		☉	5. 7. 20. 22
locus visus			7. 25. 0 ♋
Asellus			7. 4. 0 ♋

Die Dionysische Beobachtung wird durch Ergebnisse O um 21′ überschritten. Dieses Resultat beunruhigt Kepler. Von neuem untersucht er, ob sich die ptolemäischen Beobachtungen und die Beobachtung aus dem Jahr 241 v. Chr. gleichermaßen gut durch verbesserte Epochenwerte darstellen lassen.

1.633 Versuch zur Verbesserung der Ergebnisse

X. Zunächst ist nochmals zu fragen, ob das Beobachtungsdatum der Dionysischen Beobachtung richtig angenommen ist oder entsprechend den Überlegungen aus der Angabe des Neumondes (Abschnitt 1.623) sich um 7 Tage verschiebt. Dazu geht Kepler, in Vernachlässigung der Ergebnisse von Abschnitt 1.624, ein weiteres Mal auf die Hypothese des „dies creationis" ein und setzt:

Aphel in 0 ♋, motus medius in 0 ♑.

Eine 2. Bezugsepoche ist, um das Intervall von 5600a zu verwenden, der 23. Juli 1608 mit Richtungen für motus medius und Aphel nach Ergebnissen O.

		motus medius	Aphel
1608	23. Juli [141]	1s 0° 15′ 55″	6s 6° 58′ 23″
3993 v. Chr.	23. Juli	9. 0. 0. 0	3. 0. 0. 0
5600a		4. 0. 15. 55	3. 6. 58. 23
nach PT		3. 21. 44. 50	
Korrektur der PT		8. 31. 5	

Ergebnisse P

Die Rechnung wird in üblicher Weise fortgesetzt: ausgehend von der Epoche 1600, wird der Jupiter-Ort für den Zeitpunkt der Dionysischen Beobachtung bestimmt und mit der Beobachtung, dem Ort des Asellus, verglichen. Als Beobachtungsdatum wird der 10. September 241 v. Chr. genommen. Kepler erhält:

locus visus 6.40 ♋
gegen Asellus 7. 4 ♋.

Ergebnisse P haben die Differenz zu Asellus nicht verkleinert. Kepler ist nicht weiter gekommen, überprüft aber zur Sicherheit noch den ptolemäischen Ort (d).

Wieder wird von 1600 ausgegangen, diesmal zunächst zur Epoche 140, dann zu (d). Die Ergebnisse lauten:

140 n. Chr.	motus medius in	18.49. 1 ♋
	Aphel in	11.55.53 ♍
(d)	locus visus	15.11.49 ♊
	gegen Ptolemäus	15.45
	früher	16.48.

An dieser Stelle hält Kepler in seinen Rechnungen inne und kommentiert die Nachrechnungen mit den Ergebnissen P*.

Das Resultat der Rechnung in der 4. ptolemäischen Beobachtung läßt sich rechtfertigen, wenn das Beobachtungsprotokoll zu Rate gezogen wird. Dort findet sich die Angabe, daß der Jupiter mit dem Zentrum des Mondes gleich weit vom Siebengestirn entfernt gewesen sei. Es könnte nun gut sein, daß die Schätzung dieser Gleichheit nicht genau ausgefallen ist.

Dagegen läßt sich die Nachrechnung des Planetenortes für 241 v. Chr. mit der Dionysischen Beobachtung nicht in Einklang bringen, sofern die Beschreibung der Beobachtung richtig gedeutet worden ist. Die Hypothese des „dies creationis" hat keine Verbesserung erbracht.

Für die übrigen 3 Beobachtungen des Ptolemäus findet Kepler einige Gründe, welche die mittleren Oppositionen als nicht sehr gesichert erscheinen lassen[142].

Dennoch überprüft er die 3 Beobachtungen an den Ergebnissen P: (a) wird über die Bezugsepoche 140 n. Chr. berechnet, (b) über die Zeitdifferenz zu (a) und (c) über die Zeitdifferenz zu (b). Kepler erhält:

	(a)	(b)	(c)
	21.39 ♏	6.39 ♓	13.22 ♈
Ptolemäus	23.11	7.54	14.23
früher	24.14	8.57	15.26.

Ausgang von Ansatz X war die große Differenz bei der Dionysischen Beobachtung. Sie hat sich aber ebenso wenig verkleinert, wie sich die ptolemäischen Örter verbessert haben. Die Ergebnisse O von Ansatz IX sind demnach als endgültig anzusehen. Mit ihnen werden jetzt motus medius und Aphel für den „dies creationis" berechnet:

	motus medius	Aphel
1608 24. Juli	1^s 0° 15′ 57″	6^s 6° 57′ 50″
5600^a	3. 23. 12. 35	2. 13. 23. 38
Epocha creationis	9. 7. 3. 22	3. 23. 34. 12.

1.634 Abschließende Rechnungen und Bemerkungen

Als Schlußkontrolle werden aus den endgültigen Epochenwerten, den Ergebnissen O von Abschnitt 1.632, die 5 Örter berechnet. Für die Dionysische Beobachtung wird der

* Bd. 13, Bl. 372.

4. September 241 v. Chr. als Datum genommen, während bei den ptolemäischen Beobachtungen die von Ptolemäus überlieferten Zeitangaben beibehalten werden. Hier gelten als Sollwerte die auf Grund der Sonnentheorie Keplers um 63′ verbesserten Örter des Ptolemäus*.

Die Rechnungen Keplers beginnen am 5. März 1624 mit der Überprüfung der Dionysischen Beobachtung.

Ausgangsepoche ist der 1. Januar 300 v. Chr.:

motus medius	10.54.14 ♊
Aphel	11.57.55 ♍.

In üblicher Weise wird für den 4. September 241 v. Chr. berechnet:

motus medius	22.45.15 ♊	
locus eccentricus	28. 7.57 ♊	r = 5.25515
☉	7.20.22 ♍	R = 0.99870.

Kepler berechnet den locus visus nicht wie früher nach dem Tangentensatz, sondern über eine Iteration. Er erhält:

locus visus	7.35.32 ♋ [143]
gegen	7. 4.

Jupiter ist also um 31½′ über den durch Asellus festgelegten Ort hinaus.

Wird vom Datum 10. September ausgegangen, wie es sich aus der Erwähnung des Neumondes ergab, so ist der Ort 7.56 ♋ für Jupiter am wahrscheinlichsten.

Nach analoger Rechnung findet Kepler für die ptolemäischen Beobachtungen:

	(a)	(b)	(c)	(d)
locus visus	23.45. 8 ♏	8.26.32 ♐	15.11 ♑	16.44 ♊
Sollwert	24.14	8.57	15.26	16.48.

Die Epochen des Jupiter – Ergebnisse O – sind also derart eingerichtet, daß sich die Nachrechnung als Mittel zwischen der Dionysischen Beobachtung und den ptolemäischen Beobachtungswerten einstellt**: während sich Jupiter in der Nachrechnung einerseits um 31′ hinausschiebt, bleibt er andererseits um 30 bis 4′ hinter den Werten, die von Ptolemäus angegeben und von Kepler über seine Sonnentheorie verbessert wurden, zurück. Würden allein die ptolemäischen Beobachtungen genommen sein, hätten 17′ zur mittleren Bewegung addiert werden müssen. Etwas andere Korrekturen ergeben sich, wenn für die Berechnung von (d) der Mond herangezogen wird, der vom Siebengestirn und von Jupiter gleich weit entfernt gewesen sein soll. Jetzt kommt (d) nach 16.1 ♊; motus medius wäre um — 43′ zu verbessern, und die neu berechneten Örter würden sich weiter von den Sollwerten entfernen [144].

In einem Rückblick betrachtet Kepler noch einmal Beobachtungen und Zeitpunkte***: bei den fünf alten Beobachtungen ist der Tag der Dionysischen Beobachtung unsicher. Die vierte Beobachtung von Ptolemäus (d) ist durch den Mond gesichert, während bei den übrigen drei Beobachtungen (a–c) sich der Astrolabfehler bemerkbar macht. So bleibt letztlich nur eine alte Beobachtung übrig. Selbst die Beobachtungen von Walther sind

* Vgl. Abschnitt 1.622, IV.

** Wörtlich heißt es (13, 373v): „Sic igitur sunt ordinata Epocha, ut calculo incedat medius inter observationem Dionysianam et Ptolemaicas."

*** Bd. 13, 374.

unsicher, weil die Zeitangaben zu unbestimmt sind, wenn nicht, wie Kepler in einer nachträglichen Bemerkung ergänzt, Walther nach dem Beispiel von Regiomontan den Tag von Sonnenaufgang an rechnet[145]. Über diese Beobachtungen die Epochen abzuleiten, ist aus einem anderen Grund nicht ratsam erschienen: die Zeit zwischen Kepler und Walther – gut hundert Jahre – ist zu kurz. Ein Fehler von 10′ wäre in 5600 Jahren bis zu 9° 20′ angewachsen. Dennoch sind die Beobachtungen von Walther nicht gänzlich auszuschließen.

Die Berechnung des Jupiterortes (d) nach der ptolemäischen Angabe:

> „Jupiter hatte die gleiche scheinbare Länge wie das Zentrum des südlicher stehenden Mondes"*

ergibt, wenn die Tychonische Mondtheorie zugrunde gelegt wird, d. h. Variation und Parallaxe berücksichtigt werden, den Mondort 16.0.30 ♊. Motus medius des Jupiter wird zu 4.52.22 ♊ bestimmt, während früher (Abschnitt 1.632, nach Ergebnissen O) 5.44 ♊ berechnet wurde. In 1450 Jahren vermindert sich demnach die mittlere Bewegung um 52′. Nach weiterer Diskussion über die Lage der Apsidenlinie und die Beobachtungen des Ptolemäus mit dem Astrolab beschließt Kepler die Betrachtung der fünf alten Beobachtungen und wendet sich den Beobachtungen von Regiomontan und Walther zu, um an ihnen die abgeleiteten Jupiter-Epochen zu überprüfen. Die Rechnung bestimmt in üblicher Weise über die Prosthaphaeresis orbis den locus visus. Einzelheiten der Rechnungen seien nicht mitgeteilt, sie bringen nichts Neues gegenüber früheren Rechnungen. Die Beobachtungen werden im zweiten Teil ausführlich behandelt. Die Ergebnisse der Nachrechnung werden den Beobachtungen gegenübergestellt:

(a) 1462 21. März früh
♃ in 2.21 ♎ (berechnet)
gegen 2.21 ♎ (beobachtet)

(b) 1468 26. April 7^h 15
♃ in 29.24.39 ♊
gegen 29.25.32 ♊

(c) 1497 15. Februar 4^h früh
Walther hat hier angegeben, daß ♂ und ♃ um den Durchmesser des Mondes entfernt gewesen sind und ein Teil dieser Entfernung sich auf die Breite erstreckt hat.
Kepler erhält:
♂ in 12.14.30 ♐
♃ in 12.38.43 ♐
Abstand d 28′ 15″ [146].

(d) 1503 6. Oktober 6^h 45
Nähe der Konjunktion ♃♂
♃ in 14.43. 6 ♋
♂ in 14.34½ ♋.

Daneben sind weitere Beobachtungen aufgeführt, die nicht näher erläutert werden. Die Differenzen zu den Rechnungen sind z. T. sehr groß, z. T. fehlen aber Vergleichszahlen. Neun Beobachtungen werden genannt:

(e) 1504 19. Januar, Nähe ♂♃♂
(f) 1504 9. Februar

* Almagest II-11,2.

(g) 1504 24. Mai
(h) 1624 13. Februar
♃ in 24.35.33 ♋
gegen 24.29.35
(i) 1484 21. November früh ☌♄♃
(j) 1478 21. Februar 5^h
♃ in 25. 0 ♈
gegen 24.41
(k) 1488 16. Januar 5^h 30 ☌♃☿☽
(l) 1488 8. Oktober
(m) 1488 9. Dezember.

Mit diesen Angaben alter Beobachtungen und ihrer teilweisen Überprüfung an Hand der Jupiter-Tafeln der RT sind die Ausführungen Keplers über die Epochen des Jupiter zu Ende. Es folgt die Ableitung der Knotenbewegung, Epocha Nodi, die bereits in Abschnitt 1.52 wiedergegeben worden ist.

1.7 ZUSAMMENFASSUNG

Die Rudolphinischen Tafeln sind das erste große Tafelwerk, in dem die zeitlich veränderliche elliptische Bahn für die Darstellung der Planetenbewegung verwendet wird. Mit dieser Bahnbeschreibung kann der Genauigkeit neuerer, insbesondere Tychonischer Beobachtungen entsprochen werden. Aus dem Tafelwerk selbst ist nicht zu schließen, wie es berechnet worden ist und welche Beobachtungen zur Berechnung herangezogen wurden. Glücklicherweise hat Kepler die Berechnungsunterlagen der Nachwelt in seinen Handschriften hinterlassen, die gleichwohl auf ihre genaue Sichtung und Bearbeitung über dreieinhalb Jahrhunderte hindurch bis zur Gegenwart haben warten müssen. Mit der Durchsicht der Saturn-Handschriften ist ein Anfang gemacht worden.*

Hier nun wird in der Fortsetzung dieser Arbeit Keplers Berechnung der Bahnelemente für den Jupiter vorgelegt, insbesondere werden im ersten Teil die Rechnungen wiedergegeben, während im zweiten Teil auf die Beobachtungen näher eingegangen wird. Es wurden ca. 90 in lateinischer Sprache abgefaßte Folienseiten durchgesehen, die bisher noch nicht ediert sind. Die Handschriften sind lange Zeit in der Sternwarte Pulkowo aufgehoben worden, Kopien sind im Besitz der Bayerischen Akademie der Wissenschaften. Es wurden bearbeitet:

Pulkowo Bd. 13 Bl. 335–378v
Pulkowo Bd. 22 Bl. 219–225.

Zwischen Bl. 378, dem Ende der Jupiter-Handschriften, und Bl. 395 von Bd. 13, dem Anfang der Saturn-Handschriften, finden sich Ephemeridenrechnungen und Tafelentwürfe für Jupiter. Die Arbeiten Keplers zur Ableitung der Bahnelemente für den Jupiter fallen in den Zeitraum 1616–1624. Bd. 22 enthält Vorarbeiten, die sich nicht genau datieren lassen, aber sicher vor 1616 von Kepler niedergeschrieben wurden.

In der Bearbeitung der Saturn-Handschriften ist davon gesprochen worden, daß die Bahnelemente „einzeln nacheinander abgeleitet" seien und die Reihenfolge in der Bestimmung von guten Näherungswerten „nicht veränderbar" sei.** In den Jupiter-Hand-

* N. K. 2, zweiter Teil.
** N. K. 2, Abschnitt 2.4.

schriften ist der Gedankengang Keplers ungleich verwickelter: eine Reihenfolge derart, daß die Elemente einzeln nacheinander abgeleitet seien, läßt sich hier nicht in aller Strenge feststellen. Beim Saturn lassen sich die Elemente nach ihrer Reihenfolge in drei Gruppen aufteilen: zunächst werden die Lageelemente – Knoten und Neigung – abgeleitet, dann die Gestaltelemente – Exzentrizität, große Halbachse –, Aphel und schließlich die Epochenwerte, die den Bewegungsablauf beschreiben – mittlere Bewegung und Aphelbewegung. Beim Jupiter ist diese Gliederung nicht möglich, allenfalls läßt sich die Ableitung der Epochenwerte von der Bestimmung der übrigen Bahnelemente abheben, wobei aber auch hier verschiedentlich Zusammenhänge zwischen Elementen und Epochen von Kepler diskutiert werden.

Kepler beginnt seine Rechnungen mit der Bestimmung von Näherungswerten für die Exzentrizität und das Aphel, untersucht aber sogleich den Zusammenhang zwischen ihnen und der mittleren Bewegung. Die Berechnung der Exzentrizität aus der maximalen Gleichung ist von der genauen Kenntnis der Anomalien und damit von der Lage der Apsidenlinie abhängig.

Für das Aphel ergeben sich Näherungswerte aus dem Vergleich von wahrer und mittlerer Bewegung innerhalb eines bestimmten Zeitraums einerseits und aus der Tatsache andererseits, daß die Bewegung eines Planeten zum Perihel hin schneller und zum Aphel hin langsamer wird, daß also die Bewegungsdifferenzen von je zwei Oppositionen genau dann gleich groß sind, wenn sie symmetrisch zur Apsidenlinie liegen. An 6 Oppositionen diskutiert Kepler, wie Aphel, mittlere Bewegung und Exzentrizität einzurichten sind, um die Örter durch die Rechnung den Oppositionen möglichst gut anzupassen.

Die Nachprüfung der Untersuchungen Keplers über eine Ausgleichung nach der Methode der kleinsten Fehlerquadrate bestätigt die von Kepler abgeleiteten Werte, zeigt aber auch, wie die Ergebnisse sich verbessert hätten, wenn Kepler seinem Ansatz, drei Elemente zu variieren, gefolgt wäre. Dazu standen ihm offensichtlich die mathematischen Mittel nicht bereit: mit seinem Verfahren des systematischen Probierens konnte er schlecht die Abhängigkeit der Bahnörter von drei Elementen überblicken.

Auch bei der Bestimmung der großen Halbachse (proportio orbium) wird die Abhängigkeit von der Lage des Aphels erkannt: der Radiusvektor Sonne–Jupiter, bekannt aus dem Dreieck Sonne–Erde–Planet, wird auf die Apsidenlinie umgerechnet. Die Exzentrizität, schon vorher genau ermittelt, liefert jetzt das Maß für die Güte der Berechnung von Aphel- und Perihelentfernung. Die Knotenlinie wird, wie beim Saturn, aus Oppositionen in Nähe der Ekliptik bestimmt, indem die Richtung für die Breite 0 linear interpoliert wird. Aus dem Abstand des Planeten von der Knotenlinie, dem Argument der Breite, wird die Neigung der Planetenebene gegen die Ekliptikebene errechnet. Dazu wird die heliozentrische Breite benötigt, die sich nach dem Tangentensatz durch eine einfache Korrektur der beobachteten Breite bestimmen läßt. Umgekehrt bietet jetzt die Neigung die Möglichkeit, das Argument der Breite neu zu berechnen und die Knotenlage zu korrigieren. Endgültig aber wird die Knotenlage im Zusammenhang mit der Knotenbewegung – Epocha Nodi – am Schluß der Handschriften bestimmt. Hierzu geht Kepler, unter Beachtung alter Angaben aus dem 4. und 3. vorchristlichen Jahrhundert über Jupiterörter in Nähe der Ekliptik, auf seine Hypothese des „dies creationis" ein, nach der sich der auf Grund chronologischer und astronomischer Untersuchungen festgelegte Zeitpunkt der Weltschöpfung im Jahre 3993 v. Chr. durch besondere Konstellationen der Planeten und die Apsiden- und Knotenlinien ihrer Bahnen auszeichne.

Diese Hypothese kennzeichnet ebenso Keplers Bemühungen, die anderen Epochen des Jupiter – mittlere Bewegung und Apheländerung – abzuleiten. Sie wird schließlich doch

verworfen, weil das Beobachtungsmaterial, Beobachtungen aus dem 17. und 16. Jahrhundert sowie 4 ptolemäische Beobachtungen und eine Beobachtung aus der Zeit des Dionysius, eine Sonderstellung der Apsidenlinie und der Richtung der mittleren Bewegung zum erwähnten Datum in den Äquinoktialpunkten nicht rechtfertigt. Die alten Beobachtungen, zum großen Teil als Oppositionen zur mittleren Sonne angegeben, werden von Kepler kritisch gemustert. Die Nachrechnung der mittleren Sonnenörter zeigt das bemerkenswerte Ergebnis, daß Ptolemäus um 63′ hinter Kepler in seinen Angaben zurücksteht. Von hier aus versucht Kepler, durch systematisches Probieren Aphel und mittlere Bewegung (motus medius) derart zu korrigieren, daß sie die alten, verbesserten Bahnörter bestmöglich darstellen. Schließlich berechnet sich Kepler die wahren Örter von Sonne und als Näherungswerte auch von Jupiter, ermittelt drei Oppositionen zur wahren Sonne und bildet daraus zwei Differenzen, die er mit den Bögen der mittleren Bewegung vergleicht, wie sie sich aus den Zeitintervallen nach den Prutenischen Tafeln ergeben. Wie er aber auch die Bezugsrichtungen von mittlerer Bewegung und Aphel legt, es gelingt ihm nicht, die aus den wahren Anomalien folgenden mittleren Anomalien in Übereinstimmung mit den Differenzen in mittlerer Bewegung zu bringen. Kepler kommt zu dem bemerkenswerten Schluß, daß die Exzentrizität, die der Umrechnung der Anomalien zugrunde liegt, mit der Zeit veränderlich sein müsse, ohne aber die notwendigen Folgen daraus für die Berechnung der Rudolphinischen Tafeln ziehen zu können. Am Ende nimmt Kepler eine mittlere Abweichung der Rechnungen gegen die Beobachtungen an. Insgesamt unternimmt er zur Ableitung von motus medius und Aphel 10 verschiedene Ansätze mit noch mehr Versuchen. Dabei zeigt sich erneut seine erstaunliche Ausdauer in der Rechnung und Phantasie, die Lösung der Aufgabe von verschiedenen Seiten aus anzugehen.

Als Rechenverfahren kehrt häufig das systematische Probieren wieder: schrittweise nähert sich Kepler in seinen Rechnungen den als Sollwerten ausgewiesenen Beobachtungen. Etliche Ansätze verweisen auf die Differentialrechnung, so die Überlegung, wie sich die wahre Anomalie bei einer kleinen Drehung der Apsidenlinie ändert. Der sich um einen kleinen Betrag ändernde Funktionswert wird dann in der Weise bestimmt, daß die an zwei Randstellen des Intervalls bekannte Funktion für die Zwischenstelle interpoliert wird.

Die Entschlüsselung der Rechnungen Keplers wird dadurch erschwert, daß häufig ergänzende Kommentare fehlen: Kepler rechnet auf sein Ziel los, ohne zu sagen, was er beabsichtigt. Hinzu kommt, daß Gleichungen in der uns verständlichen Sprache der Algebra gänzlich fehlen.

Über die Rechenhilfsmittel läßt sich eine genaue Angabe machen: in der Jahresmitte von 1622 taucht der erste Logarithmus auf. Es handelt sich um den Neperschen Logarithmus in der von Kepler abgewandelten Form. Bis 1622 hat er in den Jupiter-Handschriften ausschließlich numerisch gerechnet und sich gern der verkürzten Rechenweise bei Multiplikationen und Divisionen bedient. Später stehen numerische und logarithmische Rechnungen nebeneinander.

Es läßt sich insgesamt über die Jupiter-Handschriften sagen: Kepler verbleibt mit seinen Methoden zur Berechnung der Bahnelemente im wesentlichen innerhalb des Rahmens, wie er schon in der Bearbeitung der Saturn-Handschriften (N. K. 2) aufgezeigt wurde. Dabei ist er der Linie der „Astronomia Nova" treu geblieben. Allerdings bleibt der physikalische Ansatzpunkt, die mit der Sonne als dem Zentrum der Kraft zusammenhängenden Überlegungen, unberührt, obwohl die Vermutung, daß die Beschaffenheit der Planetenbahnen (commensuratio orbium) nicht immer gleich bleibe, Anlaß geboten hätte, die physikalische Fragestellung neu zu verfolgen.

ANMERKUNGEN

[1] Das hochgestellte s wird bei der Bezeichnung einer Richtung im Tierkreis verwendet. s bedeutet „Tierkreiszeichen" (signum Zodiaci) und bezeichnet, ausgehend von ♈, ♉ mit 1^s usf. Hier bedeutet die Zahl: das Apogäum liegt 3° 55′ in ♍ oder 153° 55′ von ♈ in rechtläufigem Sinn entfernt. s kann also auch 30°-Einheiten eines Winkels bezeichnen.

[2] In den „Tabulae Prutenicae" wird – im Gegensatz zu Keplers „Tabulae Rudolphinae" – die Bewegung als einfache Bewegung (motus simplex) angegeben. Die Präzession ist noch hinzuzunehmen.

[3] Kepler läßt für diese Näherungsrechnung Apogäum und Aphel zusammenfallen.

[4] Entspricht 14 Stunden und 30 Minuten.

[5] Die Jahre in Julianischer Zählweise nennt Kepler hier „anni ordinarii".

[6] $A = M - v = e \sin E + E - \arccos \frac{e + \cos E}{1 + e \cos E}$.

$$\text{Für } E = \frac{\pi}{2} \text{ wird } A = e + \frac{\pi}{2} - \arccos e$$
$$= e + \arcsin e.$$

Da $e \approx \sin e$, wird $e = \sin \frac{1}{2} A$.

[7] Die Differenz ergibt 102. 51. 54.

[8] Das Aphel ergibt sich jeweils aus der Differenz wahrer Ort des Jupiter – wahre Anomalie. Der endgültige Wert der Rudolphinischen Tafeln von 6° 44′ ♎ für 1590 paßt hiernach schon gut mit der Exzentrizität von 4822 zusammen.

[9] 12^s sind 12 Julianische Jahre, d. h. 9 einfache Jahre und 3 Schaltjahre. Die Anzahl der Tage ist 9, nicht 5.

[10] Die geringfügige Differenz zu den zuvor berechneten Oppositionen erklärt sich durch verbesserte Werte der Sonnenbewegung.

[11] Die optische Gleichung ist im Dreieck Sonne–Mittelpunkt der Bahnellipse–Planet der Winkel beim Planeten. Sie ist gleich der Differenz $E - v$ und ungefähr gleich der physischen Gleichung. Die Summe beider Gleichungen ist die Gesamtgleichung, Aequatio tota oder kurz Aequatio.

[12] 6° 40′ ist der Bogen im exzentrischen Kreis; davon wird die optische Gleichung 38′ 30″ abgezogen, gibt 6° 1′ 30″ für die wahre Bewegung.

[13] Dieses Ergebnis läßt sich auf anderem Weg bestätigen. Die Aufgabe besteht darin, die exzentrische Anomalie E zu ermitteln, die bei vorgegebener Exzentrizität die optische oder physische Gleichung zu 38′ 30″ bestimmt.

Als Reihenentwicklung läßt sich die wahre Anomalie als Funktion der mittleren Anomalie darstellen:

$$v = M - 2\,e \sin M + \tfrac{5}{4}\,e^2 \sin 2\,M\,.$$

Wird für M $M = E + e \sin E$ gesetzt und ferner, da v, E, M kleine Winkel, > 0, sin M durch sin E ersetzt, ergibt sich, wenn noch e^2 als Größe zweiter Ordnung vernachlässigt wird:

$$v = E - e \sin E$$

als Bestimmungsgleichung für E. In dieser Beziehung ist also die optische Gleichung durch die physische e sin E ersetzt.

Mit $e \sin E = 38'\,30''$

$e = 4800$ wird

$$\sin E = \frac{38'\,30''}{2 \cdot 165'} = 0.116$$

$E = 6^\circ\,40'$ in Übereinstimmung mit Kepler.

Die von Kepler angesetzte Verhältnisgleichung ist der Radiensatz der „Astronomia Nova", wonach sich – im richtigen Ansatz – die Geschwindigkeiten in den Apsidenpunkten umgekehrt wie ihre Entfernungen verhalten.

[14] Kepler überlegt folgendermaßen: Die Differenz beider Gleichungen beträgt 1′ 50″. Was also hier (45′ 38″) zu vermindern ist, muß oben (43′ 48″) etwas vergrößert werden. Der mittlere Ort muß oben gegen den wahren Ort vorrücken, unten muß die Anomalie kleiner werden. Zunächst wird für die Differenz 1^d gewählt, so daß Jupiter 1590, am 1. Januar H. 10.38, das Aphel in 6.49.0 ♎ erreicht.

Dann ist oben die Gleichung um 33″ auf 44′ 21″ gewachsen, während die andere Gleichung um 29″ auf 45′ 9″ vermindert ist. Für die Restdifferenz sind dann weitere 16^h Rückwärtsbewegung des Planeten anzunehmen, der sich dann

1589, am 31. Dezember um 18^h 38 bei 6.45.56 ♎

im Aphel aufhält.

[15] Die Angabe der Sekunden fehlt.

[16] Der Hauptgedanke Keplers ist hier folgender: Durch die Rückwärtsbewegung des Aphels um $5\,\tfrac{1}{2}^\circ$ kommt der vorher bestimmten Exzentrizität $e = 0.04800$ nicht mehr $E = 90^\circ$, sondern $E = 95^\circ\,30'$ zu, so daß jetzt $e \sin 95^\circ\,30' = 0.04800$, woraus sich e zu 0.04822 ergibt. Mit der tatsächlichen Rückwärtsbewegung von $5^\circ\,40'$ wird $e = 0.04824$.

Nach B. Tuckerman (Planetary, Lunar, and Solar Positions A. D. 2 to A. D. 1649. Philadelphia 1964) berechnet sich e für 1590 zu:

$$e = 0.048335 - 3.1 \cdot 0.000164$$
$$e = 0.04783.$$

[17] In den Rudolphinischen Tafeln beziehen sich die Epochen auf vollendete Jahre Julianischer Zählung.

[18] Eine Apheländerung macht sich bemerkbar als

$$\frac{d\,(e \sin E)}{d\,E} = e \cos E\, d\,E, \text{ mit } E \approx 90$$

dem Betrag nach nahe 0.

[19] Die mittlere Differenz beträgt 2′ 1″. Eine Vorwärtsbewegung der Apsidenlinie macht die Gleichung für einen Ort in Nähe des Aphels kleiner, für einen Ort in Perihelnähe größer.

[20] Diese Aphelbewegung verändert die Örter in den mittleren Längen, also in Nähe des Diacentros, kaum. Es ist die Gleichungsänderung

$$dA = 2\,(dM - dE) = 2\,e \cos E\, dE.$$

Für (a) z. B. ist $E = 272°$; mit $e = 0.04822$ wird $dA = 5''$.

[21] Fälschlicherweise nimmt Kepler für B — R von (f) — 7′ 17″, anstelle der vorher abgeleiteten — 5′ 36″.

[22] Bei vorgegebener mittlerer Anomalie beeinträchtigt eine Änderung in e die berechnete wahre Anomalie, so daß sich auch der Faktor f_1 ändern würde. Dieser Einfluß wird hier nicht berücksichtigt, weil für $dv = \pm\, 0'.1$ und $7° < M < 270°$ die Änderung $df = \frac{dv}{M}$ zu vernachlässigen ist.

[23] Allerdings nur im Vergleich zu den Ergebnissen Keplers. Die Exzentrizität wird $e = 0.04822 + 0.00032 = 0.04854$, die mit dem wirklichen Wert von 0.04783 (vgl. Anmerkung 16) schlechter als vorher übereinstimmt.

[24] Diese Fragestellung verweist – wie häufig bei Kepler – auf die Differentialrechnung. Mit $AB = a$, $AT = c$, $\sphericalangle T = \alpha$, $\sphericalangle B = \gamma$ wird

$$a = c\,\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma}$$

$$da = -\,c\,\frac{\cos\gamma}{\sin^2\gamma}\,d\gamma \quad \text{für } \sin\alpha \approx 1$$

$da = -\,707$ in guter Übereinstimmung mit Kepler.

[25] Kepler rechnet auch hier nach dem Sinus-Satz. Bei der Division macht er einen Fehler. Das richtige Ergebnis lautet $AB = 5.48339$.

[26] Mit dem richtigen Wert für die Aphelentfernung von Anmerkung 25 lauten die Ergebnisse: $a = 5.20855$, $e = 0.05277$.

[27] In diesen Rechnungen wird der heliozentrische Jupiterort, der locus eccentricus, über die Aphelrichtung abgeleitet. Die Differenz zwischen heliozentrischem und beobachtetem Planetenort ist die Prosthaphaeresis orbis ($= \sphericalangle B = \gamma$), die direkt in die Rechnung eingeht. Es ist nach Anmerkung 24:

$$da = -\,c\,\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma}\cdot\frac{\cos\gamma}{\sin\gamma}\,d\gamma$$
$$= -\,a\cdot\cot\gamma\,d\gamma,$$

wobei hier $d\gamma$ der Apheländerung entspricht.

[28] Richtiger Wert nach dieser Rechnung 5.47899.

[29] Die Reduktion läßt sich über die Differentiation der Abstandsformel nachprüfen:

$$r = a + ae\cdot\cos E$$
$$dr = -\,ae\cdot\sin E\,dE$$

mit $ae = 0.24500$, $E = -\,dE = 1°\,46'$ wird

$$dr = 0.00021.$$

[30] In der Nachrechnung ergibt sich nach der in Anmerkung 27 abgeleiteten Formel: $dr = -\,98$ bei vierstelliger Rechnung. Wird die Änderung von α ebenfalls berücksichtigt, erhält man:

$$dr = -r\,(\cot\gamma\, d\gamma + \cot\alpha\, d\alpha)$$

und mit $d\gamma = d\alpha = 1'$

$dr = -90$ Einheiten der letzten Stelle bei vierstelliger Rechnung.

[31] Richtiger Wert: 5.22791. Kepler rechnet sechsstellig und macht geringfügige Rundungsfehler.

[32] Seltsamerweise wird das Aphel nicht mit 6.42.25 ♎, wie die Ausgleichung ergeben hat, sondern um rund 10′ kleiner angenommen. Für diese Abweichung gibt es zwei Möglichkeiten: entweder hat Kepler einen neuen Wert abgeleitet, der in den Handschriften nicht wiedergegeben wurde, oder, was wahrscheinlicher ist, er hat sich bei der Abschrift um 10′ vertan.

[33] Bei dieser Rechnung hat sich Kepler verrechnet. Den Fehler korrigiert er später.

[34] Dieser vorläufige Wert hätte 5.48008 lauten müssen.

[35] ae wird hier „libratio" genannt, die „Schwankung" zwischen Entfernung der Apsidenpunkte und mittlerer Entfernung.

[36] Diese hier nach den Handschriften in Kurzform wiedergegebene Stelle bedarf einer kurzen Erläuterung. Anstatt wie früher über die Aphel- und Perihelentfernung die große Halbachse und die Exzentrizität zu bestimmen und e mit dem bekannten Wert zu vergleichen, verfährt Kepler hier anders: die Exzentrizität dient jetzt dazu, über die näherungsweise bekannte große Halbachse Aphel- und Perihelentfernung neu zu bestimmen. Der Vergleich mit den Ausgangswerten zeigt erhebliche Differenzen.

[37] Kepler rechnet mit 5stelligen Sinuswerten und bestimmt den Quotienten 6stellig. Der richtige Wert für AB ist 4.95016.

[38] Damit läßt sich für diesen Teil der Rechnung eine ungefähre Datierung feststellen: die Berechnung der Bezugsrichtungen für mittlere Bewegung und Aphel des Jupiter stammt aus dem Jahre 1616, der 2. Teil der „Epitome" ist 1621 gedruckt.

[39] Kepler untersucht also, wie sich ∢ B ändert, wenn sich a ändert. Es ist:

$$\sin B = \frac{1}{a} \cdot \frac{R \cdot \sin T}{1 + e \cos E} \tag{8}$$

$$\cos B\, dB = -\frac{1}{a^2}\, dA \cdot \frac{R \cdot \sin T}{1 + e \cos E}$$

$$dB = -\tan B\, \frac{da}{a} \cdot \rho'$$

$$= -\tan 10^\circ\, 53'\, 29'' \cdot \frac{0.01505}{5.15145}$$

$$= -1'\, 55''$$

Kepler: $= -2'\ 9''$.

[40] Richtiger Wert im Nenner des Quotienten ist sin 11.2.7.

[41] Kepler hat hier den Sonnen- und Jupiterort fälschlicherweise für 5^h abends berechnet. Diese Werte, 9.25.4 ♎ für Sonne und 2.46.55 ♋ für Jupiter, sind in der verkürzten Wiedergabe dieser Handschriften nicht aufgeführt.

[42] Kepler hatte im einzelnen erhalten:

a) aus Beobachtungen in Nähe der Apsidenlinie

a = 519650 als vorläufigen Wert, der in der „Epitome" wiedergegeben ist;

b) aus Beobachtungen in Nähe der ersten mittleren Länge
a = 520642
a = 518145 (527715 und 524000 wurden als zu groß verworfen);

c) aus Beobachtungen in Nähe der zweiten mittleren Länge
a = 520100
a = 520515.

Der Mittelwert von b) und c) ist 519880 gegen 519650 als Wert der „Epitome", also etwas kleiner als 520000.

[43] Nach B. Tuckerman ist a = 5.202805.

[44] Aphel und Perihelentfernung sind also nicht direkt bestimmt, sondern über a und e berechnet.

[45] Unter Breite B ist hier die beobachtete Breite, latitudo, zu verstehen. Sie ist die geozentrische Breite, die Parallaxe wird nicht berücksichtigt. Die heliozentrische Breite, die inclinatio, wird mit b bezeichnet. In den Punkten mit 90°-Abstand von dem Knoten erreicht der Punkt die maximale Breite. Diese Punkte sind die limites.

[46] 13 ♎, das ungefähre Mittel der Oppositionen von 1586 und 1593, fällt in die Nähe der Opposition von 1590 (Opposition (b) in Abschnitt 1.31). Die entsprechende Breite ist $B = 1° 37'$.

[47] Hinzuzufügen ist die Epoche: die Interpolation bestimmt die Zeitdifferenz zu 9^a. Die Lage ☊ in 6½ ♋ bezieht sich demnach auf 1577 compl.

[48] Der genaue Wert nach den Ausgangsdaten ist $b = 1° 22' 29''$.

[49] Es seien: R der Abstand Sonne–Erde
Δ der Abstand Erde–Planet in der Ekliptik
h der Abstand des Planeten von der Ekliptikebene.

Dann wird
$$\tan B = \frac{h}{\Delta}$$
$$\tan b = \frac{h}{R + \Delta} \text{ und daraus}$$
$$\cot b = \cot B + \frac{R}{\Delta} \cot B.$$

Schließlich mit
$$R = 1$$
$$\cot b = \cot B + \frac{\cot B}{\Delta}, \text{ die Formel Keplers.}$$

[50] Kepler hat keine Formelsprache gekannt. Die Formeln, die hier angegeben sind, lassen sich aus seinen Rechnungen erschließen.

[51] Der genaue Wert nach (11) ist $1° 19' 26''$. Mit der tatsächlichen Abweichung von $6\frac{1}{2}°$ wird $i = 1° 19' 39''$.

Die Verbesserung der Neigung in heutiger Schreibweise ergibt sich aus der Differentiation von (11). Es ist

$$\tan b = \tan i \cdot \sin (l - ☊)$$
$$\frac{1}{\cos^2 b}\, db = \tan i \cdot \cos (l - ☊)\, dl$$
$$db = \tfrac{1}{2} \sin 2\, b \cdot \cot (l - ☊)\, dl$$

für kleine Änderungen in l, d. h. kleine Abstände zum limes.

[52] Für den 24. Januar 1590 erreicht der Planet nach Abschnitt 1.41 die heliozentrische Länge von 8.29.27 ♎ (= Richtung AB). Der limes wird, ausgehend von der Knotenlage

6 ½ ♋, um 2° überschritten. Die Neigung beträgt demnach i = 1.22.30. Aus der Opposition vom 23. März 1590 ergab sich i = 1° 19′ 30″. Der Mittelwert aus den Beobachtungen des Jahres 1590 ist 1° 21′ 0″.

[53] Der richtige Wert nach (11) ist 1° 19′ 31″.

[54] Diese Gleichung folgt für kleine Breiten im Anschluß an Anmerkung 49.

[55] Genauer 4′ 50″.

[56] Eine Begründung hierfür wird nicht gegeben. Nach Tuckerman ist i = 1° 18′ 31.5″ — 20.5″ pro Jahrhundert, bezogen auf die Epoche 1900. Damit berechnet sich die Neigung zur Zeit der Beobachtungen

$$\begin{aligned} i_{1590} &= 1^\circ\, 18'\, 31.5'' + 3.1 \cdot 20.5'' \\ &= 1^\circ\, 19'\, 35''. \end{aligned}$$

[57] Einzelheiten über die alten Beobachtungen sind im Abschnitt 1.6 und im 2. Teil mitgeteilt.

[58] Der richtige Wert ist 12 ☊ für das Jahr 1600.

[59] Irrtümlicherweise hat Kepler bei der Differenzbildung nicht den zuvor bestimmten Ort 6 ☊ angehalten, sondern den Ort des Asellus von 3.8 ☊. So kommt zum ersten Rechenfehler ein weiterer hinzu. Die Fehler sind indessen nicht schwerwiegend, denn bei den vorliegenden Rechnungen handelt es sich um Überschlagsrechnungen, um überhaupt einen Anhalt über die Lage der Knotenlinie zu haben.

Der richtige Wert nach diesen Überlegungen wäre:

341 v. Chr. ☊ in 8.31 ♋.

[60] Hier ist die Knotenbewegung unter Einschluß der Präzessionsbewegung gemeint. Die tatsächliche Knotenbewegung scheint also gerade die Präzessionsbewegung aufzuheben.

[61] Damit meint Kepler, daß sich eine eingehende Diskussion über die genaue Lage der Knotenlinie durch die vorhandenen Beobachtungen nicht rechtfertigen ließe und daher auch nicht lohne.

[62] Abschließend betrachtet Kepler die aristotelische Beobachtung, für die ihm das angegebene Jahr nicht zuverlässig erscheint. Für die fragliche Sternbedeckung kommen im 12-Jahres-Abstand die Jahre 359, 347, 335, 323 in Frage. Da Jupiter retrograd gewesen sein soll, den rückläufigen Bogen von 10° in 4 Monaten symmetrisch zur Opposition durchläuft, kann er zum Zeitpunkt der Beobachtung nicht mehr als 5° von der Opposition entfernt gewesen sein. Die Breite des Sternes ist höchstwahrscheinlich größer gewesen, was aus dem Abstand des Sternes und damit des Jupiter vom Knoten zu folgern ist. Die größere Breite aber ist auf die größere Schiefe der Ekliptik zurückzuführen.

Ähnliche Überlegungen gelten für die Dionysische Beobachtung aus dem Jahre 241 v. Chr. Hier ist wahrscheinlich die Schiefe der Ekliptik um 21′ größer als 1600 gewesen, so daß die Breite möglicherweise — 25′ betragen hat.

Damit brechen die Ausführungen Keplers ab (Pulkowo 13, 377v). Es folgen noch einige Angaben über Jupiterbeobachtungen von David Fabricius.

[63] Ergebnis B von Abschnitt 1.31 lautet:

♃ erreicht am 31. Dez. 1589, 18ʰ 38 das Aphel in 6.45.56 ♎.

Streng genommen erreicht zum Jahresende motus medius ungefähr die angegebene Richtung, während das Aphel schon etwas zurückbleibt.

[64] Nach dem Braheschen Fixsternkatalog ist für

1600 compl.	Spica in	18.16	♎
davon abzuziehen Präzession für 11 Jahre		9.21	
1589 compl.	Spica in	18. 6.39	♎.

[65] Dazu sind keine Unterlagen im Nachlaß Keplers zu finden. Es ist möglich, daß Kepler in mündlicher Aussprache mit Mästlin diesen Wert erfuhr; er kann ihn aber auch einer (ebenfalls nicht unter den Kepler-Handschriften auffindbaren) Tabelle entnommen haben, die Mästlin als Hilfsmittel zum Verständnis der bei Kopernikus angegebenen Werte aufgestellt und wohl auch in seinen Vorlesungen benützt hatte (vgl. Mästlin an Kepler, 27. Feb. 1596 a. St. Joh. Kepler Ges. Werke Bd. 13, Nr. 29).

[66] Kepler rechnet nach dem Tangentensatz. Werden die Winkel im Dreieck wie ihre Eckpunkte mit A, B, C und die Seiten nach den gegenüberliegenden Ecken mit a, b, c bezeichnet, dann ist:

$$\tan \tfrac{1}{2}(B - C) = \tan \tfrac{1}{2}(B + C)\frac{b - c}{b + c}$$
$$= \tan \tfrac{1}{2}(84^\circ\, 30')\frac{0.480 - 0.041}{0.480 + 0.041}.$$

Daraus:
$$B - C = 74.52$$
$$B + C = 84.30$$
$$C = 4^\circ\, 49'.$$

[67] Kepler rechnet wieder nach dem Tangentensatz. Es ist

$$\tan \frac{T - B}{2} = I \cdot \tan \tfrac{1}{2} A.$$

Darin ist $I = \text{Index} = \frac{r - R}{r + R}$.

Er erhält: $\frac{1}{2}(T - B) = 3^\circ\, 21'\, 32''$
$\frac{1}{2} A = \frac{1}{2}(T + B) = 5.\ \ 3.\ \ 8$

Daraus $B = 1.\ 41.\ 36.$

B ist die Parallaxis orbis.

[68] Hier will Kepler eine beobachtete Konjunktion des Mars mit dem Jupiter vergleichen. Nach der Rechnung kommt sie zwei Tage später zustande.

[69] Neben der Länge berechnet er die Breite. Jupiter ist vom nördlichen limes $135^\circ\, 18'$ entfernt, vom Knoten also $45^\circ\, 18'$. Mit $i = 1^\circ\, 19'\, 20''$ wird $b = -56'$. Nach $\tan B = \tan b \frac{\sin T}{\sin A}$ wird $B = -51'\, 41''$. Ein Vergleichswert aus Beobachtungen wird nicht mitgeteilt. Kepler berechnet das Sinus-Verhältnis sexagesimal und ersetzt den Tangens durch das Bogenmaß. Die Multiplikation wird sexagesimal ausgeführt.

[70] Eine Rechnung für den 24. Januar 1590 wird nicht zu Ende geführt.

[71] In diesem Teil der Handschriften finden sich überraschend viele Datumsangaben Keplers, die sich zuweilen zu tagebuchartigen Eintragungen häufen.

[72] Die entsprechende Rechnung lautet:

Apogäum nach Ptolemäus	in	11	♍
Präzession		11° 13′	
	Apogäum	22. 13	♍
	Differenz dazu	8°	
Apogäum nach Albategnius	in	14. 13	♍.

Kepler hat sich um 5° verrechnet.

[73] 6 ½° war die Differenz zwischen Apogäum und Aphel, die Mästlin für die Lage der Apsidenlinie zur Zeit des Ptolemäus bestimmt hatte.

[74] Der „dies creationis" liefert für Kepler immer wieder den Prüfstein für die Rechnungen. Hier erhält er 9.56 ♋, während er vielleicht 0 ♋ erwartet hätte.

Er rechnet:	Aphelbewegung jährlich	56″
	die Aphelbewegung betrage	60″
	dann in 5593ª	5593′
	davon abzuziehen	4″ · 5593 .

[75] Der erste Logarithmus in den Jupiter-Handschriften ist der Logarithmus des Index

$$I = \frac{544970 - 100000}{544970 + 100000} = \frac{1}{1.449468} = \frac{1}{1.26.58} \quad \text{(sexagesimal)}$$

$$\text{Log } I = 37120.$$

Dieser Wert ergibt sich auch aus Spalte 3 der „Heptacosias Logarithmorum Logisticorum" der RT, bezogen auf Spalte 5 „Partes et sexagesimae privativorum". Die anderen Logarithmen an dieser Stelle sind Mesologarithmen, d. h. ln cot-Werte.

Für die Sonnenwerte verwendet Kepler eine Tafel, die offenbar eine Vorgängerin der „Tabula subsidiaria motuum Solis" der RT ist.

[76] Die Rechnung nach den Angaben der Beobachtung lautet für die Länge und Breite:

Taurus	L	B
In austrino oculo		
Aldebaran 1600	4.12.30 ♊	— 5° 31′
in Boreo oculo 1600	2.53 ♊	— 2.37
Differenz	1.19.30	— 2.54
Hälfte	40	— 1.27
in Boreo oculo 1600	2.53 ♊	— 2.37
♃ 1600 in	2.13 ♊	— 1.10
Präzession	1.44	
1478, 22. August ♃ in	0.29 ♊ mit B =	— 1° 10′.

[77] 1° Apheländerung entspricht der Änderung der Anomalie von 1°. Sie hat für die Örter die Verbesserung von ½ dA zur Folge, wobei sich dA nach Anmerkung 20 ergibt zu:

$$dA = 2\, e \cos E\, dE$$

$$\text{mit } dE = 1°, \quad \cos E = 1$$

$$\tfrac{1}{2}\, dA = 3'.$$

Diese Stelle ist hier etwas irreführend. Zunächst wollte Kepler wohl die Differenz von 14′ (genauer 15′) durch Änderung des Aphels ausgleichen, fährt aber so fort, daß er die Anomalien beibehält und Bezugsrichtungen der mittleren Bewegung und Apsidenlinie gleichermaßen verändert.

[78] Ausgangsrichtung war Ergebnis I für 1600 von Abschnitt 1.61. Die Differenz zur verwendeten Beobachtung beträgt nur 122ª. Damit summiert sich die Apheländerung bis zur Epocha creationis auf 10° 40′.

[79] Als Nachtrag aus dem Jahr 1624 finden sich die neu berechneten Örter des Jupiter:

für den 22. August	1478	0.39.28 ♊,	der Statio benachbart
für den 30. September	1478	0.42 ½ ♊.	

[80] Näherungswert nach den Abschnitten 1.61 und 1.621. Es war

Aphel	137 n. Chr.	in	17.31	♍	nach Mästlin
Apheländerung pro Jahr			56″		
	in 377ᵃ ca.		6°		
Aphel	241 v. Chr.		11.31	♍	
	Kepler setzt		11	♍.	

[81] Nach Tycho Brahe ist Spica 241 v. Chr. in 22.11 ♍.

[82] Nach dem Fixsternkatalog von Tycho Brahe der RT betragen für 1600 compl. die Längen der Sterne:

Asellus	in	3.	8	♌
Spica	in	18.	16	♎
Differenz		75°	8′.	

[83] Ptolemäus fand den Ort in 7.33 ♋ mit B = — 30′.

[84] Kepler summiert den Abstand des Apogäums zu Spica 15° 20′
die Differenz der Apsidenlagen nach Albategnius 8°
Präzessionsbewegung in ca. 700 Jahren 9°
und erhält ca. 32° 20′.
Diesen Betrag subtrahiert er vom Ort der Spica
Spica in 26. 40 ♍
Das Apogäum ist demnach in 24. 20 ♌.

Fälschlicherweise hat er aber den Ort der Spica zur Zeit des Ptolemäus genommen, anstatt den Ort zur Zeit des Albategnius anzuhalten.

[85] Die Rechnung lautet:

longitudo eccentrica		28.20	♊	
Aphel		19. 0	♌	
	v	50.40		
	r	5.35100		
	∢ TIS	9° 15′		nach logarithmischer Rechnung
locus visus	TI	7.44	♋	
korrigierte Länge		28.29	♊	
	v	50.31		
	M	54.52.49		nach Tab. Aequationum
	Aphel	19. 0	♌	
longitudo media		24. 7.11	♊.	

[86] Es ist zu beachten, daß bei 240 v. Chr. der Anfang, bei 1560 n. Chr. das Ende des Jahres genommen wurde.

[87] Kepler führt, um die Darstellung zu vereinfachen, bei der Änderung der mittleren Bewegung nur die Unterschiede zu den PT auf.

[88] Diese Bewegung setzt sich zusammen aus:

Bewegung nach	PT	2ˢ 23° 43′ 33″
Präzession		3. 20. 57
Korrektur nach	K	— 6. 34
	Summe	2. 26. 57. 56.

[89] Bei Ptolemäus ist jeweils eine um $1^h\,45^{min}$ spätere Zeit angegeben. Nach dem Ortskatalog der RT beträgt der Unterschied zwischen Alexandria und Uraniborg $1^h\,48^{min}$. Die hier aufgeführten Zeiten beziehen sich aber auf den Meridian von Hven. Die Oppositionen sind auf die mittlere Sonne bezogen.

[90] ☉, π ist der Ort der Sonne im Apogäum. Diese Stellung der Sonne bezüglich der Apsidenlinie wird in $33^a\,13^h\,43^{min}$ beibehalten und um 33′ 54″ bezüglich der Fixsternsphäre verändert.

[91] Es ist die wahre Anomalie gesucht, die die Sonne 16 Tage, 14 Stunden und 49 Minuten vor dem Apogäumsdurchgang erreicht. Für die Lösung dieser Aufgabe hat Kepler in den RT eine Spezialtafel eingerichtet: Tabula Diurnorum Solis (RT, Tafel 92 und 93), die besondere Bedeutung für die Finsternisrechnungen hat (vgl. N. K. 2, Abschnitt 1.31 Finsternisse).

[92] Zum Vergleich seien die Sonnenörter angeführt, die sich aus den endgültigen Sonnentafeln der RT ergeben:

mittlerer Sonnenort in		24.15.30 ♉
wahrer Sonnenort in		24.49.34 ♉
	Aequatio	34′ .

Diese Gleichung nennt er in Bd. 13, Bl. 365 Aequatio Tychonica, abgekürzt Aeq. Tych.

[93] Kepler vergleicht den wahren Sonnenort mit dem mittleren Sonnenort nach Ptolemäus. Das ist aber nicht sinnvoll. Wahrscheinlich wollte er den mittleren Ort heranziehen und schrieb zu diesem Zweck noch die Aequatio hin.

[94] Die Berechnung des locus visus aus dem locus eccentricus erfolgt wie früher (Anmerkung 67).

Es ist $\tan \frac{T-B}{2} = \frac{4.1977}{6.2323} \cdot 53.2921$

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2}(T-B) &= 88^\circ\,24'\,15'' \\ \tfrac{1}{2}(T+B) &= 88.\ 55.\ 30 \\ \hline T &= 177.\ 19.\ 45 \end{aligned}$$

(Kepler erhielt 177. 19. 30).

[95] Zunächst hat Kepler erwogen, das Aphel der Ergebnisse K um 16° zu ändern, führt diese Absicht aber hier nicht aus. Die entsprechende Stelle (Bl. 365v) ist durchgestrichen.

[96] Wie Kepler zu diesem Wert gekommen ist, läßt sich nicht genau ersehen. Es findet sich die Bemerkung, daß die Gleichung, wohl in Hinblick auf die vorangegangenen Sonnenrechnungen, um 1½° zunehmen müsse, was sich durch die Vorwärtsbewegung des Aphels um ca. 16° erreichen läßt.

Über die Aphelrichtung K aus dem Ansatz III ergibt sich das neue Aphel:

Aphel nach K für	120 n. Chr. in	28.26 ♌
	Verbesserung	16.30
		14.56 ♍
	Präzession nach PT	5.16
	240 v. Chr. Aphel in	9.40 ♍.

Dieser Wert läßt sich auch mit früheren Angaben nach Ansatz III bestätigen:

137 n. Chr. Spica in	26.40 ♍
Abstand vom Apogäum	15.20
Apogäum in	11.20 ♍
Aphel voraus um ca.	4°
137 n. Chr. Aphel in	15.20 ♍
Präzession nach PT	5.16
240 v. Chr. Aphel in	10. 4 ♍.
Kepler gibt	9.49 ♍ an.

[97] Genauer Wert: 9° 25′ 32″.

[98] Bei der Apheländerung der Ergebnisse L hat sich Kepler um einen kleinen Betrag verrechnet:

die Apheländerung beträgt für 20 Jahre	17′ 35″
für 4 Jahre	3′ 31″.

[99] Die Bewegung setzt sich zusammen aus:

Bewegung nach PT	2^s 23° 43′ 33″
Präzession	3. 20. 57
Korrektur nach L	3. 8
Summe	2. 27. 7. 38 .

[100] In der Summierung verrechnet sich Kepler um 2′. Wird für die Apheländerung der Wert nach Anmerkung 98 eingesetzt, ergibt sich als richtiges Ergebnis dieser Rechnung: 15.5.36 ♍.

[101] Die Rechnung für (a) lautet:

	motus medius	Aphel
120 nach L	13.24.58 ♏	14.58.36 ♍
12^a	4.11.11	9.33
April	9.58.30	21
16^d	1.19.46	
9^h 15^{min}	1.55	
Präzession	10. 3	
Korrektur L	12	
mittlerer Ort	29. 6.35 ♏	15. 8.30 ♍
M	73.58	
v	68.45	r = 5.28
locus eccentricus	23.53.30 ♏	
☉	24.48 ♉	R = 1.01730 (vgl. Ansatz III)
locus visus	23.41. 0 ♏.	

[102] Die Verbesserung in den Differenzen zu Ptolemäus von 1 bis 4° im Ansatz III auf 30′ bis 1° im Ansatz IV ist allein darauf zurückzuführen, daß das Aphel für die Dionysische Beobachtung nach den vorliegenden Anhaltspunkten richtig ermittelt wurde (vgl. Anmerkung 84 und 96).

[103] Damit erkennt Kepler sein Versäumnis im Ansatz III, den mittleren Sonnenörtern des Ptolemäus nicht ebenfalls eigene mittlere Örter, sondern wahre Sonnenörter gegenüber-

gestellt zu haben. Dieser Vergleich ließ keine begründeten Schlüsse auf die Jupiter-Örter zu (vgl. Anmerkung 93).

[104] Vgl. die Zahlen von Anmerkung 101.

[105] Das ist genau dann der Fall, wenn die Entfernungen zum Jupiter von Sonne und Erde gleich groß sind. In Nähe der Opposition gilt diese Annahme nur bei Näherungsrechnung für die entfernteren Planeten.

[106] Hier hat sich Kepler um 10′ vertan. Es müßte heißen: + 33′.

[107] Die Örter für Beispiel (a) in der Rechnung sind:

locus eccentricus	24. 6.38 ♏	r = 5.28700
☉ in	24.48. 0 ♉	R = 1.01730
locus visus	23.56.40 ♏	
gegen Ptolemäus	23.11	
Differenz	46.	

Damit ist der voranstehende Fehler (Anmerkung 106) hinfällig geworden.

Bei der genaueren Berechnung der Differenzen, die jetzt vorgenommen worden ist, spielt die Prosthaphaeresis orbis herein, so daß sich D von A (abgesehen vom Jupiterort a) nicht genau um 11′ unterscheidet.

[108] 3° 31′ Aphelverbesserung werden schrittweise erreicht über 1° 40′, 51′ und 1°. Die Summe der beiden letzten Verbesserungen läßt sich aufspalten in eine einfache Korrektur von 1° 40′, deren Wirkung auf die 4 Örter vorher ausgiebig diskutiert wurde, und in einen kleinen Betrag von 11′. Diese kleine Korrektur kompensiert die Veränderung von motus medius, so daß die Anomalien nach der Vorwärtsbewegung der Bezugsrichtung der mittleren Bewegung gleichbleiben. Die 11′-Korrektur ergibt sich durch den Übergang von A nach D. Ansatz D kommt im Mittel der Solldifferenz von 62′ bereits sehr nahe.

[109] Die Rechnung für (a) lautet:

mittlerer Ort nach L	29. 6.35 ♏
Korrektur	11′
neuer mittlerer Ort	29.17.35 ♏
M	70.38. 5
v	65.32. 0
Aphel	18.39.30 ♍
locus eccentricus	24.11.30 ♏
locus visus	24. 2.25 ♏
Ptolemäus	23.11
Differenz	51.25.

Aphel nach L	15. 8.30 ♍
	3.31
neues Aphel	18.39.30 ♍

[110] Die Differenzbeträge bis 140 compl. setzen sich für motus medius zusammen aus:

mittlere Bewegung für 174^d	44° 52′ 8″
+ 1 Schaltjahr	
mittlere Bewegung in $8^h\ 45^{min}$	1. 49
Präzession	1. 14
zusammen	44. 55. 11.

Für die Apheländerung ist die Präzession genommen worden.

[111] Die Epoche M ist also in Anlehnung an die Sonnentheorie Keplers über 4 ptolemäische Beobachtungen zustande gekommen. Indem sich in der Nachrechnung der mittleren Sonnenörter für die Beobachtungszeiten von Ptolemäus die auffällig konstante Differenz von 62′ bis 64′ gegenüber den Sonnenörtern von Ptolemäus zeigte, lag es nahe, diese Differenz für die an die mittleren Sonnenörter gekoppelten Jupiterörter als Sollwerte zu nehmen. Kepler hat diese Aufgabe durch systematisches Probieren gelöst und dafür 7 Schritte benötigt. Die Verbesserungen der Epoche L betragen + 18′ 30″ für motus medius und + 3° 38′ 30″ für das Aphel.

Werden die Rechnungen Keplers analog zu Abschnitt 1.332 über eine Ausgleichung nach der Methode der kleinsten Quadrate nachgeprüft, ergeben sich aus 4 Fehlergleichungen die zwei Normalgleichungen:

$$0.0056\,dA + 0.0427\,dM - 1.6512 = 0$$
$$0.0427\,dA + 3.9252\,dM - 22.3488 = 0.$$

Die Ergebnisse: $dM = +2'\,41''$, $dA = +4°\,36'\,6''$
unterscheiden sich erheblich von denen Keplers. Ihnen ist allerdings bei der Bestimmung von 2 Unbekannten aus nur 4 Fehlergleichungen die Bedeutung einer strengen Kontrolle nicht beizumessen.

[112] Ergebnisse G für 1589 compl. lauten:

motus medius in 6.43.47 ♎ Aphel in 6.32.36 ♎.

Hinzu kommt die Differenzbewegung von 11ᵃ, wobei für das Aphel die Präzessionsbewegung der RT genommen wird und bei motus medius zu beachten ist, daß zu den 11ᵃ noch ein Schalttag zu addieren ist.

	motus medius	Aphel
1589 compl.	6.43.47 ♎	6.32.36 ♎
11ᵃ	333.55.53	9.20
1ᵈ	4.59	
1600 compl.	10.44.39 ♍	6.41.56 ♎.

[113] Damit stimmen Anmerkungen 81 und 82 überein.

Es war:	Spica 241 v. Chr.	in	22.11 ♍
	Distanz Spica–Asellus		75. 8
	Asellus 241 v. Chr.	in	7. 3 ♋.

[114] Ein anomalistischer Monat ist die Zeit, die der Mond zu einem Umlauf bezüglich des Apogäums benötigt. Er beträgt nach den RT $27^d\ 13^h\ 18^{min}\ 35^{sec}$.

[115] Die monatlichen Gleichungen werden in den Syzygien zu Null; denn es ist vorausgesetzt worden, daß es sich um die Berechnung des Neumondortes handle.

[116] Diese Aphellage wird nicht weiter nachgewiesen. Sie ist gegen Ansatz V um 4′ verbessert. Nach den zuletzt erhaltenen Ergebnissen M wäre die Korrektur, da Kepler von 1589 ausgegangen ist (vgl. Anmerkung 112), ca. 8′.

[117] ∢ οπρ, der Winkel, der von den Sichtstrahlen des Beobachters zu ☉ und ♃ gebildet wird, heißt hier „angulus visionis".

[118] Kepler rechnet logarithmisch nach dem Sinus-Satz.

[119] In der Wiederholung wird r = 5.25900, die Prosthaphaeresis orbis ergibt sich zu 9° 29 ½′.

[120] Die Rechnung wird wie vorher ausgeführt. Kepler erhält:

	1. Rechnung	1. Iteration	2. Iteration
∢ προ	9° 23′ 30″	10° 50′	10° 54′ 14″
∢ ξορ	69. 40. 0	71. 6	71. 11. 2
Richtung ορ	27. 40 ♊	26. 14 ♊	26. 9 ♊
∢ νορ	68. 2	69. 28	69. 34 .

[121] Nach Ergebnis G von Abschnitt 1.42 ist:

1589 compl.	Aphel in	6.32.36 ♎
Präzession für 18ª		15.18
Präzession für 7 Monate		30
Ende Juli 1608 Aphel	in	6.48.24 ♎.

[122] Nach Beobachtungsangaben – südlicher Esel und Jupiter decken sich – beträgt die Breite von Jupiter — 30′, nach dem Fixsternkatalog die von Asellus — 4′. In der Rechnung nimmt Kepler den Abstand Knoten-Aphel zu 90° an. Kepler hat hier und in der noch folgenden Diskussion der Breite den richtigen Ansatz von der Veränderlichkeit der Schiefe der Ekliptik und damit der Breite (vgl. RT, Teil 4).

[123] Kepler hat sich um 1° verrechnet. Der Wert kommt über die leicht veränderte mittlere Bewegung für 1560 compl. des Abschnittes 1.622, IV zustande:

	motus medius
1560 compl.	26.13.22 ♈
Bewegung in 160ᵈ 8ʰ	13.26.20
1560 23. Juli 16ʰ	12.47. 2
gegen Kepler	13.47. 2.

[124] Diese mittlere Bewegung ergibt sich für den Zeitpunkt der Beobachtung, für den 3. September. Für den 23. Juli kommen 3 ½° weniger heraus.

[125] Dieser Wert geht von der mittleren Bewegung für 1607 aus.

1600	in	5ˢ 10° 44′ 38″
7ª		7. 2. 28. 45
1607		0. 13. 13. 23.
Kepler schreibt		0. 13. 16. 37, verbessert aber in
einem Nachtrag auf		0. 13. 13. 19.

[126] In den RT, Tafel 54, gibt Kepler für motus medius und Aphel Richtungen an, die sich um etliche Grad von den Solstitien unterscheiden, mit der Anmerkung, wie, wenn sie doch zu diesen Punkten hin tendieren: „quid si 0.0.0 ♑ 0.0.0 ♋."

[127] Die endgültige Bestimmung der Knotenlinie, Epocha Nodi, hier in Abschnitt 1.52 bereits wiedergegeben, erfolgt nach den Handschriften erst im Anschluß an die Ableitung der Jupiter-Epochen.

[128] Diese Angaben sind als zusammenfassende Bemerkungen Keplers über die vorausgegangenen Untersuchungen des Jupiter-Ortes zu verstehen.

[129] Die Wiederholung der Berechnung der Sonnenörter ist notwendig geworden, weil sich die Werte der erwähnten Tafel geändert haben, ohne daß die endgültigen Zahlen der RT bereits erreicht sind. Die Abweichungen sind allerdings sehr klein.

[130] Wir wissen heute, daß diese Vermutung richtig gewesen ist. In der Tat läßt die Exzentrizität zur Zeit von Prolemäus die Differenzen der mittleren Bewegungen in I_1 und I_2 zu den Sollwerten kleiner werden. Nach Tuckerman ist:

$$e = e_{1900} + de \cdot \Delta T + \ldots$$
$$e = 0.048\,3348 + 0.000\,1642 \text{ pro Jahrhundert}$$
$$e_{140} = 0.048\,3348 - 0.000\,1642 \times 17.6$$
$$e_{140} = 0.045\,445.$$

Die Umrechnung von v in M erfolgt in 2 Schritten über die exzentrische Anomalie nach:

$$\tan \frac{E}{2} = \tan \frac{v}{2} \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}$$
$$M = E + e \sin E\,.$$

Bei gleichem Aphel wie vorher ergibt sich:

	(a)	(b)	(c)
M	80.41	180	146.36
	$I_1 = 99.19$		$I_2 = 33.24$
	gegen 100. 6.54		33.24.40.

Offensichtlich genügt die Korrektur von e allein noch nicht.

[131] Mit dieser Bemerkung (commensuratio orbium hodierna) läßt Kepler erneut durchblicken, daß er an eine zeitabhängige Änderung der Bahngestalt gedacht hat. Die Mittel, um näheres über die Änderung zu sagen oder sie gar in Rechnung zu stellen, standen ihm allerdings noch nicht zur Verfügung.

[132] Die Uhrzeit bei (d) hat Kepler hier um 3 Minuten geändert.

[133] Das Aphel für (c) berechnet sich nach den einzelnen Korrekturen A bis D.

Ausgangsaphel	8.46 ♍
A	+ 4
B	+ 6
C	— 38
D	— 19
neues Aphel	17.49 ♍.

[134] Hier ist – analog zu früheren Rechnungen – über die Tagbewegung der Sonne und des Jupiter die Konjunktion berechnet worden, die für die heliozentrische Darstellung der Jupiter-Bewegung ebenfalls in Frage kommt. Das ist die einzige Konjunktion, die Kepler für die Berechnung der Jupiter-Tafeln bestimmt und verwendet.

[135] In der Handschrift steht (13,371): „Idem mihi 16.48". Dieser Wert ist nirgendwo berechnet worden. Die Bemerkung Keplers könnte sich auf die Eingangsüberlegung von Abschnitt 1.623 beziehen, wonach die neu berechneten Jupiter-Örter entsprechend vorausgegangener Überlegungen den beobachteten Jupiter-Örtern um 62′ bis 64′ voraus sein sollten.

[136] Die Differenzbewegung wird nach den PT bestimmt:

mittlere Bewegung für 174^d / 366^d	$1^s\ 14^\circ\ 53'\ 22''$
Präzession	1. 50
mittlere Bewegung bis 140 compl.	1. 14. 55. 12.

[137] Diese Epoche, die zuerst in Abschnitt 1.623 auftaucht, hat Kepler 1616 bestimmt und unmittelbar aus den Ergebnissen G von Abschnitt 1.42 abgeleitet (vgl. auch Anmerkung 112).

[138] Mit diesem Wert korrigiert Kepler seine Fehler bei der Berechnung des Aphels in den Ergebnissen G von Abschnitt 1.42. Das jetzt verwendete Aphel ist direkt aus den Ergebnissen F von Abschnitt 1.331 abgeleitet (vgl. Anmerkungen 32 und 112).

[139] In der Berechnung der Aphelbewegung für einzelne Jahre geht Kepler von der Bewegung für 1460^a aus und wandelt vor der Division Grad in Minuten sowie Minuten in Sekunden um. Infolge einer korrigierten Zahl, die er nicht mehr genau entziffern kann, macht er einen Rechenfehler. Er erhält aus der Division

für 1^a	47″. 1822	
anstelle von	46. 9082.	Dieser Fehler macht aber
für 1000^a	erst 4′ aus.	

[140] Richtiger Wert: 9.58.32.

[141] Die Uhrzeit ist hier mit $0^h\ 33^{min}$ angenommen worden.

[142] Auf Bl. 372r heißt es: „De reliquis tribus Ptolemaei observationibus nota primum ista, quod author profiteatur sumptas esse per Astrolabium, deinde dignum est hoc consideratione, quod cum observatio, quae non contingit omnibus momentis, omnino reduci debeat ad articulum oppositiones mediae ♃ cum Sole, qui articulus suam habet libertatem per totum tempus νυχτήμερος: articuli tamen, quos prodidit Ptolemaeus, omnes tres cadunt in noctem horis ad observandum opportunissimus: ut dubites, an Ptolemaeus aliqua reductione sit usus. Nam ex hujus neglectu reductionis illud existere potuit, quod Tertio, commensuratio hodierna Orbium intra 20 minuta nullatenus exprimere potest hos tres articulos temporis. Quarto tenemus Astrolabium Ptolemaei convictum erroris excessusque in loco Lunae in quarta observatione, ad quantitatem gradus et amplius. Quid si etiam his tribus vicibus eodem erroneo Astrolabio observaverit Jovem ab antecedenti rursum stella, promovens sic Jovem nimio."

[143] Kepler rechnet logarithmisch nach dem Sinus-Satz. Dabei macht er sich die Definition seiner Logarithmen zunutze, nach der $\mathrm{Log}\,\alpha = \ln \operatorname{cosec} \alpha$ ist.

In erster Näherung wird im Dreieck Sonne (S), Erde (T) und Planet (P) $\sphericalangle$ S = S = Kommutation $\sphericalangle$ T = T gleichgesetzt und $\sphericalangle$ P = P aus der Summe der Logarithmen gefunden. Ein verbessertes T ergibt sich aus S — T. Kepler erhält in den einzelnen Iterationen:

$$
\begin{aligned}
S &= 69^\circ\ 12'\ 25'' \\
T_1 &= S \\
P_1 &= 10^\circ \text{ gesetzt} \\
T_2 &= 59.12.25 \\
P_2 &= 9.24 \\
T_3 &= 59.48.25 \\
P_3 &= 9.27.30 \\
T_4 &= 59.45 \\
P_4 &= 9.27.35 \text{ Prosthaphaeresis orbis} \\
\text{locus visus in} &\quad 7.35.32\ ♋.
\end{aligned}
$$

Wird nach dem Tangentensatz gerechnet, ergibt sich

$$P = 9.27.\ 0.$$

Kepler konnte bei logarithmischer Rechnung die Tangens-Funktion nicht verwenden.

[144] Die Örter betragen dann:

	(a)	(b)	(c)
locus visus	23. 2 ♏	7.44 ♓	14.28 ♈.

[145] Wie aus den vorausgegangenen Rechnungen ersichtlich ist, sind die Epochen des Jupiter in der Tat ohne die Beobachtungen von Regiomontan und Walther bestimmt worden. Eine Angabe von Albategnius über das Jupiter-Apogäum (Abschnitt 1.621) ist frühzeitig verworfen worden.

[146] Es ist: ♉ ♃ in 5. 0 ♑

Argument der Breite		32°
daraus	B♃ =	44′ 6″.
Ferner	B♂ =	33. 20
	ΔB =	10. 46
vorher	ΔL =	24. 13.

Damit ergibt sich für den Abstand d nach $\cos d = \cos \Delta L \cdot \cos \Delta B$:

	d =	28′ 40″
Kepler erhielt		28′ 15″.

2. DIE JUPITERBEOBACHTUNGEN UND IHRE GENAUIGKEIT

2.1 VORBEMERKUNGEN

Aus dem Studium des handschriftlichen Nachlasses, der Vorarbeiten Keplers zu den Rudolphinischen Tafeln enthält, wird der für die Aufstellung alter astronomischer Tafeln so wesentliche Zusammenhang zwischen Beobachtungen, Rechnungen und Tafelwerten erkennbar. Es zeigt sich, daß zur Zeit Keplers, in der die Himmelsmechanik gerade erst in den Anfängen steckt, den Beobachtungen grundlegende Bedeutung zukommt: aus der Fülle vorhandener Planetenörter werden bestimmte, für die Ableitung der Bahnelemente besonders zweckmäßige Örter gewählt, die ebenso die Genauigkeitsansprüche des rechnenden Astronomen erfüllen müssen. Die große Genauigkeit neuer Beobachtungen erst konnte Kepler die Frage nach der wahren Form der Planetenbahnen beantworten lassen. Für die Zuverlässigkeit von Planetentafeln ist die Genauigkeit der verwendeten Planetenörter mit maßgebend – zumindest innerhalb des Zeitraumes, für den vernachlässigte Störglieder der Elemente noch nicht deutlich ins Gewicht fallen.

Direkte Hinweise auf die Genauigkeit sind aus den Beobachtungsprotokollen und Zusammenstellungen der Planetenörter nicht ersichtlich. Das benutzte Instrumentarium, Angaben über Beobachter und Wetter, kurz: die Bedingungen der Beobachtung, geben nur grobe Anhaltspunkte für die Beobachtungsgüte.

Eine direkte Prüfung der Genauigkeit wird erst dann möglich, wenn dem Wert aus der Beobachtung, dem Ist-Wert, ein Vergleichswert gegenübergestellt werden kann, der entweder fehlerfrei ist und dann als Soll-Wert zu behandeln ist, oder dessen Fehler zumindest bekannt ist. Erst wenn es gelingt, Vergleichszahlen für die Ist-Werte zu erhalten, wird die gestellte Aufgabe zu lösen sein. Das die Ist-Werte charakterisierende Genauigkeitsmaß kann auf drei verschiedenen Wegen gewonnen werden:

1. Die Messungen werden zu anderer Zeit unter günstigeren Bedingungen, etwa mit verbessertem Instrumentarium, wiederholt. Die Differenzen beider Meßreihen geben einen direkten Anhalt für die Genauigkeit der ursprünglichen Beobachtungen.

Dieser Weg wird gerne dann beschritten, wenn sich die Situation, die durch die Messung beschrieben werden soll, wiederherstellen läßt, z. B. die trigonometrischen Punkte für die Winkelmessung in einer Landesvermessung. Hier werden die alten Stand- und Zielpunkte wiederverwendet.

2. Sind die Funktionen der Elemente bekannt, über die sich die Beobachtungen darstellen lassen, so kann für jede Messung eine Gleichung geschrieben und ein aus ihr resultierender theoretischer Wert dem gemessenen Wert gegenübergestellt werden. Die Abweichungen können nach dem Prinzip der kleinsten Fehlerquadrate ausgeglichen werden. Daraus ergeben sich Verbesserungen der Näherungswerte der Elemente, als auch ihre Genauigkeitsmaße und die der Beobachtungen. In Nova Kepleriana 2 ist dieser Weg für das Elementsystem der Saturnbahn eingeschlagen worden.

3. Der einfachste Fall besteht dann, wenn Vergleichswerte vorliegen mit einer Genauigkeit, die deutlich höher ist als die Genauigkeit der Messungen. Unter dieser Voraussetzung kann von „wahren" Werten gesprochen werden. Der Vergleich mit den Ist-Werten

führt zu „wahren" Fehlern, aus denen sich als Genauigkeitsmaße der mittlere und der durchschnittliche Fehler ableiten lassen.

Neuere Planetentafeln dürften der gestellten Voraussetzung am ehesten genügen.

Bei einer Diskussion der verschiedenen Möglichkeiten, die Genauigkeit von Planetenbeobachtungen zu bestimmen, scheidet Weg 1 sofort aus. Die Koordinaten eines Planetenortes stellen im Sinne statistischer Betrachtungen ein Ereignis dar, dessen Wiederholung sich zeitlich nicht fixieren läßt.

Die Entscheidung, ob Weg 2 oder 3 einzuschlagen ist, wird einmal von Beobachtungen und den abgeleiteten Bahnelementen, zum anderen von vorhandenen Planetentafeln abhängen.

Die hier vorliegenden Jupiterbeobachtungen sind zumeist geozentrische Örter und einige Oppositionen. Eine den Saturnoppositionen in Bedeutung für die Bahnelemente und Umfang vergleichbare Synopsis von Jupiteroppositionen existiert nicht. Damit wäre die Ableitung eines Genauigkeitsmaßes nach Verfahren 2 über eine Ausgleichung nicht nur mühsam, sondern auch wenig sinnvoll.

Für Weg 3 bieten sich zwei Tafeln an: „Tafeln zur astronomischen Chronologie" von Paul V. Neugebauer und „Planetary, Lunar, and Solar Positions" von B. Tuckerman. Bei einem Vergleich zwischen beiden Tafelwerken haben sich die Tafeln von Tuckerman als geeigneter erwiesen. Einmal berücksichtigen sie Störterme höherer Ordnung, zum anderen ist ihre Benutzung einfacher.

Insgesamt sind 40 Beobachtungen zu überprüfen, wobei Beobachtung 1 des Jahres 241 v. Chr. aus dem hier betrachteten Zeitraum herausfällt. Um in Anbetracht der Grundsätzlichkeit der anzustellenden Untersuchung zu fundierten Ergebnissen über die Beobachtungsgenauigkeit zu kommen, sollen weitere Jupiterbeobachtungen hinzugenommen werden. So ist es nicht nur möglich, verschiedene Beobachter miteinander zu vergleichen, sondern es wird auch zu diskutieren sein, wie sich – bei hinreichend großer Zahl von Beobachtungen – die Beobachtungsgenauigkeit eines Astronomen im Laufe der Zeit ändert.

Als Koordinatensystem wird durchweg das Ekliptiksystem mit geozentrischen Längen und Breiten verwendet. Eine Korrektur wegen Parallaxe wird nicht angebracht, sie liegt weit unterhalb der Ablesegenauigkeit.

Für die Bestimmung der Bahnelemente haben die Längen ungleich größere Bedeutung als die Breiten, die lediglich für die Ableitung von Knotenlage und Bahnneigung erforderlich sind. Im folgenden soll daher nur die Genauigkeit der beobachteten Längen diskutiert werden, unter der i. a. die Beobachtungsgenauigkeit – auch von Kepler – verstanden wird. Diese Diskussion wird zunächst aus einem sinnvollen Vergleich von Tafelwerten mit Beobachtungen bestehen und dann fehlertheoretische Gesichtspunkte berücksichtigen.

2.2 ABLEITUNG EINES GENAUIGKEITSMASSES

Die Beobachtungen werden mit den Planetentafeln von Tuckerman verglichen. Ehe auf die Beobachtungen näher eingegangen und ein geeignetes Verfahren bestimmt wird, diesen Vergleich zu ermöglichen, sollen die Tafeln selbst erläutert werden. Besondere Aufmerksamkeit wird dabei der Tafelgenauigkeit zukommen.

2.21 DIE PLANETENTAFELN VON B. TUCKERMAN

Der Amerikaner Bryant Tuckerman hat in Zusammenarbeit mit A. Sachs, H. H. Goldstine und O. Neugebauer am Institute for Advanced Study in Princeton und am For-

schungszentrum der Firma IBM Planetentafeln berechnet, die in zwei Bänden der Amerikanischen Philosophischen Gesellschaft 1962 und 1964 in Philadelphia erschienen sind. Der erste Band enthält Planeten-, Mond- und Sonnenpositionen für die Jahre 601 v. Chr. bis 1 n. Chr., der zweite Band entsprechende Örter für die Jahre 2 bis 1649. Die Rechnungen wurden auf elektronischen Rechenanlagen durchgeführt. Für die Berechnung des ersten Bandes wurden 40 Stunden Rechenzeit auf dem Computer IBM 704 benötigt. Der zweite Band wurde an der IBM 7094 mit der neunfachen Geschwindigkeit gerechnet. Die Rechenzeit betrug 12 Stunden. Programmiersprache war FORTRAN.

Die Tafeln enthalten im Abstand von 10 zu 10 Tagen die geozentrischen Örter von Saturn, Jupiter, Mars und Sonne, im Abstand von 5 zu 5 Tagen die Örter von Mond, Venus und Merkur. Die Zeit ist 16^h Weltzeit.

Dem ersten Band sind die „Tafeln der Astronomischen Chronologie" (1914) von P. V. Neugebauer und die von Neugebauer benutzten Elemente nach Leverrier, Gaillot und Hansen zugrunde gelegt worden. Hinzu kommen verbesserte Elemente aus der Ausgabe der „Chronologie" von 1929, die modifizierte Werte von Schoch benutzt.

Im zweiten Band, der hier besonders interessiert, sind zuvor unterdrückte Störungsterme von Jupiter, Saturn und Uranus mitberücksichtigt worden. Ohne diese Störungsterme ergeben sich als Restfehler:

für ♃ $0°.0121 + 0°.0216 \cdot t/1000$
für ♄ $0°.0842 + 0°.1148 \cdot t/1000$.

Hierin ist t das Jahr n. Chr. Die Fehler sind zeitabhängig und erreichen für den zuletzt tabulierten Wert Jahresende 1649 n. Chr. den Maximalwert. Bei Berücksichtigung der Terme fallen die zeitabhängigen Glieder heraus. Die Fehler sind konstant und sind gleich den zuvor möglichen Minimalwerten.

So verringern sich die Restfehler für das Jahr 1650

beim ♃ von $0°.0477$ auf $0°.0121$
beim ♄ von $0°.2736$ auf $0°.0842$.

Die Genauigkeit der Tafelwerte beträgt also für den Jupiter 44″, für den Saturn 5′ 3″. Damit ist die eingangs formulierte Bedingung: Tafelgenauigkeit größer als Beobachtungsgenauigkeit für den Jupiter erfüllt, für den Saturn nur soweit, als Beobachtungen geringerer Genauigkeit betrachtet werden. Die Werte sind auf hundertstel Grad genau angegeben, so daß ungünstigenfalls noch ein Rundungsfehler von

$0°.005 = 18''$ hinzukommt.

Diese für die Untersuchung der Jupiterbeobachtungen ausreichende Tafelgenauigkeit darf nun bei der Interpolation von Zwischenwerten nicht verschlechtert werden. Daher scheidet die lineare Interpolation aus. Als geeignetes Verfahren hat sich eine Interpolation erwiesen, die sich schon bei Laplace findet und als Everettsche Formel wieder bekannt geworden ist. Sie sei hier in Anlehnung an R. Zurmühl* Formel von Everett-Laplace genannt. Tuckerman hat sie als Everettsche Formel zweiter Ordnung, in der also noch zweite Differenzen von Tafelwerten gebildet werden, für die Interpolation von Jupiterwerten verwendet und die erwünschte Genauigkeit erreicht, während bei linearer Interpolation ein maximaler Fehler von 3′ 36″ auftreten kann.

---

* R. Zurmühl: Praktische Mathematik für Ingenieure und Physiker. 5. Aufl. 1965. S. 225.

Die Formel von Everett-Laplace lautet in der Schreibweise von Zurmühl:

$$y(t) = sy_0 + \binom{s+1}{3} \hat{\delta}^2 y_0 + ty_1 + \binom{t+1}{3} \hat{\delta}^2 y_1 .$$

Der gesuchte Funktionswert y liegt zwischen den Werten y_0, y_1. Anstelle der Stützstellen x_i, die um Δx auseinanderliegen, wird zur Vereinfachung die Veränderliche t eingeführt derart, daß

$$t_{i+1} - t_i = \Delta t = 1$$

wird und die erste Stützstelle mit $t = 0$ zusammenfällt. Die Größe s ist die Komplementveränderliche mit

$$s = 1 - t .$$

Die Größen $\hat{\delta}^2 y$ sind die modifizierten zweiten Differenzen:

$$\hat{\delta}^2 y = \delta^2 y - 0.184\, \delta^4 y;$$

sie stimmen für die hier anstehenden Rechnungen mit den gewöhnlichen zweiten Differenzen genau genug überein, so daß sich für die Interpolation die Gebrauchsformel ergibt:

$$y(t) = sy_0 + \binom{s+1}{3} \delta^2 y_0 + ty_1 + \binom{t+1}{3} \delta^2 y_1 .$$

Für einen gesuchten Wert y werden also 4 Tafelwerte y_i an 4 Stützstellen x_i bzw. t_i genommen:

x_i	t_i	y_i
x_{-1}	0	y_{-1}
x_0	1	y_0
x_1	2	y_1
x_2	3	y_2

Die zweiten Differenzen berechnen sich über die ersten Differenzen:

$$\delta^2 y_0 = y_1 - 2y_0 + y_{-1}$$
$$\delta^2 y_1 = y_2 - 2y_1 + y_0 .$$

Damit läßt sich die Gebrauchsformel umschreiben:

$$y(t) = sy_0 + \frac{s^3 - s}{6}(y_1 + y_{-1} - 2y_0) + ty_1 + \frac{t^3 - t}{6}(y_2 + y_0 - 2y_1) .$$

Es sei ein Beispiel angegeben.

Der Tafel werden entnommen:

t	y
0	2.60
1	3.22
2	3.54
3	3.55

gesucht ist der Funktionswert für $t = 1.2$.

Bei linearer Interpolation erhält man:

$$y = 3.22 + 0.2 \cdot 0.32 = 3.28.$$

Bei Interpolation nach Everett-Laplace:

$$y(1.2) = 0.8 \cdot 3.22 + 0.288 \cdot 030 + 0.2 \cdot 3.54 + 0.032 \cdot 031$$
$$y = 3.38.$$

Bei der Rechnung wird praktisch so vorgegangen: das Beobachtungsdatum x (alter Stil) bestimmt in den Planetentafeln von Tuckerman ein nächst kleineres Datum x_0, für das der Planetenort y_0 sowie die für die Interpolation benötigten Anschlußörter y_{-1}, y_1, y_2 herausgeschrieben werden. Astronomische Zeit wird in bürgerliche Zeit (Ortszeit) und dann in Weltzeit umgewandelt. Zur Stützstelle x_0 wird die Differenz (in Tagen und Stunden) gebildet und daraus t bestimmt:

$$t = 0.1 \left\{ (x - x_0)^d + \frac{(x - x_0)^h}{24} \right\}.$$

Damit sind alle benötigten Ausgangswerte bekannt, und der gesuchte Planetenort kann nach der Interpolationsformel berechnet werden.

Bei der Vielzahl der vorliegenden Beobachtungen ist es zweckmäßig, die Interpolationsrechnungen an einem Computer ausführen zu lassen. Es wurde die TR 4 am Leibniz-Rechenzentrum München benutzt. Das Programm, das nachfolgend wiedergegeben wird, ist in der Programmiersprache ALGOL 60 geschrieben.

```
'BEGIN'
'INTEGER' I,J,K.,
'REAL' T,S,MT,MS,P,P1,P2,P3,P4.,
READ (I).,
'BEGIN'
'ARRAY' Y(/1..I,1..4/).,
'INTEGER' 'ARRAY' A,B,C(/1..I/).,
OUTPUT(1,'('*,/,/,'('PLANETENOERTER NACH TUCKERMAN')',/,/,
'('INTERPOLATION NACH EVERETT-LAPLACE')',/')').,
'FOR' J.=1 'STEP' 1 'UNTIL' I 'DO'
'BEGIN'
READ (A(/J/),B(/J/),C(/J/)).,
'FOR' K.=1 'STEP' 1 'UNTIL' 4 'DO'
READ (Y(/J,K/)).,
'END'.,
'FOR' J.=1 'STEP' 1 'UNTIL' I 'DO'
'BEGIN'
T.=0.1 * (A(/J/) + B(/J/)/24 + C(/J/)/(60*24)).,
S.=1-T.,
MT.=(T*T*T -T)/6.,
MS.=(S*S*S - S)/6.,
P.=S*Y(/J,2/) + MS*(Y(/J,3/)-2*Y(/J,2/) + Y(/J,1/))
+ T*Y(/J,3/) + MT*(Y(/J,4/) - 2*Y(/J,3/) + Y(/J,2/)).,
'IF' P 'GREATER' 360 'THEN'
P.=P - 360.,
P1.=ENTIER(P).,
P2.=60*(P-P1).,
P3.=ENTIER(P2).,
P4.=60*(P2-P3).,
OUTPUT(1,'('/,7B2ZD,3B2ZD,BZD,BZD')',J,P1,P3,P4).,
'END'.,
'END'.,
'END'.,
```

Programm für Interpolation nach Everett-Laplace

Es können beliebig viele Örter bestimmt werden, wenn die Anzahl I zuvor eingegeben wird. Weitere Eingangswerte sind die Zeitdifferenz zu x_0 in Tagen (A), Stunden (B) und Minuten (C) sowie die für jeden Durchgang J benötigten Funktionswerte, hier Y [J, 1], Y [J, 2], Y [J, 3], Y [J, 4] genannt.

Ausgedruckt werden die laufende Nummer des Planetenortes (J) und der interpolierte Ort in Grad, Minuten, Sekunden. Auf weitere Einzelheiten der Rechnung wird in Abschnitt 2.23 eingegangen.

2.22 DIE BEOBACHTUNGEN

In den Jupiter-Handschriften von Kepler lassen sich 41 Beobachtungen nachweisen, die er teils für die Ableitung der Bahnelemente, teils zur Kontrolle der aus den Elementen berechneten Planetenörter benutzt hat. Hinzu kommen einige ältere Angaben über Lage von Knoten- und Apsidenlinie, die aus Teil 1 zu ersehen sind und hier nicht wieder angeführt werden. Die Beobachtungen sind in Übersicht 1 zusammengestellt.

Sie lassen sich der Zeit und damit der Genauigkeit nach in 3 Gruppen gliedern.

1. Gruppe: Hierher gehören die Beobachtungen, die um die Zeitwende angestellt wurden (Nr. 1–6). Die Dionysische Beobachtung wurde bereits in Abschnitt 1.622 erläutert. Die ptolemäischen Beobachtungen der Jahre 133 bis 139 sind 3 mittlere Oppositionen und ein geozentrischer Ort. Alle Beobachtungen sind zur Bestimmung der Jupiterepoche verwendet worden.

Daneben wird noch auf eine Beobachtung zurückgegriffen, die von Aristoteles im Jahr 341 v. Chr. gemacht wurde. Sie benötigt Kepler für die Diskussion der Knotenbewegung (Abschnitt 1.631), um von hier aus Rückschlüsse auf die Breite der Dionysischen Beobachtung zu ziehen.

Übersicht 1

Nr.	Datum (alter Stil) Jahr	Monat	Tag	Uhrzeit	Beobachter	Nachweis der Beobachtung
1	341 v.				Aristoteles	Meteorologica, S. 12, 28f.
2	241 v.	Sept.	4		Dionys. Beob.	Almagest, S. 386f.
3	133 n.	Mai	17	9.15	Ptolemäus	Almagest, S. 360
4	136	August	31	8.15	Ptolemäus	Almagest, S. 360
5	137	Oktob.	7	15.15	Ptolemäus	Almagest, S. 360
6	139	Juli	10	15.15	Ptolemäus	Almagest, S. 382
7	1462	März	21	früh	Regiomontan	Regiomontan, Bl. 40ᵛf.
8	1468	April	26	7.15	Regiomontan	Regiomontan, Bl. 42f.
9	1471	März	15		Regiomontan	Regiomontan, Bl. 42ᵛ
10	1478	Febr.	21	5	Walther	Regiomontan, Bl. 47ᵛ
11	1478	August	22	3 früh	Walther	Regiomontan, Bl. 48ᵛ
12	1478	Sept.	30	3 früh	Walther	Regiomontan, Bl. 48ᵛ
13	1484	Novem.	21	früh	Walther	Regiomontan, Bl. 49ᵛ
14	1488	Januar	16	5.30	Walther	Regiomontan, Bl. 52
15	1488	Oktob.	8		Walther	Regiomontan, Bl. 52
16	1488	Dezem.	9		Walther	Regiomontan, Bl. 52
17	1497	Febr.	15	4 früh	Walther	Regiomontan, Bl. 55ᵛ

noch Übersicht 1

Nr.	Datum (alter Stil) Jahr	Monat	Tag	Uhrzeit	Beobachter	Nachweis der Beobachtung
18	1503	Sept.	8	4 früh	Walther	Regiomontan, Bl. 56
19	1503	Oktob.	6	6.45	Walther	Regiomontan, Bl. 56f.
20	1504	Januar	19	früh	Walther	Regiomontan, Bl. 58
21	1504	Febr.	9	früh	Walther	Regiomontan, Bl. 59
22	1504	Mai	24		Walther	Regiomontan, Bl. 60v
23	1581	Novem.	22	21.30	Tycho Brahe	Brahe, Bd. 10, S. 105
24	1581	Dezem.	16	4.43	Tycho Brahe	Brahe, Bd. 10, S. 105f.
25	1583	Sept.	6	19.34	Tycho Brahe	Brahe, Bd. 10, S.255f.u.263
26	1586	Sept.	23	5 früh	Tycho Brahe	Brahe, Bd. 11, S. 54
27	1586	Dezem.	21	14.28	Tycho Brahe	Brahe, Bd. 11, S. 59 u. 61f.
28	1587	März	10	8.22	Tycho Brahe	Brahe, Bd. 11, S. 176
29	1590	Januar	24	4.26	Tycho Brahe	Brahe, Bd. 12, S. 39
30	1590	März	23	10.48	Tycho Brahe	Brahe, Bd. 12, S. 40f.
31	1590	Juli	11	10	Tycho Brahe	Brahe, Bd. 12, S. 41
32	1593	März	17	5 früh	Tycho Brahe	Brahe, Bd. 12, S. 276
33	1593	Juni	29	12	Tycho Brahe	Brahe, Bd. 12, S. 280
34	1593	Oktob.	3	6.45	Tycho Brahe	Brahe, Bd. 12, S. 281
35	1594	Dezem.	10	5.40	Tycho Brahe	Brahe, Bd. 12, S. 342f.
36	1595	Sept.	16	5.51	Tycho Brahe	Brahe, Bd. 12, S. 430ff.
37	1595	Dezem.	6	6	Tycho Brahe	Brahe, Bd. 12, S. 438f.
38	1598	Dezem.	26	3.02	Fabricius	Brahe, Bd. 13, S. 157f.
39	1602	März	27	18.19	Fabricius	Kepler-Briefe, S. 155
40	1605	Juli	4	13.48	Fabricius	Kepler-Briefe, S. 285
41	1624	Febr.	13		Kepler	Kepler-Mss., Bd. 13, Bl. 376

Übersicht 1: Zusammenstellung der von Kepler verwendeten Jupiter-Beobachtungen

Die in Spalte 7 aufgeführten Abkürzungen bedeuten ausführlich:

Meteorologica – Aristoteles: Meterologica; ed. J. Becker. Berlin 1829.

Almagest – Ptolemäus: Almagest; ed. I. L. Heiberg, Bd. II. Bibliotheca Teubneriana 1903.

Regiomontan – Scripta clarissimi mathematici M. J. Regiomontani. Nürnberg 1544.

Brahe – Tychonis Brahe Opera Omnia; ed. I. L. E. Dreyer. Bd. X–XIII. Kopenhagen 1923–1926.

Kepler-Briefe – Kepler, J.: Briefe 1604–1607. Johannes Kepler Gesammelte Werke Bd. XV. München 1951.

Kepler-Mss. – Keplers Handschriften. Kepler-Mss. Pulkowo.

2. Gruppe: Sie umfaßt die Beobachtungen von Regiomontan und Walther (Nr. 7–22). Die Beobachtungen von Regiomontan bestehen aus Näherungsangaben der Distanzen zwischen Jupiter und benachbarten Fixsternen bzw. Planeten, aus Beschreibungen, wie die Sterne zueinander stehen und aus Höhenmessungen. Walthers Angaben zu seinen Beobachtungen (Nr. 10-22) sind z. T. ausführlicher. Am Anfang mißt er überwiegend Distanzen mit dem Jakobstab (bis 1488). Die Beobachtung von 1497 ist eine Schätzung: der Mars ist von Jupiter um den Monddurchmesser entfernt. Die Beobachtungen von 1503 und 1504 sind mit der Armille ausgeführt.

3. Gruppe: Die genauesten Beobachtungen sind um 1600 gemacht worden. Beobachter der 3. Gruppe sind Tycho Brahe, David Fabricius und Kepler selbst. Die Beobachtungen zwischen 1581 und 1595 sind von Tycho Brahe mit dem umfangreichen Instrumentarium auf Hven gemacht worden.

Im Prinzip haben Fabricius und Brahe zumeist das gleiche Verfahren angewandt: der gesuchte Planetenort wird durch Distanzmessungen zu bekannten Fixsternen bestimmt. Bei Brahe finden sich daneben weitere Messungen mit der Armille und dem Quadranten. Die Zeitangaben belaufen sich häufig auf volle Stunden bezüglich des Sonnenaufgangs oder Sonnenuntergangs. Diese Werte sind bei der vorhandenen Meßgenauigkeit durchaus ausreichend.

Den Gruppen 1 und 3 kommt wesentliche Bedeutung zu: sie sind zur Ableitung der Bahnelemente herangezogen, während die Beobachtungen von Gruppe 2 allein der Kontrolle dienten.

Eine Genauigkeitsuntersuchung der hier vorliegenden Beobachtungen hätte kaum zu fundierten Ergebnissen geführt. Indem sie Methoden der Wahrscheinlichkeitsrechnung anwendet, wird sie um so gründlicher ausfallen, je mehr Beobachtungen zur Verfügung stehen. Die Abweichung der Einzelbeobachtung vom tatsächlichen Wert zu wissen, ist besonders für die Beobachtungen der Gruppe 1 interessant. Sie sind ja zum großen Teil von Kepler verbessert worden. So wird ein Vergleich zwischen seinen Korrekturen und den wirklichen Abweichungen Rückschlüsse auf die Richtigkeit seiner Überlegungen erlauben.

Die beiden anderen Gruppen werden erweitert um Planetenörter, die ausgerechnet vorliegen oder sich ohne großen Aufwand berechnen lassen. Es werden jetzt untersucht:

4 Beobachtungen von Regiomontan
8 Beobachtungen von Walther
4 Beobachtungen von Kopernikus
6 Beobachtungen von Longomontan
107 Beobachtungen von Tycho Brahe
28 Beobachtungen von Fabricius.

Kopernikus bezieht die Längen auf den ersten Stern des Sternbildes Widder, um von der Präzession unabhängig zu sein. Es ist zu seinen Werten jeweils die Länge des Sternes für den betreffenden Zeitpunkt zu addieren. Der Wert für 1600 compl. beträgt nach dem Fixsternverzeichnis von Brahe 27° 37′. Longomontan hat in seiner „Astronomia Danica" ausgerechnete Oppositionen angegeben.

In der Aufstellung wurden die Beobachtungen weggelassen, die große Differenzen zu den Werten von Tuckerman zeigen und offenbar grobe Meßfehler enthalten. Die Beobachtungen sind in den nachfolgenden Übersichten wiedergegeben, und zwar enthalten:

Übersicht 2 die Beobachtungen von Regiomontan, Walther, Kopernikus und Longomontan

Übersicht 3 die Beobachtungen von Tycho Brahe
Übersicht 4 die Beobachtungen von Fabricius.

Jede Übersicht hat eine eigene Numerierung der Beobachtungen, auf die später zurückgegriffen wird.

Übersicht 2

Nr.	Datum (alter Stil) Jahr	Monat	Tag	Uhrzeit	Beobachter	Nachweis der Beobachtung
1	1462	März	20	11	Regiomontan	Regiomontan, Bl. 40v
2	1468	April	26	7.15	Regiomontan	Regiomontan, Bl. 42f.
3	1468	April	30	8	Regiomontan	Regiomontan, Bl. 42v
4	1471	März	15	8	Regiomontan	Regiomontan, Bl. 42v
5	1478	Febr.	21	5	Walther	Regiomontan, Bl. 47v
6	1478	August	22	3 früh	Walther	Regiomontan, Bl. 48v
7	1478	Sept.	30	3 früh	Walther	Regiomontan, Bl. 48v
8	1503	Sept.	8	4 früh	Walther	Regiomontan, Bl. 56
9	1503	Sept.	11	4 früh	Walther	Regiomontan, Bl. 56
10	1503	Sept.	28	4 früh	Walther	Regiomontan, Bl. 56v
11	1504	Januar	19	früh	Walther	Regiomontan, Bl. 58
12	1504	Febr.	9	früh	Walther	Regiomontan, Bl. 59
13	1520	Febr.	18	6	Kopernikus	Ges.-Ausg. Bd. II, S. 317
14	1520	April	30	11	Kopernikus	Ges.-Ausg. Bd. II, S. 311
15	1526	Novem.	28	3	Kopernikus	Ges.-Ausg. Bd. II, S. 312
16	1529	Febr.	1	19	Kopernikus	Ges.-Ausg. Bd. II, S. 312
17	1583	Sept.	6	20.10	Longomontan	Astr. Danica, S. 212
18	1591	April	23	19., 0	Longomontan	Astr. Danica, S. 212
19	1595	Sept.	12	6.10	Longomontan	Astr. Danica, S. 212
20	1607	Sept.	17	11.10	Longomontan	Astr. Danica, S. 212
21	1610	Dezem.	30	14.40	Longomontan	Astr. Danica, S. 212
22	1613	März	1	22. 0	Longomontan	Astr. Danica, S. 212

Übersicht 2: Zusammenstellung der Beobachtungen von Regiomontan, Walther, Kopernikus und Longomontan

Die in Spalte 7 aufgeführten Abkürzungen bedeuten ausführlich:

Regiomontan – Scripta clarissimi mathematici M. J. Regiomontani. Nürnberg 1544.

Ges.-Ausg. Bd. II – Nikolaus Kopernikus Gesamt-Ausgabe Bd. II; bs. von F. und K. Zeller. München 1949.

Astr. Danica – Ch. S. Longomontani Astronomia Danica. Amsterdam 1622.

Übersicht 3

Beobachtungen von Tycho Brahe

Nr.	Datum (alter Stil) Jahr	Monat	Tag	Uhrzeit	Nachweis der Beobachtung
1	1564	Mai	23	22	Dreyer, Bd. 10/S. 6
2	1574	April	24	21.30	10/41
3	1577	Mai	15	21.15	10/49
4	1577	Mai	17	22. 0	10/49
5	1578	März	16	0.37	10/59
6	1579	April	17	23.44	10/77
7	1582	Sept.	4	20.46	10/173
8	1582	Oktob.	25	18.40	10/173
9	1582	Novem.	2	20	10/174
10	1583	August	6	0. 0	10/254
11	1583	August	28	0. 0	10/254
12	1583	Sept.	5	0. 0	10/256
13	1583	Sept.	6	0. 0	10/257
14	1583	Sept.	10	0. 0	10/258
15	1584	Oktob.	13	21.30	10/323
16	1585	März	9	19.15	10/394f.
17	1585	Sept.	14	5. 0	10/403f.
18	1586	Januar	13	18.30	11/53
19	1586	Sept.	23	5	11/54
20	1586	Oktob.	10	1.40	11/55
21	1586	Oktob.	25	5.30	11/61
22	1586	Novem.	23	5.12	11/57f.
23	1586	Dezem.	15	5.30	11/61
24	1586	Dezem.	22	22	11/61
25	1586	Dezem.	26	21	11/62
26	1587	Januar	9	22.28	11/175
27	1587	Januar	14	20. 9	11/176
28	1587	Januar	15	18.12	11/176
29	1587	Januar	24	17.30	11/174
30	1587	März	10	20.22	11/176
31	1588	Febr.	28	21.53	11/272
32	1588	Oktob.	15	4.50	11/273
33	1589	Januar	30	1.23	11/329
34	1589	Febr.	21	0.36	11/329
35	1590	Januar	24	4.26	12/42
36	1590	März	15	22.16	12/43
37	1590	März	22	0.20	12/43
38	1590	März	25	21.50	12/43
39	1590	April	17	22.17	12/43
40	1591	April	14	23. 0	12/135
41	1591	April	20	2.22	12/135

noch Übersicht 3

Nr.	Datum (alter Stil) Jahr	Monat	Tag	Uhrzeit	Nachweis der Beobachtung
42	1591	April	22	23.52	Dreyer, Bd. 12/S. 136
43	1591	April	23	23.52	12/136
44	1591	April	24	23.41	12/136
45	1591	April	29	23.48	12/137
46	1591	April	30	23.16	12/137
47	1591	Juni	12	22.30	12/138
48	1592	Mai	17	0.45	12/215
49	1592	Mai	18	23.50	12/215
50	1592	Mai	22	23.45	12/216
51	1592	Mai	28	23.34	12/216
52	1592	Mai	31	23. 7	12/217
53	1593	März	17	5	12/276
54	1593	Juni	30	1	12/279
55	1593	Juli	2	23.30	12/279
56	1594	August	4	23.35	12/340
57	1594	August	5	23.45	12/340
58	1595	Sept.	7	0.30	12/433
59	1595	Sept.	10	0.15	12/432
60	1595	Sept.	30	19.30	12/434
61	1595	Oktob.	27	21	12/435
62	1595	Novem.	13	19.30	12/437
63	1595	Dezem.	6	18. 0	12/439
64	1595	Dezem.	14	17. 5	12/439
65	1596	Januar	16	17.43	13/33
66	1596	Januar	26	17.49	13/33
67	1596	Januar	29	17.48	13/33
68	1596	Febr.	23	18.25	13/34
69	1596	März	6	18.39	13/35
70	1596	Juli	25	2	13/36
71	1596	August	8	3.19	13/37
72	1596	Oktob.	1	23	13/37
73	1596	Oktob.	13	0	13/38
74	1596	Oktob.	22	23. 9	13/39
75	1596	Oktob.	24	23.25	13/40
76	1596	Oktob.	25	23.15	13/40
77	1596	Dezem.	5	19.50	13/41
78	1596	Dezem.	12	19.30	13/41
79	1596	Dezem.	20	18.40	13/41
80	1597	Januar	8	18	13/91
81	1597	März	15	20.13	13/95
82	1597	Oktob.	23	20.20	13/106
83	1597	Novem.	26	21.58	13/107
84	1597	Dezem.	5	19.15	13/108f.
85	1598	März	30	22	13/140

noch Übersicht 3

Nr.	Datum (alter Stil) Jahr	Monat	Tag	Uhrzeit	Nachweis der Beobachtung
86	1598	Dezem.	23	15.30	Dreyer, Bd. 13/S. 141
87	1598	Dezem.	31	1.30	13/141
88	1599	Januar	9	22	13/174
89	1599	Januar	10	22.30	13/175
90	1599	Januar	15	22.30	13/175
91	1599	Januar	23	22	13/175
92	1599	Januar	28	21.30	13/175
93	1599	Oktob.	11	22	13/177
94	1599	Oktob.	15	22	13/177
95	1599	Dezem.	22	nachts	13/213
96	1599	Dezem.	26	nachts	13/213
97	1600	März	5	20	13/216
98	1600	März	11	abends	13/216
99	1600	März	25	abends	13/217
100	1600	April	23	abends	13/218
101	1600	Dezem.	27	4.30	13/265
102	1601	Febr.	21	23.30	13/266
103	1601	Febr.	22	23.30	13/267
104	1601	März	10	20	13/267
105	1601	Mai	18	21.15	13/269
106	1601	Juli	3	21	13/269
107	1601	Juli	8	21	13/270

Übersicht 3: Beobachtungen von Tycho Brahe

Die Beobachtungen von Tycho Brahe finden sich in:

Tychonis Brahe Opera Omnia; ed. I. L. E. Dreyer. Bd. X–XIII. Kopenhagen 1923–1926.

Die Uhrzeiten sind mittlere Ortszeiten (bürgerliche Zeit).

Übersicht 4

Beobachtungen von Fabricius

Nr.	Datum (alter Stil) Jahr	Monat	Tag	Uhrzeit	Nachweis der Beobachtung
1	1598	Oktob.	2	früh	Dreyer, Bd. 13/S. 156
2	1598	Oktob.	6		13/156
3	1598	Dezem.	20	23.30	13/156
4	1598	Dezem.	28	24	13/156
5	1599	Febr.	15	20	13/192
6	1599	März	22	abends	13/192

noch Übersicht 4

Nr.	Datum (alter Stil) Jahr	Monat	Tag	Uhrzeit	Nachweis der Beobachtung
7	1599	Novem.	3	7	Dreyer, Bd. 13/S. 192
8	1600	Januar	12	24	13/243
9	1600	Januar	22	23	13/243
10	1600	März	25	20	13/243
11	1600	April	20	21	13/243
12	1600	Septem.	15	früh	13/244
13	1600	Novem.	23	6	13/244
14	1600	Dezem.	3		13/244
15	1601	Januar	21	früh	13/285
16	1601	März	3	19	13/285
17	1601	März	13	19	13/285
18	1601	April	21	21	13/285
19	1602	Febr.	16	5	KGW, Bd. XV/S. 151
20	1602	März	21	2	XV/155
21	1602	März	28	2	XV/155
22	1602	April	28	24	XV/154
23	1602	Mai	28	22	XV/155
24	1603	Januar	29	5	XIV/360
25	1604	Mai	27	21	XV/62
26	1605	Juli	2	22	XV/285
27	1608	Dezem.	19	abends	XVI/234
28	1609	Januar	4	19	XVI/234

Die in Spalte 6 aufgeführten Abkürzungen bedeuten ausführlich:

Dreyer – Tychonis Brahe Opera Omnia; ed. I. L. E. Dreyer. Bd. XIII. Kopenhagen 1926.

KGW – Johannes Kepler Gesammelte Werke. Bd. XIV–XVI. Briefe 1599–1611. Herausgegeben von Max Caspar. München 1949–1954.

Die Uhrzeiten sind mittlere Ortszeiten (bürgerliche Zeiten).

2.23 RECHNUNGEN UND ERGEBNISSE

2.231 Die Behandlung der Beobachtungen

Für den Vergleich der Beobachtungen mit den Werten der Planetentafeln von Tuckerman sind die Planetenörter aus den Beobachtungsdaten abzuleiten, soweit sie nicht direkt bestimmt sind oder berechnet vorliegen. Die alten Rechnungen sind hier nicht nachgeprüft worden. Es hat sich bereits früher bei der Diskussion von alten Saturnbeobachtungen gezeigt (Nova Kepleriana 2), daß derartige Rechnungen sorgfältig ausgeführt wurden. Grobe Rechenfehler werden durch den Vergleich ohnehin aufgedeckt und wie grobe Meßfehler behandelt: die Beobachtungen scheiden dann für die weitere Untersuchung aus.

Bei einigen Beobachtungen von Brahe und nahezu allen Beobachtungen von Fabricius liegen derartige Rechnungen nicht vor. Es handelt sich hier zumeist um Einmessungen des Jupiters bezüglich einiger Fixsterne, also um Messungen, die wir heute als „Bogenschnitt" bezeichnen. Häufig ist der Planet auf mehr als 2 Sterne eingemessen worden. Die Ergebnisse der einzelnen Bogenschnitte sind dann gemittelt worden. Die Punktbestimmung durch sphärischen Bogenschnitt bedeutet rechnerisch die mehrfache Anwendung des sphärischen Sinussatzes und der Kosinussätze.

Es seien die Distanzen s_1 und s_2 zwischen den Fixsternen A, B und dem Planeten S gemessen. Dann berechnet sich die Länge von S (L_s) entsprechend Nova Kepleriana 2, S. 87f.:

(a) $\cos s_3 = \sin B_A \sin B_B + \cos B_A \cos B_B \cos \Delta L$

(b) $\sin A_1 = \cos B_B \dfrac{\sin \Delta L}{\sin s_3}$

(c) $\cos A_2 = \dfrac{\cos s_2 - \cos s_1 \cos s_3}{\sin s_1 \ \sin s_3}$

(d) $(A) = A_1 \pm A_2$

(e) $\sin B = \sin B_A \cos s_1 + \cos B_A \sin s_1 \cos (A)$

(f) $\sin \Delta L_A = \sin s_1 \dfrac{\sin (A)}{\cos B}$

(g) $L_s = L_A + \Delta L_A$.

Die Zusammenhänge werden aus Fig. 8 ersichtlich, in der von A, B und S aus die Breitenkreise zum Pol der Ekliptik (E) gezogen sind.

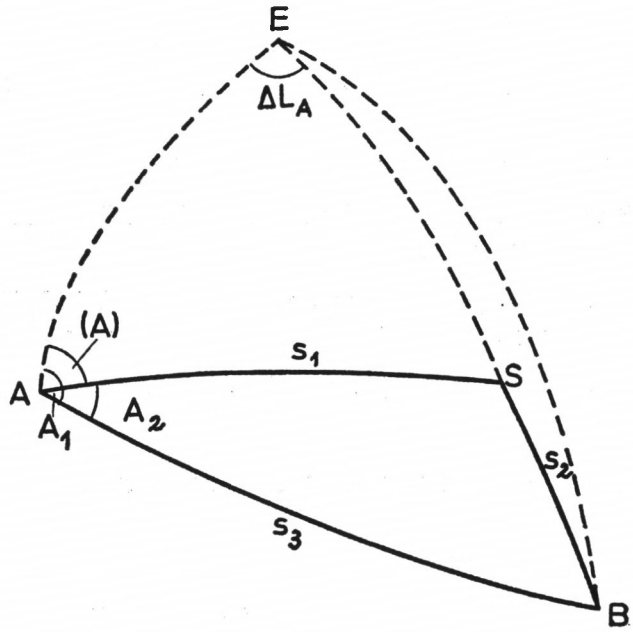

Fig. 8

Diese Rechnung nach den Formeln (a) bis (g) hätte für Brahe 28mal, für Fabricius gar 76mal ausgeführt werden müssen. Es versteht sich, daß hier wieder nach einer Möglichkeit gesucht wurde, die Rechnungen zu mechanisieren, sie am Computer ausführen zu lassen. Im einzelnen ist so vorgegangen worden:

1. Jeder Bogenschnitt bezieht sich auf ein Dreieck ABS entsprechend Fig. 8. Dabei ist durchweg $L_A < L_B$. Aus dem Fixsternverzeichnis der Rudolphinischen Tafeln werden die anvisierten Sterne mit ihren Koordinaten herausgeschrieben und die Differenzen ΔL_i gebildet.

2. Das Programm berechnet nach den Formeln (a) bis (f) jeweils den Längenunterschied ΔL_A, der zu L_A addiert wird. Bei der mehrfachen Bestimmung eines Jupiterortes, bei der entsprechende Ergebnisse für L_s gemittelt werden, ist auf günstige, d. h. nicht zu spitze Schnitte der einzelnen Bögen geachtet worden.

3. Es wird zunächst für die Fundamentalepoche der Tafeln (1600 compl.) gerechnet und anschließend, entsprechend dem Beobachtungszeitpunkt, die Präzession angebracht.

Eine Schwierigkeit kommt in die Rechnung durch die Doppeldeutigkeit von Formel (d) herein: zwei Distanzen bestimmen eine zweifache, zu AB spiegel-symmetrische Lage des Planeten S (Fig. 9).

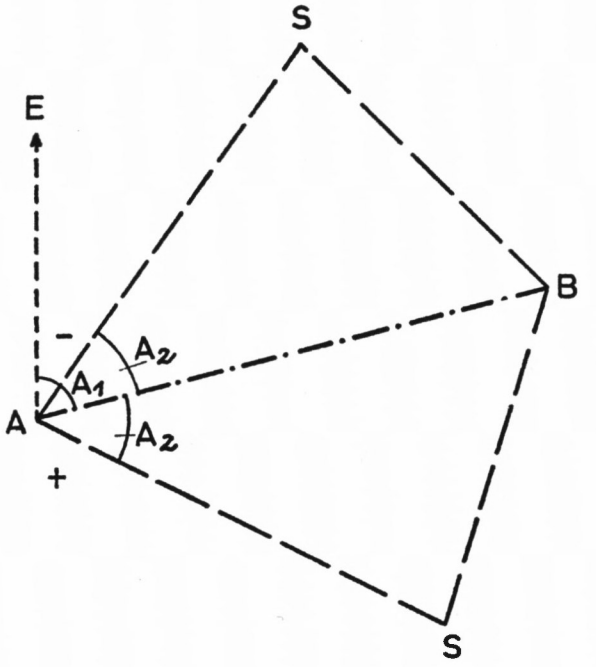

Fig. 9

Das Rechenzeichen in (d) läßt sich indessen bestimmen, wenn für jeden Bogenschnitt eine grobe Skizze angefertigt wird, aus der die Beziehung (d) leicht zu entnehmen ist. Im nachfolgend wiedergegebenen Programm zur Berechnung von sphärischen Bogenschnitten in der Programmiersprache ALGOL 60 ist das Rechenzeichen in (d) durch eine Kennziffer (K) für jeden Bogenschnitt gesondert berücksichtigt.

Es werden eingelesen:

I die Anzahl der zu rechnenden Bogenschnitte,
für jeden Bogenschnitt
B1 die Breite des Punktes A
B2 die Breite des Punktes B

```
'BEGIN'
'INTEGER' I,J.,
'REAL' RO,S,BA,BB,SA,SB,DL,A,A1,AA,A2,Z,WA,B,SL,
LA,LA1,LA2,LA3,LA4.,
'REAL' 'PROCEDURE' ARCSIN.,'CODE'.,
'REAL' 'PROCEDURE' ARCCOS.,'CODE'.,
RO.=57.29578.,
READ(I).,
'BEGIN'
'ARRAY' B1,B2,S1,S2,L(/1..I/).,
'INTEGER' 'ARRAY' K(/1..I/).,
OUTPUT (1,'(/,/,'(SPHAERISCHER BOGENSCHNITT')',/')').,
'FOR' J.=1 'STEP' 1 'UNTIL' I 'DO'
READ(B1(/J/),B2(/J/),S1(/J/),S2(/J/),L(/J/),K(/J/)).,
'FOR' J.=1 'STEP' 1 'UNTIL' I 'DO'
'BEGIN'
BA.=B1(/J/)/RO., BB.=B2(/J/)/RO.,
SA.=S1(/J/)/RO., SB.=S2(/J/)/RO.,
DL.=L(/J/)/RO.,
S.=SIN(BA)*SIN(BB)+COS(BA)*COS(BB)*COS(DL).,
A.=COS(BB)*SIN(DL)/(SQRT(1-S*S)).,
'IF' ABS(A) 'GREATER' 1 'THEN' A.=1*SIGN(A).,
A1.=ARCSIN(A).,
'IF' BB 'LESS' BA 'THEN'
A1.=180/RO-A1.,
Z.=COS(SB)-COS(SA)*S.,
AA.=Z/(SIN(SA)*SQRT(1-S*S)).,
'IF' ABS(AA) 'GREATER' 1 'THEN' AA.= 1*SIGN(A).,
A2.=ARCCOS(AA).,
'IF' K(/J/) 'EQUAL' 0 'THEN'
WA.=A1+A2
'ELSE'
WA.=A1-A2.,
B.=SIN(BA)*COS(SA)+COS(BA)*SIN(SA)*COS(WA).,
SL.=SIN(SA)*SIN(WA)/(SQRT(1-B*B)).,
LA.=ARCSIN(SL).,
LA.=RO*LA.,
LA1.=ENTIER(LA).,
'IF' LA1 'LESS' 0 'THEN' LA1.=LA1+1.,
LA2.=60*(LA-LA1).,
LA3.=ENTIER(LA2).,
'IF' LA3 'LESS' 0 'THEN' LA3.=LA3+1.,
LA4.=60*(LA2-LA3).,
LA3.=ABS(LA3).,
LA4.=ABS(LA4).,
OUTPUT (1,'('/,4B2ZD,-3B2ZD,BZD,BZD')',J,LA1,LA3,LA4).,
'END'.,'END'.,'END'.,
```

ALGOL-Programm zur Berechnung von sphärischen Bogenschnitten

S1 die Distanz AS
S2 die Distanz BS
L die Längendifferenz ΔL
K die Kennziffer für das Rechenzeichen in (d).
Für + wird K = 0,
für — wird K = 1 gesetzt.

Ausgedruckt werden:

J die laufende Nummer von I
LA die Längendifferenz zwischen A und S in Grad, Minuten, Sekunden.

Durch die häufige Mehrfachbestimmung der Planetenörter wird nicht nur die Genauigkeit gesteigert, es sind auch Kontrollmöglichkeiten vorhanden, grobe Meßfehler aufzudecken oder falsch identifizierte Sterne herauszufinden.

Die Ergebnisse sind mit den übrigen Beobachtungswerten in die Spalte „Beobachtung" der Übersichten 5 bis 7 eingetragen.

2.232 Vergleich mit Tuckerman

Für die Zeitpunkte der Beobachtungen sind die Planetenörter mit Hilfe der Planetentafeln von B. Tuckerman bestimmt worden. Interpoliert wurde, wie in Abschnitt 2.21 beschrieben, nach der Formel von Everett-Laplace für gewöhnliche zweite Differenzen. Bei der Fülle der Beobachtungen und Tafelwerten erwies sich die Verwendung eines Rechenprogramms (Abschnitt 2.21) als besonders zweckmäßig. Für jeden Zeitpunkt wurden der Tafel die zwei nächst kleineren und die zwei nächst größeren Werte entnommen. Hinzu kommt die Zeitdifferenz zum nächst kleineren Wert in Tagen, Stunden und der Vollständigkeit halber auch in Minuten. Zu beachten ist, daß der Julianische Kalender (alter Stil) verwendet wird. Demgemäß sind von den Beobachtungszeitpunkten der Prager Zeit, während der sich Brahe nach dem in Prag bereits angenommenen neuen Stil richtet, jeweils 10 Tage abzuziehen.

Die Tuckerman-Tafeln gelten für 16 Uhr UT. Die Ortszeit der einzelnen Beobachtungswerte ist entsprechend in Weltzeit umzurechnen.

Die Ergebnisse der Interpolationsrechnungen sind aus Spalte (3) der Übersichten 5 bis 7 ersichtlich. Ihre Differenzen zu den Beobachtungen sind als $\varepsilon_1 = B - R$ in Spalte (4) im Sinne von Fehlern gebildet. Sofern die Tafeln „wahre" Werte präsentieren, stellen die ε_1 „wahre" Fehler dar. Mit dieser noch eingehender zu behandelnden Einschränkung sollen die ε-Werte als wahre Fehler bezeichnet und entsprechend fehlertheoretisch behandelt werden.

Für die Beurteilung der 5 älteren Beobachtungen von Übersicht 1 – bei Beobachtung Nr. 1 fehlt das genaue Datum – ist lineare Interpolation ausreichend.

Die Ergebnisse lauten:

Nr.	Jahr	Beobachtung	Rechnung	ε_1
2	241 v. Chr.	97° 33′	97° 34	— 1′
3	133 n. Chr.	233. 11	234. 8	— 57
4	136	337. 54	339. 9	— 75
5	137	14. 23	15. 34	— 71
6	139	75. 45	76. 28	— 43

Die Werte in Spalte (3) sind die von Ptolemäus überlieferten Zahlen. Beobachtung Nr. 2 ist die Konjunktion von Jupiter und südlichem Esel, Beobachtung 3 bis 5 sind mittlere Oppositionen.

In den Abschnitten 1.62 und 1.63 ist gezeigt worden, wie Kepler diese Beobachtungen kritisch untersucht und verbessert hat.

Für die Dionysische Beobachtung gibt er an, daß der Ort 7.4 ♋ für den südlichen Esel am wahrscheinlichsten sei, von dem Jupiter um eine Vollmondbreite entfernt gewesen sei. Weiter, so führt Kepler aus (vgl. Abschnitt 1.631), sei die Breite sicher nördlich und nicht südlich gewesen und habe den Betrag von 26′ erreicht. Nach Tuckerman beträgt die Breite 14′. Die ptolemäischen Beobachtungen hat Kepler erheblich verbessert (Abschnitt 1.632). Er erhielt:

Nr.	Kepler	Tuckerman	ε_1
3	234.14	234. 8	+ 6′
4	338.57	339. 9	— 12
5	15.26	15.34	— 8

Für Beobachtung Nr. 6 ergibt sich mit gleicher Korrektur von + 63′ eine Differenz von 20′ zu den Werten von Tuckerman.

Die Untersuchung zeigt, daß Kepler die alten fehlerhaften Beobachtungen tatsächlich verbessern konnte nach Überlegungen, die maßgebend bei der Ableitung der Jupiter-Epochen waren. Damit ist die Zuverlässigkeit seiner Methoden nochmals unterstrichen.

Die Ergebnisse der Untersuchung für die anderen Beobachtungen sind in den nachfolgenden Übersichten wiedergegeben. Es korrespondieren:

Übersicht 5 mit Übersicht 2
Übersicht 6 mit Übersicht 3
Übersicht 7 mit Übersicht 4.

Zunächst sei Übersicht 5 betrachtet. Sie enthält Beobachtungen von untergeordneter Genauigkeit, und zwar Beobachtungen von

Regiomontan
Walther
Kopernikus
Longomontan.

Zu den Ergebnissen ist zu bemerken:

Am genauesten haben Longomontan und Walther beobachtet. Beobachtung Nr. 9 ist mit „in fine 12 gra. Cancri" angegeben, also nur grob gemessen. Die Beobachtungen von Kopernikus und Longomontan sind – abgesehen von Nr. 13 – Oppositionen. Bei ihnen wäre vielleicht noch ein kleiner Betrag in $|\varepsilon|$ abzuziehen. Die Abweichungen bei Kopernikus sind erstaunlich hoch. Sieht man von Beobachtung Nr. 3 des Regiomontan ab, die eher eine Schätzung als eine Messung ist, so steht Kopernikus hinsichtlich der Beobachtungsgenauigkeit am Ende. Allerdings ist bei der geringen Zahl der vorliegenden Beobachtungen dieses Ergebnis nicht allzu gut fundiert.

Übersicht 5

Nr.	Beobachtung	Rechnung	Differenz
1	272°15′ 0″	272° 1′58″	13′ 2″
2	89. 25. 30	89. 30. 2	— 4. 32
3	91. 39	90. 16. 42	82. 18
4	179. 33	179. 1. 33	31. 27
5	24. 42	24. 39. 52	2. 8
6	60. 25. 30	60. 20. 52	4. 38
7	60. 24	60. 22. 37	1. 23
8	101. 37	101. 42. 6	— 5. 6
9	102. 30	102. 5. 9	24. 51
10	103. 45	103. 50. 55	— 5. 55
11	96. 25	96. 29. 35	— 4. 35
12	94. 53	95. 3. 2	— 10. 2
13	231. 37. 16	231. 56. 18	— 19. 2
14	226. 46. 26	226. 55. 32	— 11. 6
15	75. 8. 2	76. 6. 13	— 58. 11
16	140. 21. 53	140. 50. 12	— 28. 19
17	353. 33	353. 35. 3	— 2. 3
18	223. 10	223. 11. 48	— 1. 48
19	358. 56	358. 58. 30	— 2. 30
20	4. 10	4. 14. 38	— 4. 38
21	109. 36	109. 41. 4	— 5. 4
22	171. 45	171. 40. 20	4. 40

Übersicht 5: Überprüfung der Beobachtungen von Regiomontan, Walther, Kopernikus und Longomontan an Hand der Planetentafeln von B. Tuckerman

Legt man zwei Genauigkeitsmaße zugrunde:

den mittleren Fehler $m = \sqrt{\frac{[\varepsilon\varepsilon]}{n}}$ und

den durchschnittlichen Fehler $t = \frac{[|\varepsilon|]}{n}$,

so ergibt sich die Reihenfolge:

1. Longomontan mit $t = \pm\ 3',5$ und $m = \pm\ 3',7$ aus 6 Beobachtungen
2. Walther mit $t = \pm\ 4',8$ und $m = \pm\ 5',5$ aus 7 Beobachtungen
3. Regiomontan mit $t = \pm\ 16',3$ aus 3 Beobachtungen
4. Kopernikus mit $t = \pm\ 29',2$ aus 4 Beobachtungen.

Für die wenigen Beobachtungen von Regiomontan und Kopernikus ist auf die Berechnung des mittleren Fehlers verzichtet worden. Die Ergebnisse erscheinen zudem zu uneinheitlich.

Longomontan, der in seiner „Astronomia Danica" nur die Endergebnisse für die Oppositionen angibt, hat sich als Schüler und Mitarbeiter Brahes der Braheschen Methoden, während seines Aufenthalts auf Hven auch seiner Instrumente bedient.

Die Ergebnisse für die Beobachtungen von Tycho Brahe und Fabricius sind den folgenden Übersichten 6 und 7 zu entnehmen. Die Werte der Beobachtungen (Spalte 2) sind von den Beobachtern selbst oder für diese Untersuchung über das Programm für sphärische Bogenschnitte berechnet worden. Spalte 3 enthält die nach dem Verfahren von Everett-Laplace interpolierten Planetenörter aus den Tafeln von Tuckerman. In Spalte 4 sind die ε_i als Differenzen zwischen Beobachtungen und Tuckerman eingetragen, die zunächst als wahre Fehler behandelt und später genauer untersucht werden.

Übersicht 6

Nr.	Beobachtung	Rechnung	Differenz
1	124°50′ 0″	124°52′19″	— 2′19″
2	70. 20. 20	70. 16. 49	3. 31
3	154. 27. 10	154. 34. 49	— 7. 39
4	154. 39. 30	154. 44. 47	— 5. 17
5	189. 19	189. 7. 58	11. 2
6	218. 53. 33	218. 57. 27	— 3. 54
7	313. 10. 21	313. 10. 38	— 0. 17
8	313. 29. 7	313. 26. 33	2. 34
9	314. 16. 25	314. 14. 35	1. 50
10	357. 14	357. 3. 47	10. 13
11	354. 49. 30	354. 53. 22	— 3. 52
12	353. 45. 0	353. 49. 59	— 4. 59
13	353. 38. 45	353. 41. 54	— 3. 9
14	353. 7	353. 9. 37	— 2. 37
15	30. 22. 40	30. 22. 25	0. 15
16	36. 44. 31	36. 43. 14	1. 17
17	71. 11. 48	71. 10. 43	1. 5
18	61. 21. 40	61. 19. 7	2. 33
19	103. 53. 30	103. 53. 4	0. 26
20	104. 58	105. 2. 43	— 4. 43
21	105. 21. 20	105. 20. 7	1. 13
22	103. 50. 50	103. 48. 37	2. 13
23	101. 12. 28	101. 13. 35	— 1. 7
24	100. 8. 10	100. 11. 27	— 3. 17
25	99. 38. 30	99. 39. 31	— 1. 1
26	97. 51. 46	97. 51. 54	— 0. 8
27	97. 18. 55	97. 18. 55	0
28	97. 14. 5	97. 13. 7	0. 58
29	96. 18. 45	96. 22. 40	— 3. 55
30	95. 47. 52	95. 51. 11	— 3. 19
31	128. 11. 10	128. 12. 3	— 0. 53
32	161. 12. 29	161. 17. 45	— 5. 16
33	165. 43. 7	165. 43. 44	— 0. 37
34	163. 1. 58	163. 2. 18	— 0. 20

noch Übersicht 6

Nr.	Beobachtung	Rechnung	Differenz
35	197° 45′ 40″	197° 48′ 45″	— 3′ 5″
36	193. 55. 55	193. 58. 38	— 2. 43
37	193. 11. 35	193. 12. 49	— 1. 14
38	192. 39. 20	192. 42. 6	— 2. 46
39	189. 54. 25	189. 57. 30	— 3. 5
40	224. 16. 8	224. 18. 21	— 2. 13
41	223. 38. 15	223. 39. 58	— 1. 43
42	223. 15. 50	223. 17. 57	— 2. 7
43	223. 7. 40	223. 10. 18	— 2. 38
44	222. 58	223. 2. 48	— 4. 48
45	222. 22	222. 24. 34	— 2. 34
46	222. 15. 53	222. 17. 10	— 1. 17
47	218. 21. 20	218. 22. 2	— 0. 42
48	255. 33. 20	255. 31. 27	1. 53
49	255. 21. 10	255. 16. 50	4. 20
50	254. 46. 50	254. 46. 38	0. 12
51	254. 2. 50	254. 0. 47	2. 3
52	253. 39. 27	253. 38. 2	1. 25
53	289. 25. 30	289. 23. 42	1. 48
54	287. 23. 15	287. 23. 15	0
55	286. 59. 30	287. 0. 35	— 1. 5
56	322. 31. 20	322. 31. 15	0. 5
57	322. 23	322. 23. 18	— 0. 18
58	359. 41. 48	359. 40. 39	1. 9
59	359. 17. 33	359. 16. 40	0. 53
60	356. 35	356. 35. 45	— 0. 45
61	354. 23. 40	354. 18. 58	4. 42
62	354. 5. 23	354. 3. 58	1. 25
63	355. 16. 48	355. 16. 5	0. 43
64	356. 5. 38	356. 4. 37	1. 1
65	1. 7. 49	1. 6. 19	1. 30
66	3. 5. 32	3. 2. 57	2. 35
67	3. 42. 42	3. 39. 41	3. 1
68	9. 7. 40	9. 9. 19	— 1. 39
69	12. 4. 40	11. 58. 16	6. 24
70	39. 40. 30	39. 39. 55	0. 35
71	40. 32. 20	40. 31. 46	0. 34
72	37. 59. 40	37. 55. 4	4. 36
73	36. 30. 40	36. 29. 35	1. 5
74	35. 8. 30	35. 8. 37	— 0. 7
75	34. 52. 20	34. 52. 24	— 0. 4
76	34. 45. 10	34. 44. 26	0. 44
77	30. 55. 50	30. 56. 15	— 0. 25

noch Übersicht 6

Nr.	Beobachtung	Rechnung	Differenz
78	30° 46′ 15″	30° 46′ 50″	— 0′ 35″
79	30. 53. 30	30. 48. 26	5. 4
80	31. 44. 40	31. 44. 2	0. 38
81	42. 9. 50	42. 7. 24	2. 26
82	74. 52. 3	75. 0. 53	— 8. 50
83	70. 59. 53	70. 49. 49	10. 4
84	69. 45. 32	69. 39. 31	6. 1
85	73. 12. 48	73. 15. 3	— 2. 15
86	105. 31. 6	105. 25. 25	5. 41
87	104. 22. 35	104. 25. 40	— 3. 5
88	103. 8. 29	103. 8. 53	— 0. 24
89	102. 59. 40	103. 1. 19	— 1. 39
90	102. 25. 9	102. 25. 43	— 0. 34
91	101. 30. 31	101. 35. 3	— 4. 32
92	101. 5. 45	101. 8. 1	— 2. 16
93	138. 17. 28	138. 25. 49	— 8. 21
94	138. 49. 25	138. 56. 49	— 7. 24
95	140. 50. 40	140. 54. 7	— 3. 27
96	140. 32. 42	140. 34. 50	— 2. 8
97	132. 33. 21	132. 34. 32	— 1. 11
98	132. 10. 45	132. 12. 26	— 1. 41
99	131. 46. 15	131. 47. 37	— 1. 22
100	132. 48. 40	132. 49. 58	— 1. 18
101	172. 12. 40	172. 13. 54	— 1. 14
102	167. 47. 13	167. 48. 48	— 1. 35
103	167. 38. 30	167. 41. 2	— 2. 32
104	165. 39	165. 39. 28	— 0. 28
105	162. 49. 30	162. 50. 51	— 1. 21
106	168. 5. 31	168. 2. 5	3. 26
107	168. 54. 41	168. 50. 58	3. 43

Übersicht 6: Überprüfung der Beobachtungen von Tycho Brahe an Hand der Planetentafeln von B. Tuckerman

Für die Berechnung des Genauigkeitsmaßes wird von der Annahme ausgegangen, daß Abweichungen, die das 3fache des zu erwartenden mittleren Fehlers überschreiten, auf grobe Meßfehler zurückzuführen sind und daher ausgeschieden werden. Bei dem großen wissenschaftlichen Apparat, den Brahe sich in Hven aufbaute, können die Fehlerquellen zahlreich sein, und eine strenge Auswahl der Beobachtungen, wie sie in der Praxis von den rechnenden Astronomen auch vorgenommen wurde, ist erforderlich. Die obere Grenze noch tragbarer Beobachtungsgenauigkeit hält sich an Erfahrungen moderner Fehlertheorie, die in der Analyse eines Beobachtungsmaterials Beziehungen zur Gaußschen Normalverteilung herstellt. Daß hier nur mit großer Einschränkung von einer derartigen Verteilung gesprochen werden kann, wird die Untersuchung des nächsten Abschnittes zeigen.

Übersicht 7

Nr.	Beobachtung	Rechnung	Differenz
1	108°58′ 1″	108°58′53″	— 0′52″
2	109. 17. 13	109. 17. 1	0. 12
3	105. 48. 50	105. 46. 46	2. 4
4	104. 39. 36	104. 42. 1	— 2. 35
5	100. 7. 5	100. 7. 0	0. 5
6	101. 5. 31	101. 4. 39	0. 52
7	140. 49. 24	140. 48. 51	0. 33
8	138. 41. 26	138. 39. 59	1. 27
9	137. 22. 22	137. 23. 51	— 1. 29
10	131. 45. 30	131. 47. 39	— 2. 9
11	132. 35. 42	132. 36. 34	— 0. 52
12	158. 57. 7	158. 59. 34	— 2. 27
13	170. 25. 55	170. 26. 11	— 0. 16
14	171. 18. 12	171. 19. 2	— 0. 50
15	171. 15. 44	171. 16. 34	— 0. 50
16	166. 31. 44	166. 32. 30	— 0. 46
17	165. 16. 43	165. 18. 9	— 1. 26
18	162. 21. 57	162. 20. 37	1. 20
19	200. 56. 39	200. 45. 15	11. 24
20	198. 12. 12	198. 13. 11	— 0. 59
21	197. 20. 43	197. 19. 48	0. 55
22	193. 38. 6	193. 40. 13	— 2. 7
23	192. 14. 49	192. 15. 5	— 0. 16
24	231. 9. 38	231. 11. 36	— 1. 58
25	259. 25. 18	259. 28. 26	— 3. 8
26	292. 37. 12	292. 39. 37	— 2. 25
27	35. 52. 21	35. 52. 57	— 0. 36
28	36. 18. 32	36. 15. 46	2. 46

Übersicht 7: Überprüfung der Beobachtungen von Fabricius an Hand der Planetentafeln von B. Tuckerman

Wird m mit $\pm 2'$ angesetzt, so sind die ε-Werte zu vernachlässigen, für die $|\varepsilon| > 6'$. Hier ist als Schranke $5'$ gesetzt worden. Danach fallen heraus:

bei Brahe 13 Beobachtungen
bei Fabricius 1 Beobachtung.

4 dieser 13 Beobachtungen hat Brahe auf Hven gemacht, von diesen 4 großen Abweichungen ist nur ein Wert deutlich oberhalb $5'$ (Nr. 10 vom 6. August 1583).

Für die Fehlerbildung erhält man:

bei Tycho Brahe	bei Fabricius
$n = 94$	$n = 27$
$[\lvert\varepsilon\rvert] = 173.56$	$[\lvert\varepsilon\rvert] = 36.28$
$[\varepsilon\varepsilon] = 483.35$	$[\varepsilon\varepsilon] = 68.28$
$t = \pm 1' 51''$	$t = \pm 1' 20''$
$m = \pm 2' 16''$	$m = \pm 1' 35''$

Die Fehler der Beobachtungen auf Hven sind nur unwesentlich vom Gesamtresultat verschieden; aus 71 Beobachtungen berechnen sich die Fehler

$$t = \pm 1' 45''$$
$$m = \pm 2' 12''.$$

Als Resultat sei hier zunächst festgehalten, daß Fabricius den Jupiter um etwa $\frac{1}{2}'$ genauer beobachtet hat als Tycho Brahe.

2.24 DIE BEOBACHTUNGSGENAUIGKEIT VON TYCHO BRAHE UND FABRICIUS

2.241 Diskussion der Beobachtungen

Für die folgende Betrachtung sind zwei Diagramme gezeichnet worden, in denen die $|\varepsilon_1|$ über die Zeit dargestellt wurden. Damit wird der zeitabhängige Charakter der Beobachtungsgenauigkeit besonders für Tycho Brahe ersichtlich. Allerdings kommt den einzelnen Punkten im Diagramm nicht immer gleiches Gewicht zu. Auf das Vorzeichen der ε_1 konnte insofern verzichtet werden, als Rückschlüsse aus der Verteilung von positiven und negativen ε-Werten auf einen systematischen Anteil am Beobachtungsfehler hier noch nicht gezogen werden.

Die Untersuchung beginnt mit Fabricius*.

Das Diagramm (Fig. 10) zeigt die wahren Fehler von 28 Jupiterbeobachtungen des David Fabricius zwischen 1598 und 1609.

Die Abweichungen $|\varepsilon_1|$ liegen nahezu vollständig unterhalb von 3′, lediglich für den 16. Februar 1602 ergibt sich ein Betrag von 11′ 24″. Zur Bestimmung dieses Jupiter-Ortes hat Fabricius 2 Distanzen zu cauda ☾ und Arcturus gemessen. Eine Kontrolle durch eine dritte Distanz besteht nicht. Die Stellung der Fixsterne bezüglich Jupiter läßt die Vermutung aufkommen, daß die Distanz cauda ☾–Jupiter um 10′ zu groß abgelesen wurde. Sieht man von diesem „Ausreißer" ab, so pendelt die Kurve sehr schön um den mittleren Fehlerbetrag von $1\frac{1}{2}'$.

Fabricius hat mit seinen Jupiterbeobachtungen gezeigt, daß es möglich war, ohne großen Aufwand genaue Beobachtungen zu machen. Gemessen an Brahe sind seine eingesetzten Mittel bescheiden zu nennen. Er, der doch eigentlich nur Liebhaber der Astronomie war, allerdings an der astronomischen Wissenschaft seiner Zeit regen Anteil nahm, stellte sich die Beobachtungsinstrumente selbst oder mit Unterstützung eines Schmiedes aus Eisen her**. So fertigte er sich 1593 einen eisernen Quadranten und Sextanten an, mit dem die

---

* An dieser Stelle sei Martha List für wertvolle Hinweise zu den nachfolgenden Untersuchungen herzlich gedankt.

** Vgl. hierzu: Diedrich Wattenberg: David Fabricius – der Astronom Ostfrieslands (1564–1617). Archenhold-Sternwarte, Vorträge und Schriften Nr. 19, Berlin 1964.

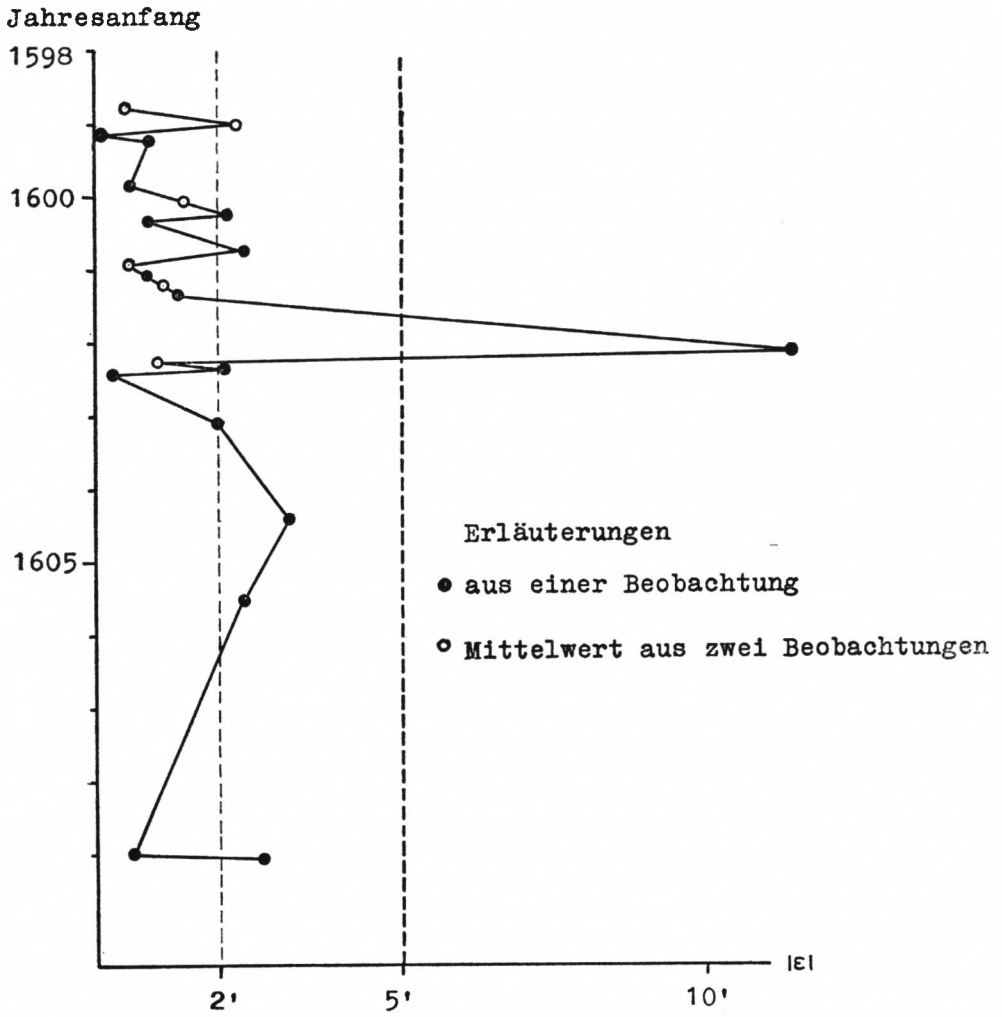

Fig. 10

Zur Genauigkeit der Beobachtungen von Fabricius

Distanzen ausschließlich gemessen wurden. Seine Ergebnisse sind um so höher einzuschätzen, als er keine Assistenten zur Verfügung hatte und die atmosphärischen Bedingungen kaum besser als auf Hven waren.

Dem Diagramm, das die Tychonische Genauigkeit wiedergibt, liegen 102 Jupiter-Beobachtungen zwischen 1579 und 1601 zugrunde (Fig. 11).

Für die Deutung des Diagramms spielen die äußeren Umstände mit herein. Sie geben insbesondere Anhaltspunkte zur Erklärung der großen Abweichungen vor 1580 und nach 1597. Die Beobachtungen um 1578 fallen mitten in den 1576 begonnenen und nicht vor 1580 abgeschlossenen Bau der Sternwarte auf Hven. Beobachtet wurde während dieser Zeit mit dem Radius und einem Sextant. Am 29. März 1597 erfolgte die endgültige Abreise von Hven nach Kopenhagen. Die Beobachtung vom 20. Dezember 1596 dürfte von dem Aufbruch noch nicht berührt sein, zumal die Beobachtungen vom Januar und März 1597 gute Ergebnisse zeigen. Für den 20. Dezember scheinen vielmehr die atmosphärischen Verhältnisse ungünstig gewesen zu sein. Brahe bemerkt: „Non erat satis serenum hac vespera et

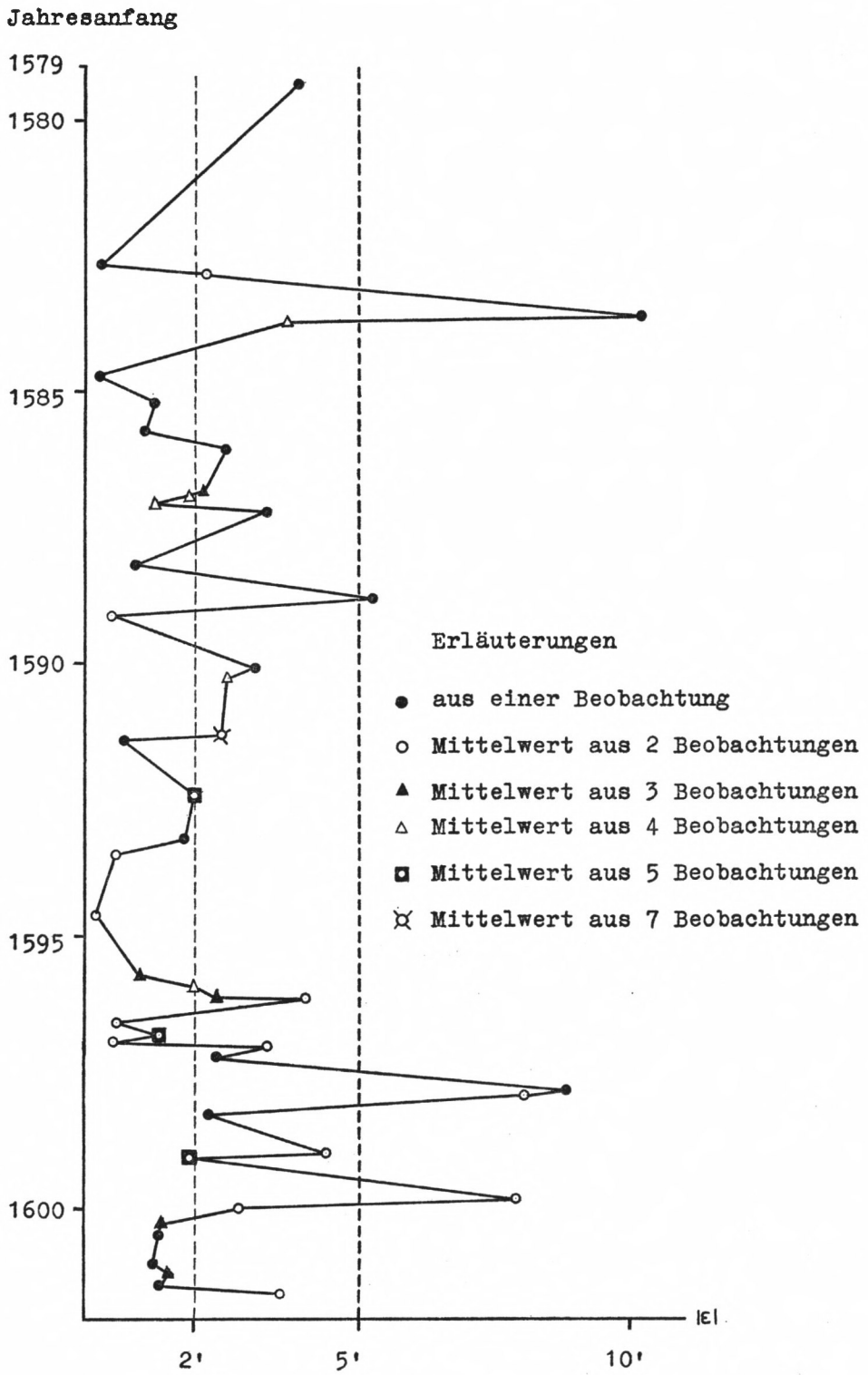

Fig. 11

Zur Genauigkeit der Beobachtungen von Tycho Brahe

fuit ☽ halone circumdata", fügt aber hinzu: „observationes tamen in ♃ factae satis bene se habent" (Op. Om. 13,42). Deutlich schlechter sind die Beobachtungen in Wandsbeck, wohin Brahe von Rostock aus Mitte Oktober aufbrach. Diese Beobachtungen wurden mit dem Radius gemacht. Im Juni 1599 kam Brahe mit wenigen Instrumenten nach Prag. Die hier auf Benatek angestellten Beobachtungen sind zunächst sehr schlecht und werden erst ab 1600 besser.

Sieht man von diesen Ortsveränderungen Brahes ab, die in einem deutlichen Zusammenhang mit den großen Abweichungen stehen, so lassen sich für die gelegentlich großen ε-Ausschläge der Hvener Zeit keine eindeutigen Ursachen anführen. Brahe stand eine Reihe hervorragender Mitarbeiter zur Verfügung, wie Peter Jakobsen, Paul Wittich und Christian Longomontanus, die sicherlich auch beobachtet haben, ohne in den Protokollen besonders erwähnt zu werden. Die Güte einer Beobachtung läßt sich daher nicht mit der Eignung eines bestimmten Beobachters in Zusammenhang bringen. Zudem erforderte die Bedienung der großen Instrumente mindestens 2 Beobachter. Ebensowenig ist eine eindeutige Wetterabhängigkeit feststellbar, einmal, weil häufig Wetteraufzeichnungen fehlen, zum anderen, weil gute Sichtverhältnisse nicht immer gute, schlechtere Bedingungen nicht immer dementsprechend schlechte Beobachtungswerte liefern. Die genauesten Beobachtungen hat Brahe auf Hven gemacht, nachdem die Uranienburg fertig war und sich der Betrieb eingespielt hatte. Mit einem kleinen Himmelsglobus und einem Jakobstab hatte er in jungen Jahren angefangen zu beobachten. Auf Hven stand ihm ein mächtiges Instrumentarium zur Verfügung, das ständig überprüft und verbessert wurde.

Die hier untersuchten Jupiterbeobachtungen wurden fast ausschließlich mit einem der Sextanten, mit dem drehbaren Azimutalquadrant und dem großen Quadrans chalibeus angestellt.

Kepler ist offensichtlich gut beraten gewesen, überwiegend auf Brahesche Beobachtungen zurückzugreifen, die in den besten Jahren auf Hven gemacht wurden. Gleiches Zutrauen hat er zurecht zu den Beobachtungen von Fabricius gehabt, kommt doch nach dem Weggang Brahes von Hven Fabricius die Ehre zu, der erste unter den beobachtenden Astronomen zu sein. Die Gleichmäßigkeit seiner Messungen, die Genauigkeit im Visieren war der Arbeit einer ganzen Beobachtungsgruppe ebenbürtig, ja z. T. sogar überlegen. Sein immer wieder praktiziertes Verfahren des Bogenschnittes hat sich als besonders günstig erwiesen. Bei kleinen Distanzen spielt nur die Differentialrefraktion von vernachlässigbarer Größe herein. Die Ansicht von dem alle überragenden Beobachter Tycho Brahe ist hier zu revidieren: zumindest bei den Jupiterbeobachtungen hat er in David Fabricius einen hervorragenden Konkurrenten gefunden.

2.242 Fehlertheoretische Diskussion der Ergebnisse

Die bisherige Untersuchung ist davon ausgegangen, daß die Planetentafeln von Tuckerman als fehlerfrei zu betrachten sind. Diese Annahme ist lediglich als vorläufige Vereinfachung verstanden worden. Die Prüfung der Tafeln hat die Autoren für Jupiter einen Tafelfehler von 44″ annehmen lassen (vgl. Abschnitt 2.21), so daß für die ε_i, die Differenzen von Beobachtungs- und Tafelwerten

$$\varepsilon_i = B_i - R_i ,$$

sich nach dem Fehlerfortpflanzungsgesetz der Fehlerbetrag ergibt:

$$m^2 = m_B{}^2 + m_R{}^2.$$

Hierbei sind:

m der zuvor bestimmte Gesamtfehler*

m_B der Beobachtungsfehler

m_R der Tafelfehler, hier als zufälliger Fehler betrachtet.

Man erhält:

	für Tycho Brahe	für Fabricius
	$m_B = \pm 2' \; 9''$	$m_B = \pm 1' 25''$
gegen	$m = \pm 2' 16''$	$m = \pm 1' 35''$.

Die Beträge des Beobachtungsfehlers haben sich nur geringfügig verringert.

Das eigentliche Ziel der Genauigkeitsuntersuchung war, alte astronomische Beobachtungen, die für die Überlegungen Keplers von Bedeutung gewesen sind, an Hand moderner Planetentafeln zu prüfen. Umgekehrt erlauben die Beobachtungen, Rückschlüsse auf die Tafeln zu ziehen.

Es ist, wenn insbesondere die Vorzeichen der ε_i beachtet werden, die Vermutung naheliegend, daß systematische Fehleranteile vorhanden sind, die bisher noch nicht berücksichtigt wurden. Diese Anteile können sowohl Beobachtungen als auch Tafelwerte betreffen. Bei der Auswertung der Beobachtungen spielen eine Anzahl Faktoren herein, die zu einem zusätzlichen Fehler, z. T. systematischer Art, Anlaß geben, so der Fixsternkatalog der Rudolphinischen Tafeln und die mangelhafte Berücksichtigung der Refraktion.

Andererseits ist infolge der Berechnung der Tafeln durch Reihen, die an einer bestimmten Stelle abgebrochen sind, die Existenz eines Restfehlers, der über einige Zeit die Form eines systematischen Fehlers annimmt, durchaus möglich. Ehe versucht wird, den systematischen Anteil am Gesamtfehler zu ermitteln, soll zunächst seine Existenz an Hand der vorhandenen ε_i-Reihen als wahrscheinlich nachgewiesen werden.

Kriterien zur Feststellung systematischer Fehler

Für den Nachweis systematischer Fehler sind Kriterien aufgestellt worden, die von der Fehlerverteilung oder von der Anordnung der Fehler innerhalb der Beobachtungsreihe ausgehen**. Nach dem Kriterium wird ein Wert berechnet, der mit dem theoretischen Wert verglichen wird. Dieser Wert ist als Grenzwert zu verstehen, bei dessen Überschreiten systematische Fehler zu erwarten sind. Häufig wird bei der Anwendung eines Kriteriums vorausgesetzt, daß die Beobachtungsreihe einer Gaußschen Normalverteilung entspricht. Die Prüfung dieser Voraussetzung sei zunächst einmal zurückgestellt. Es wird sich zeigen, daß die Voraussetzung hier nur mit Einschränkung erfüllt ist.

1. Vorzeichenprüfung

Die Anzahl der positiven Fehler soll gleich der der negativen sein. Unter Beachtung des Fehlerfortpflanzungsgesetzes soll die Vorzeichensumme betragen:

$$V = 0 \pm \sqrt{n}\,.$$

Es ergibt sich

für Brahe	für Fabricius
$V = 30$	$V = 9$
$\sqrt{n} = 10$	$\sqrt{n} = 5$.

* In der Berechnung von m sind die ε_i als v_i zu behandeln, entsprechend ist der Nenner n durch n — 1 zu ersetzen. Die Werte für Brahe und Fabricius ändern sich nur unwesentlich.

** Hier wird einem Aufsatz von G. Werman gefolgt, der in der Zeitschrift für Vermessungswesen (10/1958) erschienen ist unter dem Titel: Zur Berechnung systematischer Fehler aus Beobachtungsreihen.

Die Prüfung deutet auf einen systematischen Fehler hin.

2. Prüfung durch mittlere Fehlergrößen

Die Summe der Fehler soll 0 sein:

$$\Sigma \varepsilon = 0 \pm m\sqrt{n}$$

unter Beachtung des Fehlerfortpflanzungsgesetzes.

Brahe	Fabricius
$\Sigma \varepsilon = 45$	$\Sigma \varepsilon = -18$
$m\sqrt{n} = 20$	$m\sqrt{n} = 8.$

Wieder liegt ein Hinweis auf einen systematischen Fehler vor.

3. Helmert-Kriterium*

Beachtet werden die Vorzeichen der ε_i, die die Vorzeichenreihe $V_1, V_2, V_3 \ldots V_n$ bilden und die Werte $+1$ oder -1 darstellen.

Ist $V_i \cdot V_{i+1} = +1$, liegt eine Zeichenfolge (f) mit $+1, +1$ oder $-1, -1$ vor.

Ist $V_i \cdot V_{i+1} = -1$, so haben benachbarte Glieder der Vorzeichenreihe verschiedene Vorzeichen, und es tritt ein Vorzeichenwechsel (w) ein.

Nach Helmert soll sein

$$f - w = 0 \pm \sqrt{n-1}.$$

Die Prüfung ergibt

für Brahe	für Fabricius
$f - w = 39$	$f - w = 8$
$\sqrt{n-1} = 10$	$\sqrt{n-1} = 5.$

Innerhalb der von Helmert angegebenen Wahrscheinlichkeit von 68% weist das Kriterium bei Brahe deutlich auf die Existenz eines systematischen Fehlers hin, bei Fabricius weniger deutlich.

Damit sei die Überprüfung abgebrochen, ein anderes Kriterium von Abbe, das von Produkten benachbarter ε_i ausgeht (vgl. Jordan/Eggert/Kneißl: Mathematische Geodäsie, 2. Halbband), wird nicht mehr angewendet. Die Prüfungen haben wahrscheinlich gemacht, daß die ε_i systematische Fehleranteile enthalten.

Was nun die Gaußsche Normalverteilung betrifft, so sind die Anordnung der ε_i sowie deren Größe in erster Linie auf die Beobachtungsgüte zurückzuführen, die, wie die Analyse des vorangegangenen Abschnittes gezeigt hat, bei Tycho Brahe z. T. deutlich zeitabhängig ist. Es sei nun die grobe Verteilung untersucht.

Nach der Fehlertheorie sollen enthalten sein

im Bereich $0 \pm m$	68% aller ε_i
im Bereich $0 \pm 2m$	95% aller ε_i
im Bereich $0 \pm 3m$	99,7% aller ε_i.

Stellt man außerdem die Summenlinie der Häufigkeitsverteilung auf, derart, daß die Fläche unterhalb der Fehlerverteilungskurve über die ε_i aufgetragen wird, so sollte, aus-

* Ausführlich dargestellt in F. R. Helmert: Die Ausgleichungsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate. Leipzig/Berlin 1924.

gehend von $\varepsilon = -3$ m, bei $\varepsilon = 0$ die Fläche halbiert sein, die für $\varepsilon = +3$ m erreicht wird*.

Nun sind die ε_i nicht aus Messungen derselben Größe zustande gekommen, deren mittlerer Wert mit dem wahren Wert gleichzusetzen ist, sondern beziehen sich auf verschiedene, mit den Tafelwerten verglichene Beobachtungen. Die Ergebnisse werden nicht bezüglich 0, sondern bezüglich dem Mittelwert der ε_i symmetrisch liegen. Entsprechend verschoben wird die Verteilung der ε_i ausfallen. Für die Braheschen Beobachtungen, die sich wegen der großen Zahl am besten für diese Untersuchung eignen, ergibt sich für die Verteilung folgende Anordnung:

im Bereich 0 ± m	55 Beobachtungen	=	58%
im Bereich 0 ± 2 m	83 Beobachtungen	=	88%
im Bereich 0 ± 3 m	94 Beobachtungen	=	100%.

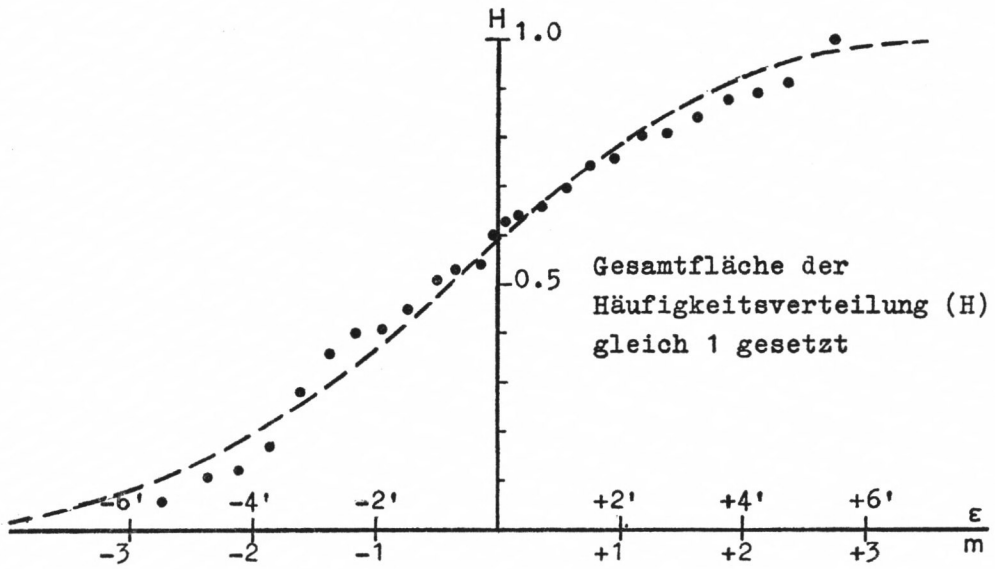

Fig. 12
Summenlinie der Häufigkeitsverteilung für die Beobachtungen von Tycho Brahe

Die Summenlinie, die in Fig. 12 dargestellt ist, zeigt, daß die Flächensumme der Häufigkeitsverteilung im Bereich (— 3 m, 0) einen Überschuß gegenüber dem Bereich (0, + 3 m) aufweist.

Dieser Überschuß kann ausgeglichen werden, wenn der Symmetriepunkt ($\varepsilon = 0$) in die Nähe von — 1 gelegt wird. Die ε_i wären hiernach um weniger als 1′ zu vergrößern.

Abschätzung des systematischen Fehlers

Die Trennung des systematischen Fehlers vom Gesamtfehler ist nach fehlertheoretischen Gesichtspunkten nicht exakt möglich. Anhaltspunkte für die Größenordnung des systematischen Fehlers lassen sich dadurch finden, daß eine ausgleichende Kurve durch die Meßpunkte (hier: ε_i) gelegt wird und die Abweichungen der Punkte y_i von der Kurve f (x)

* Nach H. Gebelein: Zahl und Wirklichkeit. Grundzüge einer mathematischen Statistik. 2. Aufl. Heidelberg 1949.

als verbleibende zufällige Fehler angesehen werden, wobei die Quadratsumme der Abstände ein Minimum werden soll. Dieser Weg läuft auf die Trennung zweier einander überlagerter Einflüsse einer statistischen Reihe hinaus, nämlich auf die einer zügigen Grundbewegung und auf die unregelmäßiger Schwankungen. P. Lorenz hat für Zwecke der Konjunkturstatistik diese Trennung in Form von Trendberechnungen mit Hilfe von Polynomen vorgenommen, derart daß

$$Q = \sum_{i=1}^{n} \{y_i - f(x_i)\}^2 = \text{Minimum}^*.$$

Überträgt man diese Aufgabenstellung auf die Untersuchung der hier vorliegenden Beobachtungsreihen, wäre es nicht sehr sinnvoll, für alle Beobachtungen eine Trendberechnung vorzunehmen. Einmal sind die Reihen nicht kontinuierlich genug, zum anderen liegen ihnen wahrscheinlich verschiedene Normalverteilungen zugrunde. Einige zeitlich gleichmäßig verteilte und zusammenhängende Beobachtungen, etwa von Brahe, als Auswahl aus der Gesamtzahl könnten bereits die gewünschten Anhaltspunkte für die Abschätzung geben.

Für eine derart einfache Verteilung hat P. Lorenz Polynome entwickelt und ausführliche Tabellen, auf die hier zur Rechenerleichterung zurückgegriffen werden soll, zur Koeffizientenbestimmung der Polynome angegeben. Zu allen symmetrisch zum Ursprung angeordneten Punkten gehört die gleiche relative Häufigkeit $h = \frac{1}{n}$, d. h. jeder Punkt ist gleich häufig, nämlich 1 mal, bestimmt worden.

Lorenz setzt:

$$f(x) = A_0X_0(x) + A_1X_1(x) + A_2X_2(x) + \ldots + A_nX_n(x).$$

Die Stützstellen sind:

a) für n ungerade

$$x_i = -\frac{n-1}{2}, -\frac{n-3}{2} \ldots -1, 0, +1, \ldots +\frac{n-1}{2}$$

b) für n gerade $-(n-1), -(n-3), \ldots -1, +1, \ldots +(n-1)$.

Die X_i sind Teilpolynome, die Tabellen zu entnehmen sind.

Die ersten Teilpolynome lauten z. B. für n gerade:

$$X_0(x) = 1$$

$$X_1(x) = x\sqrt{\frac{3}{n^2-1}}$$

$$X_2(x) = \{-(n^2-1) + 3x^2\}\sqrt{\frac{5}{4(n^2-1)(n^2-4)}}.$$

Die Koeffizienten bestimmen sich nach

$$A_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_iX_n(x_i), \text{ z. B. wird}$$

$$A_0 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i.$$

* Hier ist wieder dem Buch von H. Gebelein gefolgt worden. Vgl. hierzu auch E. Kreyszig, Statistische Methoden und ihre Anwendungen (Göttingen 1965). Abschnitt 105: Test bei nichtlinearer Regression.

2 kleinere Reihen seien von den Braheschen Beobachtungen ausgewählt:

1. Reihe: August 1595 bis Februar 1596, $n = 7$
2. Reihe: Juni 1596 bis März 1597, $n = 10$ (Fig. 13).

Die y_i (hier: ε_i) sind jeweils für das Monatsende genommen worden. Der betreffende Wert mußte z. T. aus benachbarten ε_i interpoliert werden.

In der Berechnung lassen sich wegen Symmetrie der Teilpolynome bezüglich des Ursprungs weitere Vereinfachungen treffen.

Die Rechnungen werden zweckmäßig tabellarisch angeordnet.

1. Reihe ($n = 7$)

	$\lvert x_i \rvert$	$\varepsilon_i - \varepsilon_{-i}$	X_1	X_2
	0	0.9	0	—1.1547
	1	—2.64	0.5	—0.8660
	2	2.45	1.0	0
	3	—2.30	1.5	1.4434
$\Sigma\, y_i X_i$		9.31	—2.32	—2.08
$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} y_i X_i$		1.33	—0.33	—0.30
		$= A_0$	$= A_1$	$= A_2$

für $n = 7$ wird der Tabelle der X_i entnommen:

$$X_1 = 0.5\, x$$
$$X_2 = -1.1547 + 0.2887\, x^2.$$

Damit wird

$$f(x) = y = 1.68 - 0.16\, x - 0.087\, x^2 \quad \text{(vgl. Fig. 13).}$$

Mit diesem Polynom werden die Restabstände bestimmt.

x_i	y_i	ε_i	$\varepsilon_i - y_i = v_i$
—3	1.38	0.8	—0.58
—2	1.65	0.75	—0.9
—1	1.75	3.9	+2.15
0	1.68	0.9	—0.78
+1	1.43	1.26	—0.17
+2	1.01	3.2	2.19
+3	0.42	—1.5	—1.92

Der mittlere Fehler, m_1 genannt, ergibt sich für die Ausgleichung vermittelnder Beobachtungen nach

$$m_1 = \sqrt{\frac{[vv]}{n-u}} \quad (\text{mit } u = 3 \text{ für } A_0, A_1, A_2)$$
$$= \sqrt{\frac{14.89}{4}}$$
$$m_1 = \pm\, 1'.93.$$

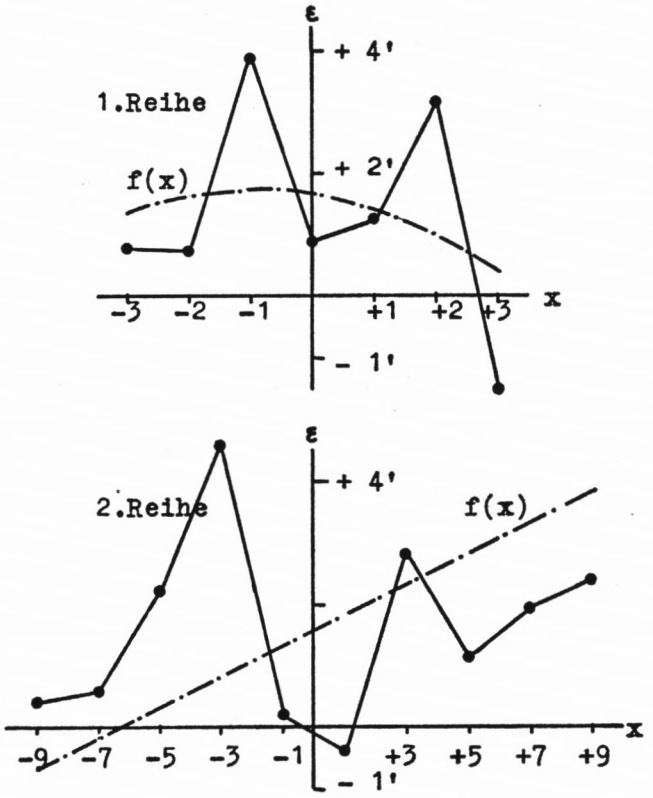

Fig. 13
Ausgleichende Kurven für zwei Beobachtungsreihen

2. Reihe (n = 10)

	$\lvert x_i \rvert$	$\varepsilon_i + \varepsilon_{-i}$	X_1	X_2
	1	—0.2	0.1741	—1.1010
	3	7.4	0.5222	—0.8257
	5	3.3	0.8704	—0.2752
	7	2.5	1.2185	0.5505
	9	2.8	1.5667	1.6514
$\Sigma\, y_i X_i$		15.8	14.13	—0.80
$\frac{1}{n}\Sigma\, y_i X_i$		1.58	1.41	—0.08
		$= A_0$	$= A_1$	$= A_2$

Für die Darstellung genügt ein Polynom 1. Ordnung:

$$f(x) = 1.58 + 1.41\, X_1.$$

X_1 für n = 10 wird der Tabelle entnommen:

$$X_1 = 0.1741\, x.$$

Damit wird

$$f(x) = y = 1.58 + 0.25\, x \quad \text{(vgl. Fig. 13).}$$

Über f (x) werden die Restabweichungen berechnet.

x_i	y_i	ε_i	$\varepsilon_i - y_i = v_i$
−9	−0.67	0.4	1.07
−7	−0.17	0.6	0.77
−5	0.33	2.2	1.87
−3	0.83	4.6	3.77
−1	1.33	0.2	−1.13
+1	1.83	−0.4	−2.23
+3	2.33	2.8	0.47
+5	2.83	1.1	−1.73
+7	3.33	1.9	−1.43
+9	3.83	2.4	−1.43

Mit $u = 2\,(A_0, A_1)$ wird

$$m_2 = \sqrt{\frac{33.0}{8}}$$
$$= \pm\, 2'.03\,.$$

Die ermittelten Fehler m_1 und m_2 sind die verbleibenden Restfehler der 2 Reihen nach Abspaltung des systematischen Fehlers. Geht man davon aus, daß sich der zufällige Fehler und der systematische Fehler quadratisch zum Gesamtfehler addieren*, erhält man nach

$$m_s^2 = m^2 - m_1^2 \text{ bzw.}$$
$$m_s^2 = m^2 - m_2^2$$

für den systematischen Fehler 0'.85 bzw. 0'.63, 51'' bzw. 38''. Werden jetzt die ε_i entsprechend den vorliegenden Ergebnissen um + 1' verbessert – in Übereinstimmung mit der Summenlinie von Fig. 12 – so verbleibt noch, ohne die korrigierten ε_i hier wiederzugeben, die Beobachtungsreihen erneut nach einigen Kriterien auf einen systematischen Fehleranteil hin zu untersuchen.

1. Vorzeichenprüfung

$$V = 0 \pm \sqrt{n}$$

Brahe	Fabricius
$V = 10$	$V = 9$
$\sqrt{n} = 10$	$\sqrt{n} = 5.$

Die ε_i sind dem Vorzeichen nach gleichmäßiger verteilt als früher.

2. Prüfung durch mittlere Fehlergrößen

$$\Sigma\,\varepsilon = 0 \pm m\sqrt{n}$$

Brahe	Fabricius
$\Sigma\,\varepsilon = 27$	$\Sigma\,\varepsilon = 11$
$m\sqrt{n} = 20$	$m\sqrt{n} = 8.$

Ein deutlicher Hinweis auf systematische Fehleranteile liegt nicht vor.

* Vgl. hierzu H. Wolf: Ausgleichungsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate. Abschnitt 17: Das Zusammenwirken von systematischen und zufälligen Fehlern. Bonn 1968.

3. Helmert-Kriterium

$$f - w = 0 \pm \sqrt{n - 1}$$

Brahe	Fabricius
$f - w = 40$	$f - w = 1$
$\sqrt{n-1} = 9$	$\sqrt{-1} = 5$
unverändert	verbessert.

Insgesamt läßt sich feststellen, daß die Kriterien zur Feststellung systematischer Fehler günstigere Ergebnisse erbracht haben: ein systematischer Fehleranteil am Gesamtfehler ist jetzt nicht mehr zu erkennen.

Es sind somit als Fehler berechnet worden:

	m	m'	t	t'
für Brahe	± 2′ 16″	± 2′ 8″	± 1′ 51″	± 1′ 45″
für Fabricius	± 1′ 35″	± 1′ 32″	± 1′ 20″	± 1′ 13″

Die Fehlergrößen bedeuten:

m der mittlere Fehler vor Abtrennung eines systematischen Anteils
m′ der mittlere Fehler nach Abtrennung eines systematischen Anteils
t, t′ die entsprechenden durchschnittlichen Fehler.

Abschließend ist zu bemerken, daß die Tafeln von Tuckerman einen geringen systematischen Fehleranteil enthalten, der aber die Ergebnisse einer Genauigkeitsuntersuchung – wie hier bei Jupiterbeobachtungen von Brahe und Fabricius – nicht merklich beeinträchtigt.

2.3 ZUSAMMENFASSUNG

Die vorliegende Genauigkeitsuntersuchung alter Jupiterbeobachtungen ist an Hand der Planetentafeln von B. Tuckerman vorgenommen worden. Für die Zeitpunkte der Beobachtungen wurden nach dem Verfahren von Everett-Laplace die Tafelwerte interpoliert, die dann die Vergleichswerte für entsprechende Beobachtungswerte bildeten.

Über die von Kepler zur Ableitung der Bahnelemente verwendeten Jupiterörter hinaus wurden weitere Beobachtungen herangezogen, um fundiertere Ergebnisse zu erhalten.

Insgesamt wurden untersucht:

1 Dionysische Beobachtung
4 Beobachtungen von Ptolemäus
4 Beobachtungen von Regiomontan
8 Beobachtungen von Walther
4 Beobachtungen von Kopernikus
6 Beobachtungen von Longomontan
107 Beobachtungen von Tycho Brahe
28 Beobachtungen von David Fabricius.

Es hat sich gezeigt, daß Kepler die 5 alten Beobachtungen, die wesentliche Bedeutung für die Ableitung der Jupiter-Epochen haben, richtig behandelt hat. Seine Verbesserungen kommen den tatsächlichen Werten nahe. Bei der Diskussion der Beobachtungen des 15., 16. und 17. Jahrhunderts war es notwendig, die Beobachtungen von Brahe und Fabricius herauszunehmen und eingehender zu behandeln; sie nehmen eine Sonderstellung ein. Wenn die Zahl der übrigen Beobachtungen auch gering ist und dem Ergebnis ihrer Untersuchung keine große Zuverlässigkeit zukommen kann, sind doch einige Tendenzen festzuhalten:

> Longomontan und Walther haben etwa gleich gut beobachtet, Kopernikus fällt dagegen deutlich ab, Regiomontan steht in der Mitte.

Der Vergleich zwischen Brahe und Fabricius fällt zugunsten des Friesen aus: die Genauigkeit seiner Jupiterbeobachtungen von $1\frac{1}{2}'$ erreicht Brahe nur in den besten Jahren seiner Zeit auf Hven, während er im Mittel um $\frac{1}{2}'$ schlechter liegt. Dieses Ergebnis ist sicherlich überraschend, wenn man den bescheidenen Aufwand von Fabricius mit dem großen Apparat auf Hven vergleicht. Es sieht ganz danach aus, als ob Tycho Brahe bei der Beobachtung des Jupiter und vielleicht auch anderer Planeten durch Einsatz verschiedener Instrumente bei wechselnden Beobachtern das Optimum nicht erreicht hat. Fabricius, auf sich allein gestellt, praktisch nur mit dem Sextanten Distanzen beobachtend, hat durch Kontinuität und Systematik der Beobachtungen, durch seine große Übung im Visieren, wohl auch durch Einfachheit des Instrumentariums, hier genauere Ergebnisse erzielt.

Im Gegensatz zu Fabricius läßt sich bei Brahe eine zeitliche Änderung der Beobachtungsgenauigkeit deutlich erkennen. Die genauesten Beobachtungen hat Brahe zwischen 1585 und 1595 auf Hven gemacht. Die Unruhe seines Lebens zur Zeit der ersten Jahre auf Hven und nach dem Weggang von Dänemark spiegelt sich in der geringeren Güte der Beobachtungen wider.

Abschließend sind beide Fehlerreihen auf systematische Anteile hin nach verschiedenen Kriterien untersucht worden. Aus zwei kleineren Teilreihen der Braheschen Beobachtungen ließen sich analog zu Trenduntersuchungen der Wirtschaftsstatistik von P. Lorenz mittels Polynome systematische Fehler eliminieren, die – in Größenordnung der angegebenen Tafelgenauigkeit – den Planetentafeln von Tuckerman zugehörig zu sein scheinen. Die ermittelten Beobachtungsgenauigkeiten ändern sich nur unwesentlich. Kepler hat eine günstige Auswahl der Beobachtungen zur Bestimmung der Bahnelemente getroffen: die alten ungenauen Beobachtungen konnte er, soweit es erforderlich war, verbessern, und von neueren Beobachtungen hat er die genauesten Beobachtungen, die von Brahe und Fabricius, herangezogen. Somit war von Seite der Beobachtungen her die beste Voraussetzung gegeben, genaue Jupiter-Tafeln zu berechnen.

LITERATURVERZEICHNIS

Al-Battani sive Albatenii Opus Astronomicum; ed. C. A. Nallino. Pubblicazioni del Reale Osservatorio di Brera in Milano. N. XL. Parte I. Mailand 1903.

Aristoteles Meteorologica; ed. J. Becker. Berlin 1829.

Bialas, V.: Die Rudolphinischen Tafeln von Johannes Kepler – Mathematische und astronomische Grundlagen. Nova Kepleriana Neue Folge Heft 2. München 1969.

Tychonis Brahe Opera Omnia; ed. I. L. E. Dreyer. Bd. X–XIII. Kopenhagen 1923–1926.

Gebelein, H.: Zahl und Wirklichkeit. Grundzüge einer mathematischen Statistik. 2. Aufl. Heidelberg 1949.

Helmert, F. R.: Die Ausgleichungsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate. Leipzig/Berlin 1924.

Jordan-Eggert-Kneißl: Handbuch der Vermessungskunde Bd. I. Stuttgart 1961.

Kepler, J.: Astronomia Nova, [Heidelberg] 1609. Johannes Kepler Gesammelte Werke Bd. III. München 1937.

Kepler, J.: Briefe 1599–1611. Johannes Kepler Gesammelte Werke Bd. XIV–XVI. München 1949–1954.

Keplers Handschriften. Kepler-Mss. Pulkowo.

Kepler, J.: Epitome Astronomiae Copernicanae. Linz 1618/20, Frankfurt 1621. Johannes Kepler Gesammelte Werke Bd. VII. München 1953.

Kepler, J.: Mysterium Cosmographicum. 1. Aufl. Tübingen 1596. Johannes Kepler Gesammelte Werke Bd. I. München 1938.

Kepler, J.: Tabulae Rudolphinae. Ulm 1627. Johannes Kepler Gesammelte Werke Bd. X. München 1969.

Nikolaus Kopernikus Gesamt-Ausgabe Bd. II; bs. von F. und K. Zeller. München 1949.

Kreyszig, E.: Statistische Methoden und ihre Anwendungen. Göttingen 1965.

List, M.: Der handschriftliche Nachlaß der Astronomen Johannes Kepler und Tycho Brahe. Deutsche Geodätische Kommission, Reihe E, Heft Nr. 2. München 1961.

Ch. S. Longomontani Astronomia Danica. Amsterdam 1622.

Ptolemäus: Almagest; ed. I. L. Heiberg, Bd. II. Bibliotheca Teubneriana 1903.

Scripta clarissimi mathematici M. J. Regiomontani. Nürnberg 1544.

Reinhold, E.: Prutenicae Tabulae coelestium motuum. Tübingen 1551.

Tuckerman, B.: Planetary, Lunar, and Solar Positions A. D. 2 to A. D. 1649. Philadelphia 1964.

Wattenberg, D.: David Fabricius – der Astronom Ostfrieslands (1564–1617). Archenhold-Sternwarte, Vorträge und Schriften Nr. 19. Berlin 1964.

Wermann, G.: Zur Berechnung systematischer Fehler aus Beobachtungsreihen. Zeitschrift für Vermessungskunde 10/1958.

Wolf, H.: Ausgleichungsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate. Bonn 1968.

Zurmühl, R.: Praktische Mathematik für Ingenieure und Physiker. 5. Aufl. Berlin und Heidelberg 1965.