

BAYERISCHE AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE

SITZUNGSBERICHTE

JAHRGANG

1989

MÜNCHEN 1990

VERLAG DER BAYERISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung München

Über einen elementaren Satz der Analysis

Von G. G. LEBESGUE

Revue de Mathématique (Nouv. Sér.) 1906, 11, 2, 177

Es sei $f(x)$ eine in der Zahl a unendliche in der Heine
Form $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ konvergente Folge von reellen
Zahlen, die die Eigenschaft hat, dass für jedes
positive ϵ ein $\delta > 0$ existiert, sodass für alle
 x mit $|x - a| < \delta$ die Ungleichung $|f(x) - \infty| < \epsilon$ gilt.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6} \quad (1)$$

Es sei $f(x)$ eine in a unendliche in der Heine
Form $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ konvergente Folge von reellen
Zahlen, die die Eigenschaft hat, dass für jedes
positive ϵ ein $\delta > 0$ existiert, sodass für alle
 x mit $|x - a| < \delta$ die Ungleichung $|f(x) - \infty| < \epsilon$ gilt.

Es sei $f(x)$ eine in a unendliche in der Heine
Form $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ konvergente Folge von reellen
Zahlen, die die Eigenschaft hat, dass für jedes
positive ϵ ein $\delta > 0$ existiert, sodass für alle
 x mit $|x - a| < \delta$ die Ungleichung $|f(x) - \infty| < \epsilon$ gilt.

Es sei $f(x)$ eine in a unendliche in der Heine
Form $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ konvergente Folge von reellen
Zahlen, die die Eigenschaft hat, dass für jedes
positive ϵ ein $\delta > 0$ existiert, sodass für alle
 x mit $|x - a| < \delta$ die Ungleichung $|f(x) - \infty| < \epsilon$ gilt.

Es sei $f(x)$ eine in a unendliche in der Heine
Form $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ konvergente Folge von reellen
Zahlen, die die Eigenschaft hat, dass für jedes
positive ϵ ein $\delta > 0$ existiert, sodass für alle
 x mit $|x - a| < \delta$ die Ungleichung $|f(x) - \infty| < \epsilon$ gilt.

Die elementare Methode

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6} \quad (1)$$

Es sei $f(x)$ eine in a unendliche in der Heine
Form $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ konvergente Folge von reellen
Zahlen, die die Eigenschaft hat, dass für jedes
positive ϵ ein $\delta > 0$ existiert, sodass für alle
 x mit $|x - a| < \delta$ die Ungleichung $|f(x) - \infty| < \epsilon$ gilt.

Es sei $f(x)$ eine in a unendliche in der Heine
Form $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ konvergente Folge von reellen
Zahlen, die die Eigenschaft hat, dass für jedes
positive ϵ ein $\delta > 0$ existiert, sodass für alle
 x mit $|x - a| < \delta$ die Ungleichung $|f(x) - \infty| < \epsilon$ gilt.

Es sei \mathcal{A} die Menge aller Aussagen, die sich aus den Aussagen A_1, \dots, A_n durch die Aussagenlogik bilden lassen. Dann ist \mathcal{A} ein Erzeugnis der Aussagen A_1, \dots, A_n . Wir zeigen nun, dass \mathcal{A} ein Erzeugnis der Aussagen A_1, \dots, A_n ist. Es gilt $\mathcal{A} = \langle A_1, \dots, A_n \rangle$.

Es sei \mathcal{B} die Menge aller Aussagen, die sich aus den Aussagen A_1, \dots, A_n durch die Aussagenlogik bilden lassen. Dann ist \mathcal{B} ein Erzeugnis der Aussagen A_1, \dots, A_n . Wir zeigen nun, dass $\mathcal{B} = \mathcal{A}$ ist.

Erste Richtung:

$$\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B} \quad (1)$$

Es sei \mathcal{A} die Menge aller Aussagen, die sich aus den Aussagen A_1, \dots, A_n durch die Aussagenlogik bilden lassen. Dann ist \mathcal{A} ein Erzeugnis der Aussagen A_1, \dots, A_n . Wir zeigen nun, dass $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ ist.

$$\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B} \quad (2)$$

Es sei \mathcal{B} die Menge aller Aussagen, die sich aus den Aussagen A_1, \dots, A_n durch die Aussagenlogik bilden lassen. Dann ist \mathcal{B} ein Erzeugnis der Aussagen A_1, \dots, A_n .

$$\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A} \quad (3)$$

Zweite Richtung:

Es sei

$$\mathcal{A} = \langle A_1, \dots, A_n \rangle = \langle A_1, \dots, A_n, \neg A_1 \rangle = \langle A_1, \dots, A_n, \neg A_2 \rangle = \dots = \langle A_1, \dots, A_n, \neg A_n \rangle$$

Es sei \mathcal{B} die Menge aller Aussagen, die sich aus den Aussagen A_1, \dots, A_n durch die Aussagenlogik bilden lassen. Dann ist \mathcal{B} ein Erzeugnis der Aussagen A_1, \dots, A_n .

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \langle A_1, \dots, A_n, \neg A_1 \rangle = \langle A_1, \dots, A_n, \neg A_2 \rangle = \dots = \langle A_1, \dots, A_n, \neg A_n \rangle \\ &= \langle A_1, \dots, A_n, \neg A_1 \rangle = \mathcal{B} \end{aligned}$$

Es sei \mathcal{B} die Menge aller Aussagen, die sich aus den Aussagen A_1, \dots, A_n durch die Aussagenlogik bilden lassen. Dann ist \mathcal{B} ein Erzeugnis der Aussagen A_1, \dots, A_n .

$$\mathcal{B} = \langle A_1, \dots, A_n, \neg A_1 \rangle = \langle A_1, \dots, A_n, \neg A_2 \rangle = \dots = \langle A_1, \dots, A_n, \neg A_n \rangle$$

$$\mathcal{B} = \mathcal{A}$$

Es sei \mathcal{B} die Menge aller Aussagen, die sich aus den Aussagen A_1, \dots, A_n durch die Aussagenlogik bilden lassen. Dann ist \mathcal{B} ein Erzeugnis der Aussagen A_1, \dots, A_n .

$$\mathcal{B} = \langle A_1, \dots, A_n \rangle$$

Es sei \mathcal{B} die Menge aller Aussagen, die sich aus den Aussagen A_1, \dots, A_n durch die Aussagenlogik bilden lassen. Dann ist \mathcal{B} ein Erzeugnis der Aussagen A_1, \dots, A_n .

$$\mathcal{B} = \langle A_1, \dots, A_n \rangle$$

\square

Alle diese Hermitischen Abbildungen $\alpha \in \mathfrak{H}$

$$\begin{aligned} \alpha^2(x) &= \alpha(\alpha(x)) = \alpha(ax - bx) = \alpha(ax) - \alpha(bx) = 2\alpha(ax) - 2\alpha(bx) \\ &= 2ax - 2bx = 2(ax - bx) = 2\alpha(x) = 2\alpha(x) - 2\alpha(x) \\ &= 2ax - 2bx \end{aligned}$$

Man erhält also unmittelbar für alle $\alpha \in \mathfrak{H}$ und $x \in \mathfrak{H}$ die Aussage

$$\alpha^2(x) = 2\alpha(x) \quad \Leftrightarrow \quad \alpha(x) = 0 \quad \vee \quad \alpha(x) = 2x$$

Wir führen nun zwei Fälle durch

$$\alpha(x) = 0 \quad \vee \quad \alpha(x) = 2x \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = 0 \quad \vee \quad \alpha = 2\text{id}_{\mathfrak{H}}$$

mit Hilfe der folgenden Beobachtung (2).

2. Normalen sind idempotent

Beweisung für $\alpha \in \mathfrak{H}$ und $x \in \mathfrak{H}$ durch die Identifizierung von $\alpha(\alpha(x))$ mit $\alpha(\alpha^2(x)) = \alpha(\alpha(\alpha(x))) = \alpha^2(\alpha(x))$

Man erhält

$$\alpha(\alpha^2(x)) = \alpha^2(\alpha(x))$$

2

Charakterisierung von Normalen

$$\alpha \in \mathfrak{H} \quad \text{Normal} \quad \Leftrightarrow \quad \alpha^2 = \alpha$$

Die obige Aussage ist ein Spezialfall von Lemma 1.1.1.1, wenn man \mathfrak{H} als \mathfrak{H} identifiziert und \mathfrak{H} als \mathfrak{H} auffasst.

Das ist auch äquivalent dazu, daß α hermitisch ist und man sich die α als $\alpha(x) = \langle x, \alpha(x) \rangle \alpha(x)$ vorstellen kann.

Man erhält also, daß Normalen $\alpha \in \mathfrak{H}$ hermitisch sind und $\alpha(x) = \langle x, \alpha(x) \rangle \alpha(x)$ für alle $x \in \mathfrak{H}$ gilt. Man erhält also, daß Normalen $\alpha \in \mathfrak{H}$ hermitisch sind und $\alpha(x) = \langle x, \alpha(x) \rangle \alpha(x)$ für alle $x \in \mathfrak{H}$ gilt.

Man erhält also, daß Normalen $\alpha \in \mathfrak{H}$ hermitisch sind und $\alpha(x) = \langle x, \alpha(x) \rangle \alpha(x)$ für alle $x \in \mathfrak{H}$ gilt.

Man erhält also, daß Normalen $\alpha \in \mathfrak{H}$ hermitisch sind und $\alpha(x) = \langle x, \alpha(x) \rangle \alpha(x)$ für alle $x \in \mathfrak{H}$ gilt.

Beispiel 1

Die Aussagen A und B sind durch die Wahrheitstabelle (1) beschrieben.

A	B	$A \vee B$	$A \wedge B$	$A \rightarrow B$	$A \leftrightarrow B$
w	w	w	w	w	w
w	f	w	f	f	f
f	w	w	f	w	f
f	f	f	f	w	w

Beispiel 2

A	B	C	$A \vee B$	$A \wedge B$	$A \rightarrow B$	$A \leftrightarrow B$
w	w	w	w	w	w	w
w	w	f	w	w	w	w
w	f	w	w	f	f	f
w	f	f	w	f	f	f
f	w	w	w	f	w	f
f	w	f	w	f	w	f
f	f	w	f	f	w	w
f	f	f	f	f	w	w

Beispiel 3: Die Aussagen A und B sind durch

A	B	$A \vee B$	$A \wedge B$	$A \rightarrow B$	$A \leftrightarrow B$
w	w	w	w	w	w
w	f	w	f	f	f
f	w	w	f	w	f
f	f	f	f	w	w

Beispiel 4: Die Aussagen A und B sind durch

die Wahrheitstabelle (2) beschrieben. Die Aussagen A und B sind durch die Wahrheitstabelle (3) beschrieben. Die Aussagen A und B sind durch die Wahrheitstabelle (4) beschrieben.

Die Aussagen A und B sind durch die Wahrheitstabelle (5) beschrieben.

A	B	$A \vee B$	$A \wedge B$	$A \rightarrow B$	$A \leftrightarrow B$
w	w	w	w	w	w
w	f	w	f	f	f
f	w	w	f	w	f
f	f	f	f	w	w

Es sei $\alpha_1 \in \mathbb{R}$, $\alpha_2 \in \mathbb{R}$ beliebig und $\alpha_3 \in \mathbb{R}$ beliebig.

$$f(x) = \sum_{i=1}^3 \alpha_i (x - \lambda)^i = \alpha_3 (x - \lambda)^3 + \alpha_2 (x - \lambda)^2 + \alpha_1 (x - \lambda)$$

Man bestimme $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ so, dass $f(x)$ die Nullstellen $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda$ besitzt. Man bestimme $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$.

$$f(\lambda) = f'(\lambda) = f''(\lambda) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \alpha_3 (\lambda - \lambda)^3 + \alpha_2 (\lambda - \lambda)^2 + \alpha_1 (\lambda - \lambda) = 0 \\ 3\alpha_3 (\lambda - \lambda)^2 + 2\alpha_2 (\lambda - \lambda) + \alpha_1 = 0 \\ 6\alpha_3 (\lambda - \lambda) + 2\alpha_2 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 0 \\ 2\alpha_2 = 0 \\ 6\alpha_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$$

Man bestimme $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$.

Man bestimme $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$.

$$\begin{aligned} f(x) &= \alpha_3 (x - \lambda)^3 + \alpha_2 (x - \lambda)^2 + \alpha_1 (x - \lambda) \\ &= \alpha_3 (x^3 - 3\lambda x^2 + 3\lambda^2 x - \lambda^3) + \alpha_2 (x^2 - 2\lambda x + \lambda^2) + \alpha_1 (x - \lambda) \\ &= \alpha_3 x^3 - 3\alpha_3 \lambda x^2 + 3\alpha_3 \lambda^2 x - \alpha_3 \lambda^3 + \alpha_2 x^2 - 2\alpha_2 \lambda x + \alpha_2 \lambda^2 + \alpha_1 x - \alpha_1 \lambda \end{aligned}$$

Man bestimme $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ so, dass $f(x)$ die Nullstellen $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda$ besitzt. Man bestimme $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$.

$$f(x) = \alpha_3 (x - \lambda)^3 + \alpha_2 (x - \lambda)^2 + \alpha_1 (x - \lambda)$$

Man bestimme $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$.

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0 \Rightarrow f(x) = 0$$

Man bestimme $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$.

Man bestimme $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ so, dass $f(x)$ die Nullstellen $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda$ besitzt.

Man bestimme $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ so, dass $f(x)$ die Nullstellen $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda$ besitzt. Man bestimme $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$.

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0 \Rightarrow f(x) = 0$$

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$$

Die für $f(x) = \ln(x)$ definierten Ableitungen $f'(x)$ und $f''(x)$ sind

$$f'(x) = \frac{1}{x} \quad \text{für } x > 0 \quad \text{und} \quad f''(x) = -\frac{1}{x^2}$$

gesucht. Man bestimme nun die Ableitung von

$$f(x) = \ln(x^2) = 2 \ln(x) \quad \text{für } x > 0 \quad \text{und} \quad f''(x) = -\frac{2}{x^2}$$

$$f'(x) = \ln(x^2) = 2 \ln(x) \quad \text{für } x > 0 \quad \text{und} \quad f''(x) = -\frac{2}{x^2}$$

$$= 2 \ln(x) = 2 \ln(x) = 2 \ln(x)$$

Man bestimme nun die Ableitung von $f(x) = \ln(x^2)$

$$f'(x) = \frac{1}{x^2} \cdot 2x = \frac{2}{x} \quad \text{für } x > 0$$

Die Ableitung von $f(x) = \ln(x^2)$ ist $f'(x) = \frac{2}{x}$

Man bestimme nun die Ableitung von

$f(x) = \ln(x^2)$

$$f'(x) = \ln(x^2) = 2 \ln(x)$$

$$f''(x) = \frac{1}{x^2} \cdot 2x = \frac{2}{x}$$

$$f'''(x) = -\frac{2}{x^2} = -\frac{2}{x^2}$$

Man bestimme nun die Ableitung von $f(x) = \ln(x^2)$ und die Ableitung von

$f(x) = \ln(x^2) = 2 \ln(x)$ und $f'(x) = \frac{2}{x}$ und $f''(x) = -\frac{2}{x^2}$

Man bestimme nun

$$f'(x) = \frac{1}{x^2} \cdot 2x = \frac{2}{x} \quad \text{für } x > 0 \quad \text{und} \quad f''(x) = -\frac{2}{x^2}$$

Man bestimme nun die Ableitung von $f(x) = \ln(x^2)$ und die Ableitung von $f(x) = \ln(x^2)$ und die Ableitung von $f(x) = \ln(x^2)$

$$f'(x) = \frac{1}{x^2} \cdot 2x = \frac{2}{x} \quad \text{für } x > 0 \quad \text{und} \quad f''(x) = -\frac{2}{x^2}$$

