BAYERISCHE AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE

SITZUNGSBERICHTE

JAHRGANG

1989

MÜNCHEN 1990

VERLAG DER BAYERISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung München

Beispiele zur ordnungsgeometrischen Scheiteltheorie

von **Georg Nöbeling**

Es sei K die Klasse aller k-sekantenfreien, glatten (geschlossenen) Kurven C^1 im k-dimensionalen, reellen, projektiven Raum P^k ($k \geqq 2$) mit endlicher linearer Ordnung ord (C) (: = max $|C \cap L|$, genommen über alle Hyperebenen L). K zerfällt in zwei Unterklassen: a) die Klasse K' aller $C' \in K$ mit ord $(C') = k, k+2, k+4, \ldots$; b) die Klasse K'' aller $C'' \in K$ mit ord $(C'') = k+1, k+3, \ldots$[2,3,4] Für jedes $C \in K$ sei s (C) die Anzahl aller Scheitel von C (ein Punkt p von C heißt ein Scheitel von C, wenn in jeder Umgebung von p mindestens $k+1$ Punkte von C existieren, welche auf einer Hyperebene liegen). Wir behaupten:

Zu jedem $m = 0, 2, 4, \ldots, \infty$ existiert a) in K' eine Kurve C'_m mit $s(C'_m) = m$ und ord $(C'_m) \leqq 9k^2$, b) in K'' eine Kurve C''_m mit $s(C''_m) = k+1+m$ und ord $(C''_m) \leqq 9k^2$.[5]

Beweis. 1. Wir verwenden mehrfach folgende Kriterien (**A**), (**B**), (**C**). Es seien $x_0, x_1, \ldots, x_k$ homogene Koordinaten im P^k. Ein Stück einer Kurve C im P^k sei durch eine k-mal stetig differenzierbare Vektorfunktion $X(t) = (x_0(t), \ldots, x_k(t))$ dargestellt. (**A**) Hat C an einer Stelle t einen Scheitel, so sind $X, X', \ldots, X^{(k)}$ an dieser Stelle linear abhängig. – Nun sei speziell $x_0 = 1$, $x_i = t^{n_i} + o(t^{n_i})$ mit ganzen $n_i > 0$ für $i = 1, \ldots, k$ und $n_1 < \ldots < n_k$; an der Stelle $t = 0$ liege kein Häufungspunkt der Scheitel von C. (**B**) Sind $n_1, n_2 - n_1, \ldots, n_{k-1} - n_{k-2}$ ungerade, so ist C an der Stelle $t = 0$ glatt. (**C**) Sind $n_1, n_2 - n_1, \ldots n_{k-1} - n_{k-2}$ ungerade, so hat C an der Stelle $t = 0$ einen Scheitel, wenn und nur wenn $n_k - n_{k-1}$ gerade ist.[6]

2. Als Muster für einen Teil der folgenden Überlegungen erledigen wir zunächst den Fall $m = 0$.

2a. Definition von C'_0 mittels lokaler Parameter t und u ($-\infty < t < \infty$; $-\infty < u < \infty$; $tu = 1$):

$$x_0 = 1,\ x_1 = t,\ \ldots,\ x_{k-1} = t^{k-1},\ x_k = t^k;$$
$$x_0 = u^k,\ x_1 = u^{k-1},\ \ldots,\ x_{k-1} = u,\ x_k = 1.$$

Angenommen, C_o' hat eine k-Sekante S. Die Projektion π aus dem der Stelle $u = o$ entsprechenden, „unendlich fernen" Punkt p_∞ von C_o' in den $P^{k-1} \subset P^k$ mit der Gleichung $x_k = o$ bildet C_o' schlicht ab auf die Kurve $\pi(C_o')$, definiert durch $x_o = 1, x_1 = t, \ldots, x_{k-1} = t^{k-1}$. Enthielte S den Punkt p_∞ nicht, so wäre $\pi(S)$ eine Hyperebene im P^{k-1}; ihre Gleichung sei $a_o x_o + \ldots + a_{k-1} x_{k-1} = o$; das Polynom $a_o + a_1 t + \ldots + a_{k-1} t^{k-1}$ hätte dann mindestens k reelle (nicht notwendig verschiedene) Nullstellen. Widerspruch. Also liegt p_∞ in S. Dann ist $\pi(S) = S \cap P^{k-1}$ und $\pi(S)$ eine $(k-1)$-Sekante von $\pi(C_o')$. Eine mehrfache Wiederholung dieser Überlegung führt zu dem Schluß, daß die Kurve im P^2, definiert durch $x_o = 1, x_1 = t, x_2 = t^2$ einen Doppelpunkt hat. Abermals Widerspruch. Also hat C_o' keine k-Sekante. – Durch Entwicklung von $x_o, x_1, \ldots, x_k$ nach $\bar{t} = t - t_o$ für eine beliebige Stelle t_o mit $-\infty < t_o < \infty$ und durch eine lineare Koordinatentransformation können wir an der Stelle $\bar{t} = o$ die Situation der Kriterien (**A**), (**B**) und (**C**) herstellen. Sie ergeben, daß C_o' an der Stelle $\bar{t} = o$, d. h. an der Stelle t_o glatt ist und dort keinen Scheitel hat. Analog für ein u_o. – Für jedes $C \in K$ ist $\mathrm{ord}(C) \geqq k$. Weil jede Gleichung $a_o + a_1 t + \ldots + a_k t^k = o$ mit reellen Koeffizienten höchstens k reelle Nullstellen hat, ist $\mathrm{ord}(C_o') \leqq k$. Also ist $\mathrm{ord}(C_o') = k$.

2b. Für jedes reelle t sei $R(t) := (1 + t^2)^{-1}$. Für jedes ganze $n \geqq 1$ ist die n-te Ableitung $R^{(n)}(t) = P_n(t) \cdot R^{n+1}(t)$, wobei P_n ein Polynom n-ten Grades ist. – Definition von C_o'':

$$x_o = 1,\ x_1 = t, \ldots, x_{k-1} = t^{k-1},\ x_k = R(t);$$
$$x_o = u^{k-1},\ x_1 = u^{k-2}, \ldots, x_{k-1} = 1,\ x_k = u^{k+1} R(u).$$

Analog wie in **2a** ergibt sich: C_o'' ist k-sekantenfrei und glatt. Wäre $\mathrm{ord}(C_o'') < k + 1$, also $\mathrm{ord}(C_o'') = k$, so gäbe es eine Gleichung $a_o(1 + t^2) + a_1 t(1 + t^2) + \ldots + a_{k-1} t^{k-1}(1 + t^2) + a_k = o$ mit reellen Koeffizienten, welche k reelle und eine nicht reelle Nullstelle hat; also ist $\mathrm{ord}(C_o'') = k + 1$. Aus letzterem folgt (l. c.[4]), daß C_o'' an genau $k + 1$ Stellen einen Scheitel hat; es sind dies die k Nullstellen $t_1, \ldots, t_k$ des Polynoms P_k und die Stelle $u = o$.

3. Der Fall $o < m = 2n < \infty$. **3a.** Es sei $C_o^\star$ die folgendermaßen definierte „Basiskurve":

$$x_o = 1,\ x_1 = t, \ldots, x_{k-1} = t^{k-1},\ x_k = t^{k+2};$$
$$x_o = u^{k+2},\ x_1 = u^{k+1}, \ldots, x_{k-1} = u^3,\ x_k = 1.$$

Analog wie in **2a** ergibt sich, daß $C_o^\star$ k-sekantenfrei und glatt ist und daß $C_o^\star$ keinen Scheitel hat. Also ist ord $(C_o^\star) = k^1$). Wir werden die Kurve C'_m gewinnen, indem wir aus der Basiskurve n kleine Stücke herausschneiden und durch Bogen B_i mit je zwei Scheiteln ersetzen.

Zunächst wählen wir n Zahlen $t_1, \ldots, t_n$ im offenen Einheitsintervall der t-Geraden. Es seien $p_i = x(t_i)$, $i = 1, \ldots, n$ die zugehörigen Punkte von $C_o^\star$. Wegen ord $(C_o^\star) = k$ existieren Umgebungen U_i der p_i (offen im P^k) mit folgender Eigenschaft: 1) Jede Hyperebene hat mit höchstens k der U_i einen Durchschnitt $\neq \emptyset$. Daher für hinreichend kleines $\varepsilon_i > o$ und $\delta_i > o$: 2) Jeder Punkt $(1, t, \ldots, t^{k-1}, t^{k+2} + \tau)$ des P^k mit $|t - t_i| \leqq \delta_i$ und $|\tau| \leqq \varepsilon_i$ liegt in U_i. Für jedes $i = 1, \ldots, n$ wählen wir nun ein $c_i > o$, für welches wir zunächst nur dreierlei fordern: $c_i > 1$ und $c_i > 1/\delta_i$; das offene Intervall I_i mit dem Mittelpunkt t_i und der Länge $2/c_i$ ist $\subset I$; $I_i \cap I_j = \emptyset$ für $i \neq j$. Sodann sei g die folgendermaßen definierte Funktion: $g(t) := o$ für alle reellen t mit $|t| \geqq 1$ und $g(t) := (1 - t^2)^{k+2}$ für $|t| \leqq 1$. g ist $k + 1$-mal stetig differenzierbar und es ist $|g| \leqq 1$.

Für ein δ_i und ein c_i, welche den vorstehenden Bedingungen genügen, definieren wir schließlich $f_i(t) := \varepsilon_i g(c_i(t - t_i))$. Es gilt: 3_i) $|f_i| \leqq \varepsilon_i$; 4_i) f_i verschwindet identisch außerhalb von I_i; 5_i) f_i ist $k + 1$-mal stetig differenzierbar. Für jedes $r = o, 1, \ldots, k + 1$ ist die r-te Ableitung $f_i^{(r)} = \varepsilon_i c_i^r g^{(r)}$. Daher können wir ε_i und c_i im Rahmen der bereits aufgestellten Forderungen so wählen, daß gilt: 6_i) an genau zwei Stellen $t'_i, t''_i \in I_i$ ist $f_i^{(k)}(t) = t^2 \cdot (k + 2)!/2$; 7_i) an diesen beiden Stellen ist $f_i^{(k+1)}(t) \neq t \cdot (k + 2)!$ (Denn es sei $M(\varepsilon_i, c_i) := \max f_i^{(k)}$ – es ist $> o$ – und $t_i = t(\varepsilon_i, c_i)$ das kleinste $t \in I_i$ mit $f_i^{(k)}(t) = M(\varepsilon_i, c_i)$. Dann können wir ε_i (beliebig klein) und c_i (beliebig groß) so wählen, daß erstens $f_i^{(k)}(t_i) = t_i^2 \cdot (k + 2)!/2$ ist und zweitens an jeder Stelle $t \neq t_i$ von I_i, an welcher $f_i^{(k)}$ ein lokales Maximum hat, dieses Maximum $< t^2 \cdot (k + 2)!/2$ ist. In I_i existiert dann genau ein zweites, von t_i verschiedenes t''_i (es ist $< t_i$) mit $f_i^{(k)}(t''_i) = (t''_i)^2 \cdot (k + 2)!/2$. Die beiden Stellen $t'_i := t_i$ und t''_i leisten das Verlangte.)

Jetzt sei $f := f_1 + \ldots + f_n$. Dann folgt aus 3_i)–7_i), weil die Intervalle I_i fremd sind: 3) $|f| \leqq \varepsilon_i$ auf I_i; 4) f verschwindet identisch außerhalb von $I_1 \cup \ldots \cup I_n \subset I$; 5) f ist $k + 1$-mal stetig differenzierbar; 6) an genau zwei Stellen $t'_i, t''_i \in I_i$ ist $f^{(k)}(t) = t^2 \cdot (k + 2)!/2$; 7) an diesen Stellen ist $f^{(k+1)}(t) \neq t \cdot (k + 2)!$

Definition der Kurve $C'_m \in K'$:

$$x_o = 1,\ x_1 = t,\ \ldots,\ x_{k-1} = t^{k-1},\ x_k = t^{k+2} - f(t);$$
$$x_o = u^{k+2},\ x_1 = u^{k+1},\ \ldots,\ x_{k-1} = u^3,\ x_k = 1 \qquad (|u| < 1).$$

Wie in **2a** ergibt sich zufolge 3)–7): C'_m ist glatt und k-sekantenfrei; an den m Stellen $t'_1, \ldots, t''_n$ und nur dort hat C'_m einen Scheitel. Weiter ist für jedes i der Bogen $B_i \subset C'_m$ über $\overline{I}_i$ streng konvex und hat nur zwei Scheitel; also ist $\mathrm{ord}(B_i) \leqq k + 2$ zufolge l. c.[2]), II. Ist nun L eine Hyperebene, welche mit C'_m und $C^\star_o$ höchstens Schnittpunkte gemein hat, so setzen wir $|C'_m \cap L| = : l$. Dann ist $l \equiv |C^\star_o \cap L|$ (mod 2), wegen ord $(C^\star_o) = k$ also ord $(C'_m) \equiv k$ und folglich $C'_m \in K'$. Weil ord $(C^\star_o) = k$ ist, liegen von den l Punkten von $C^\star_o \cap L$ höchstens k nicht in den Bogen B_i und nach 1)–4) hat L mit höchstens k Bogen B_i einen nichtleeren Durchschnitt. Es folgt $l \leqq k + k\,(k + 2) \leqq 9k^2$. Daher ist auch ord $(C'_m) \leqq 9k^2$.

3b. Wir modifizieren die Überlegungen in **3a** folgendermaßen. Als Grundkurve $C^{\star\star}_o$ wählen wir die in **2b** definierte Kurve C''_o. Als Intervall I wählen wir ein offenes Intervall der t-Geraden mit folgenden zwei Eigenschaften: I enthält keine der k + 1 Stellen, an denen $C^{\star\star}_o$ einen Scheitel hat; über I ist die k-te Ableitung $R^{(k)}$ von R positiv und monoton wachsend. Wir ersetzen in 1): k durch k + 1; in 6_i) und 6): $t^2 \cdot (k + 2)!/2$ durch $R^{(k)}(t)$; in 7): $t \cdot (k + 2)!$ durch $R^{(k+1)}(t)$. Nun die Definition von C''_m:

$$x_o = 1,\ x_1 = t,\ \ldots,\ x_{k-1} = t^{k-1},\ x_k = R(t) - f(t);$$
$$x_o = u^{k-1},\ x_1 = u^{k-2},\ \ldots,\ x_{k-1} = 1,\ x_k = u^{k+1}\,R(u).$$

Analoge Schlüsse wie in **3a** ergeben, daß C''_m k-sekantenfrei und glatt ist, an den m Stellen $t'_1, \ldots, t''_n$ und nur dort einen Scheitel hat und daß schließlich ord $(C''_m) \leqq 9k^2$ ist.

4. Der Fall $m = \infty$ · **4a.** Es sei $C^\star_o$ die in 3a definierte Basiskurve.

Vorbemerkung. In $C^\star_o$ existiert eine Folge von Punkten $p_i = x(t_i)$ mit $1 > t_1 > t_2 \ldots$, $\lim t_i = o$ und zu jedem i eine (im P^k offene) Umgebung U_i von p_i mit $\overline{U_i} \cap \overline{U_j} = \emptyset$ für $i \neq j$ mit folgender Eigenschaft: Je k + 1 Punkte $q_{i_1}, \ldots, q_{i_{k+1}}$ mit $q_{i_1} \in \overline{U_{i_1}}, \ldots, q_{i_{k+1}} \in \overline{U_{i_{k+1}}}$ und verschiedenen $i_1, \ldots, i_{k+1}$ sind linear unabhängig.

Die Schmieghyperebene L_o an $C^\star_o$ im Punkt $p_o = x(o)$ hat mit $C^\star_o$ nur den Punkt p_o gemein. Wählen wir also den Punkt $p_1 = x(t_1)$ mit $1 > t_1 > o$ beliebig und eine Umgebung U_1 von p_1 mit $\overline{U_1} \cap L_o = \emptyset$, so existiert eine Umgebung W^1 von p_o mit $\overline{W^1} \cap \overline{U_1} = \emptyset$ derart, daß gilt: Für je k Punkte $w_1^1, \ldots, w_k^1 \in W^1 \cap C_o^\star$, verschieden oder nicht, und jeden Punkt $q_1 \in \overline{U_1}$ sind die k + 1 Punkte $w_1^1, \ldots, w_k^1, q_1$ linear unabhängig (bei zusammenfallenden Punkten w_i^1 ist der von ihnen aufgespannte Schmiegraum zu nehmen). Induktionsvoraussetzung: Für ein natürliches $n > o$ seien $p_1, \ldots, p_n$ mit $p_i = x(t_i)$, $1 > t_1 > \ldots > t_n > o$ Punkte von $C_o^\star$ und $U_1, \ldots, U_n$ Umgebungen dieser Punkte mit $\overline{U_i} \cap \overline{U_j} = \emptyset$ für $i \neq j$, sowie W^n eine Umgebung von p_o mit $\overline{U_i} \cap \overline{W^n} = \emptyset$ für $i = 1, \ldots, n$ derart, daß je k + 1 Punkte $w_1^n, \ldots, w_h^n \in \overline{W^n} \cap C_o^\star$, $q_{h+1} \in \overline{U_{i_{h+1}}}, \ldots, q_{k+1} \in \overline{U_{i_{k+1}}}$ mit verschiedenen $i_{h+1}, \ldots, i_{k+1}$ linear unabhängig sind ($o \leqq h \leqq k + 1$; $h = o$ bedeutet: $q_1 \in \overline{U_{i_1}}, \ldots, q_{k+1} \in \overline{U_{i_{k+1}}}$ sind linear unabhängig). Nun wählen wir einen Punkt $p_{n+1} = x(t_{n+1}) \in W^n$ mit $t_n > t_{n+1} > o$, sowie eine Umgebung U_{n+1} von p_{n+1} und eine Umgebung W^{n+1} von p_o analog wie soeben U_1 und W^1. Dabei können wir (Beweis indirekt) auf Grund der Induktionsvoraussetzung U_{n+1} so klein wählen, daß gilt: Sind $w_1^{n+1}, \ldots, w_{h-1}^{n+1}$ Punkte von $\overline{W^{n+1}} \cap C_o^\star$, verschieden oder nicht, $q_h \in \overline{U_{i_{n+1}}}$, $q_{h+1} \in \overline{U_{i_{h+1}}}, \ldots, q_{k+1} \in \overline{U_{i_{k+1}}}$ mit verschiedenen $i_{h+1}, \ldots, i_{k+1}$, so sind die k + 1 Punkte $w_1^{n+1}, \ldots w_{h-1}^{n+1}, q_h, q_{h+1}, \ldots, q_{k+1}$ linear unabhängig. Damit ist die Induktionsvoraussetzung für n + 1 realisiert und die Vorbemerkung bewiesen. – Aus der Vorbemerkung folgen 1) und 2) in **3a** für i = 1, 2, ... Für jedes i wählen wir ein c_i und ein ε_i mit den in 3a genannten drei Eigenschaften und der folgenden vierten: Für beliebige $t', t'' \in I_i$ ist $1/2 < t'/t'' < 2$. Sodann definieren wir die Funktionen g und f_i wie in **3a**. Dann gelten $3_i)$–$5_i)$. Nun wählen wir für jedes i ein $t_i^o \in I_i$ mit $|f_i^{(k)}(t_i^o)| = \max |f_i^{(k)}|$ (woraus folgt $f_i^{(k+1)}(t_i^o) = o$) und sodann ε_i und c_i im Rahmen der bereits gestellten vier Forderungen so, daß $6_i)$ $f_i^{(k)}(t_i^o) = (t_i^o)^2 \cdot (k+2)!/2$. Schließlich sei $v_i := +1$, wenn $f_i^{(k)}(t_i^o) > o$ ist; andernfalls sei $v_i := -1$. Jetzt sei $f := v_1 f_1 + v_2 f_2 + \ldots$ Dann folgt aus $3_i - 6_i)$, weil $I_i \cap I_j = \emptyset$ für $i \neq j$: 3) $|f| \leqq \varepsilon_i$ auf I_i; 4) f verschwindet identisch außerhalb von $I_1 \cup I_2 \cup \ldots \subset I$; 5) f ist k + 1-mal stetig differenzierbar an allen Stellen $t \neq o$; 6) $f^{(k)}(t_i^o) = (t_i^o)^2 \cdot (k+2)!/2$; 7) $f^{(k+1)}(t_i^o) = o$. – Ergänzung zu 5) : 5′) f ist k + 1-mal differenzierbar an der Stelle $t = o$. Es ist nämlich $|f_i^{(k)}(t_i^o)| = \max |f_i^{(k)}| = \max \varepsilon_i c_i^k |g^{(k)}| = \varepsilon_i c_i^k \max |g^{(k)}|$. Nun ist $\max |g^{(k)}| \neq o$. Aus $5_i)$ folgt also $\varepsilon_i c_i^k / t_i^o > o$ und hieraus $\varepsilon_i c_i^k / t_i' \to o$ für beliebige $t_i' \in I_i$ zufolge der obigen vierten Forderung an die c_i. Wegen $c_i > 1$ folgt weiter $\varepsilon_i c_i^r / t_o' \to o$ für jedes $r = o, 1, \ldots, k$ und beliebige $t_i' \in I_i$. Weil schließlich $g^{(r)}$ beschränkt ist, folgt $\varepsilon_i c_i^r g^{(r)}$

$(c_i(t_i' - t_i))/t_i' \to o$, also $f_i^{(r)}(t_i')/t_i' \to o$. Damit ist 5′) bewiesen. (Daß $f^{(k+1)}$ an der Stelle $t = o$ stetig ist, wird nicht gezeigt.)
Nun ist die Definition der Kurve C_∞'

$$x_o = 1,\ x_1 = t,\ \ldots,\ x_{k-1} = t^{k-1},\ x_k = t^{k+2} - f(t),$$
$$x_o = u^{k+2},\ x_1 = u^{k+1},\ \ldots,\ x_{k-1} = u^3,\ x_k = 1 \quad (|u| < 1).$$

Analog wie in **3a** ergibt sich, daß C_∞' glatt und k-sekantenfrei ist, daß C_∞' an den unendlich vielen Stellen t_1^o, t_2^o, ... einen Scheitel hat, daß $C_\infty' \in K'$ und $\operatorname{ord}(C_\infty') \leqq 9k^2$ ist.

4b. Wir setzen $t^{k+3}R^2(t) =: S(t)$. Für $|t| < 1$ ist $S(t) = t^{k+3}(1 - t^2 + t^4 - \ldots)^2$, also $S^{(k)}(t) = t^3 + o(t^4)$. – Nun sei $C_o^{\star\star}$ die Basiskurve, definiert durch:

$$x_o = 1,\ x_1 = t,\ \ldots,\ x_{k-1} = t^{k-1},\ x_k = S(t);$$
$$x_o = u^{k-1},\ x_1 = u^{k-2},\ \ldots,\ x_{k-1} = 1,\ x_k = R^2(t).$$

Weiter sei I ein hinreichend kleines, im Einheitsintervall der t-Geraden enthaltenes Intervall mit o als Anfangspunkt; dann hat der Bogen $\subset C_o^{\star\star}$ über I die Ordnung k. Es gilt dann wieder die Vorbemerkung in 4a. Wir verfahren nun wie dort; nur wählen wir jetzt ε_i und c_i so, daß $6_i)$ $f_i^{(k)}(t_i^o) = S^{(k)}(t_i^o)$ ist; dann ist auch 6) $f^{(k)}(t_i^o) = S^{(k)}(t_i^o)$. Analog wie in 4a gilt 5′); denn nach 6) ist $f^{(k)}(t_i^o) = (t_i^o)^3 + o((t_i^o)^4)$, also $f^{(k)}(t_i^o)/t_i^o \to o$. Nun die Definition von C_∞'':

$$x_o = 1,\ x_1 = t,\ \ldots,\ x_{k-1} = t^{k-1},\ x_k = S(t) - f(t);$$
$$x_o = u^{k-1},\ x_1 = u^{k-2},\ \ldots,\ x_{k-1} = 1,\ x_k = R^2(u) \quad (|u| < 1).$$

Schließlich analog weiter wie in **4a.**

Damit ist der eingangs formulierte Satz bewiesen.

5. Im bewiesenen Satz können $\operatorname{ord}(C_m')$ und $\operatorname{ord}(C_m'')$ variieren, wenn m die Folge der natürlichen Zahlen durchläuft. Dies kann verhindert werden, wie das folgende Korollar zeigt.

a) *Es gibt ein natürliches $M' \leqq 9k^2$, für welches zu jedem $m = 2k, 2k+2, 2k+4, \ldots$ eine Kurve $C_m' \in K'$ existiert mit $s(C_m') = m$ und $\operatorname{ord}(C_m') = M'$; b) es gibt ein natürliches $M'' \leqq 9k^2$, für welches zu jedem $m = 2k, 2k+2, \ldots$ eine Kurve $C_m'' \in K''$ existiert mit $s(C_m'') = k + 1 + m$ und $\operatorname{ord}(C_m'') = M''$.*

Beweis: a) Es seien $t_1, t_2, \ldots$ und $U_1, U_2, \ldots$ Folgen wie in der Vorbemerkung in **4.** Für jedes Tupel $i_1 \ldots i_n$ liefert die Konstruktion in **3a** bei Verwendung von $t_{i_1}, \ldots, t_{i_n}$ und $U_{i_1}, \ldots, U_{i_n}$ statt $t_1, \ldots, t_n$ und $U_1, \ldots, U_n$ eine Kurve $C_{2n}' \in K'$ mit $s(C_{2n}') = 2n$ und $\operatorname{ord}(C_{2n}') \leqq 9k^2$. Es sei $M' := \max \operatorname{ord}(C_{2n}')$ für alle Tupel $i_1 < \ldots < i_n$; $n = 1$, 2, ... Es ist $M' \leqq 9k^2$. Weiter sei $i_1 < \ldots < i_{n_o}$ ein Tupel, welches eine Kurve $C'_{2n_o} \in K'$ mit $\operatorname{ord}(C'_{2n_o}) = M'$ liefert. Dann existiert eine Hyperebene L mit $|C'_{2n_o} \cap L| = M'$. Ist nun $n_o \leqq k$, so setzen wir $n_o =: n_1$ und $i_1 =: j_1, \ldots, i_{n_o} =: j_{n_1}$. Ist hingegen $n_o > k$, so ist zufolge der Vorbemerkung der Durchschnitt $B_i \cap L$ nicht leer für höchstens k der Indizes $i_1, \ldots, i_{n_o}$; dies sei der Fall für die Indizes $j_1 < \ldots < j_{n_1}$ $(1 \leqq n_1 \leqq k)$. Für die von diesen Indizes gelieferte Kurve $C'_{2n_1} \in K'$ ist $|C'_{2n_1} \cap L| = |C'_{2n_o} \cap L| = M'$. Für ein hinreichend großes $J > j_{n_1}$ sind alle U_j mit $j > J$ fremd zu L. Nun streichen wir aus der Folge t_1, $t_2, \ldots$ alle t_i mit $J > i \neq j_1, \ldots, j_{n_1}$ und bezeichnen die verbleibenden t_i in unveränderter Reihenfolge mit $t_1, t_2, \ldots$; analog verfahren wir mit den U_i. Für jedes $n \geqq n_1$ hat dann die mittels $t_1, \ldots, t_n$ und $U_1, \ldots$, U_n konstruierte Kurve $C'_{2n} \in K'$ die Eigenschaften $s(C'_{2n}) = 2n$ und $\operatorname{ord}(C'_{2n}) = M'$. Wegen $n_1 \leqq k$ folgt hieraus a). – Analog für b).

---

[1] Zur Definition der k-Sekanten und der Glattheit vgl. z. B. Nöbeling, G. *Über einen Satz von Möbius-Hjelmslev,* Sitz.-Ber. Bayer. Ak. Wiss., Math-nat. Kl. 1987, 29–37. Die k-sekantenfreien, glatten Kurven im P^k sind identisch mit den Kurven im P^k, welche den Bedingungen (2) – (4), l. c.[2]), II.4.2 genügen.

[2] Nöbeling, G. *Über die Anzahl der ordnungsgeometrischen Scheitel von Kurven, Teil II.* Erscheint in Geom. Ded.

[3] Hjelmslev, J. *Ein Satz über monotone Raumkurven im R_n ...,* Acta Math. **87** (1952) 59–82. Nöbeling, G., *Über die Anzahl der ordnungsgeometrischen Scheitel von Kurven. Teil I.* Aeq. Math. **34** (1987) 82–88.

[4] Fabricius-Bjerre, Fr. *Über geschlossene Raumkurven (n + 1)-ter Ordnung im R_n ...,* Kgl. Danske Vid. Selsk., Math. Fys. Medd. 20, Nr. 1 (1942) 1–25. Die Umkehrung $\Leftarrow$ gilt nicht.

[5] Die Schranke $9k^2$ ist sehr grob. Wesentlich daran ist nur, daß sie von m unabhängig ist.

[6] (**A**) ist eine bekannte Eigenschaft der stationären Schmieghyperebenen. – Ist B ein hinreichend kleiner (abgeschlossener) Bogen $\subset K$ mit der Stelle $t = o$ als Anfangs- oder Endpunkt, so ist $\operatorname{ord}(B) = k$; denn aus $\operatorname{ord}(B) > k$ würde wegen l. c.[2]), II,3, Satz II folgen, daß im offenen Bogen $\underline{B}$ mindestens ein Scheitel liegt. Hieraus und den Voraussetzungen über $n_1, n_2, \ldots, n_k$ folgen (**B**) und (**C**) nach O. Haupt u. H. Künneth, *Geometrische Ordnungen,* Springer-Verlag **1967,** 262 (Eindeutigkeitssatz) und 257–258 (Satz 3).