BAYERISCHE AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE

SITZUNGSBERICHTE

JAHRGANG

1987

MÜNCHEN 1988

VERLAG DER BAYERISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung München

Eine beweistheoretische Abgrenzung des Teilsystems der Analysis mit Π^1_2-Separation und Bar-Induktion

von **Kurt Schütte**

Sitzung vom 12. Dezember 1986

Das stärkste Teilsystem der klassischen Analysis, das bisher beweistheoretisch erfaßt werden konnte, ist das Teilsystem, das außer der rekursiven Zahlentheorie die Axiomenschemata der Δ^1_2-Komprehension und der Bar-Induktion enthält. Für dieses Teilsystem der Analysis sowie für ein entsprechendes Teilsystem der Mengenlehre wurde von G. Jäger und W. Pohlers [2] die beweistheoretische Ordinalzahl ermittelt. Die hierbei von diesen Autoren verwendete Methode beruht im wesentlichen auf der *lokalen Prädikativität* der betreffenden imprädikativen Systeme. Die vorliegende Arbeit liefert einen anderen Beweis für die Abgrenzung des betreffenden Teilsystems der Analysis, der im wesentlichen auf einer Verallgemeinerung der *Ω-Regel* von W. Buchholz beruht. Mit dieser Regel wird außer der Bar-Induktion auch die Π^1_2-Separation erfaßt, aus der die Δ^1_2-Komprehension folgt. Hiermit ergibt sich wiederum die von G. Jäger und W. Pohlers aufgewiesene Ordinalzahl $\psi\, 0\, (\Psi\, \varepsilon_{I+1})$ als obere Abgrenzung des formalen Systems. In dieser Arbeit wird die Kenntnis der Haupteigenschaften des in [1] entwickelten Ordinalzahlen-Bezeichnungssystems T (I) vorausgesetzt.

§ 1. Das formale System SB

Als *Grundzeichen* verwenden wir:

1. Je abzählbar unendlich viele freie und gebundene Zahlenvariablen und einstellige Prädikatenvariablen.

2. Zeichen für n-stellige rekursive Funktionen und n-stellige rekursive Prädikate ($n \geq 1$).

3. Die Symbole 0, $'$, $\perp$, $\rightarrow$ und $\forall$.

4. Runde Klammern und Komma.

Induktive Definition der *Terme.*

1. Das Symbol 0 ist ein Term.

2. Jede freie Zahlenvariable ist ein Term.

3. Ist t ein Term, so ist auch t' ein Term. (t' bezeichnet den *Nachfolger* von t.)

4. Bezeichnet f eine n-stellige rekursive Funktion und sind $t_1, \ldots, t_n$ Terme, so ist auch $f(t_1, \ldots, t_n)$ ein Term.

Terme, die keine anderen Grundzeichen als 0 und $'$ enthalten, heißen *Ziffern.* Sie repräsentieren die natürlichen Zahlen. Ein Term heißt *numerisch,* wenn er keine Variable enthält. Jeder numerische Term hat einen berechenbaren *Wert,* der eine natürliche Zahl ist.

Primformeln sind:

1. Das Symbol $\perp$ (*falsum*).

2. $p\,(t_1, \ldots, t_n)$, wenn p ein n-stelliges rekursives Prädikat bezeichnet und $t_1, \ldots, t_n$ Terme sind.

3. $U\,(t)$, wenn U eine freie Prädikatenvariable und t ein Term ist.

Eine Primformel heißt *konstant,* wenn sie keine Variable enthält. Jede konstante Primformel ist in entscheidbarer Weise entweder *wahr* oder *falsch.* (Die Primformel $\perp$ ist falsch.) Unter einer n-stelligen *Nennform* verstehen wir eine Zeichenreihe, die außer Grundzeichen unseres formalen Systems höchstens die *Nennzeichen* $*_1, \ldots, *_n$ enthält. Ist $\mathscr{C}$ eine n-stellige Nennform und sind $r_1, \ldots, r_n$ Zeichen oder nichtleere Zeichenreihen, so bezeichnet $\mathscr{C}\;[r_1, \ldots, r_n]$ den Ausdruck, der aus $\mathscr{C}$ dadurch entsteht, daß alle darin auftretenden Nennzeichen $*_1, \ldots, *_n$ durch $r_1, \ldots, r_n$ ersetzt werden. Große Skriptbuchstaben bezeichnen im folgenden immer Nennformen. Eckige Klammern werden nur im Zusammenhang mit Nennformen in der angegebenen Bedeutung verwendet.

Induktive Definition der *Formeln* des Systems SB und der Menge $PV\,(F)$ von freien Prädikatenvariablen, die in einer Formel F im Bereich eines Prädikatenquantors auftreten.

1. Jede Primformel F ist eine Formel mit leerer Menge $PV\,(F)$. Sie ist sowohl eine Π^1_2-Formel als auch eine Σ^1_2-Formel.

2. Sind A und B Formeln, so ist $(A \to B)$ eine Formel mit $PV((A \to B)) := PV(A) \cup PV(B)$. Die Formel $(A \to B)$ ist genau dann eine Π^1_2-Formel (Σ^1_2-Formel), wenn A eine Σ^1_2-Formel (Π^1_2-Formel) und B eine Π^1_2-Formel (Σ^1_2-Formel) ist.

3. Ist $\mathcal{A}[0]$ eine Formel und x eine gebundene Zahlenvariable, die in $\mathcal{A}$ nicht auftritt, so ist $\forall x \mathcal{A}[x]$ eine Formel mit $PV(\forall x \mathcal{A}[x]) := PV(\mathcal{A}[0])$. Die Formel $\forall x \mathcal{A}[x]$ ist genau dann eine Π^1_2-Formel (Σ^1_2-Formel), wenn $\mathcal{A}[0]$ eine Π^1_2-Formel (Σ^1_2-Formel) ist.

4. Ist U eine freie Prädikatenvariable und $\mathcal{F}[U]$ eine Formel, wobei U nicht in $\mathcal{F}$ auftritt, und X eine gebundene Prädikatenvariable, die in $\mathcal{F}$ nicht auftritt, so ist $\forall X \mathcal{F}[X]$ eine Formel und $PV(\forall X \mathcal{F}[X])$ die Menge der in $\mathcal{F}$ auftretenden freien Prädikatenvariablen. Die Formel $\forall X \mathcal{F}[X]$ ist genau dann eine Π^1_2-Formel, wenn $\mathcal{F}[U]$ eine Π^1_2-Formel ist. Sie ist genau dann eine Σ^1_2-Formel, wenn $\mathcal{F}[U]$ sowohl eine Π^1_2-Formel als auch eine Σ^1_2-Formel und $U \notin PV(\mathcal{F}[U])$ ist.

Eine Formel heiße *schwach*, wenn sie sowohl eine Π^1_2-Formel als auch eine Σ^1_2 Formel ist. Andernfalls heiße sie *stark*.

Anmerkung. Die hier definierten Π^1_2-Formeln und Σ^1_2-Formeln sind unwesentliche Verallgemeinerungen der üblichen Π^1_2-Formeln und Σ^1_2-Formeln. Die schwachen Formeln sind unwesentliche Verallgemeinerungen der üblichen Π^1_1-Formeln und Σ^1_1-Formeln.

Als *Mitteilungszeichen* verwenden wir:

a, b, c	für freie Zahlenvariablen,
x, y, z	für gebundene Zahlenvariablen,
U, V	für freie Prädikatenvariablen,
X, Y, Z	für gebundene Prädikatenvariablen,
s, t	für Terme,
i, k, m, n	für Ziffern und natürliche Zahlen,
A, B, C, F, G	für Formeln,
$\mathcal{A}, \mathcal{B}$	für Nennformen derart, daß $\mathcal{A}[t]$, $\mathcal{B}[t]$ Formeln sind,
$\mathcal{F}, \mathcal{G}$	für Nennformen derart, daß $\mathcal{F}[U]$, $\mathcal{G}[U]$ Formeln sind,

Diese Mitteilungszeichen werden auch mit Indizes verwendet.

In üblicher Weise definieren wir:

$$\neg A := (A \to \bot)$$
$$(A \lor B) := (\neg A \to B)$$
$$(A \land B) := \neg (A \to \neg B)$$
$$(A \leftrightarrow B) := ((A \to B) \land (B \to A))$$
$$\exists x \mathcal{A}[x] := \neg \forall x \neg \mathcal{A}[x]$$
$$\exists X \mathcal{F}[X] := \neg \forall X \neg \mathcal{F}[X]$$

Wir lassen im folgenden die zu einer Formel gehörenden runden Klammern teilweise fort, sofern dies nicht mißverständlich ist. Mit $\mathcal{F}[\mathcal{A}]$ bezeichnen wir diejenige Formel, die aus der Formel $\mathcal{F}[U]$ dadurch entsteht, daß jeder darin auftretende Bestandteil $U(.)$ durch $\mathcal{A}[.]$ ersetzt wird, wobei U eine freie Prädikatenvariable ist, die in $\mathcal{F}$ nicht auftritt. Hierbei setzen wir immer voraus, daß die Formeln $\mathcal{F}[U]$ und $\mathcal{A}[t]$ keine gebundenen Variable gemeinsam enthalten, was durch geeignete Umbenennungen der gebundenen Variablen immer zu erreichen ist.

Zwei Formeln heißen *gleichwertig*, wenn sie entweder miteinander übereinstimmen oder durch Ersetzungen von numerischen Termen durch numerische Terme gleicher Werte aus einander hervorgehen.

Positivteile und *Negativteile* von Formeln, P-*Formen*, N-*Formen* und NP-*Formen* seien entsprechend wie in [3] definiert. Als Mitteilungszeichen (auch mit Indizes) verwenden wir P für P-Formen, N für N-Formen und Q für NP-Formen.

$F \overset{s}{\vdash} G$ (aus F folgt *strukturell* G) bedeute, daß jeder minimale Positivteil von F, der keine falsche konstante Primformel ist, auch als Positivteil von G auftritt und jeder minimale Negativteil von F, der keine wahre konstante Primformel ist, auch als Negativteil von G auftritt.

Induktive Definition der in einer Formel auftretenden *ausgezeichneten* Prädikatenquantoren.

1. In einer Primformel tritt kein Prädikatenquantor auf.

2. Ein in einer Formel $(A \to B)$ auftretender Prädikatenquantor ist genau dann ausgezeichnet, wenn der entsprechende Prädikatenquantor in A oder B ausgezeichnet ist.

3. Ein in einer Formel $\forall x \mathcal{A}[x]$ auftretender Prädikatenquantor ist genau dann ausgezeichnet, wenn der entsprechende Prädikatenquantor in $\mathcal{A}[0]$ ausgezeichnet ist.

4. In einer Formel $\forall X \mathcal{F}[X]$ tritt der Prädikatenquantor $\forall X$ genau dann ausgezeichnet auf, wenn $\mathcal{F}[U]$ eine Π^1_2-Formel und $U \notin PV(\mathcal{F}[U])$ ist, wobei U eine freie Prädikatenvariable ist, die in $\mathcal{F}$ nicht auftritt. Jeder andere Prädikatenquantor tritt in der Formel $\forall X \mathcal{F}[X]$ genau dann ausgezeichnet auf, wenn der entsprechende Prädikatenquantor in $\mathcal{F}[U]$ ausgezeichnet ist.

Lemma 1.1

a) Jeder in einer schwachen Formel auftretende Prädikatenquantor ist ausgezeichnet.

b) In einer starken Formel tritt mindestens ein nicht ausgezeichneter Prädikatenquantor auf.

Beweis durch Induktion nach der Länge der Formel F. Hat die Formel F nicht die Gestalt $\forall X \mathcal{F}[X]$, so folgen die Behauptungen aus der I.V. Sei nun F eine Formel $\forall X \mathcal{F}[X]$. Ist dies eine schwache Formel, so ist $\forall X$ ein ausgezeichneter Prädikatenquantor und $\mathcal{F}[U]$ eine schwache Formel, womit sich die Behauptung a) aus der I.V. ergibt. Ist $\forall X \mathcal{F}[X]$ eine starke Formel, so ist $\forall X$ nicht ausgezeichnet oder $\mathcal{F}[U]$ eine starke Formel, womit sich die Behauptung b) aus der I.V. ergibt.

Zur Abkürzung setzen wir

$$(\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}) := \forall y (\mathcal{A}[y] \rightarrow \mathcal{B}[y])$$
$$(\mathcal{A} \subseteq U \subseteq \mathcal{B}) := (\forall y (\mathcal{A}[y] \rightarrow U(y)) \wedge \forall y (U(y) \rightarrow \mathcal{B}[y]))$$

Mit $\mathcal{P}_F[A]$ bezeichnen wir die Formel, die aus der Formel $\mathcal{P}[A]$ dadurch entsteht, daß jeder darin auftretende Positivteil F durch $\perp$ ersetzt wird.

Axiome des Systems SB.

(Ax 1) $\mathcal{P}[A]$, wenn A eine wahre konstante Primformel ist.

(Ax 2) $\mathcal{N}[A]$, wenn A eine falsche konstante Primformel ist.

(Ax 3) $\mathcal{Q}[A, B]$, wenn A und B gleichwertige Primformeln sind.

(Ax 4) $\mathcal{C}\ [a_1, \ldots, a_n]$, wenn $a_1, \ldots, a_n$ paarweise verschiedene freie Zahlenvariablen sind, die in $\mathcal{C}$ nicht auftreten, und $\mathcal{C}\ [m_1, \ldots, m_n]$ für je n Ziffern $m_1, \ldots, m_n$ eines der Axiome (Ax 1), (Ax 2) oder (Ax 3) ist.

(Ax 5) $\forall x\, (\mathcal{A}\, [x] \to \mathcal{A}\, [x']) \to (\mathcal{A}\, [0] \to \forall x\, \mathcal{A}\, [x])$

(Ax 6) $\forall X\, \mathcal{F}[X] \to \mathcal{F}[\mathcal{A}]$, wenn $\forall X\, \mathcal{F}[X]$ eine schwache Formel und $\mathcal{A}\, [t]$ eine beliebige Formel ist.

Strukturschlüsse des Systems SB.

$F \vdash G$, wenn $F \overset{s}{\vdash} G$ gilt.

Hauptschlüsse des Systems SB.

(S1) $\mathcal{N}\, [\neg A], \mathcal{N}\, [B] \dashv \mathcal{N}\, [(A \to B)]$
wenn B nicht die Formel $\perp$ ist.

(S2.0) $\mathcal{P}\, [\mathcal{A}\, [\mathrm{a}]] \vdash \mathcal{P}\, [\forall x\, \mathcal{A}\, [x]]$
wenn a in der Konklusion nicht auftritt.

(S2.1) $\mathcal{P}_F\, [\mathcal{F}[U]] \vdash \mathcal{P}\, [\forall X\, \mathcal{F}[X]]$
wenn U in der Konklusion nicht auftritt und F die Formel $\forall X\, \mathcal{F}\, [X]$ ist.

(S3.0) $\mathcal{A}\, [t] \to \mathcal{N}\, [\forall x\, \mathcal{A}\, [x]] \vdash \mathcal{N}\, [\forall x\, \mathcal{A}\, [x]]$

(S3.1) $\mathcal{F}[U] \to \mathcal{N}\, [\forall X\, \mathcal{F}[X]] \vdash \mathcal{N}\, [\forall X\, \mathcal{F}[X]]$
wenn $\forall X\, \mathcal{F}[X]$ eine starke Formel ist.

(S 3.2) $(\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}) \vee \mathcal{N}\, [\forall X\, \neg (\mathcal{A} \subseteq X \subseteq \mathcal{B})] \vdash \mathcal{N}\, [\forall X\, \neg (\mathcal{A} \subseteq X \subseteq \mathcal{B})]$ wenn $(\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B})$ eine starke Σ^1_2-Formel ist.

Der bezeichnete Positivteil oder Negativteil der Konklusion eines Hauptschlusses heißt der *Hauptteil* des betreffenden Hauptschlusses.

Schnitte des Systems SB.

$A \vee F,\ A \to F \vdash F$

Die mit A bezeichnete Formel in den Prämissen eines Schnittes heißt die *Schnittformel* des betreffenden Schnittes.

Grundschlüsse des Systems SB sind die Strukturschlüsse, Hauptschlüsse und Schnitte des Systems SB.

Induktive Definition von SB $\overset{n}{\vdash}$ *F*.

1. Ist *F* ein Axiom des Systems SB, so gelte SB $\overset{n}{\vdash}$ *F* für jede natürliche Zahl n.

2. Gilt SB $\overset{n}{\vdash} F_i$ für jede Prämisse F_i eines Grundschlusses des Systems SB, so gelte SB $\overset{n+1}{\vdash}$ *F* für die zugehörige Konklusion *F*.

Nach dieser Definition gilt:

SB $\overset{m}{\vdash} F$, m < n $\Rightarrow$ SB $\overset{n}{\vdash} F$

Eine Formel *F* heißt *herleitbar* im formalen System SB, wenn es eine natürliche Zahl *n* gibt, so daß SB $\overset{n}{\vdash}$ *F* gilt.

Lemma 1.2 Für jede NP-Form Q und jede Formel *F* ist die Formel Q [*F*, *F*] in SB herleitbar.

Beweis durch Induktion nach der Anzahl der in *F* auftretenden logischen Zeichen $\rightarrow$ und $\forall$.

Lemma 1.3. Die Axiomenschemata der Bar-Induktion, Π^1_2-Separation und Δ^1_2-Komprehension sind in SB herleitbar.

Beweis. Die Bar-Induktion ist durch (Ax 6) gegeben. Für die Π^1_2-Separation hat man das Axiomenschema

(Π^1_2-SA) $(\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}) \rightarrow \exists X (\mathcal{A} \subseteq X \subseteq \mathcal{B})$

wobei $\mathcal{A}[t]$ eine Π^1_2-Formel und $\mathcal{B}[t]$ eine Σ^1_2-Formel, also $(\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B})$ eine Σ^1_2-Formel ist.

Nach Lemma 1.2 hat man

$$(\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}) \vee ((\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}) \rightarrow \exists X (\mathcal{A} \subseteq X \subseteq \mathcal{B}))$$

Ist $(\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B})$ eine starke Formel, so folgt (Π^1_2-SA) durch einen Hauptschluß (S 3.2). Andernfalls hat man nach (Ax 6)

$$\forall X \neg (\mathcal{A} \subseteq X \subseteq \mathcal{B}) \rightarrow \neg (\mathcal{A} \subseteq \mathcal{A} \subseteq \mathcal{B})$$

Durch einen Strukturschluß folgt

(1) $(\mathcal{A} \subseteq \mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}) \rightarrow \exists X (\mathcal{A} \subseteq X \subseteq \mathcal{B})$

Offenbar ist auch die Formel

(2) $(\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}) \rightarrow (\mathcal{A} \subseteq \mathcal{A} \subseteq \mathcal{B})$

in SB herleitbar. (Π^1_2-SA) folgt dann aus (1) und (2) durch Strukturschlüsse und einen Schnitt.

Für die Δ^1_2-Komprehension hat man das Axiomenschema

(Δ^1_2-*CA*) $(\forall y\, (\mathcal{A}[y] \leftrightarrow \mathcal{B}[y]) \rightarrow \exists X \forall y\, (X(y) \leftrightarrow \mathcal{A}[y])$

Offenbar folgt (Δ^1_2-*CA*) in SB aus (Π^1_2-*SA*).

§ 2. Das geschichtete halbformale System SB′

Wir benutzen im folgenden das in [1] entwickelte Ordinalzahlensystem T(I).

Formeln des Systems SB′ seien diejenigen Ausdrücke, die durch folgende Ersetzungen aus Formeln des Systems SB entstehen.

1. Jede freie Zahlenvariable wird durch eine Ziffer ersetzt. Tritt eine freie Zahlenvariable in einer Formel an mehreren Stellen auf, so wird sie überall durch dieselbe Ziffer ersetzt. Verschiedene freie Zahlenvariablen dürfen durch dieselbe Ziffer oder durch verschiedene Ziffern ersetzt werden.

2. Jede freie Prädikatenvariable U wird durch U^α ersetzt, wobei α eine Ordinalzahl $< I$ aus $T(I)$ ist. Tritt eine freie Prädikatenvariable in einer Formel an mehreren Stellen auf, so erhält sie überall denselben oberen Index. Verschiedene freie Prädikatenvariablen dürfen denselben oberen Index oder verschiedene obere Indizes erhalten.

3. Jeder nicht ausgezeichnete Prädikatenquantor $\forall X$ wird durch $\forall X^\eta$ ersetzt, wobei η eine Limeszahl $\leq I$ aus $T(I)$ ist. Nicht ausgezeichnete Prädikatenquantoren, die im Bereich eines und desselben ausgezeichneten Prädikatenquantors auftreten, erhalten denselben oberen Index. Im übrigen dürfen verschiedene nicht ausgezeichnete Prädikatenquantoren denselben oberen Index oder verschiedene obere Indizes erhalten. (Die ausgezeichneten Prädikatenquantoren bleiben unverändert.) Nach dieser Definition hat man zu jeder Formel F' des Systems SB′ eine *entsprechende* Formel des Systems SB, die aus F' durch Streichung der oberen Indizes von Prädikatenvariablen hervorgeht. Eine Formel

des Systems SB′ heiße eine *Primformel*, eine *schwache* oder *starke* Formel, eine Π_2^1-*Formel* oder Σ_2^1-*Formel*, wenn die entsprechende Formel des Systems SB eine derartige Formel ist. Für eine Formel F' des Systems SB′ sei $PV(F') := PV(F)$, wobei F die entsprechende Formel des Systems SB ist.

Wir verwenden in SB′ die entsprechenden Mitteilungszeichen wie in SB.

Jeder in einer Formel des Systems SB′ auftretende Term ist *numerisch*, hat also einen berechenbaren Wert. Die in einer Formel des Systems SB′ auftretenden Prädikatenquantoren $\forall X^\eta$ heißen *geschichtete* Prädikatenquantoren. Eine Formel des Systems SB′ heiße eine η-*Formel*, wenn η eine Limeszahl $\leq I$ aus $T(I)$ ist und jeder in dieser Formel auftretende geschichtete Prädikatenquantor den oberen Index η hat.

Induktive Definition des *positiven* und *negativen Auftretens* von geschichteten Prädikatenquantoren in einer Formel des Systems SB′.

1. In einer Primformel tritt kein geschichteter Prädikatenquantor auf.

2. In einer Formel $(A \to B)$ tritt ein geschichteter Prädikatenquantor genau dann positiv (negativ) auf, wenn er in A negativ (positiv) oder in B positiv (negativ) auftritt.

3. In einer Formel $\forall x \mathcal{A}[x]$ tritt ein geschichteter Prädikatenquantor genau dann positiv (negativ) auf, wenn er in $\mathcal{A}[0]$ positiv (negativ) auftritt.

4. Jeder in einer Formel $\forall X \mathcal{F}[X]$ auftretende geschichtete Prädikatenquantor tritt in dieser Formel positiv auf.

5. In einer Formel $\forall X^\eta \mathcal{F}[X]$ tritt der geschichtete Prädikatenquantor $\forall X^\eta$ positiv auf. Jeder andere geschichtete Prädikatenquantor tritt in der Formel $\forall X^\eta \mathcal{F}[X]$ genau dann positiv (negativ) auf, wenn er in $\mathcal{F}[U^0]$ positiv (negativ) auftritt.

Induktive Definition des *I-Grades* $\mathrm{Gr}(F)$ einer Formel F des Systems SB′.

1. Enthält eine Formel F keinen geschichteten Prädikatenquantor $\forall Y^I$, so sei $\mathrm{Gr}(F) := 0$.

2. Enthält eine Formel $(A \to B)$ mindestens einen geschichteten Prädikatenquantor $\forall\, Y^I$, so sei

$Gr\,(A \to B) := \max\,\{Gr(A), Gr\,(B)\}+1.$

3. Enthält eine Formel $\forall x\, \mathcal{A}\,[x]$ mindestens einen geschichteten Prädikatenquantor $\forall\, Y^I$, so sei $Gr\,(\forall x\, \mathcal{A}\,[x]) := Gr\,(\mathcal{A}\,[0])+1$.

4. Enthält eine Formel $\forall X\, \mathcal{F}[X]$ mindestens einen geschichteten Prädikatenquantor $\forall\, Y^I$, so sei $Gr\,(\forall X\, \mathcal{F}[X]) := 1$.

5. Enthält eine Formel $\forall X^n\, \mathcal{F}[X]$ mindestens einen geschichteten Prädikatenquantor $\forall\, Y^I$, so sei

$Gr\,(\forall\, X^n\, \mathcal{F}[X]) := \max\,\{1, Gr\,(\mathcal{F}[U^0])\}+1.$

Nach dieser Definition hat eine Formel genau dann den I-Grad 0, wenn sie keinen geschichteten Prädikatenquantor $\forall\, Y^I$ enthält. Sie hat genau dann den I-Grad 1, wenn sie eine Formel $\forall X\, \mathcal{F}[X]$ ist, die mindestens einen geschichteten Prädikatenquantor $\forall\, Y^I$ enthält.

Induktive Definition des *Grades* gr (F) einer Formel F des Systems SB′.

1. Ist F eine Primformel oder eine Formel $\forall X\, \mathcal{F}[X]$, so sei gr $(F) := 0$

2. gr $(A \to B) := \max\,\{\text{gr}\,(A), \text{gr}\,(VB)\}+1$.

3. gr $(\forall\, x\, \mathcal{A}\,[x]) :=$ gr $(\mathcal{A}\,[0])+1$.

4. gr $(\forall\, X^n\, \mathcal{F}[X]) :=$ gr $(\mathcal{F}[U^0])+1$.

Induktive Definition der *Stufe st* (F) einer Π^1_2-Formel F des Systems SB′.

1. Für jede konstante Primformel F sei $st\,(F) = st\,(\neg F) := 0$.

2. $st\,(U^\alpha\,(t)) = st\,(\neg\, U^\alpha\,(t)) := \Omega_\alpha$.

3. Ist A eine Σ^1_2-Formel und B eine Π^1_2-Formel, so sei $st\,(A \to B) = st\,(\neg\,(B \to A)) := \max\,\{st\,(\neg\, A), st\,(B)\}$.

4. Ist $\forall\, x\, \mathcal{A}\,[x]$ eine Π^1_2-Formel, so sei

$st\,(\forall\, x\, \mathcal{A}\,[x]) := st\,(\mathcal{A}\,[0]))$. Ist $\forall\, x\, \mathcal{A}\,[x]$ eine Σ^1_2-Formel, so sei $st\,(\neg \forall\, x\, \mathcal{A}\,[x]) := st\,(\neg\, \mathcal{A}\,[0])$.

5. $st\,(\forall X\,\mathcal{F}[X]) := st\,(\mathcal{F}[U^0])$. Ist $\forall X\,\mathcal{F}[X]$ eine schwache Formel der Stufe σ, so sei $st\,(\neg\,\forall X\,\mathcal{F}[X]) := \sigma^+$.

6. Ist $\forall X^n\,\mathcal{F}[X]$ eine Π^1_2-Formel, so sei

$st\,(\forall X^n\,\mathcal{F}[X]) := \max\,\{\Omega_\eta, st\,(\mathcal{F}[U^0])\}$.

Nach dieser Definition hat jede Π^1_2-Formel des Systems SB′ eine Stufe $\Omega_\mu \leq$ I.

Lemma 2.1. (*Stufenlemma*)

a) Jede Π^1_2-Formel F, die eine η-Formel ist, hat die Stufe 0 oder Ω_η oder $\Omega_{\alpha+n}$ mit $n < \omega$, wobei α der größte obere Index der in F auftretenden freien Prädikatenvariablen ist.

b) In einer Π^1_2-Formel F der Stufe Ω_μ tritt keine freie Prädikatenvariable mit einem oberen Index $> \mu$ auf.

c) Für Π^1_2-Formeln $\mathcal{P}\,[A]$ und $\mathcal{N}\,[A]$ gilt:

$st\,(\mathcal{P}\,[A]) = \max\,\{st\,(A), st\,(\mathcal{P}\,[\perp])\}$,

$st\,(\mathcal{N}\,[A]) = \max\,\{st\,(\neg\,A), st\,(\mathcal{N}\,[\perp])\}$.

d) In einer Π^1_2-Formel der Stufe Ω_μ tritt keine Formel $\forall X\,\mathcal{F}[X]$ der Stufe Ω_μ als Negativteil auf.

e) Ist $st\,(\forall X\,\mathcal{F}[X]) = \Omega_\mu < I$, so ist auch $st\,(\mathcal{F}[U^\mu]) = \Omega_\mu$.

Beweis durch Induktion nach den Längen der betreffenden Formeln, wobei d) aus c) und der Definition von $st\,(\neg\,\forall X\,\mathcal{F}[X])$ folgt.

Definition der *Höhe* h (F) einer Formel F des Systems SB′. Tritt in F keine freie Prädikatenvariable auf, so sei h $(F) := 0$. Andernfalls sei h (F) die größte Ordinalzahl, die in F als oberer Index einer freien Prädikatenvariablen auftritt.

Axiome des Systems SB′.

(Ax 1) und (Ax 2) entsprechend wie für SB.

(Ax 3′) Q $[A, B]$, wenn A und B gleichwertige Formeln vom Grad 0 und I-Grad 0 sind.

Schwache Hauptschlüsse des Systems SB′.

(S 1) und (S 3.0) entsprechend wie für SB.

(S 2.0′) $\mathcal{P}\,[\mathcal{A}\,[n]]$ für jede Ziffer $n \vdash \mathcal{P}\,[\forall\, x\, \mathcal{A}\,[x]]$

(S 2.1′) $\mathcal{P}_F\ [\mathcal{F}[U^\mu]] \vdash \mathcal{P}\,[\forall\, X\, \mathcal{F}[X]]$
wenn st $(\forall X\, \mathcal{F}[X]) = \Omega_\mu < \mathrm{I}$ ist, U in der Konklusion nicht auftritt und F die Formel $\forall X\, \mathcal{F}\,[X]$ ist.

Kritische Hauptschlüsse des Systems SB′.

(S 3.1′) $\mathcal{F}[U^\alpha] \to \mathcal{N}\,[\forall X^\eta\, \mathcal{F}[X]] \vdash N\,[\forall\, X^\eta\, \mathcal{F}[X]]$

wenn $\alpha < \eta$ ist.

Dieser Hauptschluß hat den *Index* α.

Ausgezeichnete Hauptschlüsse des Systems SB′.

(S 3.2′) $\mathcal{F}[U^\alpha] \to \mathcal{N}\,[\forall X\, \mathcal{F}[X]] \vdash \mathcal{N}\,[\forall X\, \mathcal{F}[X]]$
wenn st $(\forall X\, \mathcal{F}[X]) = \mathrm{I}$ ist.

Dieser Hauptschluß hat den *Grad* gr $(\mathcal{F}[U^\alpha])$ und die *Höhe* $I +$ h $(\forall X\, \mathcal{F}[X])$.

(S 3.3′) $(\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}) \vee \mathcal{N}\ [\forall X \neg (\mathcal{A} \subseteq X \subseteq \mathcal{B})] \vdash \mathcal{N}\ [\forall X \neg (\mathcal{A} \subseteq X \subseteq \mathcal{B})]$ wenn $\neg\, (\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B})$ eine Π^1_2-Formel der Stufe I ist.

Dieser Hauptschluß hat den *Grad* max {gr (gr $(\mathcal{A} \subseteq \mathcal{A})$, gr $(\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B})$} und die *Höhe* $I + h\ (\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B})$.

Starke Hauptschlüsse des Systems SB′.

(S 2.2′) $\mathcal{P}_F[\mathcal{F}[U^\alpha]$ füı alle $\alpha < I$ aus $T\ (I) \vdash \mathcal{P}[\forall X\ \ \mathcal{F}[X]]$
wenn *st* $(\forall X\, \mathcal{F}[X]) = I$ ist, U in der Konklusion nicht auftritt und F die Formel $\forall X\, \mathcal{F}[X]$ ist.

Dieser Hauptschluß hat den *Typ* I und die *Höhe* h $(\forall X\, \mathcal{F}[X]) + \omega$.

(S 2.3′) $\mathcal{P}_F\ [\mathcal{F}[U^\alpha]]$ für alle $\alpha < \eta$ aus $T\,(I) \vdash \mathcal{P}\ [\forall\, X^\eta\, \mathcal{F}[X]]$
wenn U in der Konklusion nicht auftritt und F die Formel $\forall\, X^\eta$ $\mathcal{F}[X]$ ist.

Dieser Hauptschluß hat den *Typ* η und die *Höhe* 0.

Die Prämisse $\mathcal{P}_F[\mathcal{F}[U^\alpha]]$ eines starken Hauptschlusses heißt die *α-te Prämisse* des betreffenden Hauptschlusses.

Der *Hauptteil* eines Hauptschlusses ist der bezeichnete Positivteil oder Negativteil seiner Konklusion.

Schnitte des Systems SB'.

$A \vee F,\ A \rightarrow F \vdash F$

Der *I-Grad* eines Schnittes ist der *I*-Grad Gr (A) seiner Schnittformel A. Der *Grad* eines Schnittes ist der Grad gr (A) seiner Schnittformel A.

Induktive Definition von $\mathrm{SB}'_k|\!\frac{\gamma}{m} F$ für $\gamma \in T(I)$.

1. Ist F ein Axiom des Systems SB', so gelte $\mathrm{SB}'_k|\!\frac{\gamma}{m} F$ für jede Ordinalzahl $\gamma \in T(I)$ und alle natürlichen Zahlen k und m.

2. Gilt $\mathrm{SB}'_k|\!\frac{\gamma_i}{m} F_i$ mit $\gamma_i \ll \gamma$ für jede Prämisse F_i eines schwachen Hauptschlusses oder eines Schnittes von einem *I*-Grad $\leq k$ und einem Grad $< m$, so gelte $\mathrm{SB}'_k|\!\frac{\gamma}{m} F$ für die zugehörige Konklusion F.

3. Gilt $\mathrm{SB}'_k|\!\frac{\gamma_0}{m} F_0$ mit $\gamma_0 \ll \gamma$ und $\alpha \ll \gamma$ für die Prämisse F_0 eines kritischen Hauptschlusses vom Index α, so gelte $\mathrm{SB}'_k|\!\frac{\gamma}{m} F$ für die zugehörige Konklusion F.

4. Gilt $\mathrm{SB}'_k|\!\frac{\gamma_0}{m} F_0$ mit $\gamma_0 \ll \gamma$ und $\delta \ll \gamma$ für die Prämisse F_0 eines ausgezeichneten Hauptschlusses von einem Grad $< m$ und der Höhe δ, so gelte $\mathrm{SB}'_k|\!\frac{\gamma}{m} F$ für die zugehörige Konklusion F.

5. Ist f eine Herleitungsfunktion (gemäß [1] § 10) mit $\eta \in D(f)$, $f(\eta) \leqq \gamma$ und $\delta \ll \gamma$ und gilt $\mathrm{SB}'_k|\!\frac{f(\alpha)}{m} F_\alpha$ für jede α-te Prämisse F_α eines starken Hauptschlusses vom Typ η und der Höhe δ, so gelte $\mathrm{SB}'_k|\!\frac{\gamma}{m} F$ für die zugehörige Konklusion F.

6. (σ^+-*Regel*) $\mathrm{SB}'_k|\!\frac{\gamma}{m} F$ gelte unter folgenden Voraussetzungen:

a) $\forall X\, \mathcal{F}[X]$ sei eine Formel der Stufe $\sigma < I$.

b) f sei eine Herleitungsfunktion (gemäß [1] § 10) mit $\sigma^+ \in D(f)$ und $f(\sigma^+) \leqq \gamma$.

c) $\mathrm{SB}'_k|\!\frac{f(0)}{m} \forall X\, \mathcal{F}[X]]\ \dot{\vee}\ F$

d) $\mathrm{SB}'_0|\!\frac{\alpha}{0} \mathcal{P}\,[\forall X\, \mathcal{F}[X]] \Rightarrow \mathrm{SB}'_k|\!\frac{f(\alpha)}{m} \mathcal{P}\,[F]$

gelte für alle $\alpha < \sigma^+$ aus $T(I)$ und jede Π^1_2-Formel $\mathcal{P}\,[\forall X\, \mathcal{F}[X]]$ der Stufe σ.

Lemma 2.2. $\mathrm{SB}'_i \vdash^{\gamma}_{m} F,\ \gamma \underline{\ll} \delta,\ i \leq k,\ m \leq n \Rightarrow \mathrm{SB}'_k \vdash^{\delta}_{n} F$
Beweis durch Induktion nach γ.

§ 3. Deduktive Eigenschaften des Systems SB′

Lemma 3.1. (*Umsetzungslemma*)

a) Aus $\mathrm{SB}'_k \vdash^{\gamma}_{m} F$ folgt $\mathrm{SB}'_k \vdash^{\gamma}_{m} G$, wenn F und G gleichwertige Formeln sind.

b) Aus $\mathrm{SB}'_k \vdash^{\gamma}_{m} \mathcal{F}[U^{\alpha}]$ folgt $\mathrm{SB}'_k \vdash^{\gamma}_{m} \mathcal{F}[V^{\alpha}]$, wenn U nicht in $\mathcal{F}$ auftritt.

Beweis durch Induktion nach γ.

Lemma 3.2. (*Schwaches Inversionslemma*)

a) Aus $\mathrm{SB}'_k \vdash^{\gamma}_{m} \mathcal{N}[(A \rightarrow B)]$ folgt $\mathrm{SB}'_k \vdash^{\gamma}_{m} \mathcal{N}[\neg A]$ und $\mathrm{SB}'_k \vdash^{\gamma}_{m} \mathcal{N}[B]$.

b) Aus $\mathrm{SB}'_k \vdash^{\gamma}_{m} \mathcal{P}[\forall x\, \mathcal{A}[x]]$ folgt $\mathrm{SB}'_k \vdash^{\gamma}_{m} \mathcal{P}[\mathcal{A}[t]]$.

Beweis durch Induktion nach γ, für b) unter Benutzung von Lemma 3.1 a) Das schwache Inversionslemma a) gilt auch, wenn B die Formel $\perp$ ist, weil in diesem Fall $\mathrm{SB}'_k \vdash^{\gamma}_{m} \mathcal{N}[\neg A]$ nach Voraussetzung gilt und $\mathcal{N}[B]$ ein Axiom (Ax 2) ist.

Lemma 3.3. (*Strukturschlusslemma*) Aus $\mathrm{SB}'_k \vdash^{\gamma}_{m} F$ und $F \vdash^{s} G$ folgt $\mathrm{SB}'_k \vdash^{\gamma}_{m} G$.

Beweis durch Induktion nach γ unter Benutzung von Lemma 3.2.

Lemma 3.4. (*Starkes Inversionslemma*) Aus $\mathrm{SB}'_k \vdash^{\gamma}_{m} \mathcal{P}[\forall X^n \mathcal{F}[X]]$ folgt $\mathrm{SB}'_k \vdash^{\gamma \# \alpha}_{m} \mathcal{P}[\mathcal{F}[U^{\alpha}]]$ für $\alpha < \eta$.

Beweis durch Induktion nach γ.

1. $\mathcal{P}[\forall X^n \mathcal{F}[X]]$ sei ein Axiom des Systems SB′. Dann ist auch $\mathcal{P}[\mathcal{F}[U^{\alpha}]]$ ein Axiom.

2. $\mathcal{P}[\forall X^n \mathcal{F}[X]]$ sei durch einen schwachen, kritischen oder ausgezeichneten Hauptschluß oder durch einen Schnitt erschlossen. Aus $\gamma_1 \ll \gamma$

folgt $\gamma_i \# \alpha \leqslant \gamma \# \alpha$ nach [1] Lemma 9.14 a). Die Behauptung folgt daher aus der I. V.

3. $\mathcal{P}[\forall X^\eta \mathcal{F}[X]]$ sei bezüglich einer Herleitungsfunktion f durch einen starken Hauptschluß, dessen Hauptteil nicht die Formel $\forall X^\eta \mathcal{F}[X]$ ist, oder durch die σ^+-Regel erschlossen. Dann folgt die Behauptung aus der I. V. durch einen starken Hauptschluß oder durch die σ^+-Regel bezüglich der Herleitungsfunktion $\alpha \# f$ (gemäß [1] § 10).

4. $\mathcal{P}[\forall X^\eta \mathcal{F}[X]]$ sei durch einen starken Hauptschluß mit dem Hauptteil $\forall X^\eta \mathcal{F}[X]$ erschlossen. Dann hat man eine Herleitungsfunktion f mit $\eta \in D(f), f(\eta) \leqslant \gamma$ und nach dem Strukturschlußlemma

$$\mathrm{SB}'_k \frac{|f(\alpha)}{|m} \mathcal{P}[\mathcal{F}[U^\alpha]]$$

Man hat $f(\alpha) \leqslant f(\eta) \# \alpha$ nach [1] Corollar 10.8 a), also auch $f(\alpha) \leqslant \gamma \# \alpha$, womit sich die Behauptung ergibt.

Induktive Definition des *Ranges* r (F) einer Formel F. des Systems SB′.

1. Ist F eine Primformel oder eine schwache Formel $\forall X \mathcal{F}[X]$, so sei r $(F) := 0$.

2. r $(A \to B) := \max\{$r (A), r $(B)\}+1$.

3. r $(\forall x \mathcal{A}[x]) :=$ r $(\mathcal{A}[0]) + 1$.

4. Ist F eine starke Formel $\forall X \mathcal{F}[X]$ oder $\forall X^\eta \mathcal{F}[X]$, so sei r $(F) :=$ r $(\mathcal{F}[U^0]) + 1$.

Nach dieser Definition ist gr $(F) \leq$ r (F).

Definition der *Indexsumme* IS (F) einer Formel F.

Enthält F keine freie Prädikatenvariable, so sei IS $(F) := 0$. Andernfalls sei IS (F) die natürliche Summe aller Ordinalzahlen, die in F als obere Indizes von freien Prädikatenvariablen auftreten.

Lemma 3.5. (1. *Tautologielemma*) Für jede NP-Form $\mathcal{Q}$ und jede I-Formel F von einem Rang $\leq$ m gilt $\mathrm{SB}'_0 \frac{|I \cdot 2m+IS(F)}{|m} \mathcal{Q}[F,F]$.
Beweis durch Induktion nach r (F).

1. F sei eine Primformel oder eine schwache Formel $\forall X \mathcal{F}[X]$. Dann ist $\mathcal{Q}[F,F]$ ein Axiom (Ax 3′).

2. F sei eine I-Formel $(A \to B)$. Dann hat man $m > 0$ und nach I. V. $SB_0'|\frac{I}{m}^{\cdot(2m-2)+IS(F)} \mathcal{Q}[\neg A, F]$ und $SB_0'|\frac{I}{m}^{\cdot(2m-2)+IS(F)} \mathcal{Q}[B,F]$.

Die Behauptung folgt durch einen Hauptschluß (S1).

3. F sei eine I-Formel $\forall x \mathcal{A}[x]$. Dann hat man $m > 0$ und nach I. V.

$$SB_0'|\frac{I}{m}^{\cdot(2m-2)+IS(F)} \mathcal{A}[n] \to \mathcal{Q}[F, \mathcal{A}[n]]$$

für jede Ziffer n. Durch Hauptschlüsse (S 3.0) und (S 2.0′) folgt die Behauptung.

4. F sei eine starke I-Formel $\forall X \mathcal{F}[X]$ oder $\forall X^I \mathcal{F}[X]$. Dann hat man $m > 0$ und nach I. V.

$$SB_0'|\frac{I}{m}^{\cdot(2m-2)+IS(F)\#a} \mathcal{F}[U^a] \to \mathcal{Q}_0[F, \mathcal{F}[U^a]]$$

für jede Ordinalzahl $a < I$ aus $T(I)$, wobei U nicht in $\mathcal{Q}[F,F]$ auftritt und $\mathcal{Q}_0[F, \mathcal{F}[U^a]]$ aus $\mathcal{Q}[F, \mathcal{F}[U^a]]$ dadurch entsteht, daß jeder darin auftretende Positivteil F durch $\perp$ ersetzt wird. Hierbei ist gr $(\mathcal{F}[U^a]) < m$. Durch Hauptschlüsse (S 3.1′) oder (S 3.2′) folgt

$$SB_0'|\frac{I}{m}^{\cdot(2m-1)+IS(F)\#a} \mathcal{Q}_0[F, \mathcal{F}[U^a]]$$

Die Behauptung folgt durch einen starken Hauptschluß bezüglich der Herleitungsfunktion f mit $f(a) = I \,.\, (2m-1) + IS(F) \# a$ für $a \leq I$.

Lemma 3.6. (*Induktionslemma*) Für jede I-Formel $\mathcal{A}[t]$ vom Rang m und der Indexsumme δ gilt

$$SB_0'|\frac{I}{m}^{\cdot\omega+\delta} \forall x (\mathcal{A}[x] \to \mathcal{A}[x']) \to (\mathcal{A}[0] \to \forall x \mathcal{A}[x])$$

Beweis. $\mathcal{B}[n]$ sei die Formel

$$\forall x (\mathcal{A}[x] \to \mathcal{A}[x']) \to (\mathcal{A}[0] \to \mathcal{A}[n])$$

Wir beweisen durch Induktion nach n

(1) $SB_0'|\frac{I}{m}^{\cdot 2m+\delta+2n} \mathcal{B}[n]$

für jede Ziffer n. Für $n = 0$ gilt (1) nach dem 1. Tautologielemma. Wir beweisen nun (1) für $n' = n + 1$ unter der Voraussetzung, daß (1) für n gilt. Aus dieser Voraussetzung folgt nach dem Strukturschlußlemma

(2) $\quad \mathrm{SB}_0'\big|\frac{I}{m}^{\cdot 2m+\delta+2n}\ \mathcal{A}[n] \to \mathcal{B}[n']$

Nach dem 1. Tautologielemma hat man

(3) $\quad \mathrm{SB}_0'\big|\frac{I}{m}^{\cdot 2m+\delta}\ \mathcal{A}[n'] \to \mathcal{B}[n']$

Aus (2) und (3) folgt durch einen Hauptschluß (S 1)

(4) $\quad \mathrm{SB}_0'\big|\frac{I}{m}^{\cdot 2m+\delta+2n+1}\ (\mathcal{A}[n] \to \mathcal{A}[n']) \to \mathcal{B}[n']$

Aus (4) folgt die Behauptung für n' durch einen Hauptschluß (S 3.0).

Aus (1) folgt nun die Behauptung von Lemma 3.6 durch einen Hauptschluß (S 2.0').

Lemma 3.7. (2. *Tautologielemma*) Ist η eine Limeszahl $< I$, so gilt $\mathrm{SB}_0'\big|\frac{\eta}{0}^{\cdot 2m}\ \mathcal{Q}[F, F]$ für jede NP-Form $\mathcal{Q}$ und jede η-Formel F von einem Grad $\leq m$.

Beweis durch Induktion nach gr (F).

1. F sei eine Primformel oder eine η-Formel $\forall X\, \mathcal{F}[X]$. Dann ist $\mathcal{Q}[F,F]$ ein Axiom (Ax 3').

2. F sei eine η-Formel $(A \to B)$. Dann folgt die Behauptung aus der I. V. durch einen Hauptschluß (S 1).

3. F sei eine η-Formel $\forall x\, \mathcal{A}[x]$. Dann folgt die Behauptung aus der I. V. durch Hauptschlüsse (S 3.0) und (S 2.0').

4. F sei eine η-Formel $\forall X^\eta\ \mathcal{F}[X]$. Dann hat man $m > 0$ und nach I. V.

(1) $\quad \mathrm{SB}_0'\big|\frac{\eta}{0}^{\cdot (2m-2)}\ \mathcal{F}[U^\alpha] \to \mathcal{Q}_0[F, \mathcal{F}[U^\alpha]]$

für jede Ordinalzahl $\alpha < \eta$, wobei U nicht in $\mathcal{Q}[F, F]$ auftritt und $\mathcal{Q}_0[F, \mathcal{F}[U^\alpha]]$ aus $\mathcal{Q}[F, \mathcal{F}[U^\alpha]]$ dadurch entsteht, daß jeder darin auftretende Positivteil F durch $\perp$ ersetzt wird. Aus (1) folgt durch einen Hauptschluß (S 3.1').

(2) $\quad \mathrm{SB}_0'\big|\frac{I}{0}^{\cdot (2m-1)\# \alpha}\ \mathcal{Q}_0[F, \mathcal{F}[U^\alpha]]$

Aus (2) folgt die Behauptung durch einen starken Hauptschluß bezüglich der Herleitungsfunktion f mit $\mathrm{f}(\alpha) = \eta\,.(2m-1) \# \alpha$ für $\alpha \leq \eta$.

Lemma 3.8. Sind $\forall X\, \mathcal{F}[X]$ und $\mathcal{P}[\forall X\, \mathcal{F}[X]]$ Π_2^1-Formeln der Stufe $\sigma = \Omega_\mu < I$ und ist $\alpha < \sigma^+$, so gilt:

$$\mathrm{SB}'_0\Big|\frac{\alpha}{0}\, \mathcal{P}[\forall X\, \mathcal{F}[X]] \Rightarrow \mathrm{SB}'_0\Big|\frac{\alpha}{0}\, \mathcal{P}[\mathcal{F}[U^\mu]]$$

Beweis durch Induktion nach α. Nach Voraussetzung ist $\mathcal{P}[\forall X\, \mathcal{F}[X]]$ weder durch einen Schnitt noch durch einen kritischen oder ausgezeichneten Hauptschluß erschlossen.

1. $\mathcal{P}[\forall X\, \mathcal{F}[X]]$ sei ein Axiom. Dann ist auch $\mathcal{P}[\mathcal{F}[U^\mu]]$ ein Axiom, weil die Π_2^1-Formel $\mathcal{P}[\forall X\, \mathcal{F}[X]]$ der Stufe σ nach Lemma 2.1 d) keinen mit der Formel $\forall X\, \mathcal{F}[X]$ gleichwertigen Negativteil enthält.

2. $\mathcal{P}[\forall X\, \mathcal{F}[X]]$ sei durch einen Hauptschluß erschlossen. Ist dies ein Hauptschluß (S 2.1′) mit dem Hauptteil $\forall X\, \mathcal{F}[X]$, so folgt die Behauptung aus der Prämisse nach dem Strukturschlußlemma. Andernfalls folgt die Behauptung aus der I. V.

3. $\mathcal{P}[\forall X\, \mathcal{F}[X]]$ sei durch eine π^+-Regel erschlossen. Dann hat man $\pi^+ \leq \alpha < \sigma^+$, also $\pi < \sigma$. In diesem Fall tritt die Formel $\forall X\, \mathcal{F}[X]$ der Stufe σ in keiner Π_2^1-Formel der Stufe π auf. Die Behauptung folgt daher aus der I. V.

Lemma 3.9. Ist $\mathcal{G}[U^\mu]$ eine Π_2^1-Formel der Stufe $\sigma = \Omega_\mu < I$ mit $U \notin \mathrm{PV}(\mathcal{G}[U^\mu])$, wobei U nicht in $\mathcal{G}$ auftritt, und gilt

$\mathrm{SB}'_0\Big|\frac{\alpha}{0}\, \mathcal{G}[U^\mu]$ mit $\alpha < \sigma^+$, so folgt

a) $\mathrm{SB}'_0\Big|\frac{I\cdot 2m+\delta\,\#\,\alpha}{m}\, \mathcal{G}[\mathcal{A}]$, wenn $\mathcal{A}[t]$ eine I-Formel vom Rang m und $IS(\mathcal{A}[t]) = \delta$ ist,

b) $\mathrm{SB}'_0\Big|\frac{\eta\cdot 2m\,\#\,\alpha}{0}\, \mathcal{G}[\mathcal{A}]$, wenn $\mathcal{A}[t]$ eine η-Formel vom Grad m mit $\eta < I$ ist.

Beweis durch Induktion nach α. Nach Voraussetzung ist $\mathcal{G}[U^\mu]$ weder durch einen Schnitt noch durch einen kritischen oder ausgezeichneten Hauptschluß erschlossen.

1. $\mathcal{G}[U^\mu]$ sei ein Axiom des Systems SB′. Ist auch $\mathcal{G}[\mathcal{A}]$ ein Axiom, so gelten die Behauptungen. Andernfalls ist $\mathcal{G}[\mathcal{A}]$ eine Formel $\mathcal{Q}[\mathcal{A}[s], \mathcal{A}[t]]$ mit gleichwertigen Termen s und t. Dann folgen die

Behauptungen aus dem Umsetzungslemma a) und dem 1. und 2. Tautologielemma.

2. $\mathcal{G}[U^\mu]$ sei durch einen Hauptschluß erschlossen. Dann folgen die Behauptungen aus der I. V.

3. $\mathcal{G}[U^\mu]$ sei durch eine π^+-Regel erschlossen. Dann hat man $\pi^+ \leq \alpha < \sigma^+$, also $\pi < \sigma$. In diesem Fall tritt U^μ nach Lemma 2.1 b) in keiner Π^1_2-Formel der Stufe π auf. Die Behauptungen folgen daher aus der I.V.

Lemma 3.10. (σ^+-*Lemma*) Ist $\forall X\, \mathcal{F}[X]$ eine Formel der Stufe $\sigma < I$, so gilt

a) $SB_0' \left|\frac{I\cdot 2m+\delta\#\sigma^+}{m}\right. \forall X\, \mathcal{F}[X] \to \mathcal{F}[\mathcal{A}]$

wenn $\mathcal{A}[t]$ eine I-Formel vom Rang m und IS $(\mathcal{A}[t]) = \delta$ ist,

b) $SB_0' \left|\frac{\eta\cdot 2m+\delta\#\sigma^+}{0}\right. \forall X\, \mathcal{F}[X] \to \mathcal{F}[\mathcal{A}]$

wenn $\mathcal{A}[t]$ eine η-Formel vom Grad m mit $\eta < I$ ist.

Beweis. f sei im Fall a) die Herleitungsfunktion mit $f(\alpha) = I.2m + \delta \# \alpha$ und im Fall b) die Herleitungsfunktion mit $f(\alpha) = \eta.2m \# \alpha$ für $\alpha \leq \sigma^+$. Aufgrund von (Ax 3′) hat man

(1) $SB_0' \left|\frac{f(0)}{0}\right. \forall X\, \mathcal{F}[X] \vee (\forall X\, \mathcal{F}[X] \to \mathcal{F}[\mathcal{A}])$

Nach den Lemmata 3.8 und 3.9 und dem Strukturschlußlemma gilt im Fall a)

(2a) $SB_0' \left|\frac{\alpha}{0}\right. \mathcal{P}[\forall X\, \mathcal{F}[X] \Rightarrow SB_0' \left|\frac{f(\alpha)}{m}\right. \mathcal{P}[(\forall X\, \mathcal{F}[X] \to \mathcal{F}[\mathcal{A}])]$

und im Fall b)

(2b) $SB_0' \left|\frac{\alpha}{0}\right. \mathcal{P}[\forall X\, \mathcal{F}[X]] \Rightarrow SB_0' \left|\frac{f(\alpha)}{0}\right. \mathcal{P}[(\forall X\, \mathcal{F}[X] \to \mathcal{F}[\mathcal{A}])]$

für alle $\alpha < \sigma^+$ aus $T(I)$ und jede Π^1_2-Formel $\mathcal{P}[\forall X\, \mathcal{F}[X]]$ der Stufe σ. Die Behauptungen folgen durch die σ^+-Regel.

Im folgenden sei M eine endliche Menge von Ordinalzahlen $< I$ aus $T(I)$ mit $0 \in M$ und ΣM die natürliche Summe aller Ordinalzahlen der Menge M.

Unter einer *M-Interpretation* einer Formel F des Systems SB verstehen wir eine Formel F' des Systems SB′, die durch folgende Ersetzungen aus der Formel F entsteht.

1. Jede freie Zahlenvariable wird durch eine Ziffer ersetzt.

2. Jede freie Prädikatenvariable U wird durch $U^{\alpha+n}$ ersetzt, wobei $\alpha \in M$ und $n < \omega$ ist.

3. Jeder nicht ausgezeichnete Prädikatenquantor $\forall X$ wird durch $\forall X^I$ ersetzt.

Jede M-Interpretation einer Formel des Systems SB ist also eine I-Formel des Systems SB'.

Lemma 3.11. (*Interpretationslemma*) Gilt $\mathrm{SB} \,|\!\underline{\;n\;}\, F$ für eine Formel F des Systems SB, so gibt es natürliche Zahlen k und m, so daß

$\mathrm{SB}'_k \,|\!\frac{I\cdot(\omega+n)+\Sigma M}{m}\, F'$ für jede M-Interpretation F' von F gilt.

Beweis durch Induktion nach n.

1. F sei ein Axiom des Systems SB. Ist dies eines der Axiome (Ax 1) bis (Ax 4), so ist F' ein Axiom des Systems SB'. Ist F ein Axiom (Ax 5), so folgt die Behauptung aus dem Induktionslemma 3.6. Ist F ein Axiom (Ax 6), so folgt die Behauptung aus dem σ^+-Lemma 3.10 a).

2. F sei durch einen Strukturschluß erschlossen. Dann folgt die Behauptung aus der I. V. nach dem Strukturschlußlemma.

3. F sei durch einen Hauptschluß (S 1), (S 2.0) oder (S 3.0) des Systems SB oder durch einen Schnitt erschlossen. Dann folgt die Behauptung aus der I. V. durch einen entsprechenden Hauptschluß oder Schnitt des Systems SB'.

4. F sei durch einen Hauptschluß (S 2.1) erschlossen, dessen Hauptteil eine schwache Formel ist. Dann ist $n > 0$ und F' eine Formel $\mathcal{P}[\forall X\, \mathcal{F}[X]]$, wobei $\forall X\, \mathcal{F}[X]$ eine Stufe $\Omega_\mu < I$ hat. Nach Lemma 2.1 a) ist $\mu \in M$. Man hat daher nach I. V.

$$\mathrm{SB}'_k \,|\!\frac{I\cdot(\omega+n-1)+\Sigma M}{m}\, \mathcal{P}_G[\mathcal{F}[U^\mu]]$$

wobei U nicht in F' auftritt und G die Formel $\forall X\, \mathcal{F}[X]$ ist. Mit einem Hauptschluß (S 2.1') folgt die Behauptung.

5. F sei durch einen Hauptschluß (S 2.1) erschlossen, dessen Hauptteil eine starke Formel ist. Dann ist $n > 0$ und F' eine Formel $\mathcal{P}[\forall X\, \mathcal{F}[X]]$ mit einer starken I-Formel $\forall X\, \mathcal{F}[X]$ oder eine Formel $\forall X^I\, \mathcal{F}[X]$. In diesem Fall hat man nach I. V.

$$\mathrm{SB}'_k \left|\frac{I\cdot(\omega+n-1)+\Sigma M \# \alpha}{m}\right. \mathcal{P}_G[\mathcal{F}[U^\alpha]]$$

für alle $\alpha < I$ aus $T(I)$, wobei U nicht in F' auftritt und G die Formel $\forall X\ \mathcal{F}[X]$ oder $\forall X^I\ \mathcal{F}[X]$ ist. Die Behauptung folgt durch einen starken Hauptschluß des Systems SB′ vom Typ I bezüglich der Herleitungsfunktion f mit $f(\alpha) = I.(\omega + n-1) + \Sigma M \# \alpha$ für $\alpha \leq I$.

6. F sei durch einen Hauptschluß (S 3.1) erschlossen, dessen Hauptteil mit einem nicht ausgezeichneten Prädikatenquantor beginnt. Dann ist $n > 0$ und F' eine Formel $\mathcal{N}[\forall X^I\ \mathcal{F}[X]]$. In diesem Fall hat man nach I. V.

$$\mathrm{SB}'_k \left|\frac{I\cdot(\omega+n-1)+\Sigma M}{m}\right. \mathcal{F}[U^\alpha] \to \mathcal{N}[\forall X^I\ \mathcal{F}[X]]$$

mit $\alpha = \beta + i$, $\beta \in M$. Dies gilt nämlich nach Voraussetzung, wenn U in F' auftritt. Andernfalls kann $\alpha = 0$ gewählt werden. Die Behauptung folgt nun durch einen Hauptschluß (S 3.1′).

7. F sei durch einen Hauptschluß (S 3.1), der mit einem ausgezeichneten Prädikatenquantor beginnt, oder durch einen Hauptschluß (S 3.2) erschlossen. Dann ergibt sich die Behauptung aus der I. V. durch einen ausgezeichneten Hauptschluß des Systems SB′.

§ 4. Herleitungsreduktionen in SB′

Lemma 4.1. Ist C eine Formel vom I-Grad $k+2$ und einem Grad $< m$, die nicht die Gestalt $(A \to B)$ hat, und gilt

(1) $\quad \mathrm{SB}'_{k+1} \left|\frac{\gamma}{m}\right. \mathcal{P}[C]$

(2) $\quad \mathrm{SB}'_{k+1} \left|\frac{\delta}{m}\right. C \to F$

so folgt

$$\mathrm{SB}'_{k+1} \left|\frac{\gamma \# \delta}{m}\right. \mathcal{P}[F]$$

Beweis durch Induktion nach δ.

1. $C \to F$ sei ein Axiom. Dann sind auch F und $\mathcal{P}[F]$ Axiome.

2. $C \to F$ sei durch einen nicht starken Hauptschluß, dessen Hauptteil in F liegt, oder durch einen Schnitt erschlossen. Dann folgt die Behauptung aus der I. V.

3. $C \to F$ sei bezüglich einer Herleitungsfunktion f durch einen starstarken Hauptschluß oder durch die σ^+-Regel erschlossen. Dann folgt die

Behauptung aus der I. V. durch einen starken Hauptschluß oder durch die σ^+-Regel bezüglich der Herleitungsfunktion $\gamma \# f$.

4. $C \to F$ sei durch einen Hauptschluß mit dem Hauptteil C erschlossen. Dies kann, da Gr $(C) \geqq 2$ ist und C nicht die Gestalt $(A \to B)$ hat, nur ein Hauptschluß (S 3.0) oder (S 3.1') sein. Es kommen also nur folgende zwei Fälle in Betracht.

4.1. C ist eine Formel $\forall x\, \mathcal{A}[x]$, und man hat $\delta_0 \ll \delta$ mit

(3) $\qquad \mathrm{SB}'_{k+1} \overset{\delta_0}{\underset{m}{|}} \mathcal{A}[t] \to (C \to F)$

Aus (1) und (3) folgt nach I. V. und dem Strukturschlußlemma

(4) $\qquad \mathrm{SB}'_{k+1} \overset{\gamma \# \delta_0}{\underset{m}{|}} \mathcal{A}[t] \to \mathcal{P}[F]$

Aus (1) folgt nach dem schwachen Inversionslemma b) und dem Strukturschlußlemma

(5) $\qquad \mathrm{SB}'_{k+1} \overset{\gamma}{\underset{m}{|}} \mathcal{A}[t] \vee \mathcal{P}[F]$

Aus (4) und (5) folgt die Behauptung durch einen Schnitt mit der Schnittformel $\mathcal{A}[t]$, die den I-Grad $k+1$ und einen Grad $< m$ hat.

4.2. C ist eine Formel $\forall X^\eta \mathcal{F}[X]$, und man hat $\alpha < \eta$, $\delta_0 \ll \delta$ und $\alpha \ll \delta$ mit

(6) $\qquad \mathrm{SB}'_{k+1} \overset{\delta_0}{\underset{m}{|}} \mathcal{F}[U^\alpha] \to (C \to F)$

Aus (1) und (6) folgt nach der I. V. und dem Strukturschlußlemma

(7) $\qquad \mathrm{SB}'_{k+1} \overset{\gamma \# \delta_0}{\underset{m}{|}} \mathcal{F}[U^\alpha] \to \mathcal{P}[F]$

Aus (1) folgt nach dem starken Inversionslemma und dem Strukturschlußlemma

(8) $\qquad \mathrm{SB}'_{k+1} \overset{\gamma \# \alpha}{\underset{m}{|}} \mathcal{F}[U^\alpha] \vee \mathcal{P}[F]$

Aus (7) und (8) folgt die Behauptung durch einen Schnitt mit der Schnittformel $\mathcal{F}[U^\alpha]$, die einen I-Grad $\leq k+1$ und einen Grad $< m$ hat.

Lemma 4.2. Aus $\mathrm{SB}'_{k+2} \overset{\gamma}{\underset{m}{|}} F$ folgt $\mathrm{SB}'_{k+1} \overset{\omega^\gamma}{\underset{m}{|}} F$.

Beweis durch Induktion nach γ.

1. F sei ein Axiom. Dann ist die Behauptung trivial.

2. F *sei* durch einen nicht starken Hauptschluß oder durch einen Schnitt von einem I-Grad $\leq k+1$ erschlossen.

Aus $\gamma_i \ll \gamma$ folgt $\omega^{\gamma_i} \ll \omega^{\gamma}$ nach [1] Lemma 9.14 b). Die Behauptung folgt daher aus der I. V.

3. F sei bezüglich einer Herleitungsfunktion f durch einen starken Hauptschluß oder durch die σ^+-Regel erschlossen. Dann folgt die Behauptung aus der I. V. durch einen starken Hauptschluß oder durch die σ^+-Regel bezüglich der Herleitungsfunktion ω^f (gemäß [1] §10).

4. F sei durch einen Schnitt vom I-Grad $k+2$ erschlossen. Dann hat man $\alpha \ll \gamma$, $\beta \ll \gamma$ und eine Formel C vom I-Grad $k+2$ und einem Grad $< m$ mit

$$\mathrm{SB}'_{k+2} \overset{\alpha}{\underset{m}{|}} C \vee F \text{ und } \mathrm{SB}'_{k+2} \overset{\beta}{\underset{m}{|}} C \rightarrow F$$

Nach der I. V. folgt

$$\mathrm{SB}'_{k+1} \overset{\omega^\alpha}{\underset{m}{|}} C \vee F \text{ und } \mathrm{SB}'_{k+1} \overset{\omega^\beta}{\underset{m}{|}} C \rightarrow F$$

4.1. C habe nicht die Gestalt $(A \rightarrow B)$. Dann folgt die Behauptung nach Lemma 4.1 und dem Strukturschlußlemma.

4.2 C sei eine Formel $(A \rightarrow B)$. Dann hat man

(1) $\quad \mathrm{SB}'_{k+1} \overset{\omega^\alpha}{\underset{m}{|}} (A \rightarrow B) \vee F$

(2) $\quad \mathrm{SB}'_{k+1} \overset{\omega^\beta}{\underset{m}{|}} (A \rightarrow B) \rightarrow F$

Aus (1) folgt nach dem Strukturschlußlemma

(3) $\quad \mathrm{SB}'_{k+1} \overset{\omega^\alpha}{\underset{m}{|}} A \rightarrow (B \vee F)$

Aus (2) folgt nach dem schwachen Inversionslemma a) und dem Strukturschlußlemma

(4) $\quad \mathrm{SB}'_{k+1} \overset{\omega^\beta}{\underset{m}{|}} A \vee (B \vee F)$

(5) $\quad \mathrm{SB}'_{k+1} \overset{\omega^\beta}{\underset{m}{|}} B \rightarrow F$

Aus (3) und (4) folgt durch einen Schnitt mit der Schnittformel A, die einen I-Grad $\leq k+1$ und einen Grad $< m$ hat,

(6) $\quad \mathrm{SB}'_{k+1} \overset{\omega^\alpha \# \omega^\beta}{\underset{m}{|}} B \vee F$

Aus (5) und (6) folgt die Behauptung durch einen Schnitt mit der Schnittformel B, die ebenfalls einen I-Grad $\leq k+1$ und einen Grad $< m$ hat.

Lemma 4.3. Aus $SB'_{k+1} \overset{\gamma}{\underset{m}{\vdash}} F$ folgt $SB'_1 \overset{\omega_k(\gamma)}{\underset{m}{\vdash}} F$.

Beweis. Man hat $\omega_0(\gamma) := \gamma$ und $\omega_{n+1}(\gamma) := \omega^{\omega_n(\gamma)}$. Die Behauptung folgt aus Lemma 4.2 durch Induktion nach k.

Definition. Eine Formel des Systems SB′ heiße *klein*, wenn in ihr kein Prädikatenquantor $\forall X^I$ positiv auftritt.

Lemma 4.4. (*Negatives Quantoren-Reduktionslemma*) Ist η eine Limeszahl $< I$ aus $T(I)$ und geht eine kleine Formel F dadurch, daß gewisse negativ in ihr auftretende Prädikatenquantoren $\forall X^I$ durch $\forall X^\eta$ ersetzt werden, in eine Formel F' über, so gilt:

$$SB'_0 \overset{\gamma}{\underset{m}{\vdash}} F,\ d\gamma \leq \eta \Rightarrow SB'_0 \overset{\gamma \# \eta}{\underset{m}{\vdash}} F'$$

Beweis durch Induktion nach γ.

1. F sei ein Axiom des Systems SB′. Dann ist auch F' ein Axiom.

2. F sei durch einen schwachen oder kritischen Hauptschluß oder durch einen ausgezeichneten Hauptschluß, dessen Hauptteil nicht von der Ersetzung betroffen ist, oder durch einen Schnitt erschlossen. Dann sind auch die Prämissen des betreffenden Schlusses kleine Formeln. Aus $\gamma_i \lll \gamma$ folgt nach [1] Lemma 9.5 $d\gamma_i \lll d\gamma$, also $d\gamma_i < d\gamma \leq \eta$. Die Behauptung folgt daher aus der I. V. (Im Fall eines kritischen Hauptschlusses von Index α folgt $\alpha = d\alpha < d\gamma \leq \eta$ aus $\alpha \lll \gamma$, so daß die Bedingung $\alpha < \eta$ für diesen Schluß erfüllt ist.)

3. F sei bezüglich einer Herleitungsfunktion f durch einen starken Hauptschluß oder durch die σ^+-Regel erschlossen. Dann hat man, da F eine kleine Formel ist, $\beta < I$ mit $\beta \in D(f)$ und $f(\beta) \mathrel{\underline{\lll}} \gamma$. Nach den in [1] § 10 bewiesenen Eigenschaften der Herleitungsfunktion df folgt $df(\alpha) < df(\beta) \leq d\gamma$ für alle $\alpha < \beta$. Die Behauptung folgt daher aus der I. V. durch einen starken Hauptschluß oder durch die σ^+-Regel bezüglich der Herleitungsfunktion $\eta \# f$.

4. F sei durch einen ausgezeichneten Hauptschluß (S 3.2′) erschlossen, dessen Hauptteil von der Ersetzung betroffen ist. Dann ist F eine Formel $\mathcal{N}[\forall X\, \mathcal{F}[X]]$ und F' eine Formel $\mathcal{N}'[\forall X\, \mathcal{F}'[X]]$, wobei $\forall X\, \mathcal{F}[X]$ eine starke I-Formel und $\forall X\, \mathcal{F}'[X]$ die entsprechende η-Formel ist. Man hat $gr(\mathcal{F}[U^\alpha]) < m$, $\gamma_0 \lll \gamma$, $I + h(\forall X\, \mathcal{F}[X]) \lll \gamma$ und nach I. V.

(1) $\quad SB_0' \left|\frac{\gamma_0 \# \eta}{m}\right. \mathcal{F}'[U^a] \to \mathcal{N}'[\forall X \mathcal{F}'[X]]$

Die Formel $\forall X \mathcal{F}'[X]$ hat eine Stufe $\sigma = \Omega_\mu < I$. Nach Lemma 3.10 b) und dem Strukturschlußlemma hat man

(2) $\quad SB_0' \left|\frac{\sigma^+}{0}\right. \mathcal{F}'[U^a] \vee \mathcal{N}'[\forall X \mathcal{F}'[X]]$

Aus $I + h(\forall X \mathcal{F}[X]) \lessdot \gamma$ folgt nach Lemma 2.1 a) $\mu \lessdot \gamma \# \eta$. Dann ist, da $\gamma \geq I$ ist, auch $\mu + 1 \lessdot \gamma \# \eta$ und nach [1] Lemma 9.11 auch $\sigma^+ = \Omega_{\mu+1} \lessdot \gamma \# \eta$. Die Behauptung folgt daher aus (1) und (2) durch einen Schnitt mit der Schnittformel $\mathcal{F}'[U^a]$, die den I-Grad 0 und einen Grad $< m$ hat.

5. F sei durch einen ausgezeichneten Hauptschluß (S 3.3′) erschlossen, dessen Hauptteil von der Ersetzung betroffen ist. Dann ist F eine Formel $\mathcal{N}[\forall X \mathcal{F}[X]]$ und F' eine Formel $\mathcal{N}'[\forall X \mathcal{F}'[X]]$, wobei $\forall X \mathcal{F}[X]$ eine starke I-Formel $\forall X \neg(\mathcal{A} \subseteq X \subseteq \mathcal{B})$ und $\forall X \mathcal{F}'[X]$ die entsprechende η-Formel ist. Man hat $\mathrm{gr}(\mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}) < m$, $\mathrm{gr}(\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}) < m$, $\gamma_0 \lessdot \gamma$,

$I + h(\forall X \mathcal{F}[X]) \lessdot \gamma$ und nach I. V.

(3) $\quad SB_0' \left|\frac{\gamma_0 \# \eta}{m}\right. (\mathcal{A}' \subseteq \mathcal{B}') \vee \mathcal{N}'[\forall X \mathcal{F}'[X]]$

Die Formel $\forall X \mathcal{F}'[X]$ hat eine Stufe $\sigma = \Omega_\mu < I$. Nach Lemma 3.10 b) hat man

$$SB_0' \left|\frac{\sigma^+ \# \eta \cdot \omega}{0}\right. \forall X \mathcal{F}'[X] \to \neg(\mathcal{A}' \subseteq \mathcal{A}' \subseteq \mathcal{B}')$$

Nach dem Strukturschlußlemma folgt

(4) $\quad SB_0' \left|\frac{\sigma^+ \# \eta \cdot \omega}{0}\right. (\mathcal{A}' \subseteq \mathcal{A}') \to ((\mathcal{A}' \subseteq \mathcal{B}') \to \mathcal{N}'[\forall X \mathcal{F}'[X]])$

Aus Lemma 3.7 folgt

(5) $\quad SB_0' \left|\frac{\eta \cdot \omega}{0}\right. (\mathcal{A}' \subseteq \mathcal{A}')$

Wie im 4. Fall ergibt sich $\sigma^+ \lessdot \gamma \# \eta$. Da $\gamma \geq I$ ist, folgt $\eta . \omega \lessdot \gamma \# \eta$ und $\sigma^+ \# \eta . \omega \lessdot \gamma \# \eta$. Die Behauptung folgt daher aus (3), (4) und (5) durch Schnitte mit den Schnittformeln $(\mathcal{A}' \subseteq \mathcal{A}')$ und $(\mathcal{A}' \subseteq \mathcal{B}')$, die den I-Grad 0 und Grade $< m$ haben.

Bezeichnungen. Im folgenden bezeichnen wir mit J eine endliche (eventuell leere) Menge von Limeszahlen $< I$ aus $T(I)$ und mit ΣJ die

natürliche Summe aller Ordinalzahlen der Menge J. (Ist J leer, so sei $\Sigma J := 0$.)
Mit F/J bezeichnen wir eine Formel, die aus der Formel F dadurch entsteht, daß gewisse Prädikatenquantoren $\forall X^I$, die in F positiv auftreten, durch $\forall X^{\eta_i}$ mit $\eta_i \in J$ ersetzt werden. (Ist J leer, so ist F/J die Formel F.)

Lemma 4.5. (*Positives Quantoren-Reduktionslemma*)
Gilt $SB_1' \overset{\gamma}{\underset{m}{\vdash}} F$ und ist F/J eine kleine Formel, so folgt

$$SB_0' \overset{\omega^{I \# \gamma} \# \Sigma J}{\underset{m}{\vdash}} F/J$$

Beweis durch Induktion nach γ.

1. F sei ein Axiom des Systems SB$'$. Dann ist auch F/J ein Axiom.

2. F sei durch einen schwachen, kritischen oder ausgezeichneten Hauptschluß oder durch einen Schnitt vom I-Grad 0 erschlossen. Aus $\gamma_i \ll \gamma$ folgt $\omega^{I \# \gamma_i} \# \Sigma J \ll \omega^{I \# \gamma} \# \Sigma J$. Die Behauptung folgt daher aus der I. V.

3. F sei bezüglich einer Herleitungsfunktion f durch einen starken Hauptschluß von einem Typ $< I$ oder durch die σ^+-Regel erschlossen. Dann folgt die Behauptung aus der I. V. durch einen starken Hauptschluß oder durch die σ^+-Regel bezüglich der Herleitungsfunktion $\Sigma J \# \omega^{I \# f}$.

4. F sei durch einen starken Hauptschluß (S 2.2$'$) erschlossen. Dann ist F eine Formel $\mathcal{P}[\forall X \mathcal{F}[X]]$ und F/J eine Formel $\mathcal{P}'[\forall X \mathcal{F}'[X]]$, wobei $\forall X \mathcal{F}[X]$ eine starke I-Formel und $\forall X \mathcal{F}'[X]$ die entsprechende η-Formel für ein $\eta \in J$ ist. Die Formel $\forall X \mathcal{F}'[X]$ hat eine Stufe $\Omega_\mu < I$. Man hat eine Herleitungsfunktion f mit $I \in D(f)$, $f(I) \leqq \gamma$, $h(\forall X \mathcal{F}[X]) + \omega \ll \gamma$ und nach I. V.

$$(1) \qquad SB_0' \overset{\omega^{I \# f(\mu)} \# \Sigma J}{\underset{m}{\vdash}} \mathcal{P}_G'[\mathcal{F}'[U^\mu]]$$

wobei U in F/J nicht auftritt und G die Formel $\forall X \mathcal{F}'[X]$ ist. Nach [1] Corollar 10.8 a) ist $f(\mu) \ll f(I) \# \mu \leqq \gamma \# \mu$, und aus $h(\forall X \mathcal{F}[X]) + \omega \ll \gamma$ folgt nach Lemma 2.1 a) $\mu \ll \gamma \# \Sigma J$. Hiermit und mit $f(\mu) < \gamma$ ergibt sich

$$\omega^{I \# f(\mu)} \# \Sigma J \ll \omega^{I \# \gamma} \# \Sigma J$$

Die Behauptung folgt daher aus (1) und durch einen Hauptschluß (S 2.1′).

5. F sei durch einen starken Hauptschluß (S 2.3′) vom Typ I erschlossen. Dann ist F eine Formel $\mathcal{P}[\forall X^I \mathcal{F}[X]]$ und F/J eine Formel $\mathcal{P}'[\forall X^\eta \mathcal{F}'[X]]$ mit einem $\eta \in J$. Man hat eine Herleitungsfunktion f mit $I \in D(f)$, $\mathrm{f}(I) \leqq \gamma$ und nach I. V.

(2) $\quad \mathrm{SB}_0' \frac{\omega^{I \# f(\alpha) \# \Sigma J}}{m} \mathcal{P}_G'[\mathcal{F}'[U^\alpha]]$ für alle $\alpha < \eta$ aus $T(I)$, wobei U nicht in F/J auftritt und G die Formel $\forall X^\eta \mathcal{F}'[X]$ ist. Für die Herleitungsfunktion $g := \Sigma J \# \omega^{I \# f}$ erhält man $\eta \in D(g)$ und $g(\eta) \leqslant \omega^{I \# \gamma} \# \Sigma J$. Die Behauptung folgt daher aus (2) durch einen starken Hauptschluß (S 2.3′) vom Typ η bezüglich der Herleitungsfunktion g.

6. F sei durch einen Schnitt vom I-Grad 1 erschlossen. Dann hat man $\alpha \leqslant \gamma$, $\beta \leqslant \gamma$ und eine starke I-Formel $\forall X \mathcal{F}[X]$ mit

(3) $\quad \mathrm{SB}_1' \frac{\alpha}{m} \forall X \mathcal{F}[X] \vee F$

(4) $\quad \mathrm{SB}_1' \frac{\beta}{m} \forall X \mathcal{F}[X] \to F$

wobei $m > 0$ ist. Aus (4) folgt für $\delta := \omega^{I \# \beta} \# \Sigma J$ nach I. V.

(5) $\quad \mathrm{SB}_0' \frac{\delta}{m} \forall X \mathcal{F}[X] \to F/J$

$\forall X \mathcal{F}'[X]$ sei die Formel, die aus der Formel $\forall X \mathcal{F}[X]$ dadurch entsteht, daß jeder darin auftretende Prädikatenquantor $\forall X^I$ durch $\forall X^{d\delta}$ ersetzt wird. Aus (5) folgt nach Lemma 4.4

(6) $\quad \mathrm{SB}_0' \frac{\delta \# d\delta}{m} \forall X \mathcal{F}'[X] \to F/J$

Aus (3) folgt nach der I. V.

(7) $\quad \mathrm{SB}_0' \frac{\omega^{I \# \alpha} + \Sigma J \# d\delta}{m} \forall X \mathcal{F}'[X] \vee F/J$

Man hat $\delta \# d\delta \leqslant \omega^{I \# \gamma} \# \Sigma J$ und

$\omega^{I \# \alpha} \# \Sigma J \# d\delta \leqslant \omega^{I + \gamma} \# \Sigma J$. Die Behauptung folgt daher aus (6) und (7) durch einen Schnitt mit der Schnittformel $\forall X \mathcal{F}'[X]$, die den I-Grad 0 und den Grad 0 hat.

Corollar 4.5. Gilt $\mathrm{SB}_1' \frac{\gamma}{m} F$ für eine Formel F vom I-Grad 0, so folgt $\mathrm{SB}_0' \frac{\omega^{I \# \gamma}}{m} F$.

Beweis. Dies folgt aus Lemma 4.5 für die leere Menge J, da in diesem Fall F eine kleine Formel ist.

Lemma 4.6. (1. *Kollabierungslemma*) Gilt $SB_0' \left|\frac{\gamma}{m}\right. F$ für eine Formel F vom I-Grad 0, so folgt $SB_0' \left|\frac{d\gamma}{m}\right. F$.

Beweis durch Induktion nach γ. Da F den I-Grad 0 hat, kann F nicht durch einen ausgezeichneten Hauptschluß erschlossen sein.

1. F sei ein Axiom. Dann ist die Behauptung trivial.

2. F sei durch einen schwachen oder kritischen Hauptschluß oder durch einen Schnitt erschlossen. Dann ist auch jede Prämisse dieses Schlusses eine Formel vom I-Grad 0. Die Behauptung folgt daher aus der I. V.

3. F sei bezüglich einer Herleitungsfunktion f durch einen starken Hauptschluß oder durch die σ^+-Regel erschlossen. Dann hat man, da F den I-Grad 0 hat, ein $\beta < I$ mit $\beta \in D(f)$ und $f(\beta) \leqq \gamma$. In diesem Fall ist nach [1] § 10 df eine Herleitungsfunktion mit $\beta \in D(df)$ und $df(\beta) \leqslant d\gamma$. Die Behauptung folgt aus der I. V. durch einen starken Hauptschluß oder durch die σ^+-Regel bezüglich der Herleitungsfunktion df.

Lemma 4.7. Ist C eine Formel vom I-Grad 0 und Grad m, die nicht die Gestalt $(A \rightarrow B)$ hat, und gilt

(1) $\quad SB_0' \left|\frac{\gamma}{m}\right. \mathcal{P}[C]$

(2) $\quad SB_0' \left|\frac{\delta}{m}\right. C \rightarrow F$

mit $\delta < I$, so folgt

$$SB_0' \left|\frac{\gamma \# \delta}{m}\right. \mathcal{P}[F]$$

Beweis durch Induktion nach δ. Da $\delta < I$ ist, kann $C \rightarrow F$ nicht durch einen ausgezeichneten Hauptschluß erschlossen sein.

1. $C \rightarrow F$ sei ein Axionm des Systems SB'. Dann kommen folgende drei Fälle in Betracht.

1.1. F ist ein Axiom. Dann ist auch $\mathcal{P}[F]$ ein Axiom.

1.2. C ist eine falsche konstante Primformel. Dann hat man $\mathcal{P}[C] \left|\frac{S}{}\right.$

$\mathcal{P}[F]$. Die Behauptung folgt daher aus (1) nach dem Strukturschlußlemma.

1.3. F ist eine Formel $\mathcal{P}_0[C_0]$, wobei C und C_0 gleichwertige Formeln sind. Dann hat man $\mathcal{P}[C_0] \mid\!\frac{S}{\;\;} \mathcal{P}[F]$. Die Behauptung folgt daher aus (1) nach dem Umsetzungslemma a) und dem Strukturschlußlemma.

2. $C \to F$ sei durch einen Hauptschluß oder durch einen Schnitt oder durch die σ^+-Regel erschlossen. Dann erfolgt der Beweis entsprechend wie für Lemma 4.1.

Lemma 4.8. Gilt $SB_0' \mid\!\frac{\gamma}{m+1} F$ mit $\gamma < I$, so folgt $SB_0' \mid\!\frac{\omega^\gamma}{m} F$.
Beweis mit Lemma 4.7 entsprechend wie für Lemma 4.2.

Lemma 4.9. Gilt $SB_0' \mid\!\frac{\gamma}{m} F$ mit $\gamma < I$, so folgt $SB_0' \mid\!\frac{\omega_m(\gamma)}{0} F$.
Beweis. Dies folgt aus Lemma 4.8 durch Induktion nach m.

Lemma 4.10. (2. *Kollabierungslemma*) Gilt $SB_0' \mid\!\frac{\gamma}{0} F$ mit $\gamma < I$ für eine Π_2^1-Formel F einer Stufe $\leq \sigma < I$, so folgt $SB_0' \mid\!\frac{d_\sigma \gamma}{0} F$.
Beweis durch Induktion nach γ. Nach Voraussetzung kann F weder durch einen Schnitt noch durch einen kritischen oder ausgezeichneten Hauptschluß erschlossen sein.

1. F sei ein Axiom. Dann gilt die Behauptung.

2. F sei durch einen schwachen Hauptschluß erschlossen. Dann sind auch die Prämissen dieses Schlusses Π_2^1-Formeln von Stufen $\leq \sigma$. Aus $\gamma_i \ll \gamma < I$ folgt nach [1] Lemma 8.8 $d_\sigma\gamma_i \ll d_\sigma\gamma$. Die Behauptung folgt daher aus der I. V.

3. F sei durch einen starken Hauptschluß vom Typ η erschlossen. Dann ist $\eta \leq \Omega_\eta \leq \sigma$. In diesem Fall hat man eine Herleitungsfunktion f mit $\eta \in D(f)$ und $f(\eta) \underline{\ll} \gamma$ und nach [1] § 10 eine Herleitungsfunktion $d_\sigma f$ mit $\eta \in D(d_\sigma f)$ und $d_\sigma f(\eta) \underline{\ll} d_\sigma \gamma$. Die Behauptung folgt aus der I. V. durch den starken Hauptschluß mit der Herleitungsfunktion $d_\sigma f$.

4. F sei durch eine π^+-Regel erschlossen. Dann hat man eine Herleitungsfunktion f mit $\pi^+ \in D(f)$ und $f(\pi^+) \underline{\ll} \gamma$.

4.1. Sei $\pi < \sigma$. Dann hat man nach [1] § 10 eine Herleitungsfunktion $d_\sigma f$ mit $\pi^+ \in D(d_\sigma f)$ und $d_\sigma f(\pi^+) \leqslant d_\sigma \gamma$. Die Behauptung folgt aus der I. V. durch die π^+-Regel bezüglich der Herleitungsfunktion $d_\sigma f$.

4.2. Sei $\sigma \leq \pi$. Nach der π^+-Regel hat man eine Formel $\forall X \mathcal{F}[X]$ der Stufe π mit

(1) $$\mathrm{SB}_0' \left|\frac{f(0)}{0}\right. \forall X \mathcal{F}[X] \vee F$$

In diesem Fall ist $\forall X \mathcal{F}[X] \vee F$ eine Π_2^1-Formel der Stufe $\pi < I$ und $f(0) < I$. Aus (1) folgt daher nach der I. V.

(2) $$\mathrm{SB}_0' \left|\frac{d_\pi f(0)}{0}\right. \forall X \mathcal{F}[X] \vee F$$

$\forall X \mathcal{F}[X] \vee F$ ist eine Π_2^1-Formel $\mathcal{P}[\forall X \mathcal{F}[X]]$ der Stufe π mit $\mathcal{P}[F] \left|\frac{S}{}\right. F$, und es ist $d_\pi f(0) < \pi^+$. Aus (2) folgt daher nach der π^+-Regel und dem Strukturschlußlemma

(3) $$\mathrm{SB}_0' \left|\frac{f(d_\pi f(0))}{0}\right. F$$

Nach [1] Lemma 10.9 hat man $f(d_\pi f(0)) \lessdot f(\pi^+) \leqslant \gamma$. Die Behauptung folgt daher aus (3) nach der I. V.

Definitionen.

1. Die *Null-Interpretation* einer schwachen Formel F des Systems SB sei die Formel F^0 des Systems SB′, die aus F dadurch entsteht, daß jede darin auftretende freie Zahlenvariable durch die Ziffer 0 und jede darin auftretende freie Prädikatenvariable U durch U^0 ersetzt wird.

2. Die *Stufe* einer schwachen Formel des Systems SB sei die Stufe ihrer Null-Interpretation.

Theorem. (*Abgrenzungstheorem* für SB) Für jede im formalen System SB herleitbare schwache Formel F der Stufe 0 gibt es eine Ordinalzahl $\alpha < \psi 0 I$, so daß $\mathrm{SB}_0' \left|\frac{\alpha}{0}\right. F^0$ für die Nullinterpretation F^0 von F gilt.

Beweis. Nach dem Interpretationslemma 3.11 gibt es natürliche Zahlen k, m, n mit

$$\mathrm{SB}_k' \left|\frac{I \cdot (\omega + n)}{m}\right. F^0$$

Wir können $k > 0$ annehmen. Für $\gamma := \omega^{I \# \omega_{k-1}(I \cdot (\omega + n))}$ folgt dann nach Lemma 4.3 und Corollar 4.5

$$\mathrm{SB}_0' \left|\frac{\gamma}{m}\right. F^0$$

Nach [1] § 5 ist $\mathrm{d}\gamma = \Psi(\omega^\gamma)$. Nach Lemma 4.6 folgt

$$\mathrm{SB}_0' \left|\frac{\beta}{m}\right. F^0$$

Für $\beta := \Psi(\omega^\gamma)$. Da β eine ε-Zahl ist, folgt nach Lemma 4.9

$$\mathrm{SB}_0' \left|\frac{\beta}{0}\right. F^0$$

Nach [1] § 5 bis § 8 ist $d_0\beta = \psi 0 \beta$. Nach Lemma 4.10 folgt daher

$$\mathrm{SB}_0' \left|\frac{\alpha}{0}\right. F^0$$

für $\alpha := \psi 0 \beta < \psi 0 I$.

Anmerkung. Mit dem vorstehenden Theorem erweist sich $\psi 0 (\Psi \varepsilon_{I+1})$ als eine obere Schranke für die beweistheoretische Ordinalzahl von SB, wobei ε_{I+1} die kleinste ε-Zahl $> I$ ist. Diese Ordinalzahl ε_{I+1} ist die kleinste Ordinalzahl, die größer als jede Ordinalzahl aus $T(I)$ ist. Die Ordinalzahl $\Psi\,\varepsilon_{I+1}$ ist zwar nicht in unserem Bezeichnungssystem $T(I)$ vertreten, aber $\psi 0 (\Psi\,\varepsilon_{I+1})$ ist gleich der Ordinalzahl $\psi 0 I \in T(I)$.

Literatur

[1] Buchholz W. und Schütte K.: Ein Ordinalzahlensystem für die beweistheoretische Abgrenzung der Π^1_2-Separation und Bar-Induktion. Sitzungsberichte d. Bayer. Akad. d. Wiss. Math.-Nat. Kl. 1983, 99–132.

[2] Jäger G. und Pohlers W.: Eine beweistheoretische Untersuchung von $(\Delta^1_2\text{-}CA) + (BI)$ und verwandter Systeme. Sitzungsberichte d. Bayer. Akad. d. Wiss. Math.-Nat. Kl. 1982, 1–28.

[3] Schütte K.: Proof Theory, Springer Berlin-Heidelberg-New York 1977.