BAYERISCHE AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE

SITZUNGSBERICHTE

JAHRGANG

1983

MÜNCHEN 1984

VERLAG DER BAYERISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung München

Über die simultane Approximation zweier meromorpher Funktionen

Von **Gerald Schmieder**

Vorgelegt von Karl Stein am 21. Oktober 1983

1. Einleitung

Simultane Approximation zweier meromorpher Funktionen in der komplexen Ebene gestattet das Fusionslemma von Alice Roth [8]. Es sagt sinngemäß folgendes aus: Sind K_1, K_2 kompakte und disjunkte Teile von $\boldsymbol{C}$ und m_1, m_2 auf $\boldsymbol{C}$ meromorph erklärte Funktionen, die auf einer kompakten Menge K wertemäßig dicht beieinander liegen, so läßt sich eine dritte meromorphe Funktion finden, die auf $K_1 \cup K$ dicht bei m_1 und auf $K_2 \cup K$ dicht bei m_2 liegt; wie dicht, hängt (erstaunlicherweise) nicht von den Funktionen m_1, m_2 oder von K, sondern allein von K_1, K_2 und dem Maximum von $|m_1 - m_2|$ auf K ab.

Dieser Sachverhalt hat in der komplexen Approximationstheorie eine zentrale Position eingenommen (s. [2]).

P. M. Gauthier zeigte auf, daß der Beweis von A. Roth auch auf nicht kompakte Riemannsche Flächen übertragen werden kann ([4], S. 143ff.).

In dieser Arbeit soll ein Beweis für eine stärkere Version des Fusionslemmas auf Riemannschen Flächen gegeben werden. Es erweist sich, daß man dazu sogar mit schwächeren Voraussetzungen als in [4] auskommt.

Grundlage aber bleibt die Beweisidee von A. Roth für den ebenen Fall.

Der Frage, wie gut die durch das Fusionslemma gelieferte Funktion m auf K_1 die Funktion m_1 bzw. auf K_2 die Funktion m_2 tatsächlich approximiert (oder approximieren kann), wurde bisher nicht nachgegangen. Eine exemplarische (und für den ebenen Fall charakteristische) Betrachtung wird darüber im 4. Abschnitt durchgeführt.

In der Tat wird oftmals, wenn auf K etwa $|m_1 - m_2| < \alpha$ gilt, die fusionierende Funktion m auf K_j die Ungleichungen $|m_j - m| < (1 + \delta)\alpha$ erfüllen ($j = 1,2$) mit einem δ, das sehr dicht an 0 liegen kann; im ebenen Fall nimmt $|m_2 - m|$ auf K_2 für große $|z|$ beliebig kleine Werte an. In den bisherigen Darstellungen wird stets die gleichmäßige Abschätzung $|m_j - m| < a\alpha$ auf $K_j \cup K$ mit $a > 2$ hergeleitet.

Eine weitere Frage in diesem Zusammenhang ist, ob man die Voraussetzung $K_1 \cap K_2 = \emptyset$ fallenlassen kann, statt dessen fordert, daß m_1 und m_2 auf $K_1 \cap K_2$ dicht beieinander liegen und dafür auf K verzichtet. Dies ist im allgemeinen nicht möglich, sogar dann nicht, wenn K_1, K_2 Rechtecke sind, wie *D. Gaier* [3] gezeigt hat. Daraus läßt sich unschwer ersehen, daß zu den Zahlen $a = a(K_1, K_2)$ mit obiger Eigenschaft keine, für alle disjunkten K_1, K_2 gültige, gemeinsame Schranke existieren kann.

2. Vorbereitungen

Für eine abgeschlossene Teilmenge T einer Riemannschen Fläche R bezeichne $M(T)$ bzw. $H(T)$ die Menge der auf je einer Umgebung von T meromorphen bzw. holomorphen Funktionen. $\bar{M}(T)$ sei die Klasse derjenigen Funktionen $f\colon T \to \mathbf{C}$, zu denen es eine Folge $f_n \in M(R)$ gibt derart, daß alle f_n in T dieselbe Polstellenmenge P_f besitzen, und $|f_n - f|$ auf $T - P_f$ gleichmäßig gegen 0 konvergiert.

Es sei nun eine nicht kompakte Riemannsche Fläche R gegeben. Nach Behnke und Stein [1] existiert auf R ein Cauchy-Kern ω; ein solcher sei fest gewählt.

Hilfssatz (Pompeiu-Formel): Ist $\sigma\colon R \to \mathbf{C}$ eine C^1-Funktion mit kompaktem Träger, so gilt $\sigma(Q) = \frac{1}{2\pi i} \iint\limits_R \omega(P, Q) \wedge \bar{\partial}\sigma$ für alle $Q \in R$, wobei $\bar{\partial}\sigma$ die in lokalen Parametern durch $\frac{\partial\sigma}{\partial\bar{\xi}}$ gegebene 1-Form und $\wedge$ das äußere Produkt bezeichnet.

Dies folgt aus einem allgemeineren Sachverhalt, den S. Scheinberg ([9], Proposition 7.1) für Riemannsche Flächen gezeigt hat.

3. Formulierung und Beweis des Fusionslemmas

Fusionslemma: Es seien K_1, K kompakte Teile und K_2 eine abgeschlossene Teilmenge der nicht kompakten Riemannschen Fläche R mit $K_1 \cap K_2 = \emptyset$, und es gelte $M(K_1 \cup K_2 \cup K) \subset \bar{M}(K_1 \cup K_2 \cup K)$. Dann existiert eine stetige Funktion $C\colon R \to \mathbf{R}_{>0}$ so, daß für jedes Paar $m_1, m_2 \in M(R)$ mit

$\|m_1 - m_2\|_K < \varepsilon$ gilt: Es gibt eine Funktion $m \in M(R)$, die den Ungleichungen $|m(P) - m_j(P)| < C(P) \cdot \varepsilon$ $(P \in K_j \cup K, j = 1,2)$ genügt.

Die Funktion C hängt nur von K_1 und K_2 ab.

Bemerkung 1: Ist auch K_2 kompakt, so gilt stets $M(K_1 \cup K_2 \cup K) \subset \bar{M}(K_1 \cup K_2 \cup K)$ nach [1], Satz 13; die dort geforderte Holomorphie auf einer Umgebung von $K_1 \cup K_2 \cup K$ läßt sich umgehen, indem man zunächst eine Funktion mit passenden Polstellen einschließlich Hauptteilen subtrahiert und nach der Approximation wieder hinzuaddiert. Ersetzt man bei kompaktem K_2 die Funktion $C(P)$ durch die Zahl $c = \|C\|_{K_1 \cup K_2 \cup K}$, so erhält man die bekannte Form des Fusionslemmas (vgl. [2], [4], [8]).

Bemerkung 2: $M(X) \subset \bar{M}(X)$ gilt für jede abgeschlossene Menge $X \subset \mathbf{C}$; dies folgt aus dem Approximationssatz von Roth (s. [2], S. 120) unter Beachtung der Bemerkung 1.

Zum Beweis des Fusionslemmas wähle man auf R stückweise glatt berandete offene Umgebungen U_1, U_2 von K_1, K_2 mit $U_1 \cap U_2 = \emptyset$, und außerdem sei U_2 so groß gewählt, daß $R - U_2$ kompakt ist. Weiter sei $\mathfrak{E} := R - (U_1 \cup U_2)$ und $\varkappa : R \to [0, 1]$ eine C^1-Funktion mit $\varkappa | U_1 = 1$, $\varkappa | U_2 = 0$ (s. z. B. [7], S. 66, Cor. 2.2.15). Für R sei ein Cauchy-Kern ω gewählt ([1], Satz 12). Die Funktion

$$(1) \qquad B(Q) := \frac{1}{2\pi} \iint_{\mathfrak{E}} |\omega(P, Q) \wedge \bar{\partial}\varkappa(P)|$$

ist auf R erklärt und stetig, wie die Umschreibung auf lokale Parameter ζ, z und Übergang zu Polarkoordinaten $\zeta - z = \varrho e^{it}$ zeigt.

Nun sei $q := m_1 - m_2$ gesetzt. Nach Voraussetzung gibt es eine Umgebung U_3 von K mit $\|q\|_{\bar{U}_3} < \varepsilon$. Die Funktion q_1 wird nun wie folgt erklärt: auf $U_1 \cup U_2 \cup U_3$ sei $q_1 = q$, und diese sei (bzgl. der Relativtopologie von $\mathfrak{E}$) auf $\mathfrak{E} - U_3$ stetig fortgesetzt so, daß gilt $\|q_1\|_{\mathfrak{E}} < \varepsilon$ (q_1 muß keine auf R stetige Funktion sein). Die Möglichkeit dazu gibt der Tietzesche Fortsetzungssatz (s. z. B. [6], S. 242).

Durch

$$g(Q) := -\frac{1}{2\pi i} \iint_{\mathfrak{E}} q_1(P)\, \omega(P, Q) \wedge \bar{\partial}\varkappa(P)$$

wird eine Funktion auf R vermittelt, die auf $R - \mathfrak{E}$ holomorph ist, wie der Übergang zu lokalen Parametern zeigt.

Die Funktion $f := \varkappa q_1 + g$ ist nach Wahl von $\varkappa$ auf U_2 holomorph und auf U_1 meromorph mit denselben Polstellen wie q. Aus der Pompeiu-Formel ergibt sich

$$f(Q) = \frac{1}{2\pi i} \iint_{\mathfrak{E}} (q_1(Q) - q_1(P))\, \omega(P, Q) \wedge \bar{\partial}\varkappa(P)$$

für alle $Q \in \boldsymbol{R}$ mit $q_1(Q) \neq \infty$.

Aus den Eigenschaften des Cauchy-Kerns (s. [1]) folgt daraus die Holomorphie von f auf U_3. f ist also meromorph auf $U_1 \cup U_2 \cup U_3$.

Nun sei $X := K_1 \cup K_2 \cup K$ und $h \in H(X)$ auf X beschränkt (h darf konstant sein). Wegen der Voraussetzung $M(X) \subset \overline{M}(X)$ existiert eine Funktion $m_3 \in M(R)$ mit

$$(2) \qquad |m_3 - f| \leq \varepsilon |h| \text{ auf } X.$$

Wegen $|q_1| < \varepsilon$ auf $\mathfrak{E}$ gilt $|g(Q)| < \varepsilon \cdot B(Q)$ für alle $Q \in R$.

Mit $m := m_2 + m_3$ ergeben sich die folgenden Abschätzungen:

Auf K_1 gilt:

$$\begin{aligned} |m - m_1| &\leq |f - (m_1 - m_2)| + |m_3 - f| = |f - q| + |m_3 - f| \\ &\leq |\varkappa - 1|\,|q| + |g| + |m_3 - f| < \varepsilon \cdot B + \varepsilon \cdot |h| = (B + |h|)\,\varepsilon. \end{aligned}$$

Auf K_2 gilt:

$$\begin{aligned} |m - m_2| &\leq |m_3 - f| + |f| \leq |m_3 - f| + |\varkappa|\,|q| + |g| \\ &< \varepsilon \cdot |h| + \varepsilon \cdot B = (B + |h|) \cdot \varepsilon. \end{aligned}$$

Auf K ergibt sich unter Beachtung von $0 \leq \varkappa \leq 1$:

$$|m - m_j| \leq |q| + |g| + |m_3 - f| < \varepsilon + \varepsilon \cdot B + \varepsilon \cdot |h| \quad \text{für } j = 1, 2.$$

Es sei nun $C: R \to \boldsymbol{R}_{>0}$ irgendeine stetige Funktion mit

$$(3) \qquad \begin{aligned} &C(P) > B(P) + |h(P)| \quad \text{für } P \in K_1 \cup K_2 \\ &C(P) > B(P) + 1 + |h(P)| \quad \text{für } P \in K - (K_1 \cup K_2). \end{aligned}$$

Diese erfüllt die Behauptung des Fusionslemmas.

Ist $Y(P, Q)$ eine auf $R \times R$ meromorphe Funktion und stellt $\Omega = Y(P, Q)\, dP$ mit Ausnahme einer Menge der Form

$$\mathfrak{P} = \bigcup_{j=1}^{M} \{P_j\} \times R \cup \bigcup_{i=1}^{L} R \times \{Q_i\},$$

mit endlich vielen Punkten $P_1, \ldots, P_M, Q_1, \ldots, Q_L \in R$, einen Cauchy-Kern dar, so werde Ω als Pseudo-Cauchy-Kern bezeichnet.

Bemerkung 3: Ist Ω ein Pseudo-Cauchy-Kern mit der Ausnahmemenge $\mathfrak{P}$ wie oben und $P_1, \ldots, P_M, Q_1, \ldots, Q_L \notin K_1 \cup K_2 \cup K$, so gilt der obige Beweis auch mit Ω an Stelle ω; die Funktion f kann dann zusätzliche Polstellen haben, diese aber nur außerhalb $K_1 \cup K_2 \cup K$. Da Ω sich auf die Funktion $C(P)$ auswirkt, kann eine solche Wahl vorteilhaft sein.

4. Das Newtonsche Potential eines Kreisrings

Es soll nun gezeigt werden, daß die Funktion $C(P)$ im Fusionslemma auf K_1, K_2 nahe 1 und kleiner sein kann, speziell dann, wenn $R = \boldsymbol{C}$ ist und $\mathfrak{E} = \boldsymbol{C} - (U_1 \cup U_2)$ als Kreisring gewählt werden kann.

Das Newtonsche (Flächen-)Potential der Kreisscheibe $|\zeta| \leq r$ ist die Funktion

$$F_r(z) = F(r, z) = \iint\limits_{|\zeta| \leq r} \frac{1}{|\zeta - z|}\, d\xi\, d\eta \qquad (\zeta = \xi + i\eta).$$

Unter Verwendung der üblichen Setzungen

$$K(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - k^2 \sin^2 t)^{-\frac{1}{2}}\, dt, \quad E(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - k^2 \sin^2 t)^{\frac{1}{2}}\, dt$$

erhält man durch eine elementare Rechnung unter Benutzung von [5] (223,5c)

$$(4) \qquad F(r, z) = \begin{cases} 4rE\left(\frac{|z|}{r}\right) & \text{für } |z| \leq r \\ 4|z|\left(E\left(\frac{r}{|z|}\right) - \left(1 - \frac{r^2}{|z|^2}\right) K\left(\frac{r}{|z|}\right)\right) & \text{für } |z| > r. \end{cases}$$

Nun sei $U_1 = \{|\zeta| < r\}$, $U_2 = \{|\zeta| > r + \Delta r\}$, so daß $\mathfrak{E} = \{r \leq |\zeta| \leq r + \Delta r\}$ ist. Für ω sei der übliche Cauchy-Kern gewählt.

Zu jedem $\alpha > 0$ existiert eine C^1-Funktion $\sigma: \boldsymbol{R}_{>0} \to [0, 1]$ mit mit $\sigma|[0, r] = 1$, $\sigma|[r + \Delta r, \infty[= 0$ und $|\sigma'| \leq \frac{r}{\Delta r} + \alpha$ auf $\boldsymbol{R}_{>0}$. $\varkappa(\zeta) := \sigma(|\zeta|)$ besitzt die im Beweis des Fusionslemmas verlangten Eigenschaften und man errechnet für $B(z)$ (s. (1)):

$$(5) \qquad B(z) \leq \frac{1}{2\pi}\left(\frac{1}{\triangle r} + \alpha\right)(F(r + \Delta r, z) - F(r, z)) \quad (z \in \mathbf{C}).$$

Für $B(r, \Delta r, z) := \frac{1}{2\pi \triangle r}(F(r + \Delta r, z) - F(r, z))$ läßt sich die Abschätzung $B(r, \Delta r, z) \leq \frac{r}{\triangle r} + 1$ herleiten – für $|z| \leq r + \Delta r$ folgt dies aus (4), und sonst elementargeometrisch nach Umschreibung von F mittels Polarkoordinaten.

Die Zahl $\alpha > 0$ war beliebig gewählt; aus dem Fusionslemma in Verbindung mit Bemerkung 2 ergibt sich damit die

Folgerung: Ist K_1 ein kompakter Teil des Kreises $|\zeta| < r$, K_2 ein abgeschlossener Teil von $|\zeta| > r + \Delta r$ $(r, \Delta r > 0)$, $\delta > 0$ und K eine kompakte Menge, dann gilt:

Sind $m_1, m_2 \in M(\mathbf{C})$ mit $\|m_1 - m_2\|_K \leq \varepsilon$, so gibt es eine Funktion $m \in M(\mathbf{C})$ mit

$$\|m - m_j\|_{K_j} \leq \left(\frac{r}{\triangle r} + 1 + \delta\right)\varepsilon$$

$$\|m - m_j\|_K \leq \left(\frac{r}{\triangle r} + 2 + \delta\right)\varepsilon \qquad (j = 1, 2).$$

Die Abbildung zeigt für verschiedene Wahlen von r, Δr die Funktion $B(r, \Delta r, |z|)$ unter Benutzung von (4). Es ist zu ersehen, daß eine feinere Abschätzung der elliptischen Integrale die vorstehenden Ungleichungen nicht entscheidend verbessern kann, da auf K_j, K gleichmäßig abgeschätzt wird. Außerdem ist zu ersehen, wie die Funktion $C(z)$ nach (3) gewählt werden kann.

Für $n = 1$ sind die Bereiche angedeutet, in denen K_1 bzw. K_2 liegen (unter Beachtung der Rotationssymmetrie zur B-Achse).

Literatur

[1] H. Behnke und K. Stein: Entwicklung analytischer Funktionen auf Riemannschen Flächen. Math. Ann. 120, 430–461 (1948).

[2*] D. Gaier: Vorlesungen über Approximation im Komplexen. Birkhäuser, Basel-Boston-Stuttgart 1980.

[3] D. Gaier: Remarks about Alice Roth's Fusion Lemma. J. Approx. Theory 37, 246–250 (1983).

[4] P. M. Gauthier: Meromorphic uniform approximation on closed subsets of open Riemann surfaces. In: Approximation Theory and Functional Analysis (Ed. J. B. Prolla), North-Holland Publ. Comp., 139–158 (1979).

[5*] W. Gröbner und N. Hofreiter: Integraltafeln II. Springer, Wien-Innsbruck 1958 (2. Aufl.).

[6*] J. L. Kelley: General Topology. Van Nostrand, Princeton-New Jersey 1955.

[7*] R. Narasimhan: Analysis on real and complex manifolds. North-Holland Publ. Comp., Amsterdam 1968.

[8] A. Roth: Uniform and tangential approximations by meromorphic functions on closed sets. Can. J. Math. 28, 104–111 (1976).

[9] S. Scheinberg: Uniform approximation by functions analytic on a Riemann surface. Ann. of Math. 108, 257–298 (1978).